No. of Printed Pages—7

762 (S MAP3A)

[20-HRGPNW–D3S(N)21A]

BA 3rd Semester (New) Exam., 2020 (W)

MATHEMATICS

[GMA S3–01]

(Differential Calculus)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. *(a)* Answer the following questions : 1×8=8

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ লিখক :

(i) Write down the domain and range of the following function :

তলৰ ফলনটোৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰটো লিখক :

$$f(x) = \frac{|x|}{x},\ x \in \mathbb{R}$$

(ii) Is the following function continuous at $x = 0$?

তলৰ ফলনটো $x = 0$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হয়নে ?

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1\ , & x = 0 \end{cases}$$

(iii) Evaluate :

মান নিৰ্ণয় কৰক :

$$\frac{d}{dx}\cos^2 x$$

(iv) Evaluate :

মান নিৰ্ণয় কৰক :

$$\frac{d}{dx}\log\sin x$$

(v) Find $\frac{dy}{dx}$, if $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$.

$x = a\cos\theta$ আৰু $y = a\sin\theta$ হ'লে, $\frac{dy}{dx}$ নিৰ্ণয় কৰক।

(vi) If $y = e^{ax}$, then what is the value of y_n?

$y = e^{ax}$ হ'লে y_nৰ মান কি হ'ব?

(vii) Find the rate of change of the volume V of a sphere of radius r with respect to the change in the radius.

ব্যাসাৰ্ধৰ পৰিৱৰ্তন সাপেক্ষে r ব্যাসাৰ্ধৰ এটা গোলকৰ আয়তন V-ৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰ নিৰ্ণয় কৰক।

(viii) Is Rolle's theorem appicable to the following function in the interval [2, 3]?

[2, 3] অন্তৰালত নিম্ন প্ৰদত্ত ফলনটোৰ ক্ষেত্ৰত ৰ'লৰ উপপাদ্যটো সিদ্ধ হয়নে?

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$$

(b) Choose the correct answer : 1×4=4

শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিৱাওক :

(i) The value of $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ is

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ৰ মান হ'ল

(1) -1

(2) 0

(3) 1

(4) 2

(Continued)

(ii) $\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}$ is equal to

$\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x}$ৰ মান হ'ল

(1) 0

(2) 1

(3) $\frac{1}{e}$

(4) e

(iii) The function $f(x) = x(5-x)$ has an extremum at the point

$f(x) = x(5-x)$ ফলনটোৰ চৰম মান থকা বিন্দুটো হ'ল

(1) $\frac{2}{5}$

(2) $\frac{5}{2}$

(3) $\frac{1}{5}$

(4) 5

(iv) The function $f(x) = \frac{x}{2} + 1,\ x \in R$ is

$f(x) = \frac{x}{2} + 1,\ x \in R$ ফলনটো হ'ল

(1) one-one, not onto
একৈকী, কিন্তু আচ্ছাদক নহয়

(2) onto, but not one-one
আচ্ছাদক, কিন্তু একৈকী নহয়

(3) Neither one-one nor onto
একৈকী নহয় আৰু আচ্ছাদকো নহয়

(4) a bijective function
এটা দ্বিমুখী ফলন

(c) Fill in the blanks : 1×4=4

খালী ঠাইঁ পূৰ কৰক :

(i) A function $f(x)$ is an even function if _____.

এটা ফলন $f(x)$ অ'ক যুগ্ম ফলন বোলা হয় যদিহে _____.

(ii) If $f(x) = \sin^2 x$, then $f'(\pi/2)$ is equal to _____.

$f(x) = \sin^2 x$ হ'লে, $f'(\pi/2)$-ৰ মান হ'ব _____.

(iii) The function $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ has a minimum value equal to _____.

$f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ ফলনটোৰ লঘিষ্ঠ মান হ'ল _____.

(iv) If $u = x^2$, $v = y^2$, then the value of $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ is _____.

$u = x^2$, $v = y^2$ হ'লে, $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$-ৰ মান হ'ব _____.

2. Answer any *five* from the following questions : 2×5=10

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ পৰা যি কোনো **পাঁচটাৰ** উত্তৰ লিখক :

(a) Evaluate :

মান নিৰ্ণয় কৰক :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^{-1} x}{x}$$

(b) Using definition of derivative, evaluate $f'(2)$ if $f(x) = x^2 - 3x + 1$.

$f(x) = x^2 - 3x + 1$ হ'লে অৱকলজৰ সংজ্ঞা ব্যৱহাৰ কৰি $f'(2)$ নিৰ্ণয় কৰক।

(c) Evaluate :

মান নিৰ্ণয় কৰক :

$$\frac{d}{dx}(\tan x - e^{2x} + x)$$

(d) If $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$, show that $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\cos x}$.

$y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ হ'লে, দেখুৱাওক যে $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\cos x}$.

(e) If $x^n + y^n = a^n$, find $\frac{dy}{dx}$.

$x^n + y^n = a^n$ হ'লে, $\frac{dy}{dx}$ নিৰ্ণয় কৰক।

(f) If $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$, then find $f_x(2, 1)$ and $f_y(1, 2)$.

$f(x, y) = x^3 + y^3 + 3xy$ হ'লে $f_x(2, 1)$ আৰু $f_y(1, 2)$ নিৰ্ণয় কৰক।

3. Answer any *six* from the following questions : 4×6=24

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ পৰা যি কোনো **ছয়টাৰ** উত্তৰ লিখক :

(a) Show that the function $f : R - \{1\} \to R - \{1\}$ given by $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ is a bijective function.

দেখুৱাওক যে নিম্ন প্ৰদত্ত ফলনটো দ্বিমুখী ফলন :

$$f : R - \{1\} \to R - \{1\},\ f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

(b) Find a and b if the following function is a continuous function :

তলৰ ফলনটো এটা অবিচ্ছিন্ন ফলন হ'লে a আৰু b নিৰ্ণয় কৰক :

$$f(x) = \begin{cases} 1 , & x \le 2 \\ ax + b, & 2 < x < 4 \\ 7 , & x \ge 4 \end{cases}$$

(c) Evaluate :

মান নিৰ্ণয় কৰক :

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \log (1 + x) \right]$$

(d) The sum of two numbers is 20 and their product is maximum. Find the numbers.

দুটা সংখ্যাৰ যোগফল 20 আৰু পূৰণফল সৰ্বোচ্চ হ'লে, সংখ্যা দুটা নিৰ্ণয় কৰক।

(e) Verify Lagrange's mean value theorem for the following function in the given interval :

অধোলিখিত ফলনটোৰ বাবে নিৰ্দিষ্ট অন্তৰালত লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্যমান উপপাদ্যটো সত্যাপন কৰক :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3;\ x \in [0, 1]$$

(f) Expand the function e^{xy} about the point (1, 1).

e^{xy} ফলনটো (1, 1) বিন্দু সাপেক্ষে সম্প্ৰসাৰণ কৰক।

(g) If $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ and $z = z$, then find $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)}$.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ আৰু $z = z$ হ'লে, $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)}$ নিৰ্ণয় কৰক।

4. Answer any *five* from the following questions : 6×5=30

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ পৰা যি কোনো **পাঁচটাৰ** উত্তৰ লিখক :

(a) Evaluate :

মান নিৰ্ণয় কৰক :

(i) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$

(ii) $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 2x - 8}$

(b) Prove that

প্ৰমাণ কৰক যে

$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a)$$

(c) If $y = \cos(\log x)$, then show that $x^2 y_2 + x y_1 + y = 0$. Hence deduce that

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1) x y_{n+1} + (n^2+1) y_n = 0$$

$y = \cos(\log x)$ হ'লে, দেখুৱাওক যে $x^2 y_2 + x y_1 + y = 0$. ইয়াৰ সহায়ত দেখুৱাওক যে

$$x^2 y_{n+2} + (2n+1) x y_{n+1} + (n^2+1) y_n = 0$$

(d) If $z = f(x, y)$ be a homogeneous function of x, y of degree n, then prove that

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = nz$$

যদি $z = f(x, y)$ এটা x, y-ৰ n মাত্ৰাৰ সুষম ফলন হয়, তেনেহ'লে প্ৰমাণ কৰক যে

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = nz$$

(e) Examine for maximum and minimum values of the function

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান আলোচনা কৰক।

(f) Find the minimum distance to the cone $z^2 = x^2 + y^2$ from the point (1, 2, 0).

(1, 2, 0) বিন্দুটোৰ পৰা $z^2 = x^2 + y^2$ শঙ্কুটোলৈ সৰ্বনিম্ন দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰক।

★ ★ ★