No. of Printed Pages—5

463 (MAP 03)

[20–HBGPOW–D3S(O)21A]

BA 3rd Semester (Old) Exam., 2020 (W)

MATHEMATICS

[BMAP–02]

(Differential Calculus)

Full Marks : 80

Time : 3 hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions

1. Answer the following questions : 1×8=8

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ লিখক :

(a) Write down the domain of the following function :

তলৰ ফলনটোৰ আদিক্ষেত্ৰটো লিখক :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$$

(b) Write down the value of

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ অ'ৰ মানটো লিখক।

(c) Write down the value of $\frac{d}{dx} \cos^2 x$.

$\frac{d}{dx} \cos^2 x$ অ'ৰ মান লিখক।

(d) If $f(x) = \sin x - \cos x + e^x$, find $f'(\pi / 2)$.

$f(x) = \sin x - \cos x + e^x$ হ'লে, $f'(\pi / 2)$ ৰ মান লিখক।

(e) If $x = a\sin\theta$ and $y = b\cos\theta$, what is the value of $\frac{dy}{dx}$?

$x = a\sin\theta$ আৰু $y = b\cos\theta$ হ'লে, $\frac{dy}{dx}$ অ'ৰ মান কি হ'ব?

(f) If $y = x^n$, then what is the value of y_n?

$y = x^n$ হ'লে, y_n অ'ৰ মান কি হ'ব?

(g) For what values of x, the following function is monotonic increasing?

x অ'ৰ কোনবোৰ মানৰ বাবে তলৰ ফলনটো একদিষ্ট বৰ্ধমান হ'ব?

$$f(x) = 2x^2 - x - 2$$

(h) What is the rate of change of the volume V of a sphere of radius r with respect to change in its radius?

ব্যাসাৰ্ধৰ পৰিৱৰ্তন সাপেক্ষে r ব্যাসাৰ্ধৰ গোলক এটাৰ আয়তন Vৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰ কি হ'ব?

2. Answer the following questions : 2×8=16

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ লিখক :

(a) Show that the following function is a bijective function :

দেখুৱাওক যে তলৰ ফলনটো এটা দ্বিমুখী ফলন :

$$f : R \to R,\ f(x) = 3x - 4$$

(b) Find $\frac{dy}{dx}$:

$\frac{dy}{dx}$ নিৰ্ণয় কৰক :

$$y = \sin^2 x - e^x \cos x + x\log x$$

(c) Find the value of $\frac{d}{dx}x^x$.

$\frac{d}{dx}x^x$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰক।

(d) If $y = e^x \log x$, show that $xy_1 = xy + e^x$.

$y = e^x \log x$ হ'লে, দেখুৱাওক যে $xy_1 = xy + e^x$.

(e) Find the maximum or minimum value of the following function :
নিম্ন প্রদত্ত ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কৰক :

$$f(x) = 3x^2 - 12x + 4$$

(f) Find the equation of the tangent to the curve $x^2 - 4y^2 = 9$ at the point $(5, -2)$.
$x^2 - 4y^2 = 9$ বক্ৰৰ $(5, -2)$ বিন্দুত স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

(g) If $f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2$, then find f_x and f_y.
$f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2$ হ'লে, f_x আৰু f_y নির্ণয় কৰক।

(h) If $u = e^x \sin y$ and $v = e^x \cos y$, find $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$.
$u = e^x \sin y$ আৰু $v = e^x \cos y$ হ'লে, $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ নির্ণয় কৰক।

3. Answer any *five* from the following questions : 4×5=20
তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ যি কোনো **পাঁচটাৰ** উত্তৰ লিখক :

(a) Evaluate :
মান নির্ণয় কৰক :

$$\lim_{x \to 1} \frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{2x^2 + x - 3}$$

(b) Find the point on the curve $y^2 = 8x$ at which the abscissa and the ordinate change at the same rate.
$y^2 = 8x$ বক্ৰৰ যিটো বিন্দুত ভুজ আৰু কোটি একে হাৰত পৰিৱৰ্তিত হয়, সেই বিন্দুটো নির্ণয় কৰক।

(c) Find the radius of curvature of the curve $a^2y = x^3 - a^3$ at the point (x, y).
$a^2y = x^3 - a^3$ বক্ৰৰ (x, y) বিন্দুত বক্ৰতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় কৰক।

(d) State Rolle's theorem and explain its geometrical interpretation with the help of a diagram.

ৰ'লৰ উপপাদ্যটো লিখক আৰু চিত্ৰৰ সহায়ত ইয়াৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা প্ৰদান কৰক।

(e) If $z = f(x+ay)+\phi(x-ay)$, prove that $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$.

$z = f(x+ay)+\phi(x-ay)$ হ'লে, প্ৰমাণ কৰক যে $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$.

(f) If $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ and $z = z$, find $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)}$.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ আৰু $z = z$ হ'লে, $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)}$ নিৰ্ণয় কৰক।

4. Answer any *two* from the following questions : 8×2=16

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ যি কোনো **দুটাৰ** উত্তৰ লিখক :

(a) *(i)* If

$$f(x) = \begin{cases} 5x-4, & 0 < x \le 1 \\ 4x^2-3x, & 1 < x < 2 \\ 3x^2+4, & x \ge 2 \end{cases}$$

then find $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ and $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ provided the limits exist.

যদি

$$f(x) = \begin{cases} 5x-4, & 0 < x \le 1 \\ 4x^2-3x, & 1 < x < 2 \\ 3x^2+4, & x \ge 2 \end{cases}$$

তেনেহ'লে $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ আৰু $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ নিৰ্ণয় কৰক যদিহে সীমা স্থিত হয়।

(ii) Using definition of derivative, find $f'(2)$, if $f(x) = x^2-2x+3$.

$f(x) = x^2-2x+3$ হ'লে, অৱকলজৰ সংজ্ঞা ব্যৱহাৰ কৰি $f'(2)$ উলিয়াওক।

(b) *(i)* Evaluate :

মান নির্ণয় কৰক :

$$\frac{d}{dx}(3\tan x \cdot \log x - x^3 e^x + \tan^2 x + 1)$$

(ii) If $x^y \cdot y^x = 1$, find $\frac{dy}{dx}$.

$x^y \cdot y^x = 1$ হ'লে, $\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কৰক।

(c) If $y = \cos(\log x)$, show that $x^2 y_2 + x y_1 + y = 0$. Hence deduce that $x^2 y_{n+2} + x(2n+1)\, y_{n+1} + (n^2+1) y_n = 0$.

$y = \cos(\log x)$ হ'লে, দেখুৱাওক যে $x^2 y_2 + x y_1 + y = 0$. ইয়াৰ সহায়ত দেখুৱাওক যে $x^2 y_{n+2} + x(2n+1)\, y_{n+1} + (n^2+1) y_n = 0$.

5. Answer any *two* from the following questions : 10×2=20

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ যি কোনো **দুটাৰ** উত্তৰ লিখক :

(a) State and prove Cauchy's mean value theorem.

কছিৰ মাধ্যমান উপপাদ্যটো লিখক আৰু প্ৰমাণ কৰক।

(b) If $z = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$ and $y = r\sin\theta$, then show that

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

যদি $z = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$ আৰু $y = r\sin\theta$ হয়, তেনেহ'লে দেখুৱাওক যে

$$\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$

(c) Using Lagrange's method of undetermined multipliers, find the maximum and the minimum distances from the point (1, 2, 2) to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 36$.

লাগ্ৰাঞ্জৰ অনিৰ্ণীত গুণনীয়ক পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি (1, 2, 2) বিন্দুৰ পৰা $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ গোলকটোলৈ দীৰ্ঘতম আৰু হ্ৰস্বতম দূৰত্ব নির্ণয় কৰক।

★ ★ ★