[24-HKUD1SN-24J (M2)]

BA 1st Semester (NEP) Exam. 2024 (S2)

MATHEMATICS

(*Classical Algebra and Trigonometry*) (Major/Minor)

[UG, MA, S1-01]

Full Marks : 70

Time : 3 hours

The figures in the right-hand margin indicate marks.

1. Answer any *five* from the following questions : $2 \times 5 = 10$
তলৰ যিকোনো *পাঁচটা* প্ৰশ্নৰ উত্তৰ লিখক ঃ

(*a*) If α, β, γ be the roots of $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ find the value of $\sum \frac{1}{\alpha^2\beta^2}$.

যদি $x^3 - px^2 + qx - r = 0$ সমীকৰণটোৰ মূল α, β আৰু γ হয়, তেন্তে $\sum \frac{1}{\alpha^2\beta^2}$ মান নিৰ্ণয় কৰক ।

(*b*) Evaluate the determinant $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 8 & 10 \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 8 & 10 \end{vmatrix}$ ৰ নিশ্চায়কৰ মান নিৰ্ণয় কৰক ।

(*c*) If a matrix has 10 elements what are the possible orders it can have ?
যদি কোনো এটা মৌলকক্ষৰ 10 টা মৌল থাকে, তেন্তে মৌলকক্ষটোৰ সম্ভাব্য ক্রম বোৰ কি হ'ব ?

(*d*) If $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ and $B=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 0 & -2\end{bmatrix}$ Find $A+B$ and $A-B$.

যদি $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ আৰু $B=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 0 & -2\end{bmatrix}$, তেন্তে $A+B$ আৰু $A-B$ উলিয়াওক ।

(*e*) If $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 5\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$, write down the sum and product of the eigenvalues of A.

যদি $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 5\\ 1 & 5 & 1\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$, A ৰ অভিলক্ষণিক মানবোৰৰ যোগফল আৰু পূৰণফল নির্ণয় কৰক ।

(*f*) Simplify :
সৰল কৰক ঃ

$$\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^4}{(\cos\theta-i\sin\theta)^3}$$

2. Answer any *six* from the following questions : $4\times 6=24$
তলৰ যিকোনো *ছয়টা* প্রশ্নৰ উত্তৰ লিখক ঃ

(*a*) If n be a positive integer, greater than 1, prove that $n^n > 1.3.5.....(2n-1)$.
যদি n একঁকে ডাঙৰ ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰক যে $n^n > 1.3.5.....(2n-1)$

(*Continued*)

(*b*) Prove that :
প্ৰমাণ কৰক ঃ

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

(*c*) Solve the equation $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$, whose roots are in geometrical progression.
সমাধান কৰক, $3x^3 - 26x^2 + 52x - 24 = 0$, সমীকৰণটোৰ মূলকেইটা গুণোত্তৰ অনুক্ৰমত আছে ।

(*d*) Find the characteristics equation of the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ and then verify Cayley-Hamilton theorem.

$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ মৌল কক্ষটোৰ অভিলক্ষণিক সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক আৰু কেলি-হেমিল্টন উপপাদ্যটো সত্যাপণ কৰক ।

(*e*) If $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$
$y = \cos\beta + i\sin\beta$
$z = \cos\gamma + i\sin\gamma$

and if $x + y + z = 0$, then prove that $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$.

যদি $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$
$y = \cos\beta + i\sin\beta$
$z = \cos\gamma + i\sin\gamma$

আৰু যদি $x + y + z = 0$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰক যে, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$

(*f*) Find the rank of the matrix :
মৌলকক্ষটোৰ কোটি নির্ণয় কৰক ঃ

$$A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 2 & 6 & 8\\ 3 & 7 & 22\end{bmatrix}$$

(*g*) If n be a positive integer, prove that $\left(\sqrt{3}+i\right)^n+\left(\sqrt{3}-i\right)^n=2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$.

যদি n এটা ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰক যে

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^n+\left(\sqrt{3}-i\right)^n=2^{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{6}\right)$$

3. Answer any *six* from the following questions : $6\times 6=36$
তলৰ যিকোনো *ছয়টা* প্রশ্নৰ উত্তৰ লিখক ঃ

(*a*) Solve :
সমাধান কৰক ঃ

$$x^3-15x^2-33x+847=0$$

(*b*) Find the inverse of the matrix :
মৌলকক্ষৰ বিপৰীত উলিয়াওক ঃ

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

(*c*) Solve by Cramer's rule :
ক্রেমাৰৰ নীতি প্রয়োগ কৰি সমাধান কৰক ঃ

$$x+y+z=3$$
$$2x+3y+4z=9$$
$$x+2y-4z=-1$$

(*Continued*)

(*d*) Prove that :
প্রমাণ কৰক যে ঃ

$$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$$

(*e*) Prove that
প্রমাণ কৰক ঃ

$$\frac{\pi}{8} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{5\cdot 7} + \frac{1}{9\cdot 11} + \ldots\infty$$

(*f*) Define logarithm of a complex number prove that
জটিল সংখ্যাৰ ঘাতাংকৰ সংজ্ঞা লিখক । প্ৰমাণ কৰক যে

$$\log\left(\frac{a+ib}{a-ib}\right) = 2i\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

(*g*) Prove that :
প্রমাণ কৰক যে ঃ

$$\frac{1+\tanh x}{1-\tanh x} = \cosh 2x + \sinh x$$