# অধ্যায় ১ ঃ সম্বন্ধ আৰু ফলন (RELATIONS AND FUNCTIONS)

## অধ্যায় গাঁথনি


১.১ উদ্দেশ্য

১.২ পৰিচয়

১.৩ সম্বন্ধৰ ধাৰণা

  ১.৩.১ একক সম্বন্ধ

  ১.৩.২ বিপৰীত সম্বন্ধ

১.৪ বিভিন্ন প্রকাৰৰ সম্বন্ধ

  ১.৫.১ সমতুল্যতা শ্রেণী

১.৫ সমতুল্যতা সম্বন্ধ

১.৬ ফলনৰ ধাৰণা

  ১.৬.১ একক সম্বন্ধ

  ১.৬.২ ধ্রুৱক সম্বন্ধ

১.৭ বিভিন্ন প্রকাৰৰ ফলন

১.৮ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১.৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১.১০ অধিক জানিবলৈ

১.১১ আৰ্হি প্রশ্ন


## ১.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি অধোলিখিত বিষয়বোৰৰ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব—

- সম্বন্ধৰ ধাৰণা
- বিভিন্ন প্রকাৰৰ সম্বন্ধ
- সমতুল্যতা সম্বন্ধ, সমতুল্যতা শ্রেণী
- ফলনৰ ধাৰণা
- বিভিন্ন প্রকাৰৰ ফলন

## ১.২ পৰিচয়

সংহতি তত্ত্বক (Set Theory) আধুনিক গণিতৰ ভাষা বুলি ক'ব পাৰি। আমি জানো যে সংহতি (set) হ'ল সুসংজ্ঞাৱদ্ধ 'বস্তুৰ' সংগ্রহ (well-defined collection of objects)। আমি সংহতিৰ উপসংহতিৰ কথাও জানো। যদি এটা সংহতি B ৰ প্রতিটো মৌল বা উপাদান

সংহতি A ত থাকে, তেনেহ'লে B ক A ৰ উপসংহতি বুলি কোৱা হয়। প্ৰতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে বুজোৱা হয় $B \subseteq A$.

আমি এইটোৰো জানো যে n টা মৌলবিশিষ্ট এটা সসীম সংহতিৰ (finite set) উপসংহতিৰ সংখ্যা হ'ল $2^n$.

আকৌ A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি হ'লে A ৰ আৰু B কার্টেজীয় পূৰণফল (cartesian product) A x Bৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা হ'ল– $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

(a, b) ক এটা ক্ৰমিত যোৰ (ordered pair) বুলি কোৱা হয়।

ধৰা হ'ল $a \in A$, $c \in A$; $b \in B$, $d \in B$.

$\therefore (a, b) \in A \times B$, $(c, d) \in A \times B$

আমি জানো যে $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$.

আকৌ আমি জানো যে যদি A, B দুটা সসীম সংহতি আৰু n(A)=x, n(B)=y, তেনেহ'লে n(AxB) = n(BxA)=xy

[ইয়াত n(A) য়ে Aৰ মৌলৰ সংখ্যা বুজাইছে।]

যদি A আৰু B সংহতি দুটাৰ এটা অসীম হয়, তেনেহ'লে A x B আৰু B x A অসীম।

এই অধ্যায়ত আমি সম্বন্ধ (relations) আৰু ফলন (functions) সম্বন্ধে অধ্যয়ন কৰিম। সম্বন্ধ আৰু ফলন হ'ল দুটা সংহতিৰ কার্টেজীয় পূৰণফলৰ উপসংহতি।

স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতিক 'N' এৰে, অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিক Z এৰে, পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতিক Q ৰে, বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতিক IR এৰে আৰু জটিল সংখ্যাৰ সংহতিক C ৰে বুজোৱা হ'ব।

## ১.৩ সম্বন্ধৰ ধাৰণা

তলৰ বাক্যবোৰলৈ মন কৰক।

(1) 10 অতকৈ 11 ডাঙৰ।

(2) 7 এৰে 35 বিভাজ্য।

(3) ভাৰতবৰ্ষৰ ৰাজধানী নতুন দিল্লী।

প্ৰতিটো বাক্যত এযোৰ 'বস্তুৰ' মাজত এটা সম্বন্ধ আছে।

সংহতি-তত্ত্বত সম্বন্ধই কি বুজায়, সেয়া এতিয়া চোৱা যাওক।

**সংজ্ঞা ঃ** ধৰা হ'ল A আৰু B দুটা অৰিক্ত সংহতি। A x B ৰ যিকোনো উপসংহতিক A ৰ পৰা B লৈ এটা **সম্বন্ধ** (relation) বুলি কোৱা হয়।

যদি A=B, তেনেহ'লে A x A ৰ যিকোনো উপসংহতিক Aত এটা সম্বন্ধ বুলি কোৱা হয়।

যদি $R \subseteq A \times B$, আৰু $(a, b) \in R$; $a \in A$, $b \in B$, তেনেহ'লে ইয়াক aRbৰেও বুজোৱা হয় আৰু ইয়াক এনেদৰে পঢ়া হয় ঃ b ৰ লগত a ৰ R সম্বন্ধ আছে।

**টোকা ঃ** 1. R অৰ ক্রমিত যোৰবোৰৰ প্রথম উপাদানৰ সংহতিটোক **আদিক্ষেত্র** (domain) আৰু দ্বিতীয় উপাদানৰ সংহতিটোক পৰিসৰ (range) বুলি কোৱা হয়।

2. যদি A, B সসীম সংহতি আৰু n(A)=x, n(B)=y; তেনেহ'লে n(AxB)=xy. গতিকে AxBৰ উপসংহতিৰ সংখ্যা $2^{xy}$. গতিকে Aৰ পৰা B লৈ সম্বন্ধৰ সংখ্যা $2^{xy}$.

**উদাহৰণ ১ ঃ** ধৰা হ'ল A ={1, 2, 3}, B={8, 9}

∴A x B ={(1, 8), (1, 9), (2, 8), (2, 9), (3, 8), (3, 9)}

ধৰা হ'ল R = {(1, 8), (2, 9), (3, 9)}

স্পষ্টত ঃ R⊆ AxB

∴R হ'ল Aৰ পৰা Bলৈ এটা সম্বন্ধ।

আকৌ 1R8, 2R9, 3R9

R অৰ আদিক্ষেত্র = {1, 2, 3}

R অৰ পৰিসৰ = {8, 9}

**উদাহৰণ ২ ঃ** ধৰা হ'ল IR বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল R = {(x, y) : x, y ∈IR, x<y} ⊆IR x IR

∴IR অত R এটা সম্বন্ধ।

৩ 3<5, ∴(3, 5) ∈R অর্থাৎ 3R5

19<27, ∴(19, 27) ∈R অর্থাৎ 19R27

কিন্তু 5>3, ∴(5, 3) ∉ R, অর্থাৎ 5$\not R$3.

**উদাহৰণ ৩ ঃ** ধৰা হ'ল X অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল R = {(x, y) : x, y ∈ X আৰু x+y অযুগ্ম}

আমি জানো যে দুটা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগফল এটা যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।

∴যদি x, y অযুগ্ম হয়, তেনেহ'লে x+y অযুগ্ম হ'ব নোৱাৰে।

∴R =$\phi$⊆X x X

এই ক্ষেত্রত R অক X অত **ৰিক্ত সম্বন্ধ** (empty relation) বুলি কোৱা হয়।

**উদাহৰণ ৪ ঃ** ধৰা হ'ল E যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল R = {(x, y) : x, y ∈ E আৰু x+y যুগ্ম}

আমি জানো যে দুটা যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগফল এটা যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।

∴ যদি x, y যুগ্ম হয়, তেনেহ'লে x+y সদায় যুগ্ম।

∴ R = E x E ∈ E x E

এই ক্ষেত্রত R অক Eঅত **সর্বজনীন সম্বন্ধ** (Universal relation) বুলি কোৱা হয়।

## ১.৩.১ একক সম্বন্ধ

ধৰা হ'ল A অৰিক্ত সংহতি।

$I_A = \{(a, a) : a \in A\} \subseteq A \times A$

$I_A$ ক Aত **একক সম্বন্ধ** (identity relation) বুলি কোৱা হয়।

**উদাহৰণ ৫ ঃ** ধৰা হ'ল $A = \{1, 2, 3, 4\}$

তেনেহ'লে $I_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} \subseteq A \times A$.

স্পষ্টত ঃ A ত $I_A$ একক সম্বন্ধ।

## ১.৩.২ বিপৰীত সম্বন্ধ

A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি। Aৰ পৰা B লৈ R এটা সম্বন্ধ। অর্থাৎ $R \subseteq AxB$। R অৰ বিপৰীত সম্বন্ধক (inverse relation) $R^{-1}$ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা হ'ল এনেধৰণৰ–

$R^{-1}=\{(b, a) : (a, b) \in R\} \subseteq B \times A$

স্পষ্টত ঃ $R^{-1}$ অৰ আদিক্ষেত্র = R অৰ পৰিসৰ

$R^{-1}$ অৰ পৰিসৰ = R অৰ আদিক্ষেত্র

**উদাহৰণ ৬ ঃ** ধৰা হ'ল $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{5, 6\}$

$R = \{(1, 5), (2, 6), (3, 5)\} \subseteq A \times B$

$R^{-1} = \{(5, 1), (6, 2), (5, 3)\} \subseteq B \times A$.



### অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল A, B দুটা সসীম সংহতি আৰু n(A)=4, n(B)=3. A ৰ পৰা B লৈ কিমানটা সম্বন্ধ আছে?

প্রশ্ন নং ২ঃ ধৰা হ'ল A ত সসীম সংহতি আৰু n(A) =5 ত কিমানটা সম্বন্ধ আছে?

প্রশ্ন নং ৩ঃ IN স্বাভাৰিক সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল $R = \{(x, y) : x, y \in IN, x > y\}$.

তলৰ ক্রমিত যোৰবোৰ Rঅত আছেনে নাই পৰীক্ষা কৰক।

(7, 4), (23, 32), (5, 5), (72, 27), (18, 19).

প্রশ্ন নং ৪ঃ E হ'ল যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল $R = \{(x, y) : x, y \in E$ আৰু $x+y$ অযুগ্ম$\}$

E ত R ৰিক্ত সম্বন্ধ হয়নে? যুক্তি যুক্ততা প্রতিপন্ন কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ ধৰা হ'ল $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

A ত একক সম্বন্ধটো লিখক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ ধৰা হ'ল $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{7, 8, 9\}$

ধৰা হ'ল $R = \{(4, 7), (5, 8), (6, 7), (6, 8), (6, 9)\}$

$R^{-1}$টো লিখক।

## ১.৪ বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ সম্বন্ধ

ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি আৰু Aত R এটা সম্বন্ধ, অৰ্থাৎ $R \subseteq A \times A$.

1. R সম্বন্ধটো **প্ৰতিফলনীয়** (reflexive) বুলি কোৱা হয় যদি $(a, a) \in R$, অৰ্থাৎ যদি $aRa, \forall a \in A$.
2. R সম্বন্ধটো **সমমিত (বা প্ৰতিসম)** (symmetric) বুলি কোৱা হয় যদি $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$, অৰ্থাৎ যদি aRb, তেনেহ'লে bRa; $a, b \in A$.
3. R সম্বন্ধটো **প্ৰতিসমমিত** (anti-symmetric) বুলি কোৱা হয় যদি $(a, b) \in R, (b, a) \in R \Rightarrow a = b$, অৰ্থাৎ, যদি aRb, $bRa \Rightarrow a=b$; $a, b \in A$.
4. R সম্বন্ধটো **সংক্ৰামক** (transitive) বুলি কোৱা হয় যদি $(a, b), (b, c) \in R$, তেনেহ'লে $(a, c) \in R$, অৰ্থাৎ যদি aRb, bRc, তেনেহ'লে aRc; $\forall a, b, c \in A$.

**উদাহৰণ ৭ ঃ** ধৰা হ'ল $A = \{1, 2, 3\}$

$R = (1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\}$

R প্ৰতিফলনীয়, সমমিত, প্ৰতিসমমিত আৰু সংক্ৰামক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

**সমাধান ঃ** $(1, 1) \in R, (2, 2) \in R$; কিন্তু $(3, 3) \notin R$.

$\therefore$ R প্ৰতিফলনীয় নহয়।

আকৌ, $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

$\therefore$ R সমমিত।

আকৌ, $(1, 2) \in R, (2, 1) \in R$, কিন্তু $1 \neq 2$

$\therefore$R প্ৰতিসমমিত নহয়।

আকৌ, যদি $(a, b) \in R, (b, c), \in R$, তেনেহ'লে $(a, c) \in R$

$\therefore$R সংক্ৰামক।

**উদাহৰণ ৮ ঃ** Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি, আৰু $R = \{(x, y) : x, y \in Z, x \leq y\}$

R প্ৰতিফলনীয়, সমমিত, প্ৰতিসমমিত আৰু সংক্ৰামক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

**সমাধান ঃ** আমি জানো যে $a \leq a, \forall a \in Z$

অৰ্থাৎ, $(a, a) \in R, \forall a \in Z$

$\therefore$ R প্ৰতিফলনীয়।

আকৌ, যদি $a \leq b, b \leq a$

অৰ্থাৎ, $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

$\therefore$ R সমমিত নহয়।

আকৌ, $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$

অৰ্থাৎ, $(a, b) \in R, (b, a) \in R \Rightarrow a = b$

$\therefore$ R প্ৰতিসমমিত।

আকৌ, $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$

অর্থাৎ $(a, b), (b, c), \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

$\therefore$ R সংক্রামক।

**উদাহৰণ ৯ ঃ** এনে এটা সম্বন্ধৰ উদাহৰণ দিয়ক যিটো সংক্রামক; কিন্তু প্রতিফলনীয় নহয়, সমমিতও নহয়।

**সমাধান ঃ** ধৰা হ'ল $A = \{1, 2\}$

ধৰা হ'ল $R = \{(1, 1), (1, 2)\} \subseteq A \times A$

স্পষ্টত ঃ A ত R এটা সম্বন্ধ।

$(2, 2) \notin R$.

$\therefore$ R প্রতিফলনীয় নহয়।

আকৌ, $(1, 2) \in R$, কিন্তু $(2, 1) \notin R$

$\therefore$ R সমমিত নহয়।

কিন্তু R সংক্রামক।



**অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২**

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল $A = \{1, 2, 3\}$ আৰু সর্বনিম্ন ক্রমিতযোৰ বিশিষ্ট R এটা প্রতিফলনীয় সম্বন্ধ। A ত R সম্বন্ধটো লিখক।

প্রশ্ন নং ২ঃ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ সংহতিটোত এটা সম্বন্ধ লিখক যাতে

(i) সম্বন্ধটো প্রতিসম, কিন্তু প্রতিফলনীয় নহয়, সংক্রামকো নহয়;

(ii) প্রতিফলনীয় আৰু সংক্রামক, কিন্তু সমমিত নহয়;

(iii) প্রতিফলনীয় আৰু সমমিত, কিন্তু সংক্রামক নহয়।

## ১.৫ সমতুল্যতা সম্বন্ধ

ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি আৰু A ত R এটা সম্বন্ধ। R সম্বন্ধটোক সমতুল্যতা সম্বন্ধ (equivalence relation) বুলি কোৱা হয় যদি ই প্রতিফলনীয়, সমমিত আৰু সংক্রামক হয়।

**উদাহৰণ ১০ ঃ** Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি আৰু

$R = \{(x, y) : x, y \in Z$ আৰু $x+y$ যুগ্ম$\}$

Z অত R সম্বন্ধটো সমতুল্যতা সম্বন্ধে হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

**সমাধান ঃ** ধৰা হ'ল $x \in Z$

$\therefore x+x$ যুগ্ম

$\Rightarrow (x, x) \in R, \forall\ x \in Z$

$\therefore$ R প্ৰতিফলনীয়।

$(x, y) \in R \Rightarrow x+y$ যুগ্ম

$\Rightarrow y+x$ যুগ্ম

$\Rightarrow (y, x) \in R.$

$\therefore$ R সমমিত

আকৌ, $(x, y) \in R, (y, z) \in R$

$\Rightarrow x+y$ যুগ্ম, $y+z$ যুগ্ম

$\Rightarrow (x+y)+(y+z)$ যুগ্ম

$\Rightarrow (x+z)+2y$ যুগ্ম

$\Rightarrow x+z$ যুগ্ম

$(x, z) \in R$

$\therefore$ R সংক্ৰামক

$\therefore$ Z অত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

**উদাহৰণ ১১ ঃ** এখন সমতলত থকা সকলো সৰল ৰেখাৰ সংহতি A লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $R = \{(x, y) : x, y \in A$ আৰু $x \perp y\}$

R সম্বন্ধটো প্ৰতিফলনীয়, সমমিত আৰু সংক্ৰামক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

**সমাধান ঃ** এডাল ৰেখা নিজৰ ওপৰত লম্ব হ'ব নোৱাৰে, অৰ্থাৎ $x \not\perp x$

$\therefore (x, x) \notin R$

$\therefore$ R প্ৰতিফলনীয় নহয়।

এডাল ৰেখা x আন এডাল ৰেখা y ৰ ওপৰত লম্ব হ'লে, y ৰেখাডাল x অৰ ওপৰত লম্ব হ'ব,

অৰ্থাৎ $x \perp y \Rightarrow y \perp x$

$\therefore (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$

$\therefore$ R সমমিত।

যদি $x \perp y, y \perp z$, তেনেহ'লে $x \not\perp z$

$\therefore (x, y), (y, z) \in R \not\Rightarrow (x, z) \in R$

যদি x, y ৰ ওপৰত লম্ব; আৰু y, z অৰ ওপৰত লম্ব, তেনেহ'লে x, z অৰ সমান্তৰাল।

$\therefore$ R সংক্ৰামক নহয়।

**উদাহৰণ ১২ ঃ** এখন সমতলত থকা সকলো সৰল ৰেখাৰ সংহতি A লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $R = \{(x, y) : x, y \in A$ আৰু $x \| y\}$

A ত R সম্বন্ধটো সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

**সমাধান ঃ** এডাল ৰেখা নিজেই নিজৰ সমান্তৰাল, অৰ্থাৎ $x \| x \ \forall \ x \in A$

$\therefore (x, x) \in R, \forall x \in R$

$\therefore$ R প্ৰতিফলনীয়।

$x||y \Rightarrow y||x$

$\therefore (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$

$\therefore$ R সমমিত।

$x||y, y||z \Rightarrow x||z$

$\therefore (x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R.$

$\therefore$ R সংক্রামক।

গতিকে, A ত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

**উদাহৰণ ১৩ ঃ** IN স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি। IN x IN অত R সম্বন্ধটো এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল ঃ

(a, b) R (c, d) যদি আৰু যদিহে ad = bc.

প্ৰমাণ কৰক যে IN x IN অত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

**সমাধান ঃ** আমি জানো ab = ba

$\therefore (a, b) R (a, b)$

$\therefore$ R প্ৰতিফলনীয়।

$(a, b) R (c, d) \Rightarrow ad = bc; a, b, c, d, \in IN$

$\Rightarrow cb = da$

$\Rightarrow (c, d) R (a, b)$

$\therefore$ R সমমিত।

$(a, b) R (c, d)$ আৰু $(c, d) R (e, f); a, b, c, d, e, f, \in IN$

$\Rightarrow ad = bc$ আৰু $cf = de$

$\Rightarrow adcf = bcde$

$\Rightarrow af = be$

$\Rightarrow (a, b) R (e, f)$

$\therefore$ R সংক্রামক।

গতিকে, IN x IN অত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

**উদাহৰণ ১৪ ঃ** (সৰ্বাংসমতা ম'ডুল' n)

Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি, আৰু n এটা স্থিৰ ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

ধৰা হ'ল $a, b \in Z$

a, b ৰ সৰ্বাংগসম ম'ডুল' n (congruent modulo n) বুলি কোৱা হয় যদি আৰু যদিহে n অৰ দ্বাৰা a–b বিভাজ্য। প্ৰতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে লিখা হয় $a \equiv b \pmod n$

দেখুৱাওক যে 'সৰ্বাংগসমতা ম'ডুল' n' (congruence modulo n) সম্বন্ধটো Z অত এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

**সমাধান ঃ** আমি জানো যে n অৰ দ্বাৰা a–a বিভাজ্য, অৰ্থাৎ $a \equiv a \pmod n$

$\therefore$ সম্বন্ধটো প্ৰতিফলনীয়।

ধৰা হ'ল $a \equiv b \pmod n$

$\Rightarrow$ n অৰ দ্বাৰা a–b বিভাজ্য

$\Rightarrow$ n অৰ দ্বাৰা b–a বিভাজ্য

$\Rightarrow b \equiv a \pmod n$

$\therefore$ সম্বন্ধটো সমমিত।

ধৰা হ'ল $a \equiv b \pmod n$, $b \equiv c \pmod n$

$\Rightarrow$ n অৰ দ্বাৰা a–b বিভাজ্য, n অৰ দ্বাৰা b–c বিভাজ্য

$\Rightarrow$ n অৰ দ্বাৰা a–b+b–c বিভাজ্য

$\Rightarrow$ n অৰ দ্বাৰা a–c বিভাজ্য

$\Rightarrow a \equiv c \pmod n$

$\therefore$ সম্বন্ধটো সংক্ৰামক।

গতিকে, Z অত 'সৰ্বাংগসমতা ম'ডুল' n' এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

আমি জানো যে 4 অৰ দ্বাৰা 15-3 বিভাজ্য।

$\therefore$15, 3 ৰ সৰ্বাংগসম ম'ডুল' 4 অৰ্থাৎ

$15 \equiv 3 \pmod 4$

7 অৰ দ্বাৰা15–3 বিভাজ্য নহয়।

$\therefore$15, 3 ৰ সৰ্বাংগসম ম'ডুল' 7 নহয় অৰ্থাৎ$15 \not\equiv 3 \pmod 7$

**উদাহৰণ ১৫ ঃ** Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল $R = \{(a, b) : a, b \in Z, ab \geq 0\}$

Z অত R সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

**সমাধান ঃ** আমি জানো $aa \geq 0$

$\therefore (a, a) \in R, \forall a \in Z$

$\therefore$R প্ৰতিফলনীয়।

ধৰা হ'ল $(a, b) \in R$

$\therefore ab \geq 0$

$\Rightarrow ba \geq 0$

$\Rightarrow (b, a) \in R$

$\therefore$ R সমমিত।

আমি জানো (–2) x 0 = 0, 0x2=0

$\therefore (–2, 0), (0, 2) \in R$

কিন্তু (–2) x 2 = – 4<0

$\therefore (–2, 2) \notin R$

$\therefore$ R সংক্রামক নহয়।

গতিকে, R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ নহয়।

**উপপাদ্য ১ ঃ** এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধৰ বিপৰীতো এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

**প্ৰমাণ ঃ** ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি। ধৰা হ'ল A ত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

R প্ৰতিফলনীয়।

$\therefore (x, x) \in R, \forall x \in A$

$\Rightarrow (x, x) \in R^{-1}, \forall x \in A$

$\therefore R^{-1}$ প্ৰতিফলনীয়।

ধৰা হ'ল $(x, y) \in R^{-1}$

$\Rightarrow (y, x) \in R$ [$R^{-1}$ অৰ সংজ্ঞামতে]

$\Rightarrow (x, y) \in R$ [$\therefore$ R সমমিত]

$\Rightarrow (y, x) \in R^{-1}$

$\therefore R^{-1}$ সমমিত।

ধৰা হ'ল $(x, y), (y, z) \in R^{-1}$

$\Rightarrow (y, x), (z, y) \in R$ [$R^{-1}$ অৰ সংজ্ঞামতে]

$\Rightarrow (z, y), (y, x) \in R$

$\Rightarrow (z, x) \in R$ [$\therefore$ R সংক্রামক]

$\Rightarrow (x, z) \in R^{-1}$

$\therefore R^{-1}$ সংক্রামক।

গতিকে, $R^{-1}$ এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

**উপপাদ্য ২ ঃ** দুটা সমতুল্যতা সম্বন্ধৰ ছেদনো এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

**প্ৰমাণ ঃ** ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি।

ধৰা হ'ল A ত R আৰু S দুটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

R আৰু S প্ৰতিফলনীয়।

$\therefore (x, x) \in R$ আৰু $(x, x) \in S, \forall x \in A$

$\Rightarrow (x, x) \in R \cap S, \forall x \in A$

$\therefore R \cap S$ প্ৰতিফলনীয়।

ধৰা হ'ল $(x, y) \in R \cap S$

$\Rightarrow (x, y) \in R$ আৰু $(x, y) \in S$

$\Rightarrow (y, x)$ R আৰু $(y, x) \in S$ [$\therefore$ R, S সমমিত]

$\Rightarrow (y, x) \in R \cap S$

$\therefore R \cap S$ সমমিত।

ধৰা হ'ল $(x, y) \in R \cap S, (y, z) \in R \cap S$

$\Rightarrow$ (x, y) R আৰু (x, y) $\in$ S, (y, z) $\in$ R আৰু (y, z) $\in$ S

$\Rightarrow$ (x, y) $\in$ R, (x, z) $\in$ R আৰু (x, y) $\in$ S, (y, z) $\in$ S

$\Rightarrow$ (x, x) $\in$ R আৰু (x, z) $\in$ S [$\therefore$ R, S সংক্রামক]

$\Rightarrow$ (x, z) $\in$ R$\cap$S

$\therefore$ R$\cap$S সংক্রামক।

গতিকে, R$\cap$S এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

**মন্তব্য ঃ** দুটা সমতুল্যতা সম্বন্ধৰ মিলন সদায় সমতুল্যতা সম্বন্ধ নহয়।

A = {1, 2, 3} সংহতিটো লোৱা হ'ল।

R = {(1, 1), 2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1)}

S = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)}

A ত দুটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

R$\cup$S = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1), (1, 2), (2, 1)}

(2, 1) $\in$ R$\cup$S, (1, 3) $\in$ R$\cup$S)

কিন্তু (2, 3) $\notin$ R$\cup$S

$\therefore$ R$\cup$S সংক্রামক নহয়।

$\therefore$ R$\cup$S এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ নহয়।

## ১.৫.১ সমতুল্যতা শ্রেণী

অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Z লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল R = {(a, b) : a, b $\in$ Z, 3 ৰ দ্বাৰা a–b বিভাজ্য}

অর্থাৎ R = {(a, b) : a, b $\in$ Z, a $\equiv$ b (mod 3)}

স্পষ্টত ঃ R প্রতিফলনীয়, সমমিত আৰু সংক্রামক।

$\therefore$ Z অত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

ধৰা হ'ল [0] এ 3n আকাৰৰ সংখ্যাবোৰ বুজাইছে। (n $\in$ Z) গতিকে

[0] = {...., –9, –6, –3, 0, 3, 6, 9, ...}

[1] এ 3n+1 আকাৰৰ সংখ্যাবোৰ বুজাইছে।

[1] = {..., –8, –5, –2, 1, 4, 7, 10, ...}

[2] এ 3n+2 আকাৰৰ সংখ্যাবোৰ বুজাইছে।

[2] = {...., –7, – 4, –1, 2, 5, 8, 11, ....}

আমি দেখিম যে—

..... = [0] = [3] = [6] =.....

..... = [1] = [4] = [7] =.....

..... = [2] = [5] = [8] =.....

[0], [1], [2] ৰ প্ৰত্যেককে **সমতুল্যতা শ্ৰেণী** (equivalence class) বুলি কোৱা হয়। [0] হ'ল 0 ৰ সমতুল্যতা শ্ৰেণী, [1] হ'ল 1 অৰ সমতুল্যতা শ্ৰেণী, [2] হ'ল 2 ৰ সমতুল্যতা শ্ৰেণী।

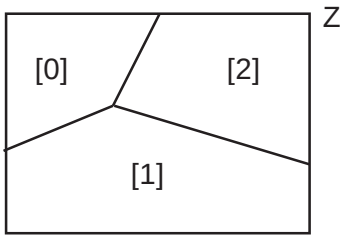
আমি দেখিলোঁ যে তিনিটা পৃথক (distinct) সমতুল্যতা শ্ৰেণী আছে, যথা, [0], [1], [2].

আকৌ আমি দেখিছোঁ যে

$[0] \cup [1] \cup [2] = Z$

$[0] \cap [1] = \phi$, $[1] \cap [2] = \phi$ $[2] \cap [0] = \phi$

{[0], [1], [2]} সংহতিটোক Z অৰ এটা বিভাজন (partition) বুলি কোৱা হয়।




**সংজ্ঞা ঃ** ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি আৰু A ত R এটা সম্বন্ধ।

কোনো $a \in A$ ৰ বাবে, a ৰ সমতুল্যতা শ্ৰেণী [a]ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$[a] = \{x \in A : xRa\}$

অৰ্থাৎ a ৰ সমতুল্যতা শ্ৰেণী [a] হ'ল A ৰ সেইবোৰ মৌলৰ সংহতি যিবোৰ R সম্বন্ধৰ অধীনত a ৰ লগত সম্পৰ্কিত।

**টোকা ঃ** $[a] \neq \phi$, $\Theta$ aRa

**সংজ্ঞা ঃ** ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি। Aৰ অৰিক্ত উপসংহতিৰ সংহতি P ক A ৰ এটা বিভাজন বুলি কোৱা হয় যদি

(i) P ৰ সকলোবোৰ উপাদানৰ মিলন A,

(ii) P ৰ যিকোনো দুটা পৃথক উপাদান অসংযুক্ত (disjoint)।

**উপপাদ্য ৩ ঃ** ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি আৰু A ত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ। ধৰা হ'ল $a, b \in A$. তেনেহ'লে $[a] = [b]$ যদি আৰু যদিহে $(a, b) \in R$.

**প্ৰমাণ ঃ** ধৰা হ'ল $[a] = [b]$

$\Theta$ R প্ৰতিফলনীয়, $\therefore$ aRa

$\therefore a \in [a]$

$\Rightarrow a \in [b]$ [$\Theta$ $[a]=[b]$]

$\Rightarrow$ aRb

$\Rightarrow (a, b) \in R$

**বিপৰীতক্ৰমে,** ধৰা হ'ল $(a, b) \in R$. $\therefore$ aRb

ধৰা হ'ল $x \in [a]$. $\therefore xRa$

এতিয়া xRa আৰু aRb

$\therefore xRb$ [Θ R সংক্রামক]

$\Rightarrow x \in [b]$

গতিকে, $x \in [a] \Rightarrow x \in [b]$

$\therefore [a] \subseteq [b]$ ... (1)

আকৌ, ধৰা হ'ল $y \in [b]$ $\therefore yRb$

এতিয়া, yRb আৰু bRa [Θ R সমমিত, $aRb \Rightarrow bRa$]

$\therefore yRa$ [Θ R সংক্রামক]

$\Rightarrow y \in [a]$

গতিকে, $y \in [b] \Rightarrow y \in [a]$

$\therefore [b] \subseteq [a]$ ... (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা [a] = [b]

**উপপাদ্য ৪ ঃ** দুটা সমতুল্যতা শ্রেণী সমান বা অসংযুক্ত।

**প্রমাণ ঃ** ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি। ধৰা হ'ল A ত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

ধৰা হ'ল $a, b \in A$.

তেনেহ'লে [a], [b] হয় অসংযুক্ত নতুবা অসংযুক্ত নহয়।

ধৰা হ'ল [a], [b] অসংযুক্ত নহয়

অর্থাৎ $[a] \cap [b] \neq \phi$.

ধৰা হ'ল $x \in [a] \cap [b]$

$\Rightarrow x \in [a]$ আৰু $x \in [b]$

$\Rightarrow$ xRa আৰু xRb

$\Rightarrow$ aRx আৰু xRb [Θ R প্রতিসম, $xRa \Rightarrow aRx$]

$\Rightarrow$ aRb[Θ R সংক্রামক]

ধৰা হ'ল $y \in [a]$

$\Rightarrow$ yRa

এতিয়া yRa আৰু aRb

$\therefore yRb$ [Θ R সংক্রামক]

$\Rightarrow y \in [b]$

গতিকে, $y \in [a] \Rightarrow y \in [b]$

$\therefore [a] \subseteq [b]$

সেইদৰে, $[b] \subseteq [a]$

$\therefore$ [a] = [b]



A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি হ'লে হয় $A \cap B \neq \phi$ নতুবা $A \cap B = \phi$

গতিকে, যদি [a], [b] অসংযুক্ত নহয়, তেনেহ'লে সিহঁত সমান।

∴ [a], [b] সমান বা অসংযুক্ত।



**অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৩**

প্রশ্ন নং ১ঃ কোনো সংহতিত এটা সম্পন্ধ প্রতিফলনীয়, প্রতিসম আৰু সংক্রামক হ'লে সম্বন্ধটোৰ নাম কি?

প্রশ্ন নং ২ঃ স্বাভাৰিক সংখ্যাৰ সংহতি IN অত "<" সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয়নে? উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা প্রতিপন্ন কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি। ধৰা হ'ল

R = {(a, b) : a, b ∈ Z, 5 অৰ দ্বাৰা (a–b) বিভাজ্য}

Z অত R সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ এখন সমতলত থকা সকলো ত্রিভুজৰ সংহতি A লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল R = {(x, y) : x, y ∈ A, x, y ৰ সদৃশ}

A ত R সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল R = {(x, y) : x, y ∈ Z, x–y যুগ্ম}

Z অত R সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয়নে? উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা প্রতিপন্ন কৰক।

## ১.৬ ফলনৰ ধাৰণা

ধৰা হ'ল A আৰু B দুটা অৰিক্ত সংহতি আৰু $f \subseteq A \times B$ যাতে

(i) $(x, y) \in f$, $\forall x \in A$ আৰু যিকোনো $y \in B$

(ii) $(x, y) \in f$ আৰু $(x, y') \in f \Rightarrow y = y'$.

এই ক্ষেত্রত f অক A ৰ পৰা B লৈ **ফলন** বা **মানচিত্রণ** (function or mapping) বুলি কোৱা হয় আৰু ইয়াক $f : A \to B$ প্রতীকেৰে বুজোৱা হয়।

A ক f অৰ **আদিক্ষেত্র** (domain) আৰু B ক f অৰ **সহক্ষেত্র** (codomain) বুলি কোৱা হয়।

**উদাহৰণ ১৬ ঃ** ধৰা হ'ল A = {1, 2}, B = {7, 8, 9}

$f = \{(1, 8), (2, 7)\} \subseteq A \times B$.

A ৰ প্রতিটো মৌলই f অৰ ক্রমিতযোৰৰ প্রথম মৌল। তদুপৰি প্রতিটো ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌলৰ বিপৰীতে পৃথক দ্বিতীয় মৌল নাই।

∴A ৰ পৰা B লৈ f এটা ফলন।

**উদাহৰণ ১৭ ঃ** ধৰা হ'ল A = {1, 2}, B = {7, 8, 9}

$g = \{(1, 7), (1, 9)\} \subseteq A \times B$

g ত এনে ক্রমিত যোৰ নাই যাৰ প্রথম মৌল 2 অর্থাৎ A ৰ প্রতিটো মৌলই g ৰ ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌল নহয়। তদুপৰি ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌল 1 অৰ বিপৰীতে দুটা পৃথক দ্বিতীয় মৌল 7, 9 আছে।

∴ সেয়ে, A ৰ পৰা B লৈ g ফলন নহয়।

**উদাহৰণ ১৮ ঃ** ধৰা হ'ল A = {1, 2, 3, 4}, B = {x, y, z, w}

অধোলিখিত সম্বন্ধবোৰ A ৰ পৰা B লৈ ফলন হয়নে?

(i) $f_1 = \{(1, x), (1, w), (2, x), (2, z), (4, w)\}$

(ii) $f_2 = \{(1, y), (2, z), (3, x), (4, w)\}$

**সমাধান ঃ** (i) নহয়। (1, x), (1, w) ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌল একে। কিন্তু দ্বিতীয় মৌল বেলেগ বেলেগ। তদুপৰি $f_1$ অত এনে ক্রমিত যোৰ নাই যাৰ প্রথম মৌল 3।

∴ $f_1$ ফলন নহয়।

(ii) হয়। A ৰ প্রতিটো মৌলই $f_2$ ৰ ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌল। তদুপৰি প্রতিটো ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌলৰ বিপৰীতে পৃথক দ্বিতীয় মৌল নাই।

আমি দেখিলোঁ যে

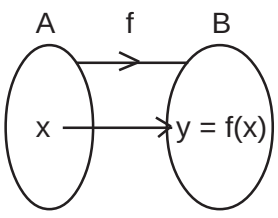
**প্রত্যেক ফলনেই এটা সম্বন্ধ, কিন্তু প্রত্যেক সম্বন্ধই ফলন নহয়।**

ফলনৰ এই ধাৰণাটোক এনেদৰেও সংজ্ঞাকৃত কৰিব পাৰি। যদি দুটা অৰিক্ত সংহতি A আৰু B ৰ মৌলবোৰৰ মাজত এনে এটা যোগাযোগ থাকে যে A ৰ প্রতিটো মৌলৰ সৈতে B ৰ এটা অদ্বিতীয় মৌল সংযুক্ত হয়, তেনেহ'লে যি নিয়মটোৱে এই সংযোগ স্থাপন কৰে, তাক A ৰ পৰা B লৈ এটা ফলন বোলা হয়। ইয়াক f, g ইত্যাদি আখৰেৰে বুজোৱা হয়। A, B সংহতি দুটা একে হ'ব পাৰে।

ধৰা হ'ল A সংহতিৰ পৰা B সংহতিলৈ f এটা ফলন অর্থাৎ $f : A \to B$ এটা ফলন। ফলন f এ Bৰ যিটো অদ্বিতীয় মৌল y ক Aৰ মৌল x অৰ লগত সংযোগ কৰে, তাক f -অৰ অধীনত x অৰ **প্রতিচ্ছায়া** (image) বোলা হয় আৰু x অক y ৰ **পূর্বচ্ছায়া** (pre-image) বোলা হয়। Bৰ যিবোৰ মৌল A ৰ মৌলবোৰৰ প্রতিচ্ছায়া, সেই সকলোবোৰ মৌল লৈ গঠিত সংহতিটোক **পৰিসৰ** (range) বোলে।

**উদাহৰণ ১৯ ঃ** IN স্বাভাৰিক সংখ্যাৰ সংহতি আৰু Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

$f : IN - Z, f(x) = (-1)^x; x \in IN$




স্পষ্টত ঃ f অৰ আদিক্ষেত্র = IN

f অৰ সহক্ষেত্র = Z

এতিয়া $f(1) = (-1)^1 = -1$, $f(2) = (-1)^2 = 1$, $f(3) = (-1)^3 = -1$ ইত্যাদি।

∴ f অৰ পৰিসৰ = {–1, 1}.

### ১.৬.১ একক ফলন

ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি আৰু i : A – A, i (x) = x, $\forall x \in A$

i ক একক ফলন (identity function) বোলে।

**টোকা ঃ** একক ফলনৰ ক্ষেত্ৰত আদিক্ষেত্ৰ আৰু সহক্ষেত্ৰ একে।

### ১.৬.২ ধ্ৰুবক ফলন

A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি আৰু $f : A \to B$ এটা ফলন যাতে f(x) = k, $\forall x \in A$

f অক ধ্ৰুবক ফলন (constant function) বোলে।

**টোকা ঃ** ধ্ৰুবক ফলনৰ পৰিসৰ এটা এক মৌল সংহতি (singleton set)

## ১.৭ বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ ফলন

A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি আৰু $f : A \to B$ এটা ফলন।

1. যদি B ত অন্ততঃ এটা মৌল থাকে যিটো A ৰ কোনো মৌলৰ প্ৰতিচ্ছায়া নহয়, তেনেহ'লে f ফলনটোক **অনাচ্ছাদক ফলন** (into function) বুলি কোৱা হয়।
2. যদি B ৰ প্ৰতিটো মৌল A ৰ অন্ততঃ এটা মৌলৰ প্ৰতিচ্ছায়া হয়, তেনেহ'লে f **আচ্ছাদক ফলন** (onto function or surjective function or surjection) বুলি কোৱা হয়।

**টোকা ঃ** আচ্ছাদক ফলনৰ ক্ষেত্ৰত, f অৰ পৰিসৰ = f অৰ আদিক্ষেত্ৰ।

3. A ৰ ভিন্ন ভিন্ন মৌলৰ প্ৰতিচ্ছায়াত B ত ভিন্ন ভিন্ন হ'লে, f ফলনটোক **একৈকী ফলন** (one-one fuction or injective function or injection) বোলে।
4. যদি A ৰ দুটা (বা ততোধিক) মৌলৰ B ত একেটা প্ৰতিচ্ছায়া থাকে, তেনেহ'লে f অক **বহু-এক** ফলন (many-one function) বোলে।
5. এটা ফলনক **দ্বিমুখী** (bijective) বুলি কোৱা হয় যদি ই একৈকী আৰু আচ্ছাদক।

**টোকা ঃ** একক ফলন দ্বিমুখী।

**এটা ফলন f একৈকী বুলি কেনেদৰে প্ৰমাণ কৰিব লাগে ?**

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \in A$

যদি $f(x) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, তেনেহ'লে f একৈকী।

বা,

যদি $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, তেনেহ'লে f ঐকৈকী।

**এটা ফলন f আচ্ছাদক বুলি কেনেদৰে প্ৰমাণ কৰিব লাগে ?**

ধৰা হ'ল $y \in B$ (codomain)

ধৰা হ'ল y = f(x)

y ৰ মাধ্যমত x অক প্ৰকাশ কৰা হ'ল।

যদি $x \in A$, তেনেহ'লে f আচ্ছাদক, অন্যথা নহয়।

**উদাহৰণ ২০ ঃ** IN স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল $f : IN \to IN$, $f(x) = 3x+7$

f ফলনটো দ্বিমুখী বুলি প্ৰমাণ কৰক।

**সমাধান ঃ** ধৰা হ'ল $x_1, x_2 \in IN$ (আদিক্ষেত্ৰ)

$f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow 3x_1+7=3x_2+7$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ f একৈকী।

ধৰা হ'ল $y \in IN$ (সহক্ষেত্ৰ)

ধৰা হ'ল $y = f(x)$

$\Rightarrow y = 3x + 7$

$\Rightarrow x = \frac{y-7}{3}$

যদি $y = 1$, $x = \frac{1-7}{3} = -2 \notin N$

$\therefore$ f আচ্ছাদক নহয়।

$\therefore$ f দ্বিমুখী নহয়।

**উদাহৰণ ২১ ঃ** ধৰা হ'ল 1 তাৰ বাহিৰে সকলো বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতিটো X। প্ৰমাণ কৰক যে f

: $X \to X$, $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ ফলনটো একৈকী আৰু আচ্ছাদক।

**সমাধান ঃ** ধৰা হ'ল $x_1, x_2, x_2 \in X$ (আদিক্ষেত্ৰ)

ধৰা হ'ল $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1}$

$\Rightarrow \frac{(x_1+1)+(x_1-1)}{(x_1-1)-(x_1-1)} = \frac{(x_2+1)+(x_2-1)}{(x_2-1)-(x_2-1)}$ (যোগ-ভাগ ক্ৰিয়াৰ সহায়ত)

$\Rightarrow \frac{2x_1}{2} = \frac{2x_2}{2}$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ f একৈকী।

ধৰা হ'ল $y \in X$ (সহক্ষেত্ৰ)

$y = f(x)$

$\Rightarrow y = \frac{x+1}{x-1}$

$\Rightarrow y(x-1) = x+1$

$\Rightarrow yx-y = x+1$

$\Rightarrow yx - x = y+1$

$\Rightarrow x(y-1) = y+1$

$\Rightarrow x = \frac{y+1}{y-1} \in X$ (আদিক্ষেত্ৰ)

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

**উদাহৰণ ২২ ঃ** ধৰা হ'ল A = {1, 2, 3,}. A ৰ পৰা A লৈকে সকলো দ্বিমুখী ফলন লিখক।

**সমাধান ঃ**

$i : A \to A, i(1) = 1, i(2) = 2, i(3) = 3$

$f_1 : A \to A, f_1(1) = 1, f_1(2) = 3, f_1(3) = 2$

$f_2 : A \to A, f_2(1) = 2, f_2(2) = 1, f_2(3) = 3$

$f_3 : A \to A, f_3(1) = 3, f_3(2) = 2, f_3(3) = 1$

$f_4 : A \to A, f_4(1) = 2, f_4(2) = 3, f_4(3) = 1$

$f_5 : A \to A, f_5(1) = 3, f_5(2) = 1, f_5(3) = 2$

**টোকা ঃ** A = {1, 2, 3} ৰ পৰা A লৈকে মুঠতে 6 =3! টা দ্বিমুখী ফলন আছে।

যদি A ৰ মৌলৰ সংখ্যা n টা হয়, A ৰ পৰা A লৈকে n! টা দ্বিমুখী ফলন থাকিব।

**উপপাদ্য ৫ ঃ** ধৰা হ'ল A এটা সসীম সংহতি আৰু $f : A \to A$ আচ্ছাদক। তেনেহ'লে f এঁকেকী।

**প্ৰমাণ ঃ** ধৰা হ'ল A এটা সসীম সংহতি আৰু A ৰ মৌলৰ সংখ্যা n.

ধৰা হ'ল $A = \{a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots\ldots a_n)$, য'ত $a_i^{-1}$ বোৰ ভিন্ন ভিন্ন।

ধৰা হ'ল $f : A \to A$ আচ্ছাদক

f অৰ পৰিসৰ = $\{f(a_1), f(a_2), \ldots\ldots\ldots\ldots, f(a_n)\}$

$\therefore$ f আচ্ছাদক, f অৰ পৰিসৰ = f অৰ সহক্ষেত্ৰ = A.

$\therefore A = \{f(a_1), f(a_2), \ldots\ldots\ldots\ldots, f(a_n)\}$

$\therefore$ A ৰ মৌলৰ সংখ্যা n,

$\therefore f(a_1), f(a_2), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, f(a_n)$ ভিন্ন ভিন্ন।

গতিকে, Aৰ (আদিক্ষেত্ৰ) ভিন ভিন মৌলৰ প্ৰতিচ্ছায়াও A ত (সহক্ষেত্ৰ) ভিন ভিন।

$\therefore$ f এঁকেকী।

**টোকা ঃ** অসীম সংহতিৰ ক্ষেত্ৰত এই ফলটো প্ৰযোজ্য নহয়।

IN স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি।

$f : IN \to IN, f(x) \begin{cases} =1, \text{ যদি } x = 1 \text{ আৰু } x = 2, \\ = x-1, \text{ যদি } x \geq 3 \end{cases}$

স্পষ্টত ঃ f আচ্ছাদক, কিন্তু এঁকেকী নহয়।

**উপপাদ্য ৬ ঃ** ধৰা হ'ল A এটা সসীম সংহতি আৰু $f:A \to A$ এঁকেকী। তেনেহ'লে f আচ্ছাদক।

**প্ৰমাণ ঃ** ধৰা হ'ল A এটা সসীম সংহতি আৰু A ৰ মৌল সংখ্যা n.

ধৰা হ'ল $A = \{a_1, a_2, ....., a_n\}$, য'ত $a_i$ বোৰ ভিন্ন ভিন্ন।

ধৰা হ'ল $f : A \to A$ এঁকেকী।

$\therefore f(a_1), f(a_2), ...., f(a_n)$ হ'ল Aৰ (সহক্ষেত্ৰ) n টা পৃথক মৌল।

ধৰা হ'ল $u \in A$ (সহক্ষেত্ৰ)

ধৰা হ'ল $u = f(a_i)$, $1 \leq i \leq n$

$\therefore$ A ত (আদিক্ষেত্ৰ) $a_i$ আছে যাতে $f(a_i) = u$.

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

**টোকা ঃ** অসীম সংহতিৰ ক্ষেত্ৰত এই ফলটো প্ৰযোজ্য নহয়।

IN স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি।

$f : IN \to IN$, $f(x) = 5x$

স্পষ্টত ঃ f এঁকেকী, কিন্তু আচ্ছাদক নহয়।



### অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৪

প্ৰশ্ন নং ১ঃ IN স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি।

$f : IN \to IN$, $f(x) = x^2+1$

f (i) এঁকেকী, (ii) আচ্ছাদক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২ঃ IR বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি।

$f : IR \to IR$ এনেদৰে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{যদি } x > 0 \\ 0, & \text{যদি } x = 0 \\ -1, & \text{যদি } x < 0 \end{cases}$$

f (i) এঁকেকী, (ii) আচ্ছাদক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ $f : IR \to IR$ এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হৈছে $f(x) = |x|$

f (i) এঁকেকী, (ii) আচ্ছাদক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

$$\left[ f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{যদি } x \geq 0 \\ -x, & \text{যদি } x < 0 \end{cases} \right]$$

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ যদি $A = \{1, 2\}$, A ৰ পৰা A লৈকে সকলো দ্বিমুখী ফলন লিখক।

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ কি চর্তৰ অধীনত এটা ধ্ৰুবক ফলন আচ্ছাদক হ'ব?

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ কি চর্তৰ অধীনত এটা ধ্ৰুবক ফলন এঁকেকী হ'ব?



## ১.৮ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি হ'লে, A x B ৰ এটা উপ সংহতিক A ৰ পৰা B লৈ এটা সম্বন্ধ বুলি কোৱা হয়।
- যদি A, B দুটা সসীম সংহতি হয় আৰু n(A) = x, n(B) = y, A ৰ পৰা B লৈ সম্বন্ধৰ সংখ্যা $2^{xy}$.
- A এটা অৰিক্ত সংহতি হ'লে, $I_A = \{(a, a) : a \in A\}$ ক A ত একক ফলন বুলি কোৱা হয়।
- A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি আৰু R, A ৰ পৰা B লৈ এটা সম্বন্ধ হ'লে, বিপৰীত সম্বন্ধ $R^{-1}$ অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

  $R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$
- অৰিক্ত সংহতি A ত এটা সম্বন্ধ R অক

  (i) প্রতিফলনীয় বুলি কোৱা হয় যদি $(a, a) \in R, \forall a \in A$;

  (ii) সমমিত বুলি কোৱা হয় যদি $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$;

  (iii) প্রতিসমমিত বুলি কোৱা হয় যদি $(a, b) \in R, (b, a) \in R \Rightarrow a = b$;

  (iv) সংক্রামক বুলি কোৱা হয় যদি $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.
- অৰিক্ত সংহতি Aত এটা সম্বন্ধ R অক সমতুল্যতা সম্বন্ধ বুলি কোৱা হয় যদি ই প্রতিফলনীয়, সমমিত আৰু সংক্রামক হয়।
- এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধৰ বিপৰীতো এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।
- দুটা সমতুল্যতা সম্বন্ধৰ ছেদনো এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।
- কোনো অৰিক্ত সংহতি A ত R এটা সম্বন্ধ হ'লে, কোনো $a \in A$ ৰ সমতুল্যতা শ্রেণী [a] হ'ল A ৰ সেইবোৰ মৌলৰ সংহতি যিবোৰ R সম্বন্ধৰ অধীনত a ৰ লগত সম্পর্কিত।
- দুটা সমতুল্যতা শ্রেণী সমান বা অসংযুক্ত।
- যদি দুটা অৰিক্ত সংহতি A আৰু B ৰ মৌলবোৰৰ মাজত এনে এটা যোগাযোগ থাকে যে A ৰ প্রতিটো মৌলৰ সৈতে B ৰ এটা অদ্বিতীয় মৌল সংযুক্ত হয়, তেনেহ'লে যি নিয়মটোৱে এই সংযোগ স্থাপন কৰে, তাক A ৰ পৰা B লৈ এটা ফলন বোলা হয়।
- প্রত্যেক ফলনেই এটা সম্বন্ধ, কিন্তু প্রত্যেক সম্বন্ধই ফলন নহয়।
- আদিক্ষেত্রৰ ভিন্ন ভিন্ন মৌলৰ প্রতিচ্ছায়াও সহক্ষেত্রত ভিন্ন ভিন্ন হ'লে ফলনটো একৈকী।
- যদি সহ ক্ষেত্রৰ প্রতিটো মৌল আদি ক্ষেত্রৰ অন্ততঃ এটা মৌলৰ প্রতিচ্ছায়া হয়, তেনেহ'লে ফলনটো আচ্ছাদক।
- এটা ফলন দ্বিমুখী যদি ই একৈকী আৰু আচ্ছাদক।

- A এটা সসীম সংহতি আৰু f : A→A আচ্ছাদক হ'লে, f এঁকেকী।
- A এটা সসীম সংহতি আৰু f : A→A এঁকেকী হ'লে, f আচ্ছাদক।



## ১.৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

**অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১**

**১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** $2^{12}$

**২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** $2^{25}$

**৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** (7, 4), (72, 27) R অত আছে।

**৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** হয়। দুটা যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগফল অযুগ্ম হ'ব নোৱাৰে।

**৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** $I_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$

**৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** $R^{-1} = \{(7, 4), (8, 5), (7, 6), (8, 6), (9, 6)\}$

**অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২**

**১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

**অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৩**

**১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

**২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** নহয়। প্ৰতিফলনীয় নহয়, সমমিতও নহয়।

**৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

**৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

**৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** হয়।

**অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৪**

**১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** এঁকেকী, কিন্তু আচ্ছাদক নহয়।

**২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** এঁকেকী নহয়, আচ্ছাদকো নহয়।

**৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** এঁকেকী নহয়, আচ্ছাদকো নহয়।

**৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** i : A→A, i(1) = 1, i(2) = 2

f : A→A, f(1) = 2, f(2) = 1

**৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** সহক্ষেত্ৰ এটা একমৌল সংহতি।

**৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** আদিক্ষেত্ৰ এটা একমৌল সংহতি।



## ১.১০ অধিক জানিবলৈ


1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.
2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).
3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).
4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.
5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.




## ১.১১ আৰ্হি প্ৰশ্ন

**প্ৰশ্ন ১ঃ** ধৰা হ'ল A = {1, 2, 3}, B = {3, 4, 5}.
A ৰ পৰা B লৈ কিমানটা সম্বন্ধ আছে? A ৰ পৰা B লৈ যিকোনো চাৰিটা সম্বন্ধ লিখক।

**প্ৰশ্ন ২ঃ** ধৰা হ'ল A = {3, 4, 5}, B = {5, 6, 7}
তলৰ কোনবোৰ সম্বন্ধ A ৰ পৰা B লৈ ফলন? যদি ফলন হয়, ই একৈকী হয়নে? আচ্ছাদক হয়নে?
(i) {(3, 5), (4, 5), (5, 7)}
(ii) {(3, 7), (4, 5), (5, 6)}
(iii) {(3, 6), (4, 6), (5, 6)}
(iv) {(3, 6), (4, 7), (5, 5)}

**প্ৰশ্ন ৩ঃ** Q পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি। f : Q→Q ফলনটো এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হৈছে।
f(x) = 4x+5
ফলনটো দ্বিমুখী হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

**প্ৰশ্ন ৪ঃ** এখন সমতলত থকা সকলো ত্ৰিভুজৰ সংহতি A লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল R = {(x, y) : x, y $\in$ A আৰু x, y ৰ সৰ্বাংগসম}

A ত R সম্বন্ধটো সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

**প্ৰশ্ন ৫ঃ** IN স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি। IN x IN অত R সম্বন্ধটো এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'লঃ (a, b), R (c, d) যদি আৰু যদিহে a+d = b+c, দেখুৱাওক যে IN x IN অত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

**প্ৰশ্ন ৬ঃ** ধৰা হ'ল A = {1, 2, 3}

R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), 2, 3)}

দেখুৱাওক যে R প্ৰতিফলনীয়; কিন্তু সমমিত নহয়, সংক্ৰামকো নহয়।

**প্ৰশ্ন ৭ঃ** C জটিল সংখ্যাৰ সংহতি আৰু IR বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি।

f : C$\rightarrow$ IR, f(z) = |z|, z $\in$ C.

f (i) এঁকেকী, (ii) আচ্ছাদক হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

**প্ৰশ্ন ৮ঃ** A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি।

f : A x B $\rightarrow$ B x A, f(a, b) = (b, a); (a, b) $\in$ A x B

দেখুৱাওক যে f দ্বিমুখী।

**প্ৰশ্ন ৯ঃ** f : IN x IN $\rightarrow$ IN, f(a, b) = $3^a 4^b$, (a, b) $\in$ IN x IN

f (i) এঁকেকী, (ii) আচ্ছাদক হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

**প্ৰশ্ন ১০ঃ** f : Z x Z $\rightarrow$ Z, f(a, b) = ab, (a, b) $\in$ Z x Z

f (i) এঁকেকী, (ii) আচ্ছাদক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

*** ***** ***