অধ্যায় ১০ ঃ সমাকল প্রান্ত আৰু ক্ষেত্র (INTEGRAL DOMAIN AND FIELD)

অধ্যায় গাঁথনি

১০.১ উদ্দেশ্য

১০.২ পৰিচয়

১০.৩ সমাকল প্রান্ত

১০.৪ ক্ষেত্র

১০.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১০.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১০.৭ অধিক জানিবলৈ

১০.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

১০.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰাৰ পাছত আপুনি অধোলিখিত বিষয়বোৰ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

- সমাকল প্রান্ত আৰু সিহঁতৰ ধর্ম
- সমাকল প্রান্ত, ক্ষেত্র আৰু সিহঁতৰ ধর্ম।

১০.২ পৰিচয়

নৱম অধ্যায়ত আমি বলয় আৰু সিহঁতৰ বিভিন্ন ধর্মসমূহৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিছো। এই অধ্যায়টিত আমি সমাকল প্রান্ত আৰু ক্ষেত্রৰ সম্বন্ধে অধ্যয়ন কৰিম। সমাকল প্রান্ত আৰু ক্ষেত্রত নির্দিষ্ট কিছুমান স্বীকার্য সিদ্ধ কৰা হয়।

১০.৩ সমাকল প্রান্ত

অখণ্ড সংখ্যাৰ ওপৰত সকলো 2 x 2 মৌলকক্ষৰ বলয় R লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in R$

ইয়াত A আৰু B কোনোটোৱেই শূন্য মৌলকক্ষ নহয়।

কিন্তু $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

অর্থাৎ, AB এটা শূন্য মৌলকক্ষ।

গতিকে আমি দেখিলোঁ যে $A \neq 0$, $B \neq 0$; কিন্তু $AB = 0$

আকৌ, অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় Z লোৱা হ'ল। যদি $a, b \in Z$ আৰু $a \neq 0$, $b \neq 0$, তেনেহ'লে $ab \neq 0$

সংজ্ঞা ঃ এটা বলয় R অৰ এটা মৌল a ক ($\neq 0$) শূন্য ভাজক (zero divisor) বুলি কোৱা হয় যদি R অত এটা মৌল b ($\neq 0$) থাকে যাতে $ab = 0$ বা $ba = 0$.

আমি দেখিলোঁ যে অখণ্ড সংখ্যাৰ ওপৰত সকলো 2 x 2 মৌলকক্ষৰ বলয় R অত শূন্য ভাজক আছে। আনহাতেদি অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় Z অত শূন্য ভাজক নাই, কিয়নো যদি $a \in Z$, $b \in Z$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, তেনেহ'লে $ab \neq 0$, $ba \neq 0$.

বিলোপন বিধি ঃ ধৰা হ'ল R এটা বলয়। যিহেতু R এটা যোগাত্মক আবেলীয় সংঘ, গতিকে যোগাত্মক বিলোপন বিধি R অত প্রযোজ্য।

গতিকে বলয়ত বিলোপন বিধি বুলি ক'লে আমি গুণাত্মক বিলোপন বিধিকহে বুজিম (অশূন্য মৌলৰ বিলোপন)

R অত বিলোপন বিধি প্রযোজ্য হয়— যদি $ab = ac \Rightarrow b = c$, $ba = ca \Rightarrow b = c$; য'ত $a, b, c \in R$, $a \neq 0$.

উপপাদ্য 4 ঃ এটা বলয় R অত বিলোপন বিধি প্রযোজ্য যদি আৰু যদিহে R অৰ শূন্য ভাজক নাই।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল বিলোপন বিধি প্রযোজ্য।

ধৰা হ'ল $a, b \in R$ যাতে $ab = 0$

যদি $a \neq 0$, $ab = 0 \Rightarrow ab = a0 \Rightarrow b = 0$, বিলোপন বিধিৰ পৰা

সেইদৰে, যদি $b \neq 0$, $ab = 0 \Rightarrow ab = 0b \Rightarrow a = 0$

$\therefore$ R অৰ শূন্য ভাজক নাই।

বিপৰীত ক্রমে, ধৰা হ'ল R অত শূন্য ভাজক নাই।

ধৰা হ'ল $a, b, c \in R$ আৰু $ab = ac$, $a \neq 0$

$\therefore ab - ac = 0$

$\Rightarrow a(b - c) = 0$

$\therefore a \neq 0$ আৰু R অত শূন্য ভাজক নাই,

$\therefore b - c = 0 \Rightarrow b = c$

গতিকে, যদি $a \neq 0$, $ab = ac \Rightarrow b = c$

সেইদৰে, যদি $a \neq 0$, $ba = ca \Rightarrow b = c$

গতিকে, R অত বিলোপন বিধি প্রযোজ্য।

সংজ্ঞা ঃ এটা একক $e \neq 0$ সহ, শূন্য ভাজকবিহীন ক্ৰমবিনিময়ে বলয় R অক সমাকল প্ৰান্ত (integral domain) বুলি কোৱা হয়।

সমাকল প্ৰান্তৰ সবাতোকৈ সহজ উদাহৰণটো হ'ল অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় Z. এইটো এটা ক্ৰমবিনিময়ে বলয়, একক আছে, শূন্য ভাজক নাই।

টোকা ঃ সমাকল প্ৰান্তক Z অৰ সাধাৰণীকৰণ বুলিব পাৰি।

উদাহৰণ 6 ঃ গাউছীয় অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি R = {a + bi : a, b অখণ্ড সংখ্যা; $i = \sqrt{-1}$} লোৱা হ'ল। [ছি এফ গাউছ (C. F. Gauss (1777-1855) এজন বিখ্যাত গণিতজ্ঞ]

I. (i) ধৰা হ'ল $a + bi, c + di \in R$,

a, b, c, d অখণ্ড সংখ্যা, $i = \sqrt{-1}$

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \in R$

(ii) জটিল সংখ্যাৰ যোগে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) $0 = 0 + 0i \in R$

আৰু $0 + (a + bi) = a + bi = (a + bi) + o$

(iv) প্ৰত্যেক $a + bi \in R$, অৰ বাবে, $(–a) + (–b)i \in R$ যাতে

$(a + bi) + ((–a) + (–b)i) = o = ((–a) + (–b)i) + (a + bi)$

(v) জটিল সংখ্যাৰ যোগে ক্ৰমবিনিময়ে বাধি মানি চলে।

$\therefore$ জটিল সংখ্যাৰ যোগৰ অধীনত R এটা আবেলীয় সংঘ।

II. (i) $(a + bi)(c + di) = (ac – bd) + (ad + bc)i \in R$

(ii) জটিল সংখ্যাৰ পূৰণে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

III. স্পষ্টতঃ দুয়োটা বিতৰণ বিধি প্ৰযোজ্য হয়।

$\therefore$ R এটা বলয়।

তদুপৰি, জটিল সংখ্যাৰ পূৰণে ক্ৰমবিনিময়ে বিধি মানি চলে।

$\therefore$ R এটা ক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

আকৌ $1 \in R$ (1=1 + oi)

$\therefore$ R এটা এককসহ বলয়।

আকৌ আমি জানো যে দুটা অশূন্য জটিল সংখ্যাৰ পূৰণফল শূন্য হ'ব নোৱাৰে।

$\therefore$ R অত শূন্য ভাজক নাই।

গতিকে, R এটা সমাকল প্ৰান্ত।

১০.৪ ক্ষেত্ৰ

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল R এটা একক e সহ বলয় ($e \neq 0$)।

যদি R অৰ প্ৰত্যেক অশূন্য মৌলৰ R অত গুণাত্মক বিপৰীত থাকে, তেনেহ'লে R

অক হৰণ বলয় বা বিষম ক্ষেত্ৰ (division ring or a skew field) বুলি কোৱা হয়।

এটা ক্ৰমবিনিময়ে হৰণ বলয়ক ক্ষেত্ৰ (field) বুলি কোৱা হয়।

ক্ষেত্ৰৰ সবাতোকৈ সহজ উদাহৰণ হ'ল বাস্তৱ সংখ্যাৰ বলয় IR.

ই ক্ৰমবিনিময়ে, একক আছে আৰু প্ৰতিটো অশূন্য মৌলৰ গুণাত্মক বিপৰীত IR অত আছে।

সেইদৰে, জটিল সংখ্যাৰ বলয় C এটা ক্ষেত্ৰ।

টোকা ঃ অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় Z ক্ষেত্ৰ নহয়। (কিয়?)

উদাহৰণ 7 ঃ গাউছীয় অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয়

$R = \{a + bi : a, b,$ অখণ্ড সংখ্যা, $i = \sqrt{-1}\}$

ক্ষেত্ৰ হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে R এটা এককসহ ক্ৰমবিনিময়ে বলয় (উদাহৰণ 6 দ্ৰষ্টব্য)।

ধৰা হ'ল $a + bi \in R$ যাতে $a + bi \neq o$

এতিয়া $a + bi$ ৰ গুণাত্মক বিপৰীত হ'ল $\frac{a}{a^2+b^2} + \left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i$ ই R অৰ মৌল নহয়।

$\therefore$ R ক্ষেত্ৰ নহয়।

উপপাদ্য 5 ঃ প্ৰত্যেক ক্ষেত্ৰই এটা সমাকল প্ৰান্ত।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল F এটা ক্ষেত্ৰ।

ধৰা হ'ল $a, b \in F$ যাতে $a \neq o$ আৰু $ab = o$

$\therefore a \neq o, a^{-1} \in F$ (Θ F এটা ক্ষেত্ৰ)

এতিয়া $ab = o$

$\Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} o$

$\Rightarrow (a^{-1} a) b = o$

$\Rightarrow b = o$

সেইদৰে, যদি $b \neq o$ আৰু $ab = o$, তেনেহ'লে $a = o$

$\therefore$ F অৰ শূন্য ভাজক নাই।

গতিকে F এটা শূন্য ভাজকবিহীন এককসহ ক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

$\therefore$ F এটা সমাকল প্ৰান্ত।

টোকা ঃ উপৰিউক্ত উপপাদ্যটোৰ বিপৰীতটো সত্য নহয়, অৰ্থাৎ প্ৰত্যেক সমাকল প্ৰান্তই ক্ষেত্ৰ নহয়।

অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Z লোৱা হ'ল। আমি জানো যে Z এটা সমাকল প্ৰান্ত। কিন্তু Z অৰ মাত্ৰ দুটা মৌল –1 আৰু 1 অৰহে Z অত গুণাত্মক বিপৰীত আছে। গতিকে, Z ক্ষেত্ৰ নহয়।

অৱশ্যে এটা অশূন্য সসীম সমাকল প্ৰান্ত ক্ষেত্ৰ হয়।

উপপাদ্য 6 ঃ এটা অশূন্য সসীম সমাকল প্ৰান্ত ক্ষেত্ৰ।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল R = {a_1, a_2, a_3, ... a_n} এটা সসীম অশূন্য সমাকল প্ৰান্ত, য'ত a_i বোৰ ভিন্ন ভিন্ন।

ধৰা হ'ল R অৰ শূন্য মৌল a_1.

a_2, a_3, ...,a_n অশূন্য মৌলবোৰ বিবেচনা কৰা হ'ল।

ধৰা হ'ল a_p, R অৰ একক নহয় ($p \neq 1$) অৰ্থাৎ $a_p \neq e$, R ৰ একক।

$a_p a_2$, $a_p a_3$, ..., $a_p a_n$ পূৰণফল কেইটা লোৱা হ'ল।

এই সকলোবোৰ R অৰ মৌল। আকৌ, সকলোবোৰ মৌল ভিন্ন ভিন্ন, কিয়নো যদি

$a_p a_i = a_p a_j$, $2 \leq i \leq n$, $2 \leq j \leq n$, $i \neq j$

তেনেহ'লে $a_p a_i - a_p a_j = 0$

$\Rightarrow a_p (a_i - a_j) = 0$

$\Rightarrow a_i - a_j = 0$, [$\Theta a_p \neq 0$ আৰু R শূন্য ভাজকবিহীন]

$\Rightarrow a_i = a_j$, এইটো স্ববিৰোধী কথা।

এতিয়া $a_p a_2$, $a_p a_3$, ..., $a_p a_n$ বোৰৰ এটা একক হ'ব লাগিব। ধৰা হ'ল $a_p a_q$ = e, য'ত e হ'ল R অৰ একক।

$\therefore a_p a_q = e = a_q a_p$.

$\therefore$ R অত a_p ৰ গুণাত্মক বিপৰীত আছে।

যদি a_p, R অৰ একক, তেনেহ'লে R অত a_pৰ গুণাত্মক বিপৰীত আছে।

গতিকে, R অৰ প্ৰত্যেক অশূন্য মৌলৰ R ত গুণাত্মক বিপৰীত আছে।

$\therefore$ R এটা ক্ষেত্ৰ।

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১ঃ পৰিমেয় সংখ্যাৰ বলয় Q ত শূন্য ভাজক আছেনে?

প্ৰশ্ন নং ২ঃ অখণ্ড সংখ্যাৰ ওপৰত সকলো 2 x 2 মৌলকক্ষৰ বলয় R লোৱা হ'ল। R অত বিলোপন বিধি প্ৰযোজ্য হয়নে?



প্ৰশ্ন নং ৩ঃ যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় 2Z সমাকল প্ৰান্ত হয়নে?

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ এনে এটা সমাকল প্ৰান্তৰ উদাহৰণ দিয়ক যিটো ক্ষেত্ৰ নহয়।

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ $IR^2 = \{(a, b) : a, b \in IR\}$ বলয়টোত শূন্য ভাজক আছেনে?



১০.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- এটা বলয় R অৰ এটা মৌল a ক $a(\neq 0)$ শূন্য ভাজক বুলি কোৱা হয় যদি R অত এটা মৌল b $(\neq 0)$ থাকে যাতে ab = 0 বা ba = 0
- এটা একক $e \neq 0$ সহ, শূন্য ভাজকবিহীন ক্রমবিনিময়ে বলয় R অক সমাকল প্রান্ত বুলি কোৱা হয়।
- ধৰা হ'ল R এটা একক e সহ বলয় $(e \neq 0)$।
  যদি R অৰ প্রত্যেক অশূন্য মৌলৰ R অত গুণাত্মক বিপৰীত থাকে, তেনেহ'লে R অক হৰণ বলয় বা বিষম ক্ষেত্র বুলি কোৱা হয়।
  এটা ক্রমবিনিময়ে হৰণ বলয়ক ক্ষেত্র বুলি কোৱা হয়।
- প্রত্যেক ক্ষেত্রই এটা সমাকল প্রান্ত, কিন্তু প্রত্যেক সমাকল প্রান্তই ক্ষেত্র নহয়।
- এটা অশূন্য সসীম সমাকল প্রান্ত ক্ষেত্র।



১০.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নহয়। যদি $a, b \in Q$ আৰু $a \neq 0, b \neq 0$, তেনেহ'লে $ab \neq 0$.

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নহয়। এটা বলয়ত বিলোপন বিধি প্রযোজ্য যদি আৰু যদিহে বলয়টোত শূন্য ভাজক নাই। অখণ্ড সংখ্যাৰ ওপৰত 2 x 2 মৌলকক্ষৰ বলয়টোত শূন্য ভাজক আছে। গতিকে অখণ্ড সংখ্যাৰ ওপৰত 2 x 2 মৌলকক্ষৰ বলয়টোত বিলোপন বিধি প্রযোজ্য নহয়।

উদাহৰণ স্বৰূপে

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 3\\5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 54\\54 & 72\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 9\\4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 54\\54 & 72\end{pmatrix}$$

অর্থাৎ $\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 3\\5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 9\\4 & 5\end{pmatrix}$,

অর্থাৎ AB = AC, কিন্তু $B \neq C$,

যি'ত $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 9\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 5 & 7\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}6 & 9\\ 4 & 5\end{pmatrix}$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় 2Z সমাকল প্ৰান্ত নহয়, কিয়নো ইয়াত গুণাত্মক একক মৌল নাই।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় Z এটা সমাকল প্ৰান্ত কিন্তু ক্ষেত্ৰ নহয়। মাত্ৰ –1 আৰু 1 অৱহে Z অত গুণাত্মক বিপৰীত আছে।

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ হয়।

$(7, 0) \in IR^2, (0, 13) \in IR^2, (7, 0) \neq (0, 0), (0, 13) \neq (0, 0)$ কিন্তু (7, 0) (0, 13) = (0, 0)



১০.৭ অধিক জানিবলৈ

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.
2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).
3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).
4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.
5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



১০.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ঃ ধৰা হ'ল R = {(a, b) : a, b বাস্তৱ সংখ্যা} .R অত যোগ আৰু পূৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)

$(a, b)\ (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$

প্ৰমাণ কৰক যে IR^2 এটা ক্ষেত্ৰ।

প্ৰশ্ন ২ঃ ধৰা হ'ল $R = \{a + b\sqrt{-2} : a, b$ পৰিমেয় সংখ্যা$\}$ দেখুৱাওক যে যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত R এটা ক্ষেত্ৰ।

প্ৰশ্ন ৩ঃ ধৰা হ'ল R এটা শূন্য ভাজক বিহীন এককসহ ক্ৰমবিনিময় বলয়। দেখুৱাওক যে শূন্য মৌল আৰু একক মৌলই একমাত্ৰ বৰ্গসম মৌল।

*** ***** ***