অধ্যায় ১১ ঃ ভেক্টৰ স্থান (VECTOR SPACE)

অধ্যায় গাঁথনি

১১.১ উদ্দেশ্য
১১.২ পৰিচয়
১১.৩ ভেক্টৰ স্থানৰ সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ
১১.৪ প্ৰাথমিক ধৰ্ম
১১.৫ ভেক্টৰ স্থানৰ উপস্থান
১১.৬ ৰৈখিক পৰতন্ত্ৰতা আৰু স্বতন্ত্ৰতা
১১.৭ আধাৰ আৰু মাত্ৰা
১১.৮ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১১.৯ অধিক জানিবলৈ
১১.১০ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান
১১.১১ আৰ্হি প্ৰশ্ন

১১.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- ভেক্টৰ স্থানৰ সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ জানিব পাৰিব
- ভেক্টৰ স্থানৰ প্ৰাথমিক ধৰ্ম জানিব পাৰিব
- ভেক্টৰ স্থানৰ উপস্থান সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- ভেক্টৰৰ ৰৈখিক পৰতন্ত্ৰতা আৰু স্বতন্ত্ৰতা সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- ভেক্টৰৰ আধাৰ আৰু মাত্ৰা সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

১১.২ পৰিচয়

আমি ভেক্টৰ (vector) সম্বন্ধে জানো। ভেক্টৰৰ ধাৰণাৰ পৰা ভেক্টৰ স্থানৰ (vector space) ধাৰণা আহিছে। ভেক্টৰত আমি ভেক্টৰৰ যোগ, ভেক্টৰক স্কেলাৰেৰে পূৰণ আৰু ভেক্টৰৰ স্কেলাৰ পূৰণ পাইছোঁ। ভেক্টৰ স্থানতো আমি ভেক্টৰৰ যোগ, ভেক্টৰক স্কেলাৰেৰে পূৰণ আৰু ভেক্টৰৰ স্কেলাৰ পূৰণ পাওঁ। গতিকে ভেক্টৰ স্থানক আমি বলবিজ্ঞান বা বিশ্লেষণাত্মক জ্যামিতিত পোৱা ভেক্টৰৰ সাধাৰণীকৰণ বুলি ক'ব পাৰোঁ।

১১.৩ ভেক্টৰ স্থানৰ সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ (DEFINITION AND EXAMPLES OF VECTOR SPACE)

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল "+" প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীত V এটা আবেলীয় সংঘ। ধৰা হ'ল "+, $\bullet$ " প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীত F এটা ক্ষেত্ৰ।

F অৰ প্ৰত্যেক মৌল α আৰু V ৰ x অৰ বাবে, $\alpha x \in V$. ইয়াক স্কেলাৰ পূৰণ বুলি কোৱা হয়।

তেতিয়া ক্ষেত্ৰ F অৰ ওপৰত V ক ভেক্টৰ স্থান (Vector space over the field F) বুলি কোৱা হয় যদি তলৰ চৰ্তকেইটা সিদ্ধ হয়।

1. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$
2. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$
3. $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$
4. $1x=x$

য'ত $\alpha,\beta\in F$, $x,y\in V$ আৰু 1 হ'ল F অৰ একক মৌল।

আমি এনেদৰে লিখিম, $V(F)$ এটা ভেক্টৰ স্থান।

টোকা

1. V ৰ মৌলবোৰক ভেক্টৰ (vector) আৰু F অৰ মৌলবোৰক স্কেলাৰ (scalar) বুলি কোৱা হয়।
2. $x+y$ এ V ৰ দুটা ভেক্টৰ x আৰু y ৰ 'যোগ' (+) বুজায়, $x,y\in V$. আনহাতেদি $\alpha+\beta$ ই F অৰ দুটা স্কেলাৰ α আৰু β ৰ 'যোগ' (+) বুজায়, $\alpha,\beta\in F$. এই কথাটো মনত ৰাখিব লাগিব যে এই 'যোগ' দুটা পৃথক, যদিও দুয়োটাকে একে প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হৈছে।
3. αx এ V ৰ ভেক্টৰ x আৰু F অৰ স্কেলাৰ α ৰ 'পূৰণ' বুজায়। আনহাতেদি $\alpha\beta$ ই F অৰ দুটা স্কেলাৰ α,β ৰ 'পূৰণ' বুজায়। এই কথাটোৰো মনত ৰাখিব লাগিব যে এই 'পূৰণ' দুটাও পৃথক, যদিও দুয়োটাকে একে প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হৈছে।
4. " + " প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত V আবেলীয় সংঘ। " + " প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত F এটা ক্ষেত্ৰ। আকৌ ভেক্টৰক স্কেলাৰেৰে পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াটোৰো আছে। গতিকে দেখা গ'ল যে এটা ভেক্টৰ স্থানত মুঠতে চাৰিটা প্ৰক্ৰিয়া আছে।
5. " + " প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত V আবেলীয় সংঘ। গতিকে " + " প্ৰক্ৰিয়া সাপেক্ষে একক মৌল 0 আছে। ইয়াক শূন্য মৌল (zero element) বুলি কোৱা হয়। আকৌ F এটা ক্ষেত্ৰ। গতিকে F অত শূন্য মৌল 0 আছে। এই শূন্য দুটা পৃথক, যদিও দুয়োটাকে একে প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হৈছে। আকৌ F অত একক মৌল 1 আছে। মনত ৰাখিব লাগিব যে এই 1 টো বাস্তৱ সংখ্যা 1 নহ'বও পাৰে।

6. যদি $F = R$, অর্থাৎ, যদি F বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্র হয়, তেনেহ'লে $V(R)$ অক বাস্তৱ ভেক্টৰ স্থান (real vector space) বুলি কোৱা হয়।
   যদি $F = C$, অর্থাৎ, যদি F জটিল সংখ্যাৰ ক্ষেত্র হয়, তেনেহ'লে $V(C)$ ক জটিল ভেক্টৰ স্থান (complex vector space) বুলি কোৱা হয়।
7. V ত 'বিয়োগ'ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়, $x - y = x + (-y)$, য'ত $-y$ হ'ল y ৰ যোগাত্মক বিপৰীত (additive inverse), y ; $x, y \in V$.

উদাহৰণ 1 ঃ ধৰা হ'ল $R^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2$ বাস্তৱ$\}$, আৰু R বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্র। R^2 অত যোগ আৰু স্কেলাৰ পূৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad \text{... (1)}$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) \quad \text{... (2)}$$

য'ত $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in R^2$, $\alpha \in R$.

তেনেহ'লে R অৰ ওপৰত R^2 এটা ভেক্টৰ স্থান, অর্থাৎ R^2 এটা বাস্তৱ ভেক্টৰ স্থান।

সমাধান ঃ I. প্রথমতে আমি (1) অৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ + প্রক্রিয়াৰ অধীনত R^2 এটা আবেলীয় সংঘ বুলি প্রমাণ কৰোঁ।

(i) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in R^2$

(ii) ধৰা হ'ল $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in R^2$

এতিয়া $(x + y) + z = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) + (z_1, z_2)$

$$= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2)$$
$$= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2))$$
$$= (x_1, x_2) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2)$$
$$= x + (y + z)$$

$\therefore$ "+" প্রক্রিয়াই সাহচর্য বিধি মানি চলে।

(iii) আমি জানো $0 = (0,0) \in R^2$

আৰু $x + 0 = (x_1, x_2) + (0,0) = (x_1 + 0, x_2 + 0) = (x_1, x_2) = x$

সেইদৰে, $0 + x = x$

অর্থাৎ, $x + 0 = x = 0 + x$

[মন কৰিব লগীয়া যে $0 = (0,0)$, ত, বাওঁহাতৰ 0 টো এটা প্রতীক, বাস্তৱ সংখ্যা 0 নহয়।]

(iv) প্রত্যেক $x = (x_1, x_2) \in R^2$ অৰ বাবে,

$-x = (-x_1, -x_2) \in R^2$ আছে যাতে $x + (-x) = (x_1, x_2) + (-x_1, -x_2)$

$$= (x_1 - x_1, x_2 - x_2)$$
$$= (0,0) \quad = 0$$

সেইদৰে $(-x)+x=0$

অর্থাৎ, $x+(-x)=0=(-x)+x$

(v) $x+y=(x_1,x_2)+(y_1,y_2)$

$=(x_1+y_1,x_2+y_2)$

$=(y_1+x_1,y_2+x_2)$

$\therefore$ "+" প্রক্রিয়াৰ অধীনত R^2 এটা আবেলীয় সংঘ।

II. আমি জানো $\alpha\in R, x=(x_1,x_2)\in R^2$

$\alpha x=\alpha(x_1,x_2)$

$=(\alpha x_1,\alpha x_2)\in R^2$

III. (i) $\alpha(x+y)=\alpha(x_1+y_1,x_2+y_2)$

$=(\alpha x_1+\alpha y_1,\alpha x_2+\alpha y_2)$

$=(\alpha x_1,\alpha x_2)+(\alpha y_1,\alpha y_2)$

$=\alpha(x_1,x_2)+\alpha(y_1,y_2)$

$=\alpha x+\alpha y$

(ii) $(\alpha+\beta)x=(\alpha+\beta)(x_1,x_2)$

$=((\alpha+\beta)x_1,(\alpha+\beta)x_2)$

$=(\alpha x_1+\beta x_1,\alpha x_2+\beta x_2)$

$=(\alpha x_1,\alpha x_2)+(\beta x_1,\beta x_2)$

$=\alpha(x_1,x_2)+\beta(x_1,x_2)$

$=\alpha x+\beta x\ ,\alpha,\beta\in R, x=(x_1,x_2)\in R^2$

(iii) $(\alpha\beta)x=\alpha\beta(x_1,x_2)$

$=((\alpha\beta)x_1,(\alpha\beta)x_2)$

$=(\alpha(\beta x_1),\alpha(\beta x_2))$

$=\alpha(\beta x_1,\beta x_2)$

$=\alpha(\beta(x_1,x_2))$

$=\alpha(\beta x)$

(iv) আমি জানো $1\in R$

$1x=1(x_1,x_2)=(1x_1,1x_2)=(x_1,x_2)=x$

$\therefore$ R অৰ ওপৰত R^2 এটা ভেক্টৰ স্থান, অর্থাৎ R^2 এটা বাস্তৱ ভেক্টৰ স্থান।

উদাহৰণ 2 ঃ ধৰা হ'ল $R^n=\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, x_2$ বাস্তৱ সংখ্যা$\}$, আৰু R বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰ। R^n বাস্তৱ ভেক্টৰ স্থান হ'ব যোগ আৰু স্কেলাৰ পূৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়—

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$$

য'ত $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$ আৰু $\alpha \in R^n$.

আগৰ অংকটোৰ দৰে এইটো প্ৰমাণ কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 3 ঃ ধৰা হ'ল $[a,b]$ত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বাস্তৱ মান বিশিষ্ট অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ সংহতিটো V। তেনেহ'লে V এটা বাস্তৱ ভেক্টৰ স্থান হ'ব যদি যোগ আৰু স্কেলাৰ পুৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

য'ত $f, g \in V$, আৰু $\alpha \in R$.

I. প্ৰথমতে আমি প্ৰমাণ কৰোঁ যে যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত V এটা আবেলীয় সংঘ।

(i) ধৰা হ'ল $f, g \in V$

$\therefore [a,b]$ ত সংজ্ঞাৱদ্ধ f আৰু g দুটা বাস্তৱ মানবিশিষ্ট ফলন।

$\therefore f+g$ ও $[a,b]$ ত সংজ্ঞাৱদ্ধ বাস্তৱ মানবিশিষ্ট ফলন।

$\therefore \quad f+g \in V$.

(ii) ধৰা হ'ল $f, g, h \in V$ আৰু $x \in [a,b]$

এতিয়া, $((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x)$

$$= (f(x) + g(x)) + h(x)$$
$$= f(x) + (g(x) + h(x))$$
$$= f(x) + (g+h)(x)$$
$$= (f + (g+h))(x), \forall x \in [a,b]$$

$\therefore (f+g)+h = f+(g+h), \ \forall f, g, h \in V$

(iii) ধৰা হ'ল $\theta : [a,b] \to R$, $\theta(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$.

স্পষ্টত ঃ $\theta \in V$

এতিয়া $(\theta + f)(x) = \theta(x) + f(x)$

$$= 0 + f(x)$$
$$= f(x), \ \forall x \in [a,b]$$

$\therefore \theta + f = f$

সেইদৰে $f + \theta = f$

$\therefore f + \theta = f = \theta + f$

(iv) V ৰ প্ৰত্যেক f অৰ বাবে, $-f$ অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$$(-f)(x) = -f(x), \forall x \in [a,b]$$

স্পষ্টতঃ $-f \in v$

এতিয়া $(f+(-f))(x) = f(x)+(-f)(x)$

$$= f(x) - f(x)$$
$$= 0$$
$$= \theta(x), \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\therefore f+(-f) = \theta$$

সেইদৰে, $(-f)+f = \theta$

$$\therefore f+(-f) = \theta = (-f)+f$$

(v) $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$$= g(x)+f(x)$$
$$= (g+f)(x), \forall x \in [a,b]$$

$$\therefore f+g = g+f$$

$\therefore$ যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত V এটা আবেলীয় সংঘ।

II. ধৰা হ'ল $\alpha \in R$, $f \in V$, $x \in [a,b]$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \in R$$

যিহেতু f অবিচ্ছিন্ন, $\therefore \alpha f$ ও অবিচ্ছিন্ন।

$$\therefore \alpha f \in V$$

III. (i) $(\alpha(f+g))(x) = \alpha(f+g)(x), \alpha \in R, f, g \in V$

$$= \alpha(f(x)+g(x)), x \in [a,b]$$
$$= \alpha f(x)+\alpha g(x)$$
$$= (\alpha f+\alpha g)(x), \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\therefore \alpha(f+g) = \alpha f+\alpha g$$

(ii) $((\alpha+\beta)f)(x) = (\alpha+\beta)f(x)$

$$= \alpha f(x)+\beta f(x)$$
$$= (\alpha f)(x)+(\beta f)(x)$$
$$= (\alpha f+\beta f)(x) \quad , \forall x \in [a,b]$$

$$\therefore (\alpha+\beta)f = \alpha f+\beta f$$

(iii) $((\alpha\beta)f)(x) = (\alpha\beta)f(x)$

$$= \alpha(\beta f(x))$$

$$= \alpha((\beta f)(x)),\ \forall x \in [a,b]$$

$$\therefore (\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$$

(iv) $(1f)(x) = 1f(x)$

$$= f(x), \forall x \in [a,b]$$

$$\therefore 1f = f$$

$\therefore$ R অৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান,

অর্থাৎ V এটা বাস্তৱ ভেক্টৰ স্থান।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

প্রশ্ন নং ১ঃ প্রমাণ কৰক যে R অৰ ওপৰত বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্র R এটা ভেক্টৰ স্থান।

প্রশ্ন নং ২ঃ প্রমাণ কৰক যে C ৰ ওপৰত জটিল সংখ্যাৰ ক্ষেত্র C এটা ভেক্টৰ স্থান।

প্রশ্ন নং ৩ঃ প্রমাণ কৰক যে R অৰ ওপৰত জটিল সংখ্যাৰ ক্ষেত্র C এটা ভেক্টৰ স্থান। Cৰ ওপৰত R ভেক্টৰ স্থান হয়নে?

প্রশ্ন নং ৪ঃ ধৰা হ'ল বাস্তৱ সংখ্যাৰ ওপৰত সকলো $m \times n$ মৌলকক্ষৰ সংহতিটো V. প্রমাণ কৰক যে R অৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান।

প্রশ্ন নং ৫ঃ ধৰা হ'ল V ={(x_1, x_2) | x_1, x_2 বাস্তৱ}, আৰু $\alpha \in R$. V ত যোগ আৰু স্কেলাৰ পূৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে—

$$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\alpha x = \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, x_2)$$

য'ত $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in V, \alpha \in R$

প্রমাণ কৰক যে R অৰ ওপৰত V ভেক্টৰ স্থান নহয়।

১১.৪ প্রাথমিক ধর্ম (ELEMENTARY PROPERTIES)

ধৰা হ'ল এটা ক্ষেত্র F অৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। ধৰা হ'ল $\alpha, \beta \in F, x, y \in V$. তেনেহ'লে

(i) $\alpha 0 = 0$ (এই "0" টো আবেলীয় সংঘ V ৰ শূন্য মৌল)

(ii) $0x = 0$ (বাওহাতৰ "0" টো ক্ষেত্র F অৰ শূন্য মৌল আৰু সোঁহাতৰ "0" টো V ৰ শূন্য মৌল)

(iii) যদি $\alpha x = 0$, তেনেহ'লে $\alpha = 0$ or $x = 0$

(iv) $(-\alpha)x = \alpha(-x) = -\alpha x$

(v) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$

(vi) $(\alpha-\beta)x=\alpha x-\beta x$

প্ৰমাণ ঃ (i) আমি জানো $0+0=0$

ইয়াত $0\in V$

এতিয়া $\alpha 0=\alpha(0+0)$

$=\alpha 0+\alpha 0$

$\therefore \alpha 0+(-\alpha 0)=\alpha 0+\alpha 0+(-\alpha 0)$

$\Rightarrow 0=\alpha 0$

অৰ্থাৎ $\alpha 0=0$

(ii) আমি জানো $0+0=0$

এইটো $0\in F$

এতিয়া $0x=(0+0)x$

$=0x+0x$

$\therefore 0x+(-0x)=0x+0x+(-0x)$

$\Rightarrow 0=0x$

অৰ্থাৎ $0x=0$

(iii) দিয়া আছে $\alpha x=0$

যদি $\alpha=0$, প্ৰমাণ কৰিবলৈ একোৱেই নাই।

ধৰা হ'ল $\alpha\neq 0$, $\therefore \alpha^{-1}$ আছে।

এতিয়া $x=1x$

$=(\alpha\alpha^{-1})x$

$=\alpha^{-1}(\alpha x)$

$=\alpha^{-1}0$

$=0$

(iv) আমি জানো $x+(-x)=0$, এই 0 টো V ৰ শূন্য মৌল

$\alpha+(-\alpha)=0$, এই 0 টো F ৰ শূন্য মৌল

এতিয়া, $\alpha 0=\alpha(x+(-x))$

$\Rightarrow 0=\alpha x+\alpha(-x)$

$\therefore (-\alpha x)+0=(-\alpha x)+\alpha x+\alpha(-x)$

$\Rightarrow -\alpha x=\alpha(-x)$

আকৌ, $0x=(\alpha+(-\alpha))x$

$\Rightarrow 0=\alpha x+(-\alpha)x$

$\therefore\ (-\alpha x)+0=(-\alpha x)+\alpha x+(-\alpha)x$

$\Rightarrow -\alpha x = (-\alpha)x$

দেখা গ'ল যে, $(-\alpha)x = \alpha(-x) = -\alpha x$.

(v) আমি জানো $x - y = x + (-y)$

আকৌ আমি জানো $\alpha(-y) = -\alpha y$

এতিয়া $\alpha(x-y) = \alpha(x+(-y))$

$= \alpha x + \alpha(-y)$

$= \alpha x - \alpha y$

(vi) ওপৰৰটোৰ দৰেই কৰিব পৰা যাব।

উদাহৰণ 4 ঃ ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। প্ৰমাণ কৰক যে

$$x + x = 2x, \forall x \in V$$

সমাধান ঃ দিয়া আছে

$x + x = 1x + 1x$

$= (1+1)x$

$= 2x$.



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

প্ৰশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। ধৰা হ'ল $x, y \in V$ আৰু $\alpha, \beta \in F$. প্ৰমাণ কৰক যে

(i) যদি $\alpha x = \beta x$, তেনেহ'লে $\alpha = \beta$, $x \neq 0$

(ii) যদি $\alpha x = \alpha y$, তেনেহ'লে $x = y$, $\alpha \neq 0$

(iii) যদি $\alpha x = 0$, আৰু $x \neq 0$, তেনেহ'লে $\alpha = 0$

(iv) যদি $\alpha x = 0$, আৰু $\alpha \neq 0$, তেনেহ'লে $x = 0$

(v) যদি $\alpha x = x$, তেনেহ'লে $\alpha = 1$ বা $x = 0$.

১১.৫ ভেক্টৰ স্থানৰ উপস্থান (SUBSPACE OF A VECTOR SPACE)

ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। ধৰা হ'ল W, V ৰ এটা অৰিক্ত উপসংহতি।

W ক V ৰ উপস্থান (subspace) বুলি কোৱা হয় যদি V ৰ যোগ আৰু স্কেলৰ পূৰণৰ অধীনত W-ও F-অৰ ওপৰত এটা ভেক্টৰ স্থান হয়।

টোকা ঃ 1. V নিজেই V ৰ উপস্থান।

2. যোগাধীনত সংঘ V ৰ শূন্য মৌলৰ দ্বাৰা গঠিত $\{0\}$ সংহতিটোৱেও এটা ভেক্টৰ স্থান। ইয়াক ৰিক্ত স্থান (empty space) বুলি কোৱা হয়। $\{0\}$ ও V ৰ এটা উপস্থান।

উপপাদ্য ঃ V(F) ভেক্টৰ স্থানৰ এট অৰিক্ত উপসংহতি W, V ৰ উপস্থান হ'ব যদি আৰু যদিহে যোগ আৰু স্কেলাৰ পূৰণৰ সহায়ত W আৱদ্ধ হয়।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল, W, V(F) অৰ এটা উপস্থান। গতিকে, সংজ্ঞামতে, যোগ আৰু স্কেলাৰ পূ�ৰণৰ অধীনত W আৱদ্ধ।

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল যোগ আৰু স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত W আৱদ্ধ।

ধৰা হ'ল $a,b \in W$

এতিয়া $1 \in F$

$\therefore -1 \in F$

এতিয়া $-1 \in F, b \in W$

$\therefore (-1)b \in W$ অৰ্থাৎ $-b \in W$

গতিকে, $a \in W, -b \in W$

$\therefore a-b \in W$

$\therefore$ গতিকে যোগাত্মক আবেলীয় সংঘ V ৰ W এটা উপসংঘ।

ভেক্টৰ স্থানৰ বাবে বাকী আটাইকেইটা চর্ত W ত সিদ্ধ হয়, কিয়নো সেই চর্তবোৰ V ত সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ F অৰ ওপৰত W এটা ভেক্টৰ স্থান।

উপপাদ্য ঃ V(F) ভেক্টৰ স্থানৰ এটা অৰিক্ত উপসংহতি W, V ৰ উপস্থান হ'ব যদি আৰু যদিহে $\alpha x + \beta y \in W \ \forall \ \alpha, \beta \in F; x, y \in W$.

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল, W, V ৰ এটা উপস্থান।

ধৰা হ'ল $x, y \in W$, $\alpha, \beta \in F$

$\therefore \alpha x \in W$, $\beta y \in W$

$\therefore \alpha x + \beta y \in W$

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল W, V ৰ এটা অৰিক্ত উপসংহতি যাতে সকলো $\alpha, \beta \in F$; $x, y \in W$, ৰ বাবে $\alpha x + \beta y \in W$.

এতিয়া $1 \in F$

$\therefore 1x + 1y \in W$

অৰ্থাৎ $x + y \in W$

$\therefore$ যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত W আৱদ্ধ।

আকৌ $\alpha \in F$, $0 \in F$

$\therefore \alpha x + 0y \in W$

অৰ্থাৎ, $\alpha x \in W$

$\therefore$ স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত W আৱদ্ধ।

$\therefore$ W, V ৰ এটা উপস্থান (আগৰ উপপাদ্যটোৰ সহায়ত)।

উদাহৰণ 5 ঃ $R^2(R)$ ভেক্টৰ স্থানটো লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $W = \{(a,0) : a \in R\}$

স্পষ্টত ঃ $W \subseteq R^2$ আৰু $W \neq \phi$

ধৰা হ'ল $\alpha,\beta \in R$; $(a,0),(b,0) \in W$

$$\alpha(a,0)+\beta(b,0)=(\alpha a,0)+(\beta a,0)$$
$$=(\alpha a+\beta a,0+0)$$
$$=(\alpha a+\beta a,0)\in W$$

$\therefore$ R^2 অৰ W এটা উপস্থান।

উদাহৰণ 6 ঃ $R^3(R)$ ভেক্টৰ স্থানটো লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $W=\{(x_1,x_2,x_3): x_1+x_2+x_3=0, x_1,x_2,x_3 \in R\}$

স্পষ্টত ঃ $W \subseteq R^3, W \neq \phi$

ধৰা হ'ল $\alpha,\beta \in R$; $x=(x_1,x_2,x_3)\in W$, $y=(y_1,y_2,y_3)\in W$

$$\therefore x_1+x_2+x_3=0$$
$$y_1+y_2+y_3=0$$

এতিয়া, $\alpha x+\beta y=\alpha(x_1,x_2,x_3)+\beta(y_1,y_2,y_3)$

$$=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3)+(\beta y_1,\beta y_2,\beta y_3)$$
$$=(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\beta y_3+\alpha x_3)$$

এতিয়া, $(\alpha x_1+\beta y_1)+(\alpha x_2+\beta y_2)+(\beta y_3+\alpha x_3)$

$$=\alpha(x_1+x_2+x_3)+\beta(y_1+y_2+y_3)$$
$$=\alpha 0+\beta 0$$
$$=0$$

$\therefore \alpha x+\beta y \in W$

$\therefore$ V ৰ W এটা উপস্থান।

উপপাদ্য ঃ এটা ভেক্টৰ স্থানৰ দুটা উপস্থানৰ ছেদনো এটা উপস্থান।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল ক্ষেত্ৰ F অৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান।

ধৰা হ'ল W_1 আৰু W_2, V ৰ দুটা উপস্থান।

$$\therefore W_1 \neq \phi, W_2 \neq \phi$$

$\therefore W_1 \cap W_2 \neq \phi$, কিয়নো অন্ততঃ W ৰ শূন্য মৌল 0 $\in$ $W_1 \cap W$.

ধৰা হ'ল $\alpha,\beta \in F; x,y \in W_1 \cap W_2$

$x \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow x \in W$ আৰু $x \in W_2$

$y \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow y \in W_1$ আৰু $y \in W_2$.

এতিয়া $\alpha,\beta \in F$; $x,y \in W_1$ আৰু V ৰ W_1 এটা উপস্থান।

$$\therefore \alpha x+\beta y \in W_1$$

আকৌ $\alpha,\beta \in F$; $x,y \in W_2$ আৰু V ৰ W_2 উপস্থান।

$$\therefore \alpha x + \beta y \in W_2$$

গতিকে, $\alpha x + \beta y \in W_1$ আৰু $\alpha x + \beta y \in W_2$

$$\therefore \alpha x + \beta y \in W_1 \cap W_2$$

$\therefore$ V ৰ $W_1 \cap W_2$ এটা উপস্থান।

টোকা ঃ দুটা উপস্থানৰ মিলন এটা উপস্থান নহ'বও পাৰে।

আমি জানো যে মৌলক্রমিক যোগ আৰু মৌলক্রমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত R অৰ ওপৰত R^3 এটা ভেক্টৰ স্থান।

ধৰা হ'ল $W_1 = \{(x,0,0) : x \in R\}$

$$W_2 = \{(0, y, 0) : x \in R\}$$

স্পষ্টত ঃ R^3 অৰ W_1 এটা উপস্থান, R^3 অৰ W_2 এটা উপস্থান।

এতিয়া $(5,0,0) \in W_1$, $(0,5,0) \in W_2$

কিন্তু $(5,0,0)+(0,0,5) = (5,5,0) \notin W_1 \cup W_2$

অর্থাৎ, $(5,0,0) \in W_1 \cup W_2$, $(0,5,0) \in W_1 \cup W_2$

কিন্তু $(5,0,0)+(0,0,5) \notin W_1 \cup W_2$

$\therefore$ R^3 অৰ $W_1 \cup W_2$ এটা উপস্থান নহয়।

উপপাদ্য ঃ দুটা উপস্থানৰ মিলন এটা উপস্থান যদি আৰু যদিহে এটা আনটোৰ উপসংহতি হয়।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল ক্ষেত্ৰ F অৰ ওপৰত V ৰ এটা ভেক্টৰ স্থান।

ধৰা হ'ল W_1, W_2 , V ৰ দুটা উপস্থান।

ধৰা হ'ল $W_1 \subseteq W_2$. গতিকে $W_1 \cup W_2 = W_2$

Θ V ৰ W_2 এটা উপস্থান,

$\therefore$ V ৰ $W_1 \cup W_2$ এটা উপস্থান।

বিপৰীতক্রমে, ধৰা হ'ল W_1 আৰু W_2 , V ৰ দুটা উপস্থান যাতে $W_1 \cup W_2$ ও V ৰ এটা উপস্থান।

প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে $W_1 \subseteq W_2$ বা $W_2 \subseteq W_1$

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল এইটো সত্য নহয়।

$$\therefore W_1 \not\subseteq W_2 \text{ আৰু } W_2 \not\subseteq W_1$$

$\therefore$ W_1 অত এনে এটা x আছে যাতে $x \notin W_2$.

আকৌ, W_2 ত এনে এটা y আছে যাতে $y \notin W_1$.

এতিয়া $x \in W_1 \Rightarrow x \in W_1 \cup W_2$

$$y \in W_2 \Rightarrow y \in W_1 \cup W_2$$

Θ V ৰ $W_1 \cup W_2$ এটা উপস্থান,

$$\therefore x + y \in W_1 \cup W_2$$

$\Rightarrow x+y \in W_1$ বা $x+y \in W_2$

ধৰা হ'ল $x+y \in W_i$

এতিয়া $-x \in W_1$ $(\Theta\ x \in W_1)$, $x+y \in W_1$

$\therefore (-x)+x+y \in W_1$

$\Rightarrow (-x+x)+y \in W_1$

$\Rightarrow 0+y \in W_1$

$\Rightarrow y \in W_1$

এইটো স্ববিৰোধী কথা।

সেইদৰে, ধৰা হ'ল $x+y \in W_2$

এতিয়া $x+y \in W_2, -y \in W_2$ $(\Theta\ y \in W_2)$

$\therefore (x+y)+(-y) \in W_2$

$\Rightarrow x+(y+(-y)) \in W_2$

$\Rightarrow x+0 \in W_2$

$\Rightarrow x \in W_2$,

এইটো স্ববিৰোধী কথা।

গতিকে, আমি ধৰি লোৱা কথাটো ভুল।

$\therefore W_1 \subseteq W_2$ বা $W_2 \subseteq W_1$.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৩

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল মৌলক্রমিক যোগ আৰু মৌলক্রমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত $R^3(R)$ এটা ভেক্টৰ স্থান।

(i) ধৰা হ'ল $W=\{(a,2b,3c): a,b,c \in R\}$. প্রমাণ কৰক যে R^3 ৰ W এটা উপস্থান।

(ii) ধৰা হ'ল $W=\{(x,y,z): x-3y+4z=0, x,y,z \in R\}$. প্রমাণ কৰক যে R^3 ৰ W এটা উপস্থান।

(iii) ধৰা হ'ল $W=\{(x,y,z): x^2+y^2=z^2, x,y,z \in R\}$. প্রমাণ কৰক যে R^3 ৰ W উপস্থান নহয়।

প্রশ্ন নং ২ঃ ধৰা হ'ল মৌলক্রমিক যোগ আৰু মৌলক্রমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত $R^n(R)$ এটা ভেক্টৰ স্থান।

ধৰা হ'ল $W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$. প্রমাণ কৰক যে R^n অৰ W উপস্থান নহয়।

১১.৮ ৰৈখিক পৰতন্ত্ৰতা আৰু স্বতন্ত্ৰতা (LINEAR DEPENDENCE AND INDEPENDENCE)

ধৰা হ'ল ক্ষেত্ৰ F অৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। V ৰ ভেক্টৰ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in V$ অক ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ (linearly dependent) বুলি কোৱা হয় যদি F অত স্কেলাৰ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in F$ (সকলোবোৰ শূন্য নহয়) থাকে যাতে

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 .$$

গতিকে V ভেক্টৰ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in V$ ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ হ'ব যদি

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

$\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ অৰ অন্ততঃ এটা শূন্য নহয়।

যদি $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \cdots, \alpha_n = 0$;

তেনেহ'লে $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ভেক্টৰক ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ (linearly dependent) বুলি কোৱা হয়।

এটা সসীম সংহতি $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ অক ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ বুলি কোৱা হয় যদিহে ইয়াৰ n টা মৌল ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ হয়। আনহাতেদি ইয়াক ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ বুলি কোৱা হয় যদি ইয়াৰ n টা মৌল ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ হয়।

V ৰ কোনো উপসংহতি W ক ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ বুলি কোৱা হয় যদি W ৰ প্ৰতিটো সসীম অৰিক্ত উপসংহতি ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ হয়। অন্যথাই ইয়াক ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ বুলি কোৱা হয়।

টোকা ঃ

1. ধৰা হ'ল $x \in V$, আৰু $x \neq 0$

ধৰা হ'ল $\alpha \in F$

এতিয়া $\alpha x = 0$

$\Rightarrow \alpha x = 0x$

$\Rightarrow \alpha = 0$, $[\alpha x = \beta x \Rightarrow \alpha = \beta,$ যদি $x \neq 0]$

$\therefore x$ ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ, অৰ্থাৎ, এটা অশূন্য ভেক্টৰ সদায় ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

2. আমি জানো $1.0 = 0$, কিন্তু $1 \neq 0$, য'ত 1 হ'ল F অৰ একক মৌল।

$\therefore$ শূন্য ভেক্টৰ সদায় ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

3. এটা ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ ভেক্টৰৰ সংহতিৰ অধিসংহতি (superset) ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

4. এটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ ভেক্টৰৰ সংহতিৰ উপসংহতি (subset) ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

উদাহৰণ 7 ঃ মৌলক্ৰমিক যোগ আৰু মৌলক্ৰমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত R^2 (R) ভেক্টৰ

স্থানটো লোৱা হ'ল।

R^2 ৰ $e_1=(1,0), e_2=(0,1)$ ভেক্টৰ দুটা লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $\alpha_1, \alpha_2 \in R$

এতিয়া $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0$

$\Rightarrow \alpha_1(1,0)+\alpha_2(0,1)=(0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1,0)+(0,\alpha_2)=(0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1,\alpha_2)=(0,0)$

$\Rightarrow \alpha_1=0, \alpha_2=0$

$\therefore e_1=(1,0), e_2=(0,1)$ ভেক্টৰ দুটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

উদাহৰণ 8 ঃ মৌলক্ৰমিক যোগ আৰু মৌলক্ৰমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত R^3 (R) ভেক্টৰ স্থানটো লোৱা হ'ল।

R^3 ৰ $x=(1,2,-1), y=(2,2,1), z=(1,-2,3)$ ভেক্টৰ তিনিটা লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$

এতিয়া $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0$

$\Rightarrow \alpha_1(1,2,-1)+\alpha_2(2,2,1)+\alpha_3(1,-2,3)=(0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1,2\alpha_1,-\alpha_1)+(2\alpha_2,2\alpha_2,\alpha_2)+(\alpha_3,-2\alpha_3,3\alpha_3)=(0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3, 2\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3, -\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3)=(0,0,0)$

$\Rightarrow \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0 \ldots$ (1)

$2\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3=0$

অর্থাৎ, $\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0$ ... (2)

$-\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=0$ ... (3)

এতিয়া $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$=1(1+1)-2(1-1)+1(1+1)$

$=4\neq 0$

$\therefore$ (1),(2),(3) সমীকৰণৰ একমাত্ৰ সমাধান হ'ল $\alpha_1=0, \alpha_2=0, \alpha_3=0$.

$\therefore (1,2,-1),(2,2,1),(1,-2,3)$ ভেক্টৰ তিনিটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

উদাহৰণ 9 ঃ $R^3(R)$ ভেক্টৰ স্থানটো লোৱা হ'ল।

R^3 ৰ $x=(1,1,2), y=(1,2,5), z=(5,3,4)$ ভেক্টৰ তিনিটা লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$

এতিয়া $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0$

$\Rightarrow \alpha_1(1,1,2) + \alpha_2(1,2,5) + \alpha_3(5,3,4) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_1, 2\alpha_1) + (\alpha_2, 2\alpha_2, 5\alpha_2) + (5\alpha_3, 3\alpha_3, 4\alpha_3) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \ldots$ (1)

$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \ldots$ (2)

$2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \ldots$ (3)

এতিয়া $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

$= 1 \times (8-15) - 1 \times (4-6) + 5 \times (5-4)$

$= -7 + 2 + 5 = 0$

$\therefore$ সমীকৰণ প্ৰণালীৰ অশূন্য সমাধান আছে।

(1) আৰু (2)ৰ পৰা

$$\frac{\alpha_1}{3-10} = \frac{\alpha_2}{-(3-5)} = \frac{\alpha_3}{2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_1}{-7} = \frac{\alpha_2}{2} = \frac{\alpha_3}{1}$$

$\Rightarrow \alpha_1 = -7k, \alpha_2 = 2k, \alpha_3 = k, k \in R$

(3) ৰ পৰা $2 \times (-7k) + 5 \times 2k + 4k = 0$

$\therefore (-7k, 2k, k)$ এ (3) সিদ্ধ কৰে।

গতিকে, $(-7,2,1)$ এটা সমাধান।

$\therefore -7x + 2y + z = 0$

$\therefore (1,1,2), (1,2,5), (5,3,4)$ ভেক্টৰ তিনিটা ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ

উদাহৰণ 10 ঃ Q ৰ ওপৰত R ভেক্টৰ স্থানটো লোৱা হ'ল।

আমি জানো $1, \sqrt{3} \in R$

ধৰা হ'ল $\alpha, \beta \in Q$ যাতে $1\alpha + \sqrt{3}\beta = 0$

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল $\beta \neq 0$

$$\therefore \sqrt{3} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

এতিয়া $\alpha \in Q, \beta \in Q \quad \therefore -\frac{\alpha}{\beta} \in Q$

$\therefore \sqrt{3} \in Q$, এইটো স্ববিৰোধী কথা।

$\therefore \quad \beta = 0$

ইয়াৰ পৰা $\alpha = 0$

$\therefore$ Q ৰ ওপৰত R অত $\{1, \sqrt{3}\}$ ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

প্ৰমেয় ঃ যদি এটা ভেক্টৰ স্থানৰ দুটা ভেক্টৰ ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ হয়, তেনেহ'লে এটা আনটোৰ স্কেলাৰ গুণিতক হ'ব।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান।

ধৰা হ'ল $x, y \in V$ যাতে x, y ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

গতিকে স্কেলাৰ α, β আছে (দুয়োটা শূন্য নহয়) যাতে,

$$\alpha x + \beta y = 0$$

ধৰা হ'ল $\alpha \neq 0 \quad \therefore \alpha^{-1} \in F$

এতিয়া $\alpha x = -\beta y$

$\Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha x) = \alpha^{-1}(-\beta y)$

$\Rightarrow (\alpha^{-1}\alpha)x = (-\alpha^{-1}\beta)y$

$\Rightarrow x = \delta y$, $-\alpha^{-1}\beta = \delta$ বুলি ধৰা হ'ল

গতিকে, y ৰ স্কেলাৰ গুণিতক হ'ল x.

সেইদৰে, যদি $\beta \neq 0$, x অৰ স্কেলাৰ গুণিতক হ'ব y.



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৪

প্ৰশ্ন নং ১ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $R^3(R)$ অত $(1,1,2), (1,2,5), (5,3,4)$ ভেক্টৰ তিনিটা ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

প্ৰশ্ন নং ২ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $R^3(R)$ অত $(2,3,1), (2,1,3), (1,1,1)$ ভেক্টৰ তিনিটা ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $R^3(R)$ অত $(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)$ ভেক্টৰ তিনিটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $R^3(R)$ অত $(1,2,-1), (2,2,1), (1,-2,3)$ ভেক্টৰ তিনিটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

১১.৭ আধাৰ আৰু মাত্রা (BASIS AND DIMENSION)

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল F ক্ষেত্রৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। ধৰা হ'ল $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in V$ যিকোনো ভেক্টৰ।

$x = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$; য'ত $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in F$ অক $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ভেক্টৰৰ ৰৈখিক সংযোজন (linear combination) বুলি কোৱা হয়।

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল F ক্ষেত্রৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। V ৰ এটা উপসংহতি S অক V ৰ আধাৰ (basis) বুলি কোৱা হয় যদি

(i) S অৰ সসীম সংখ্যক মৌল ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্র,

(ii) V ৰ প্রতিটো ভেক্টৰ S অৰ সসীম সংখ্যক মৌলৰ ৰৈখিক সংযোজন।

উদাহৰণ 11 ঃ $R^2(R)$ ভেক্টৰ স্থানটো লোৱা হ'ল। R^2 ৰ উপসংহতি $S = \{e_1, e_2\}$ লোৱা হ'ল। য'ত $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$

ধৰা হ'ল $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ যাতে

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (0,0)$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2) = (0,0)$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$$

$\therefore$ S ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্র।

ধৰা হ'ল $x = (x_1, x_2) \in R^2$

এতিয়া, $x = (x_1, x_2)$

$$= x_1(1,0) + x_2(0,1)$$

$$= x_1 e_1 + x_2 e_2$$

গতিকে R^2 ৰ প্রতিটো ভেক্টৰক S অৰ মৌলৰ ৰৈখিক সংযোজন হিচাপে প্রকাশ কৰিব পাৰি।

$\therefore$ R^2 ৰ S এটা আধাৰ। ইয়াক প্রামাণিক আধাৰ (standard basis) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ 12 ঃ $R^3(R)$ অৰ প্রামাণিক আধাৰ হ'ল $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ য'ত $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

উদাহৰণ 13 ঃ $R^n(R)$ অৰ প্রামাণিক আধাৰ হ'ল $S = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ য'ত $e_1 = (1,0,0,\cdots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\cdots,0)$, $\cdots, e_n = (0,0,0,\cdots,1)$.

উদাহৰণ 14 ঃ $R^3(R)$ ভেক্টৰ স্থানটো লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল R^3 ৰ $T = \{u_1, u_2, u_3\}$ এটা উপসংহতি য'ত

$u_1=(1,1,0), u_2=(1,0,0), u_3=(0,1,1).$

ধৰা হ'ল $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in R$ যাতে

$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3=0$

$\Rightarrow \alpha_1(1,1,0)+\alpha_2(1,0,0)+\alpha_3(0,1,1)=(0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1,\alpha_1,0)+(\alpha_2,0,0)+(0,\alpha_3,\alpha_3)=(0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3,\alpha_3)=0$

$\therefore \alpha_1+\alpha_2=0$

$\alpha_1+\alpha_3=0$

$\alpha_3=0$

$\therefore \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

$\therefore$ T ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

ধৰা হ'ল $x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$ যাতে

$x=\beta_1u_1+\beta_2u_2+\beta_3u_3$, য'ত $\beta_1,\beta_2,\beta_3 \in R$

$\Rightarrow (x_1,x_2,x_3)=\beta_1(1,1,0)+\beta_2(1,0,0)+\beta_3(0,1,1)$

$\Rightarrow (x_1,x_2,x_3)=(\beta_1,\beta_1,0)+(\beta_2,0,0)+(0,\beta_3,\beta_3)$

$\Rightarrow (x_1,x_2,x_3)=(\beta_1+\beta_2,\beta_1+\beta_3,\beta_3)$

$\therefore \beta_1+\beta_2=x_1$

$\beta_1+\beta_3=x_2$

$\beta_3=x_3$

$\therefore \beta_1=x_2-\beta_3=x_2-x_3$

$\beta_2=x_1-\beta_1=x_1-x_2+x_3$

$\therefore (x_1,x_2,x_3)=(x_2-x_3)(1,1,0)+(x_1-x_2+x_3)(1,0,0)+x_3(0,1,1)$

গতিকে, R^3 ৰ প্ৰতিটো ভেক্টৰক T ৰ মৌলৰ ৰৈখিক সংযোজন হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

$\therefore R^3$ ৰ T এটা আধাৰ।

টোকা ঃ উদাহৰণ 12 আৰু উদাহৰণ 14 অৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে এটা ভেক্টৰ স্থানৰ একাধিক আধাৰ থাকিব পাৰে।

উদাহৰণ 15 ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $R^3(R)$ ভেক্টৰ স্থানৰ $\{(1,1,2),(1,2,5),(5,3,4)\}$ সংহতিটো আধাৰ নহয়।

সমাধান ঃ আমি ইতিমধ্যে প্ৰমাণ কৰিছোঁ যে $\{(1,1,2),(1,2,5),(5,3,4)\}$ সংহতিটো ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

$\therefore$ প্রদত্ত সংহতিটো R^3 ৰ আধাৰ নহয়।

উপপাদ্য ঃ ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। যদি V ৰ $S=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ এটা আধাৰ, তেনেহ'লে V ৰ প্ৰতিটো মৌলক $u_1,u_2,\cdots,u_n$ অৰ ৰৈখিক সংযোজন হিচাপে অদ্বিতীয়ভাৱে (uniquely) প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

প্ৰমাণ ঃ আধাৰৰ সংজ্ঞাৰ পৰা আমি জানো যে V ৰ প্ৰতিটো মৌলক $u_1,u_2,\cdots,u_n$ অৰ ৰৈখিক সংযোজন হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। আমি দেখুৱাম যে এই প্ৰকাশটো অদ্বিতীয় (unique)

ধৰা হ'ল $x\in V$

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল

$x=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n$

$x=\beta_1u_1+\beta_2u_2+\cdots+\beta_nu_n$

য'ত $\alpha_i\in F$, $\beta_i\in F$, $i=1,2,\cdots,n.$

$\therefore\ \alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n=\beta_1u_1+\beta_2u_2+\cdots+\beta_nu_n$

$\Rightarrow(\alpha_1-\beta_1)u_1+(\alpha_2-\beta_2)u_2+\cdots+(\alpha_n-\beta_n)u_n=0$

$\Theta\ \{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ,

$\therefore\ \alpha_1-\beta_1=0,\alpha_2-\beta_2=0,...,\alpha_n-\beta_n=0$

$\Rightarrow\alpha_1=\beta_1,\alpha_2=\beta_2,...,\alpha_n=\beta_n$

গতিকে, প্ৰকাশটো অদ্বিতীয়।

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল ক্ষেত্ৰ F অৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান।

যদি V ৰ কোনো আধাৰৰ মৌলৰ সংখ্যা সসীম হয়, তেনেহ'লে V ক সসীম মাত্ৰাৰ ভেক্টৰ স্থান (finite dimensional vector space) বুলি কোৱা হয়। ৰিক্ত স্থানৰ কোনো আধাৰ নাই। ইয়াক সসীম মাত্ৰাৰ বুলি কোৱা হয়। অন্য ভেক্টৰ স্থানক অসীম মাত্ৰাৰ (infinite dimensional) বুলি কোৱা হয়। মন কৰিব লগীয়া যে এটা সসীম মাত্ৰাৰ ভেক্টৰ স্থানৰ যিকোনো দুটা আধাৰৰ মৌলৰ সংখ্যা সমান।

এটা ভেক্টৰ স্থান V ৰ কোনো আধাৰৰ মৌলৰ সংখ্যাক V ৰ মাত্ৰা (dimension) বুলি কোৱা হয়। সাধাৰণতে ইয়াক dimV ৰে বুজোৱা হয়। ৰিক্ত স্থানৰ মাত্ৰা 0 বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ 16 ঃ আমি জানো যে $R^2(R)$ ভেক্টৰ স্থানৰ প্ৰামাণিক আধাৰ $\{(1,0),(0,1)\}$ ৰ মৌলৰ সংখ্যা দুই।

$\therefore \dim R^2=2$

উদাহৰণ 17 ঃ $R^3(R)$ অৰ মাত্ৰা 3.

উদাহৰণ 18 ঃ $R^n(R)$ অৰ মাত্ৰা n.

উদাহৰণ 19 ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $C(R)$ ভেক্টৰ স্থানৰ $\{1,i\}$ এটা আধাৰ। $C(R)$ অৰ মাত্ৰা

কিমান ?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $\alpha, \beta \in R$ যাতে

$$1\alpha + i\beta = 0$$
$$\Rightarrow \alpha + i\beta = 0 + i0$$
$$\Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0$$

$\therefore \{1, i\}$ সংহতি ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

এতিয়া $\alpha + i\beta \in C$

$$\alpha + i\beta = 1\alpha + i\beta$$

গতিকে, C ৰ প্ৰত্যেক ভেক্টৰক $\{1, i\}$ সংহতিৰ মৌলৰ ৰৈখিক সংযোজন হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

$\therefore \{1, i\}$ এটা আধাৰ।

$\{1, i\}$ সংহতিৰ মৌলৰ সংখ্যা 2.

$\therefore C(R)$ অৰ মাত্ৰা 2.

উদাহৰণ 20 ঃ $V(F)$ ভেক্টৰ স্থানৰ x, y দুটা মৌল আৰু $\alpha, \beta \in F$ হ'লে, প্ৰমাণ কৰক যে $\{x, y, \alpha x + \beta y\}$ ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

সমাধান ঃ আমি দেখিলোঁ

$$(-\alpha)x + (-\beta)y + 1(\alpha x + \beta y) = 0$$

ইয়াত $1 \neq 0$

$\therefore$ সংহতিটো ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।



১১.৮ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- ধৰা হ'ল "+" প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত V এটা আবেলীয় সংঘ। ধৰা হ'ল "+, $\bullet$" প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত F এটা ক্ষেত্ৰ।

  F অৰ প্ৰত্যেক মৌল α আৰু V ৰ x অৰ বাবে $\alpha x \in V$. ইয়াক স্কেলাৰ পূৰণ বুলি কোৱা হয়।

  তেতিয়া ক্ষেত্ৰ F অৰ ওপৰত V ক ভেক্টৰ স্থান বুলি কোৱা হয়, যদি তলৰ চৰ্তকেইটা সিদ্ধ হয়

  1. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
  2. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

3. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

4. $1x = x$

য'ত $\alpha, \beta \in F$, $x, y \in V$ আৰু 1 হ'ল F অৰ একক মৌল।

- যোগাধীনত সংঘ V ৰ শূন্য মৌলৰ দ্বাৰা গঠিত $\{0\}$ সংহতিটোৱে এটা ভেক্টৰ স্থান। ইয়াক ৰিক্ত স্থান বুলি কোৱা হয়।
- ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। ধৰা হ'ল W, V ৰ এটা অৰিক্ত উপসংহতি। W ক V ৰ উপস্থান বুলি কোৱা হয় যদি V ৰ যোগ আৰু স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত W ও F অৰ ওপৰত এটা ভেক্টৰ স্থান।

  V নিজেই V ৰ উপস্থান।

  $\{0\}$, V ৰ এটা উপস্থান।
- এটা ভেক্টৰ স্থানৰ দুটা উপস্থানৰ ছেদনো এটা উপস্থান। আনহাতেদি দুটা উপস্থানৰ মিলন এটা উপস্থান নহ'বও পাৰে।
- ক্ষেত্ৰ F অৰ ওপৰত ভেক্টৰ স্থান V ৰ ভেক্টৰ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ অক ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ বুলি কোৱা হয় যদি $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$.

  $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ অৰ অন্ততঃ এটা শূন্য নহয়।

  যদি $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$

  $\Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \cdots, \alpha_n = 0$;

  তেনেহ'লে $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ভেক্টৰক ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ বুলি কোৱা হয়।
- এটা অশূন্য ভেক্টৰ সদায় ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।
- শূন্য ভেক্টৰ সদায় ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।
- ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। ধৰা হ'ল $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in V$.

  যিকোনো ভেক্টৰ $x = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$; য'ত $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in F$ অক $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ভেক্টৰৰ ৰৈখিক সংযোজন (linear combination) বুলি কোৱা হয়।
- ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। V ৰ এটা উপসংহতি S অক V ৰ আধাৰ বুলি কোৱা হয় যদি

  (i) S অৰ সসীম সংখ্যক মৌল ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ,

  (ii) V ৰ প্ৰতিটো ভেক্টৰ S অৰ সসীম সংখ্যক মৌলৰ ৰৈখিক সংযোজন।
- এটা ভেক্টৰ স্থান V ৰ কোনো আধাৰৰ মৌলৰ সংখ্যাক V ৰ মাত্ৰা বুলি কোৱা হয়। ৰিক্ত স্থানৰ মাত্ৰা 0 বুলি কোৱা হয়।

১১.৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ I. আমি জানো যে যোগাধীনত R এটা আবেলীয় সংঘ।

II. যদি $\alpha \in R, x \in R$, তেনেহ'লে $\alpha x \in R$.

III.(i) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

(ii) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

(iii) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$

(iv) $1x=x$

য'ত $\alpha, \beta \in R$, $x, y \in R$ আৰু 1 হ'ল R অৰ একক মৌল।

$\therefore$ R অৰ ওপৰত R এটা ভেক্টৰ স্থান।

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ওপৰৰ টোৰ দৰে। নিজে কৰিব।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ প্রথম অংশ ঃ নিজে কৰিব।

দ্বিতীয় অংশ ঃ C ৰ ওপৰত R ভেক্টৰ স্থান নহয়।

$2+3i \in C, 5 \in R$

কিন্তু $(2+3i)5 \notin R$, অর্থাৎ স্কেলাৰ পূৰণ সাপেক্ষে R আৱদ্ধ নহয়।

টোকা ঃ এটা উপক্ষেত্রৰ ওপৰত এটা ক্ষেত্র ভেক্টৰ স্থান হ'ব, কিন্তু এটা ক্ষেত্রৰ ওপৰত এটা উপক্ষেত্র ভেক্টৰ স্থান হ'ব নোৱাৰে।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ I. আমি জানো যে মৌলকক্ষৰ যোগৰ অধীনত V এটা আবেলীয় সংঘ।

II. যদি $\alpha \in R, A \in V$, তেতিয়া $\alpha A \in V$.

III. (i) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

(ii) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

(iii) $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$

(iv) $1A=A$

য'ত $\alpha, \beta \in R$; $A, B \in V$, 1 হ'ল R অৰ একক মৌল।

$\therefore$ R অৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান।

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $\alpha, \beta \in R$, $x=(x_1, x_2) \in V$

এতিয়া $(\alpha+\beta)x=(\alpha+\beta)(x_1, x_2)$

$=((\alpha+\beta)x_1, x_2)$

$=(\alpha x_1+\beta x_1, x_2)$

$$\alpha x+\beta x=\alpha(x_1,x_2)+\beta(x_1,x_2)$$
$$=(\alpha x_1,x_2)+(\beta x_1,x_2)$$
$$=(\alpha x_1+\beta x_1,x_2+x_2)$$
$$=(\alpha x_1+\beta x_1,2x_2)$$
$$\therefore(\alpha+\beta)x\neq\alpha x+\beta x$$

$\therefore$ R অৰ ওপৰত V ভেক্টৰ স্থান নহয়।

অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) $\alpha x=\beta x$, $x\in V;\alpha,\beta\in F,x\neq 0$

$$\Rightarrow\alpha x+(-\beta x)=\beta x+(-\beta x)$$
$$\Rightarrow\alpha x-\beta x=0$$
$$\Rightarrow(\alpha-\beta)x=0$$
$$\Rightarrow\alpha-\beta=0\quad[\Theta\ x\neq 0,0x=0]$$
$$\Rightarrow\alpha=\beta$$

(ii) $\alpha x=\alpha y$, $x,y\in V;\alpha\in F,\alpha\neq 0$

$$\Rightarrow\alpha x-\alpha y=0$$
$$\Rightarrow\alpha(x-y)=0$$
$$\Rightarrow x-y=0\ [\Theta\ \alpha\neq 0,\alpha 0=0]$$
$$\Rightarrow x=y$$

(iii) $\alpha x=0,x\neq 0$

$$\Rightarrow\alpha x=0x$$
$$\Rightarrow\alpha=0$$

(iv) $\alpha x=0,\alpha\neq 0$

$$\Rightarrow\alpha x=\alpha 0$$
$$\Rightarrow x=0$$

(v) $\alpha x=x$

$$\Rightarrow\alpha x-x=0$$
$$\Rightarrow\alpha x-1x=0$$
$$\Rightarrow(\alpha-1)x=0$$
$$\Rightarrow\alpha-1=0\text{ বা }x=0$$
$$\Rightarrow\ \alpha\neq 1\text{ বা }x=0$$

অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ 3

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) ধৰা হ'ল $\alpha,\beta\in R$, আৰু $x=(a_1,2b_1,3c_1)\in W$,

$y=(a_2,2b_2,3c_2)\in W$

এতিয়া $\alpha x+\beta y=\alpha(a_1,2b_1,3c_1)+\beta(a_2,2b_2,3c_2)$

$=(\alpha a_1,2\alpha b_1,3\alpha c_1)+(\beta a_2,2\beta b_2,3\beta c_2)$

$=(\alpha a_1+\beta a_2,2\alpha b_1+2\beta b_2,3\alpha c_1+3\beta c_2)$

$=(\alpha a_1+\beta a_2,2(\alpha b_1+\beta b_2),3(\alpha c_1+\beta c_2))$

$\in W$

$\therefore R^3$ ৰ W এটা উপস্থান।

(ii) নিজে চেষ্টা কৰক।

(iii) নিজে চেষ্টা কৰক।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $\alpha,\beta\in R$

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in W, y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in W$

$\therefore x_1+x_2+\cdots+x_n=1$

$y_1+y_2+\cdots+y_n=1$

এতিয়া $\alpha x+\beta y$

$=\alpha(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\beta(y_1,y_2,\cdots,y_n)$

$=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n)+(\beta y_1,\beta y_2,\cdots,\beta y_n)$

$=(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\cdots,\alpha x_n+\beta y_n)$

এতিয়া, $(\alpha x_1+\beta y_1)+(\alpha x_2+\beta y_2)+\cdots+(\alpha x_n+\beta y_n)$

$=\alpha(x_1+x_2+\cdots+x_n)+\beta(y_1+y_2+\cdots+y_n)$

$=\alpha+\beta$

$\neq 0$, যদি $\alpha\neq 1-\beta$

$\therefore \alpha x+\beta y\notin W$, যদি $\alpha\neq 1-\beta$

$\therefore R^n$ অৰ W উপস্থান নহয়।

অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ 4

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।



১১.১০ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

১) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.

২) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).

৩) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).

৪) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.

৫) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd.Hyderaba500029.



১১.১১ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ প্ৰমাণ কৰক যে যিকোনো উপক্ষেত্ৰ K ৰ ওপৰত ক্ষেত্ৰ F এটা ভেক্টৰ স্থান।

প্ৰশ্ন ২ঃ ধৰা হ'ল মৌলক্ৰমিক যোগ আৰু মৌলিক্ৰমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত $R^3(R)$ এটা ভেক্টৰ স্থান।

ধৰা হ'ল R অৰ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ তিনিটা নিৰ্দিষ্ট মৌল।

$W = \{(x_1, x_2, x_3) : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0, x_1, x_2, x_3 \in R\}$

প্ৰমাণ কৰক যে $R^3(R)$ অৰ W এটা উপস্থান।

প্ৰশ্ন ৩ঃ ধৰা হ'ল মৌলক্ৰমিক যোগ আৰু মৌলক্ৰমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত $R^3(R)$ এটা ভেক্টৰ স্থান।

ধৰা হ'ল $W = \{(x_1, x_2, x_3) : x_2 + 4x_3 = 0, x_1, x_2, x_3 \in R\}$

$R^3(R)$ অৰ W উপস্থান হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ঃ বাস্তৱ সংখ্যাৰ ভেক্টৰ স্থান R(R) লোৱা হ'ল। ধৰা হ'ল $x, y, z \in R$. যদি $\{x + ay + bz, y, z\}$ সংহতিটো ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ হয়, প্ৰমাণ কৰক যে $\{x, y, z\}$ সংহতিটোৱো ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

[**ইংগিত** $\{x + ay + bz, y, z\}$ সংহতিটো ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ, স্কেলাৰ α, β, γ (সকলো শূন্য নহয়) আছে যাতে $\alpha(x + ay + bz) + \beta y + \gamma z = 0$

ইয়াৰ পৰা, $\alpha x + (\alpha a + \beta)y + (\alpha b + \gamma)z = 0$

যদি $\alpha \neq 0$, তেনেহ'লে $\{x, y, z\}$ ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

যদি $\alpha = 0$, তেনেহ'লে β, γ ৰ অন্ততঃ এটা শূন্য নহয়।

যেতিয়া $\alpha = 0$; $\alpha a + \beta = \beta$, $\alpha b + \gamma = \gamma$.

$\therefore$ $\alpha a + \beta$, $\alpha b + \gamma$ ৰ অন্ততঃ এটা শূন্য নহয়।

$\therefore$ $\{x, y, z\}$ সংহতিটো ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

প্ৰশ্ন ৫ঃ ধৰা হ'ল মৌলক্ৰমিক যোগ আৰু মৌলক্ৰমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত $R^3(R)$ এটা ভেক্টৰ স্থান।

$\{(1,2,1),(2,1,0),(1,-1,2)\}$ সংহতিটো $R^3(R)$ অৰ আধাৰ হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ৬ঃ ধৰা হ'ল মৌলক্ৰমিক যোগ আৰু মৌলক্ৰমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত $R^4(R)$ এটা ভেক্টৰ স্থান। প্ৰমাণ কৰক যে $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ সংহতিটো $R^4(R)$ অৰ এটা আধাৰ, য'ত $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$.

*** ***** ***