অধ্যায় ৪ ঃ উপসংঘ (SUBGROUPS)

অধ্যায় গাঁথনি

৪.১ উদ্দেশ্য
৪.২ পৰিচয়
৪.৩ উপসংঘ
৪.৪ চক্রীয় সংঘ
৪.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
৪.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
৪.৭ অধিক জানিবলৈ
৪.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

৪.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি অধোলিখিত বিষয়বোৰৰ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব—

- উপসংঘ
- চক্রীয় সংঘ

৪.২ পৰিচয়

তৃতীয় অধ্যায়টিত আমি সংঘ আৰু ইয়াৰ ধর্মসমূহৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিলো। এই অধ্যায়টিত আমি উপসংঘ আৰু ইয়াৰ ধর্মসমূহৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। আমি চক্রীয় সংঘৰ বিষয়েও এই অধ্যায়টিত আলোচনা কৰিম।

৪.৩ উপসংঘ

অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Z লোৱা হ'ল।

আমি জানো যে যোগ প্রক্রিয়াৰ অধীনত Z এটা সংঘ।

$2Z = \{0, \pm 2, \pm 4, ...\}$ হ'ল যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

স্পষ্টত ঃ 2Z, Z অৰ এটা অৰিক্ত উপসংহতি।

তদুপৰি যোগ প্রক্রিয়াৰ অধীনত 2Z এটা সংঘ।

এই ক্ষেত্রত 2Z অক Z অৰ এটা অৰিক্ত উপসংঘ বুলি কোৱা হয়।

সংজ্ঞা ঃ এটা সংঘ G ৰ কোনো অৰিক্ত উপসংহতি H অক উপসংঘ (subgroup) বুলি কোৱা হয় যদি G ৰ দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ অধীনত H ও এটা সংঘ হয়। প্রতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে লিখা হয় $H \leq G$.

টোকা ঃ (1) যদি e, G ৰ একক মৌল হয়, {e} ও G ৰ এটা উপসংঘ। ইয়াক তুচ্ছ (trivial) উপসংঘ বুলি কোৱা হয়। বাকীবোৰ উপসংঘ অতুচ্ছ।

(2) G নিজেই G ৰ এটা উপসংঘ। ইয়াক G ৰ অপ্রকৃত উপসংঘ (improper subgroup) বুলি কোৱা হয়। বাকীবোৰ উপসংঘ প্রকৃত।

[দ্রষ্টব্য John B. Fraleigh, A First Course in Abstract Algebra (First Indian Reprint, 2003)]

উদাহৰণ ১ ঃ ধৰা হ'ল G = {–1, 1, –i, i}, i = $\sqrt{-1}$

আমি জানো যে পূৰণ প্রক্রিয়াৰ অধীনত G এটা সংঘ।

ধৰা হ'ল H = {–1, 1}.

স্পষ্টত ঃ H ⊆ G.

আকৌ, পূৰণ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে H এটা সংঘ।

∴ H ≤ G এইটো G ৰ প্রকৃত উপসংঘ।

টোকা ঃযোগ প্রক্রিয়াৰ অধীনত বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি IR এটা সংঘ। পূৰণ প্রক্রিয়াৰ অধীনত ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি IR_+ এটা সংঘ। IR_+, IR অৰ এটা উপসংহতি, কিন্তু উপসংঘ নহয়। দ্বৈত প্রক্রিয়া বেলেগ।

উপপাদ্য ১ ঃ G সংঘৰ H এটা উপসংঘ। তেনেহ'লে

(i) H অৰ একক মৌলই G ৰ একক মৌল,

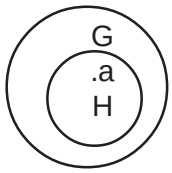
(ii) H অৰ কোনো মৌলৰ বিপৰীত, G ৰ মৌল হিচাপেও সেই একেটা মৌলৰ বিপৰীত একে।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু H≤G.

(i) যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e আৰু H অৰ একক মৌল f.

ধৰা হ'ল a ∈ H

∴ af = a = fa [Θ H অৰ একক মৌল f]



আকৌ a ∈ H ⇒ a ∈ G

∴ ae = a = ea [Θ G ৰ একক মৌল e]

∴ af = ae

⇒ f = e [বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা]

(ii) ধৰা হ'ল Gৰ একক মৌলও e.

∴ H অৰ একক মৌল e.

ধৰা হ'ল a ∈ H

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল H অত a ৰ বিপৰীত b আৰু Gত a ৰ বিপৰীত c.

∴ ab = e = ba

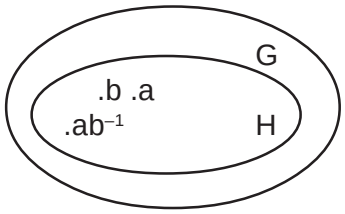
ac = e = ca

∴ ab = ac .⇒ b = c [বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা]

টোকা ঃ সংঘ G ৰ H, K দুটা উপসংঘ হ'লে আৰু G ৰ একক মৌল e হ'লে, H আৰু K উভয়ৰে একক মৌল হ'ব e. গতিকে H আৰু K ৰ অন্ততঃ এটা উমৈহতীয়া মৌল আছে, যথা একক মৌল। গতিকে আমি এইটো সিদ্ধান্তত উপনীত হ'ব পাৰো যে এটা সংঘৰ দুটা অসংযুক্ত (disjoint) উপসংঘ থাকিব নোৱাৰে।

উপপাদ্য ২ ঃ সংঘ G ৰ এটা অৰিক্ত উপসংহতি H, G ৰ উপসংঘ হ'ব যদি আৰু যদিহে

$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.



প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল $H \leq G$

ধৰা হ'ল $a, b \in H$

$b \in H \Rightarrow b^{-1} \in H$ [Θ H এটা সংঘ]

এতিয়া $a \in H, b^{-1} \in H$

$\therefore ab^{-1} \in H$

বিপৰীত ক্ৰমে, ধৰা হ'ল $H \subseteq G$ যাতে $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$

(i) এতিয়া $a, a \in H \Rightarrow aa^{-1} \in H$ (প্ৰদত্ত চৰ্তমতে)

$\Rightarrow e \in H$,

য'ত e হ'ল Gৰ একক মৌল।

(ii) $e \in H, a \in H \Rightarrow ea^{-1} \in H$

$\Rightarrow a^{-1} \in H$

$\therefore$ H অৰ প্ৰতিটো মৌলৰ বিপৰীত H অত আছে।

(iii) $b \in H \Rightarrow b^{-1} \in H$ ((ii)ৰ পৰা)

এতিয়া $a \in H, b^{-1} \in H \Rightarrow a(b^{-1})^{-1} \in H$

$\Rightarrow ab \in H$

(iv) যিহেতু দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াটোৱে G ত সাহচর্য্য বিধি মানি চলে, ই H অতো মানি চলিব।

$\therefore$ G ৰ যিটো দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, সেই একে দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত H এটা সংঘ। আকৌ $H \subseteq G$.

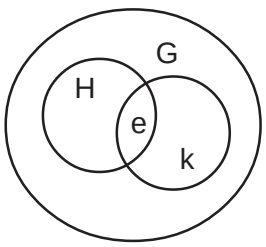
$\therefore H \leq G$.

টোকা ঃ যদি যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G এটা সংঘ হয়, তেনেহ'লে G ৰ এটা অৰিক্ত উপসংহতি H, Gৰ উপসংঘ হ'ব যদি আৰু যদিহে $a, b \in H \Rightarrow a-b \in H$.

উপপাদ্য ৩ ঃ এটা সংঘৰ দুটা উপসংঘৰ ছেদনো এটা উপসংঘ।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু e, G ৰ একক মৌল।

ধৰা হ'ল $H \leq G, K \leq G$.



আমি জানো যে $H \cap K \neq \phi$,

কিয়নো অন্ততঃ একক মৌল $e \in H \cap K$

ধৰা হ'ল $a, b \in H \cap K$

$a \in H \cap K \Rightarrow a \in H$ আৰু $a \in K$

$b \in H \cap K \Rightarrow b \in H$ আৰু $b \in K$

এতিয়া $a, b \in H$ আৰু $H \leq G$. $\therefore ab^{-1} \in H$

$a, b \in K$ আৰু $K \leq G$. $\therefore ab^{-1} \in K$

$ab^{-1} \in H$ আৰু $ab^{-1} \in K \Rightarrow ab^{-1} \in H \cap K$

$\therefore H \cap K \leq G$

টোকা ঃ দুটা উপসংঘৰ মিলন সদায় এটা উপসংঘ নহয়।

অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$ যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ।

ধৰা হ'ল $2Z = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, ...\}$

$3Z = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, ...\}$

স্পষ্টত ঃ $2Z \leq Z$, $3Z \leq Z$

এতিয়া $2 \in 2Z \cup 3Z$, $3 \in 2Z \cup 3Z$

কিন্তু $2+3 = 5 \notin 2Z \cup 3Z$

$\therefore 2Z \cup 3Z$ অত যোগ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া নহয়।

$\therefore 2Z \cup 3Z$ সংঘ হ'ব নোৱাৰে।

উপপাদ্য ৪ ঃ দুটা উপসংঘৰ মিলন এটা উপসংঘ হ'ব যদি আৰু যদিহে এটা আনটোৰ উপসংহতি হয়।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু $H \leq G$, $K \leq G$

ধৰা হ'ল $H \subseteq K$. $\therefore H \cup K = K$

Θ $K \leq G$, $\therefore H \cup K \leq G$

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল $H \leq G$, $K \leq G$ যাতে $H \cup K \leq G$.

ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e.

প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে $H \subseteq K$বা $K \subseteq H$

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল এইটো সত্য নহয়।

$\therefore H \not\subseteq K$ আৰু $K \not\subseteq H$

$\therefore$ H অত এনে এটা a আছে যাতে $a \notin K$

আৰু K ত এনে এটা b আছে যাতে $b \notin H$

এতিয়া $a \in H \Rightarrow a \in H \cup K$

$b \in K \Rightarrow b \in H \cup K$

$\therefore ab \in H \cup K \Rightarrow ab \in H$ বা $ab \in K$

যদি $ab \in H$, তেনেহ'লে $a \in H$, $ab \in H \Rightarrow a^{-1}(ab) \in H$

$\Rightarrow (a^{-1}a)b \in H$

$\Rightarrow eb \in H$

$\Rightarrow b \in H$,

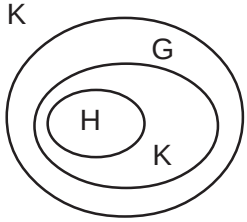
এইটো স্ববিৰোধী কথা।

সেইদৰে, যদি $ab \in K$, তেনেহ'লে $ab \in K, b \in K \Rightarrow (ab)b^{-1} \in K$

$\Rightarrow a(bb^{-1}) \in K$

$\Rightarrow ae \in K$

$\Rightarrow a \in K,$



এইটো স্ববিৰোধী কথা।

গতিকে আমি ধৰি লোৱা কথাটো ভুল।

সেয়ে $H \subseteq K$ বা $K \subseteq H$.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

প্রশ্ন নং ১ঃ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি IR_+ গুণাত্মকত সংঘ আৰু বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি IR যোগাধীনত সংঘ। IR_+, IR অৰ উপসংঘ হয়নে? যুক্তি দিয়ক।

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা সংঘৰ দুটা অসংযুক্ত উপসংঘ থাকিব পাৰেনে? যুক্তি দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ এটা আবেলীয় সংঘৰ এটা অনা-আৱেলীয় উপসংঘ থাকিব পাৰেনে? যুক্তি দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Z যোগাধীনত এটা সংঘ। m এটা নির্দিষ্ট অখণ্ড সংখ্যা। দেখুৱাওক যে $m\,Z = \{0, \pm m, \pm 2m, \pm 3m, ...\}$ সংহতিটো Z অৰ এটা উপসংঘ।

প্রশ্ন নং ৫ঃ 2 x 2 আকাৰৰ সকলো অপ্রতিম বাস্তৱ মৌলকক্ষৰ সংহতি G মৌলকক্ষৰ পূৰণৰ অধীনত এটা সংঘ।

ধৰা হ'ল $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \text{ বাস্তৱ আৰু } ad-bc = 1 \right\}$

দেখুৱাওক যে H, G ৰ এটা উপসংঘ।

প্রশ্ন নং ৬ঃ এটা উদাহৰণ দি দেখুৱাওক যে এটা সংঘক ইয়াৰ দুটা প্রকৃত উপসংঘৰ মিলন হিচাপে প্রকাশ কৰিব নোৱাৰি।

৪.৪ চক্রীয় সংঘ

সংজ্ঞা ঃ এটা সংঘ G ক চক্রীয় (cyclic) বুলি কোৱা হয় যদি G ত এটা মৌল a থাকে যাতে G ৰ প্রতিটো মৌলক a^n, $n \in Z$ আকাৰত প্রকাশ কৰিব পাৰি। a ক G ৰ এটা জনক (generator) বুলি কোৱা হয়। প্রতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে লিখা হয় $G = \langle a \rangle$, অর্থাৎ, a ৰ দ্বাৰা জনিত G এটা চক্রীয় সংঘ। আমি এনেকৈও লিখিব পাৰো $G = \{a^2 : a \in G : n \in z\}$ এ

টোকা ঃ যদি G সংঘটো যোগ প্রক্রিয়াৰ অধীনত হয়, G ৰ প্রতিটো মৌল na আকাৰত প্রকাশ কৰা হয়।

উদাহৰণ ঃ

(1) আমি জানো যে G = {–1, 1} সংহতিটো পূৰণ প্রক্রিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ।

এতিয়া, $(-1)^1 = -1$, $(-1)^2=1$

∴ – 1 অৰ দ্বাৰা জনিত G এটা চক্রীয় সংঘ অর্থাৎ G = <–1>

(2) আমি জানো যে G = {1, ω , ω^2} সংহতিটো পূৰণ প্রক্রিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ, ω হ'লে একৰ এটা জটিল ঘনমূল।

এতিয়া $\omega^1 = \omega^2$, $\omega^2 = \omega^2$, $\omega^3 = 1$

∴ ω অৰ দ্বাৰা জনিত G এটা চক্রীয় সংঘ অর্থাৎ G = $<\omega>$, সেইদৰে G = $<\omega^2>$

(3) আমি জানো যে G = {–1, 1, –i, i} সংহতিটো পূৰণ প্রক্রিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ।

এতিয়া $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -1$, $i^4 = 1$

∴ i ৰ দ্বাৰা জনিত G এটা চক্রীয় সংঘ অর্থাৎ G = < i >

সেইদৰে G = < – i >

(4) অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Z যোগ প্রক্রিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ।

ধৰা হ'ল $x \in Z$ এতিয়া x = 1x

∴ 1 অৰ দ্বাৰা জনিত G এটা চক্রীয় সংঘ অর্থাৎ G = < 1 >

সেইদৰে G = < –1 >.

উপপাদ্য ৫ ঃ প্রত্যেক চক্রীয় সংঘই আবেলীয়।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল G = < a > এটা চক্রীয় সংঘ।

ধৰা হ'ল $x, y \in G$.

গতিকে এনে অখণ্ড সংখ্যা m, n আছে যাতে $x = a^m$, $y = a^n$

এতিয়া $xy = a^m a^n$

$= a^{m+n}$

$= a^{n+m}$

$= a^n a^m$

$= yx$

∴ G আবেলীয়।

উপপাদ্য ৬ ঃ এটা চক্রীয় সংঘ G ৰ a এটা জনক হ'লে, a^{-1} ও G ৰ এটা জনক।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল G = < a > এটা চক্রীয় সংঘ।

ধৰা হ'ল $x \in G$.

গতিকে এনে এটা অখণ্ড সংখ্যা m আছে যাতে $x = a^m = (a^{-1})^{-m}$

$\therefore G = < a^{-1} >$.

Z অৰ বাবে হৰণৰ নিয়ম

b এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা আৰু a এটা অখণ্ড সংখ্যা হ'লে, অদ্বিতীয় (unique) অখণ্ড সংখ্যা, q, r আছে যাতে $a = bq+r$, $0 \leq r < b$.

ইয়াক Z অৰ বাবে হৰণৰ নিয়ম (Division Algorithm) বুলি কোৱা হয়।

উপপাদ্য ৭ ঃ এটা চক্রীয় সংঘৰ উপসংঘও চক্রীয়।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল $G = <a>$ এটা চক্রীয় সংঘ।

ধৰা হ'ল $H \leq G$

ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e.

প্রথম ক্ষেত্র ঃ ধৰা হ'ল $H = \{e\}$, তেনেহ'লে প্রমাণ কৰিবলৈকে একো নাই।

দ্বিতীয় ক্ষেত্র ঃ ধৰা হ'ল $H = G$, এই ক্ষেত্রতো প্রমাণ কৰিবলৈ একো নাই।

তৃতীয় ক্ষেত্র ঃ ধৰা হ'ল $H \neq G$, $H \neq \{e\}$

H অৰ প্রতিটো মৌলই a ৰ ঘাত (power)।

ধৰা হ'ল m য়েই **সবাতোকৈ সৰু** ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা যাতে $a^m \in H$.

ধৰা হ'ল $x \in H$.

তেনেহ'লে কোনো p ৰ বাবে $x = a^p$

এতিয়া হৰণৰ নিয়মৰ পৰা এনে অদ্বিতীয় অখণ্ড সংখ্যা q আৰু r আছে যাতে

$p = mq + r$, য'ত $0 \leq r < m$

$\therefore r = p - mq$

$\therefore a^r = a^{p-mq} = a^p (a^m)^{-q} = x(a^m)^{-q}$

এতিয়া $x (a^m)^{-q} \in H$ $\therefore a^r \in H$

কিন্তু m য়েই সবাতোকৈ সৰু ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা যাতে $a^m \in H$.

$\therefore$ r শূন্য হ'ব লাগিব।

$\therefore p = mq$

$\Rightarrow x = a^p = a^{mq} = (a^m)^q$

$\therefore H = <a^m>$ এটা চক্রীয় সংঘ।

উপপাদ্য ৮ ঃ এটা সংঘৰ ক্রম মৌলিক সংখ্যা হ'লে সংঘটো চক্রীয়।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সসীম সংঘ আৰু $0 (G) = p$, য'ত p এটা মৌলিক সংখ্যা।

ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e.

ধৰা হ'ল $a \in G$ যাতে $a \neq e$.

ধৰা হ'ল $H = \{a^n : n$ এটা অখণ্ড সংখ্যা$\}$

স্পষ্টতঃ H, G ৰ এটা চক্রীয় উপসংঘ।

$\therefore$ লাগ্রাঞ্জৰ উপসংঘৰ ক্রম সম্বন্ধীয় উপপাদ্যৰ পৰা, 0 (H)ৰ দ্বাৰা 0 (G) বিভাজ্য।

ইয়াৰ পৰা আমি পাম 0(H) = 1 বা p, যিহেতু 0(G) এটা মৌলিক সংখ্যা।

কিন্তু 0(H) $\neq$1, Θ a $\neq$e.

$\therefore$ 0 (H) = p = 0(G)

$\therefore$ H = G

$\therefore$ a ৰ দ্বাৰা জনিত G এটা চক্ৰীয় সংঘ।

উদাহৰণ ২ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে এটা সংঘৰ ক্ৰম $\leq$ 5 হ'লে সংঘটো আবেলীয়।

সমাধান ঃ স্পষ্টতঃ এটা সংঘৰ ক্ৰম 1 অৰ্থাৎ মৌলৰ সংখ্যা 1 হ'লে সংঘটো আবেলীয়।

আমি জানো যে এটা সংঘৰ ক্ৰম মৌলিক সংখ্যা হ'লে সংঘটো চক্ৰীয় আৰু প্ৰত্যেক চক্ৰীয় সংঘই আবেলীয়।

$\therefore$ যিবোৰ সংঘৰ ক্ৰম 2, 3 আৰু 5 সেইবোৰ আবেলীয়।

এতিয়া এটা চাৰিটা মৌল বিশিষ্ট সংঘ লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল G = {e, a, b, c} য'ত সকলোবোৰ মৌল পৃথক আৰু G ৰ একক মৌল হ'ল e.

স্পষ্টতঃ e নিজেই নিজৰ বিপৰীত। সেইদৰে, যদি বাকী তিনিটা মৌলৰ প্ৰতিটোৱেই নিজৰ বিপৰীত হয়, তেনেহ'লে G আবেলীয়। (দ্ৰষ্টব্য উদাহৰণ 18)

যদি নহয়, ধৰা হ'ল b^{-1} = c, c^{-1} = b. তেনেহ'লে a^{-1} = a

এতিয়া প্ৰক্ৰিয়া-সাৰণীখন সম্পূৰ্ণ কৰা যাওক।

Θ a^{-1} = a $\quad\therefore$ aa = e

G ৰ প্ৰতিটো মৌল প্ৰক্ৰিয়া-সাৰণীখনৰ প্ৰতিটো শাৰী বা স্তম্ভত মাত্ৰ এবাৰকৈ থাকিব।

$\therefore$ ab = b or ab = c.

এতিয়া ab = b $\Rightarrow$ ab = eb $\Rightarrow$ a = e (সোঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা)

এইটো স্ববিৰোধী কথা।

$\therefore$ ab = c আৰু $\therefore$ ac = b

$\therefore$ b = c^{-1}, $\therefore$ bc = e

$\therefore$ ba = a বা ba = c

ba = a $\Rightarrow$ba = ea$\Rightarrow$ b = e,

এইটো স্ববিৰোধী কথা।

$\therefore$ ba = c আৰু bb = a

আকৌ, Θ c = b^{-1} $\therefore$ cb = e

$\therefore$ ca = a বা ca = b

ca = a $\Rightarrow$ c = e, এইটো স্ববিৰোধী কথা।

$\therefore$ ca = b, আৰু cc = a

.	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

সাৰণী ৪.১

আমি দেখিলোঁ যে প্ৰক্ৰিয়া-সাৰণীখন মুখ্য কৰ্ণ সাপেক্ষে সমমিত।

$\therefore$ G আবেলীয়।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

প্রশ্ন নং ১ঃ এটা চক্রীয় সংঘ a ৰ ক্রম 10 ৰ কিমানটা জনক থাকিব?

প্রশ্ন নং ২ঃ তলৰ কোনটোৰ সংঘ চক্রীয়? প্রত্যেকটো চক্রীয় সংঘৰ বাবে জনকবোৰ উল্লেখ কৰক।

(a) $G = \langle z, + \rangle$ **(b)** $G = \langle Q, + \rangle$ **(c)** $G = \langle Q^+, + \rangle$ **(d)** $G = \{6^n : n \in z\}$ পূৰণৰ অধীনত।



৪.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- এটা সংঘ G ৰ কোনো অৰিক্ত উপসংহতি H অক উপসংঘ বুলি কোৱা হয় যদি G ৰ দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ অধীনত H ও এটা সংঘ হয়।
- এটা সংঘ G ক চক্রীয় বুলি কোৱা হয় যদি G ৰ প্রতিটো মৌলক a^n আকাৰত প্রকাশ কৰিব পাৰি, $n \in Z$.



৪.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নহয়। দ্বৈত প্রক্রিয়া বেলেগ বেলেগ।

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নহয়। দুটা উপসংঘৰ মাজত অতি কমেও এটা উমৈহতীয়া মৌল থাকে যেনে- একক মৌলটো।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নহয়।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে কৰিবলৈ চেষ্টা কৰক।

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে কৰিবলৈ চেষ্টা কৰক।

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ এটা যোগাত্মক সংঘ।

$2Z = \{0, \pm 2, \pm 3, \pm 6 \ldots\}$ আৰু

$3Z = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 0 \ldots\}$ হ'ল Z ৰ দুটা উপসংঘ

$\therefore \quad Z \neq eZ \cup 3Z$

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ যিহেতু 1, 3, 7, 9 হ'ল 10 ৰ আপেক্ষিক মৌলিক। গতিকে a ৰ জনকবোৰ হ'ব a, a^3, a^7 আৰু a^9.

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে কৰিবলৈ চেষ্টা কৰক।



৪.৭ অধিক জানিবলৈ

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.
2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).
3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).
4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.
5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



৪.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ঃ ধৰা হ'ল G এটা আবেলীয় সংঘ। প্ৰমাণ কৰক যে $H = \{x \in G : x = x^{-1}\}$ সংহতিটো G ৰ এটা উপসংঘ।

প্ৰশ্ন ২ঃ দেখুৱাওক যে এটা সংঘৰ মৌলৰ সংখ্যা 4 হ'লে সংঘটো আবেলীয়।

প্ৰশ্ন ৩ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু e, G ৰ একক মৌল। প্ৰমাণ কৰক যে G আবেলীয় যদি $b^{-1}a^{-1}\, ba = e, \forall a, b \in G$

*** ***** ***