অধ্যায় ৫ ঃ বিন্যাস সংঘ (GROUP OF PERMUTATIONS)

অধ্যায় গাঁথনি

৫.১ উদ্দেশ্য

৫.২ পৰিচয়

৫.৩ বিন্যাসৰ সংজ্ঞা, উদাহৰণ

৫.৪ বিন্যাসৰ পূৰণ

৫.৫ বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ বিন্যাস

৫.৬ বিন্যাস সংঘ

৫.৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৫.৮ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

৫.৯ অধিক জানিবলৈ

৫.১০ আৰ্হি প্ৰশ্ন

৫.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

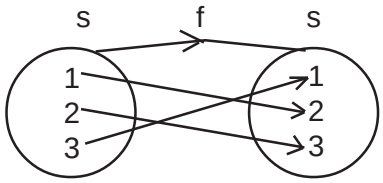
- বিন্যাসৰ সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- বিন্যাসৰ পূৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- বিভিন্ন ধৰণৰ বিন্যাস সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- বিন্যাস সংঘ সম্বন্ধে জানিব।

৫.২ পৰিচয়

বিন্যাস শব্দটো দুই ধৰণে ব্যৱহৃত হয়। প্ৰথমতে ই হ'ল পৃথক মৌলৰ এটা সসীম সংহতিৰ মৌলবোৰৰ ক্ৰমিত সজ্জা। মিশ্ৰিত গণিতত আমি ক্ৰমিত সজ্জা হিচাপে বিন্যাস শব্দটো ব্যৱহাৰ কৰোঁ। দ্বিতীয়তে এটা অৰিক্ত সংহতিৰ পৰা সেই একেটা সংহতি এটা একৈয়ী আৰু আচ্ছাদক ফলনেই হ'ল বিন্যাস। সংঘ-তত্ত্বত বিন্যাস বুলি ক'লে আমি এটা অৰিক্ত, সংহতিৰপৰা নিজলৈকে একৈকী আৰু আচ্ছাদক ফলন বুলি বুজিম। এই অধ্যায়ত আমি বিন্যাসৰ সংজ্ঞা দিম, উদাহৰণ দিম আৰু এটা অৰিক্ত সংহতিৰ পৰা নিজলৈকে বিন্যাসৰ সংখ্যা নিৰ্ধাৰণ কৰিম। আমি প্ৰমাণ কৰিম যে এটা সসীম সংহতিৰ বিন্যাসৰ সংহতিটো বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত এটা সংঘ। এই সংঘটোক বিন্যাস সংঘ (বা সমমিত সংঘ) বুলি কোৱা হয়।

৫.৩ বিন্যাসৰ সংজ্ঞা, উদাহৰণ (DEFINITION OF PERMUTATION, EXAMPLES)

এটা অৰিক্ত সংহতি পৰা নিজলৈকে এটা একৈকী আৰু আচ্ছাদক ফলনক সংহতিটোত এটা বিন্যাস (permutation) বুলি কোৱা হয়।



উদাহৰণ 1 ঃ S = {1, 2, 3} সংহতিটো লোৱা হ'ল। ধৰাহ'ল f ; S $\rightarrow$ S এটা ফলন যাতে f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1

স্পষ্টত ঃ S অৰ পৰা S অলৈকে f এটা একৈকী আৰু আচ্ছাদক ফলন।

$\therefore$ S অত f এটা বিন্যাস।

বিন্যাসৰ বাবে প্রতীক

ওপৰৰ বিন্যাসটো লোৱা হ'ল।

S = {1, 2, 3}

f : S $\rightarrow$ S, f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1

ওপৰৰ বিন্যাসটোক সাধাৰণতে এনেধৰণে লিখা হয়।

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

আমি প্রথম শাৰীত S সংহতিটোৰ মৌলবোৰ লিখোঁ। দ্বিতীয় শাৰীত আমি অনুৰূপ মৌলবোৰ লিখো। f অৰ অধীনত 1 অৰ প্রতিচ্ছায়া 2। 1 অৰ ঠিক তলত 2 লিখা হয়। সেইদৰে 2 ৰ প্রতিচ্ছায়া 3। 2 ৰ ঠিক তলত 3 লিখা হয়। সেইদৰে 3 ৰ ঠিক তলত। লিখা হয়। এনেধৰণে বিন্যাস এটা লিখা হয়।

S = {1, 2, 3} সংহতিত বিন্যাসৰ সংখ্যা

S সংহতিটোত তিনিটা পৃথক মৌল আছে।

এতিয়া 1 মৌলটো তিনিধৰণে সংযোগ কৰিব পাৰি। ইয়াক 1 অৰ সৈতে বা 2 ৰ সৈতে বা 3 ৰ সৈতে সংযোগ কৰিব পাৰি।

2 ক দুটা উপায়ে সংযোগ কৰিব পাৰি।

3 ক এটা উপায়ে সংযোগ কৰিব পাৰি।

$\therefore$ বিন্যাসৰ সংখ্যা = $3 \times 2 \times 1 = 3!$

n টা মৌলবিশিষ্ট এটা সসীম সংহতিত বিন্যাসৰ সংখ্যা

ধৰা হ'ল S সংহতিটোত n টা পৃথক মৌল আছে।

প্রথম মৌলটো n টা উপায়ে সংযোগ কৰিব পাৰি।

দ্বিতীয় মৌলটো (n-1) টা উপায়ে সংযোগ কৰিব পাৰি।

তৃতীয় মৌলটো (n-2) টা উপায়ে সংযোগ কৰিব পাৰি।

এনেদৰে (n-1)তম মৌলটো দুটা উপায়ে সংযোগ কৰিব পাৰি, আৰু n তম মৌলটো

এটা উপায়ে সংযোগ কৰিব পাৰি।

$\therefore$ বিন্যাসৰ সংখ্যা

$= n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 2.1 = n!$

উদাহৰণ 2 ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2}. S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাস লিখক।

সমাধান ঃ S অৰ মৌলৰ সংখ্যা হ'ল 2.

$\therefore$ S অত 2! টা অর্থাৎ 2 টা বিন্যাস আছে। সেইকেইটা হ'ল

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

টোকা ঃ i বিন্যাসটোক একক বিন্যাস (identity permutation) বুলি কোৱা হয়। এই ক্ষেত্রত 1 অৰ প্রতিচ্ছায়া 1, 2 ৰ প্রতিচ্ছায়া 2.

উদাহৰণ 3 ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}. S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাস লিখক।

সমাধান ঃ S অৰ মৌলৰ সংখ্যা 3.

$\therefore$ S অত 3! টা অর্থাৎ 6 টা বিন্যাস আছে।

সেইকেইটা হ'ল

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

টোকা ঃ এই ক্ষেত্রত $i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

হ'ল একক বিন্যাস।

একক বিন্যাস

ধৰা হ'ল S = $\{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$ য'ত সকলোবোৰ a_i পৃথক।

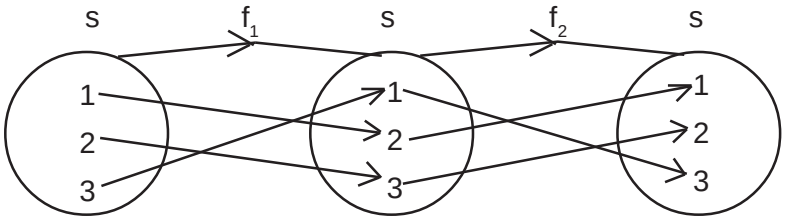
S অত একক বিন্যাস i ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$i = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots\ldots a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 \ldots\ldots a_n \end{pmatrix}$$

৫.৪ বিন্যাসৰ পূৰণ (MULTIPLICATION OF PERMUTATION)

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}. S অত তলৰ বিন্যাস দুটা লোৱা হ'ল।

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



গতিকে আমি তলৰ সংযুক্ত ফলনটো পাম

$f_2of_1 : S \to S$, যাতে

$(f_2of_1)(1) = f_2(f_1(1)) = f_2(2) = 1$

$(f_2of_1)(2) = f_2(f_1(2)) = f_2(3) = 2$

$(f_2of_1)(3) = f_2(f_1(3)) = f_2(1) = 3$

স্পষ্টতঃ, S অত f_2of_1 এটা বিন্যাস আৰু $f_2of_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

সেইদৰে S অত f_1of_2 ও এটা বিন্যাস।

f_2o f_1 সংযুক্ত ফলনৰ দ্বাৰা বিন্যাসৰ পূৰণফল f_2f_1 অৰ সংজ্ঞা দিয়া হয়।

$$f_2 f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

টোকা ঃ 1. আমি জানো যে দুটা এঁকেকী আৰু আচ্ছাদক ফলনৰ সংযুক্ত ফলনো এটা এঁকেকী আৰু আচ্ছাদক ফলন। গতিকে, দুটা বিন্যাসৰ পূৰণফলো এটা বিন্যাস।

2. আমি জানো যে ফলনৰ সংযোগে (composition) সাহচর্য্য বিধি মানি চলে। গতিকে, বিন্যাসৰ পূৰণে সাহচর্য বিধি মানি চলে।

3. আমি জানো যে ফলনৰ সংযোগে সাধাৰণতে ক্রমবিনিময় বিধি মানি নচলে। গতিকে, বিন্যাসৰ পূৰণে সাধাৰণতে ক্রমবিনিময় বিধি মানি নচলে।

ধৰা হ'ল S = {a_1, a_2 , ..., a_3} য'ত সকলোবোৰ a_i পৃথক।

ধৰা হ'ল S অত দুটা বিন্যাস।

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & .....a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & f(a_3)..... f(a_n) \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & .....a_n \\ g(a_1) & g(a_2) & g(a_3).....g(a_n) \end{pmatrix}$$

তেনেহ'লে $fg = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & ..... & a_n \\ f(g(a_1)) & f(g(a_2)) & f(g(a_3)).....f(g(a_n)) \end{pmatrix}$

সেইদৰে

$$fg = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots\ldots\ldots & a_n \\ g(f(a_1)) & g(f(a_2)) & g(f(a_3)) & \ldots\ldots & g(f(a_n)) \end{pmatrix}$$

উদাহৰণ 4 ঃ ধৰা হ'ল S ={1, 2, 3, 4}. S অত তলৰ f আৰু g বিন্যাস দুটা লোৱা হ'ল।

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \; g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

fg আৰু gf নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ f(g(1) & f(g(2) & f(g(3) & f(g(4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ f(4) & f(2) & f(1) & f(3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$gf = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ g(f(1) & g(f(2) & g(f(3) & g(f(4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ g(2) & g(3) & g(4) & g(1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

স্পষ্টত ঃ $fg \neq gf$ [দুটা ফলনৰ সমতাৰ সংজ্ঞা দ্ৰষ্টব্য।]

উদাহৰণ 5 ঃ ধৰা হ'ল S= {1, 2, 3, 4}. S অত তলৰ বিন্যাস দুটা লোৱা হ'ল।

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \; \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$\phi\psi$ আৰু $\psi\phi$ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $\phi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\psi\phi = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

এই ক্ষেত্রত $\phi\psi = \psi\phi$

উদাহৰণ 6 ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4}. S অত তলৰ বিন্যাস দুটা লোৱা হ'ল।

$$f = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

hf আৰু fh নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $fh = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = i$$

$$hf = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = i$$

এই ক্ষেত্রত fh = hf = i

টোকা ঃ ওপৰৰ উদাহৰণটোত fh=hf = i, য'ত i হ'ল একক বিন্যাস। f অক h অৰ বিপৰীত (inverse) বুলি কোৱা হয়, h অক f অৰ বিপৰীত বোলা হয়। ইয়াক এনেদৰে লিখা হয়

$f = h^{-1}$ or $h = f^{-1}$

বিন্যাসৰ বিপৰীত

ধৰা হ'ল $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ য'ত সকলোবোৰ a_i পৃথক।

ধৰা হ'ল S অত $f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & f(a_3) & \ldots & f(a_n)\end{pmatrix}$ এটা বিন্যাস। f অৰ বিপৰীতক f^{-1} এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} f(a_1) & f(a_2) & f(a_2) & \ldots & f(a_n)\\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n\end{pmatrix}$$

মন কৰিবলগীয়া যে $ff^{-1} = f^{-1}f = i$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল S = {a_1, a_2, a_3}, য'ত সকলোবোৰ a_i পৃথক। S অত মুঠতে কিমানটা বিন্যাস আছে? S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাস লিখক।

প্রশ্ন নং ২ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4}. S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ যিকোনো পাঁচটা বিন্যাস লিখক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5}. S অত তলৰ বিন্যাসকেইটা লোৱা হ'ল।

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&1&5\end{pmatrix}$$

$$\phi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix},\quad \psi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&4&2&1\end{pmatrix}$$

(i) $fg,\ f\phi,\ f\psi,\ g\psi$ নির্ণয় কৰক।

(ii) $g\phi,\ \phi g$, নির্ণয় কৰক। সিহঁত সমাননে?

(iii) $\phi\psi,\ \psi\phi$, নির্ণয় কৰক। সিহঁত সমাননে?

প্রশ্ন নং ৪ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ তলৰ প্রতিটো বিন্যাসৰ বিপৰীতটো লিখক।

(i) $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&4&5&6&7&1\end{pmatrix}$

(ii) $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$

(iii) $h=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&4&5&6&7&2&1\end{pmatrix}$

৫.৫ বিভিন্ন প্রকাৰৰ বিন্যাস (DIFFERENT KINDS OF PERMUTATION)

চক্রীয় বিন্যাস

ধৰা হ'ল S এটা সসীম সংহতি। ধৰা হ'ল S অত f এটা বিন্যাস। f অক চক্রীয় বিন্যাস (cyclic permutation) বুলি কোৱা হয় যদি S অত $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ মৌল থাকে যাতে $f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_3$, $f(a_3)=a_4$, ..., $f(a_{n-1}) = a_n$, $f(a_n) = a_1$, আৰু বাকী সকলোবোৰ মৌল, যদিহে থাকে, f অৰ অধীনত স্থিৰ হৈ থাকে, অর্থাৎ f(a) = a, সকলোবোৰ $a \in S$ অৰ বাবে।

এই ক্ষেত্রত f অক $(a_1, a_2, a_3 \ldots . a_n)$ এৰে বুজোৱা হয়।

f অক n দৈর্ঘ্যৰ (length) চক্রীয় বিন্যাস বুলি কোৱা হয়।

টোকা ঃ এটা চক্রীয় বিন্যাসক চক্র (cycle) বুলিও কোৱা হয়। এটা n দৈর্ঘ্যৰ চক্রীয় বিন্যাসক n চক্র বুলি কোৱা হয়।

পৰিৱর্ত

2 দৈর্ঘ্যৰ এটা চক্রীয় বিন্যাসক পৰিৱর্ত (transposition) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ 7 ঃ ধৰা হ'ল S ={1, 2, 3}

ধৰা হ'ল S অত $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

ইয়াত f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1

$1 \to 2 \to 3 \to 1$

গতিকে, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3)$

f হ'ল 3 দৈর্ঘ্যৰ এটা চক্রীয় বিন্যাস বা 3-চক্র।

উদাহৰণ 8 ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5}. ধৰা হ'ল

S অত $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ এটা বিন্যাস।

ইয়াত f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 2

$2 \to 3 \to 4 \to 2$

আৰু f(1) = 1, f(5) = 5

অর্থাৎ, f অৰ অধীনত 1, 5 স্থিৰ হৈ থাকে, অর্থাৎ f(1) = 1, f(5) = 5

গতিকে, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (2 \quad 3 \quad 4)$

f হ'ল 3 দৈর্ঘ্যৰ এটা চক্রীয় বিন্যাস বা 3-চক্র।

উদাহৰণ 9 ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4}. ধৰা হ'ল

S অত $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ এটা বিন্যাস

ইয়াত f(2) = 3, f(3) = 2

$2 \to 3 \to 2$

আৰু f(1) = 1, f(4) = 4

গতিকে $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (2 \quad 3)$

f হ'ল 2 দৈর্ঘ্যৰ এটা চক্রীয় বিন্যাস, অর্থাৎ, f এটা পৰিৱর্ত।

টোকা ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3) \qquad (1)$$

এটা চক্রীয় বিন্যাস।

আকৌ, S = {1, 2, 3}.

সংহতিটো লোৱা হ'ল

S = {1, 2, 3, 4, 5} সংহতিত

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3) \qquad (2)$$

এটা চক্রীয় বিন্যাস।

মন কৰিব লগীয়া যে (1) আৰু (2) দুটা পৃথক বিন্যাস। (1) অৰ ক্ষেত্রত (1 2 3) এ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ বিন্যাস বুজায়।

আনহাতেদি (2) ৰ ক্ষেত্রত (1, 2, 3) এ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ বিন্যাস বুজায়।

বিন্যাসৰ চর্ত ঃ

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3} সংহতিত $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3)$

এটা বিন্যাস।

এতিয়া $(1 \quad 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $(1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$(1 \quad 3)(1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3)$$

গতিকে আমি দেখিলোঁ যে

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3) = (1 \quad 3)(1 \quad 2)$$

আকৌ, S = {1, 2, 3, 4, 5} সংহতিটো লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5} সংহতিত

$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5)$ এটা বিন্যাস।

দেখুৱাব পাৰি যে

$g = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5)$

$= (1 \quad 5)(1 \quad 4)(1 \quad 3)(1 \quad 2)$

আকৌ, S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} সংহতিটো লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} সংহতিত $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

এটা বিন্যাস।

h অক এনেদৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি

$h = (1 \quad 2 \quad 3)(4 \quad 5 \quad 6)$

$(1 \quad 2 \quad 3), (4 \quad 5 \quad 6)$ অক h বিন্যাসৰ চক্ৰ বুলি কোৱা হয়। এই ক্ষেত্ৰত $(1 \quad 2 \quad 3)$ আৰু $(4 \quad 5 \quad 6)$ অৰ কোনো উমৈহতীয়া মৌল নাই। ইহঁতক অসংযুক্ত চক্ৰ (disjoint cycles) বুলি কোৱা হয়।

অসংযুক্ত বিন্যাস

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} সংহতিত $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$= (1 \quad 2 \quad 3)$

আৰু $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

$= (4 \quad 5 \quad 6)$

দুটা বিন্যাস।

মন কৰিব লগীয়া যে $(1 \quad 2 \quad 3)$, আৰু $(4 \quad 5 \quad 6)$ অৰ কোনো উমৈহতীয়া মৌল নাই। এই ক্ষেত্ৰত f আৰু g বিন্যাস দুটাক অসংযুক্ত বিন্যাস (disjoint permutations) বুলি কোৱা হয়।

আকৌ, S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} সংহতিত

$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$

$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (3 \quad 4 \quad 5 \quad 6)$

বিন্যাস দুটা লোৱা হ'ল।

এই ক্ষেত্রত $(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)$ আৰু $(3\ \ 4\ \ 5\ \ 6)$ অৰ উমৈহতীয়া মৌল আছে। গতিকে, ϕ আৰু ψ বিন্যাস দুটা অসংযুক্ত নহয়।

গতিকে অসংযুক্ত বিন্যাসৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

এটা সসীম সংহতি S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ f আৰু g বিন্যাস দুটাক অসংযুক্ত বুলি কোৱা হয় যদি

(i) $f(a) \neq a \ \Rightarrow g(a) = a,$ যিকোনো $a \in S$ অৰ বাবে

আৰু (ii) $g(a) \neq a \ \Rightarrow f(a) = a,$ যিকোনো $a \in S$ অৰ বাবে

প্রমাণ কৰিব পাৰি যে দুটা অসংযুক্ত চক্র তথা অসংযুক্ত বিন্যাসৰ পূৰণে ক্রমবিনিময়ে বিধি মানি চলে।

যুগ্ম আৰু অযুগ্ম বিন্যাস

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3} সংহতিত

$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ এটা বিন্যাস।

আকৌ, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 3) = (1\ \ 3) = (1\ \ 2)$

আকৌ, S = {1, 2, 3, 4} সংহতিটো লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4} সংহতিত $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ এটা বিন্যাস।

এতিয়া $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4) = (1\ \ 4)(1\ \ 3)(1\ \ 2)$

আমি দেখিলোঁ যে f অক যুগ্ম সংখ্যক (দুটা) পৰিৱর্তৰ পূৰণফল হিচাপে প্রকাশ কৰা হৈছে। আনহাতেদি g ক অযুগ্ম সংখ্যক (তিনিটা) পৰিৱর্তৰ পূৰণফল হিচাপে প্রকাশ কৰা হৈছে।

যদি এটা বিন্যাসক যুগ্ম সংখ্যক পৰিৱর্তৰ পূৰণফল হিচাপে প্রকাশ কৰিব পাৰি, তেনে বিন্যাসক যুগ্ম বিন্যাস (even permutation) বুলি কোৱা হয়। আনহাতেদি, যদি এটা বিন্যাসক অযুগ্ম সংখ্যক পৰিৱর্তৰ পূৰণফল হিচাপে প্রকাশ কৰিব পাৰি, তেনে বিন্যাসক অযুগ্ম বিন্যাস (odd permutation) বোলে।

ওপৰৰ f বিন্যাসটো যুগ্ম, আনহাতেদি g বিন্যাসটো অযুগ্ম।

এতিয়া প্রমাণ ব্যতিৰেকে তলৰ ফলকেইটা উল্লেখ কৰা হ'ল।

1. দুটা যুগ্ম বিন্যাসৰ পূৰণফল এটা যুগ্ম বিন্যাস।
2. দুটা অযুগ্ম বিন্যাসৰ পূৰণফল এটা অযুগ্ম বিন্যাস।
3. এটা যুগ্ম বিন্যাস আৰু এটা অযুগ্ম বিন্যাসৰ পূৰণফল এটা অযুগ্ম বিন্যাস।
4. একক বিন্যাস এটা যুগ্ম বিন্যাস।

5. এটা যুগ্ম বিন্যাসৰ বিপৰীত যুগ্ম।

6. এটা অযুগ্ম বিন্যাসৰ বিপৰীত অযুগ্ম।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৫ঃ S = {1, 2, 3}, সংহতিত সংজ্ঞাৱদ্ধ আটাইকেইটা বিন্যাস লিখক, আৰু তাৰ পৰা যুগ্ম বিন্যাস আৰু অযুগ্ম বিন্যাসকেইটা বাছি উলিয়াওক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. S সংহতিত সংজ্ঞাৱদ্ধ তলৰ বিন্যাসবোৰ যুগ্ম নে অযুগ্ম নির্ণয় কৰক।

(i) $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(iii) $f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(iv) $f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

(v) $f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

S = {1, 2, 3, . . . , n} সংহতিত যুগ্ম বিন্যাস আৰু অযুগ্ম বিন্যাসৰ সংখ্যা, $n \geq 2$

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, ..., n}

ধৰা হ'ল S সংহতিত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংহতিটো S_n। গতিকে S_n অৰ মৌলৰ সংখ্যা n!. এই n! টা বিন্যাসৰ কিছুমান যুগ্ম বিন্যাস, আৰু কিছুমান অযুগ্ম বিন্যাস।

ধৰা হ'ল যুগ্ম বিন্যাসৰ সংখ্যা m আৰু অযুগ্ম বিন্যাসৰ সংখ্যা k.

স্পষ্টত ঃ m+k = n!

ধৰা হ'ল যুগ্ম বিন্যাসকেইটা $e_1, e_2, \ldots, e_m$; য'ত সকলোবোৰ e_i বিভিন্ন।

ধৰা হ'ল f এটা পৰিৱর্ত।

গতিকে $fe_1, fe_2, \ldots, fe_m$ অযুগ্ম বিন্যাস, আৰু বিভিন্ন, কিয়নো যদি $fe_i = fe_j$, তেনেহ'লে $e_i = e_j$, এইটো পৰস্পৰ বিৰোধী কথা।

যিহেতু অযুগ্ম বিন্যাসৰ সংখ্যা k,

$\therefore\ m \leq k$

m আৰু k সালসলনি কৰি আমি পাওঁ

$k \le m$

$\therefore\ m = k$

$\Theta\ m + k = n!, \quad \therefore\ m = k = \frac{n!}{2}$

$\therefore$ S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ যুগ্ম বিন্যাস $\frac{n!}{2}$ আৰু S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ অযুগ্ম বিন্যাস $\frac{n!}{2}$, য'ত S = {1, 2, 3, ..., n}, $r \ge 2$.

৫.৬ বিন্যাস সংঘ (PERMUTATION GROUP)

ধৰ হ'ল S = 1, 2, 3, 4, ... , n}, ধৰা হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংহতিটো S_n.

(i) ধৰা হ'ল $f, g \in S_n$.

আমি জানো যে fg পূৰণফলটো fog সংযুক্ত ফলনৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ।

আমি জানোযে দুটা একৈকী আৰু আচ্ছাদক ফলনৰ যংযুক্ত ফলনো একৈকী আৰু আচ্ছাদক। গতিকে দুটা বিন্যাসৰ পূৰণফলো এটা বিন্যাস।

$\therefore\ fg \in S_n$

(ii) আমি জানো যে ফলনৰ সংযোগে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে। গতিকে বিন্যাসৰ পূৰণে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) একক বিন্যাস

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ..... & n \\ 1 & 2 & 3 & ..... & n \end{pmatrix} \in S_n$$

আকৌ if = f = fi, $\forall f \in S_n$

S_n অৰ একক মৌল i.

(iv) ধৰা হ'ল $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ..... & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & ..... & f(n) \end{pmatrix} \in S_n$

এতিয়া $g = \begin{pmatrix} f(1) & f(2) & f(3) & ..... & f(n) \\ 1 & 2 & 3 & ..... & n \end{pmatrix} \in S_n$

আৰু fg = i = gf

$\therefore$ f অৰ বিপৰীত g.

g ক f^{-1} অৰ দ্বাৰা বুজোৱা হয়।

অর্থাৎ, $ff^{-1} = i = f^{-1} f$.

গতিকে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_n এটা সংঘ। ইয়াক n মাত্রাৰ (degree) বিন্যাস

সংঘ (বা সমমিত সংঘ) বুলি কোৱা হয়।

টোকা ঃ 1) S_n সংঘটো আবেলীয় নহয়, কিয়নো ফলনৰ সংযোগে সাধাৰণতে ক্রমবিনিময়ে বিধি মানি নচলে।

2) S_n অৰ মৌলৰ সংখ্যা n!, অর্থাৎ S_n অৰ ক্রম n!.

উদাহৰণ 10 ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}. ধৰা হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংহতিটো S_3. প্রমাণ কৰক যে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_3 এটা সংঘ। সংঘটো আবেলীয় হয়নে?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $S_n = \{i, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$, য'ত

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 3)$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 2),\ f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ \ 3)$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 3),\ f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ \ 2)$$

তলত প্রক্রিয়া সাৰণীখন দিয়া হ'ল।

	i	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
i	i	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	i	f_5	f_3	f_4
f_2	f_2	i	f_1	f_4	f_5	f_3
f_3	f_3	f_4	f_5	i	f_1	f_2
f_4	f_4	f_5	f_3	f_2	i	f_1
f_5	f_5	f_3	f_4	f_1	f_2	i

(i) সাৰণীখনৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_3 আৱদ্ধ।

(ii) আমি জানো যে বিন্যাসৰ পূৰণে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) একক বিন্যাস $i \in S_3$, আৰু if = f = fi, $\forall f \in S_3$

(iv) S_3 ৰ প্রতিটো মৌলৰ বিপৰীত S_3 ত আছে।

i ৰ বিপৰীত i.

f_1 অৰ বিপৰীত f_2.

f_2 ৰ বিপৰীত f_1.

f_3 ৰ বিপৰীত f_3.

f_4 ৰ বিপৰীত f_4.

f_5 ৰ বিপৰীত f_5.

গতিকে, বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_3 এটা সংঘ।

দ্বিতীয় অংশ ঃ S_3 সংঘটো আবেলীয় নহয়।

$$f_2 f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = f_4$$

$$f_3 f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = f_5$$

$\therefore \; f_2 f_3 \neq f_3 f_2$

পৰিৱৰ্তী সংঘ

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, ..., n}.

ধৰা হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো যুগ্ম বিন্যাসৰ সংহতিটো A_n. বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত A_n এটা সংঘ। ইয়াক n মাত্রাৰ পৰিৱৰ্তী সংঘ (alternating group) বুলি কোৱা হয়।

A_n অৰ মৌলৰ সংখ্যা $\frac{n!}{2}$, অৰ্থাৎ A_n ৰ ক্রম $\frac{n!}{2}$.

স্পষ্টতঃ S_n অৰ A_n এটা উপসংঘ।

উদাহৰণ 11 ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}. ধৰা হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো যুগ্ম বিন্যাসৰ সংহতিটো A_3. প্রমাণ কৰক যে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত A_3 এটা সংঘ। সংঘটো আবেলীয় হয়নে?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}.

ধৰা হ'ল সকলো যুগ্ম বিন্যাসৰ সংহতিটো A_3.

ধৰা হ'ল A_3 = {i, f_1, f_2}, য'ত

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \;\; 3 \;\; 2) = (1 \;\; 3)(1 \;\; 2)$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \;\; 3 \;\; 2) = (1 \;\; 2)(1 \;\; 3)$$

i, f_1, f_2 যুগ্ম বিন্যাস।

তলত প্রক্রিয়া সাৰণীখন গঠন কৰা হ'ল।

(i) সাৰণীখনৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত A_3 আৱদ্ধ।

(ii) আমি জানো যে বিন্যাসৰ পূৰণে সাহচর্য বিধি মানি চলে।

(iii) একক বিন্যাস $i \in A_3$, আৰু if = f = fi, $\forall f \in A_3$

(iv) A_3 ৰ প্রতিটো মৌলৰ A_3 ত বিপৰীত আছে।

i ৰ বিপৰীত i.

f_1 অৰ বিপৰীত f_2.

f_2 ৰ বিপৰীত f_1.

গতিকে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত A_3 এটা সংঘ।

দ্বিতীয় অংশ ঃ সাৰণীখনৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে পূৰণে ক্ৰমবিনিময়ে বিধি মানি চলে।

$\therefore$ A_3 এটা আবেলীয় সংঘ।

টোকা ঃ দেখা গ'ল যে S_3 সংঘটো আবেলীয় নহয়, কিন্তু A_3 এটা আবেলীয় সংঘ।

তদুপৰি S_3 ৰ A_3 এটা উপসংঘ।

গতিকে, দেখা গ'ল যে এটা অনা-আবেলীয় সংঘৰ এটা আবেলীয় উপসংঘ থাকিব পাৰে।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ৭ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, ..., n}, S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো অযুগ্ম ফলনৰ সংহতিটো সংঘ হয়নে? যুক্তি দিয়ক।

প্ৰশ্ন নং ৮ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4}

ধৰা হ'ল V = {1, f_1, f_2, f_3}, য'ত

$$i=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\quad f_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$$

$$f_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix},\quad f_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$$

প্ৰমাণ কৰক যে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত V এটা সংঘ। সংঘটো আবেলীয় হয়নে?

প্ৰশ্ন নং ৯ঃ এটা সসীম অনা-আবেলীয় সংঘৰ উদাহৰণ দিয়ক।



৫.৭ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- এটা অৰিক্ত সংহতিৰ পৰা নিজলৈকে এটা একৈকী আৰু আচ্ছাদক ফলনক সংহতিটোত এটা বিন্যাস বুলি কোৱা হয়।
- n টা মৌলবিশিষ্ট এটা সসীম সংহতি S অত বিন্যাসৰ সংখ্যা n!.
- ধৰা হ'ল S এটা সসীম সংহতি। ধৰা হ'ল S অত f এটা বিন্যাস। f অক n দৈৰ্ঘ্যৰ চক্ৰীয়

বিন্যাস বুলি কোৱা হয় যদি S অত $a_1, a_2, a_3, \ldots . a_{n-1}, a_n$ মৌল থাকে যাতে $f(a_1) = a_2, f(a_2) = a_3, \ldots ., f(a_{n-1}) = a_n, f(a_n) = a_1$, আৰু বাকী সকলোবোৰ মৌল, যদিহে থাকে, f অৰ অধীনত স্থিৰ হৈ থাকে, অর্থাৎ f(a) = s, সকলোবোৰ $a \in s$ অৰ বাবে। এই ক্ষেত্ৰত f অক $(a_1\ a_2\ a_3 \ldots . a_n)$ এৰে বুজোৱা হয়।

- 2 দৈর্ঘ্যৰ এটা চক্রীয় বিন্যাসক পৰিৱর্ত বুলি কোৱা হয়।
- যদি এটা বিন্যাসক যুগ্ম সংখ্যক পৰিৱর্তৰ পূৰণফল হিচাপে প্রকাশ কৰিব পাৰি, তেনে বিন্যাসক যুগ্ম বিন্যাস বুলি কোৱা হয়।
- যদি এটা বিন্যাসক অযুগ্ম সংখ্যক পৰিৱর্তৰ পূৰণফল হিচাপে প্রকাশ কৰিব পাৰি, তেনে বিন্যাসক অযুগ্ম বিন্যাস বুলি কোৱা হয়।
- ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, ..., n}. ধৰা হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংহতিটো S_n. বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_n এটা সংঘ। ইয়াক n মাত্রাৰ আৰু n! ক্রমৰ বিন্যাস সংঘ (বা সমমিত সংঘ) বুলি কোৱা হয়।

  যদি S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো যুগ্ম বিন্যাসৰ সংহতিটো A_n হয়, তেনেহ'লে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত A_n এটা সংঘ। ইয়াক n মাত্রাৰ আৰু $\frac{n!}{2}$ ক্রমৰ পৰিৱর্তী সংঘ বুলি কোৱা হয়।

৫.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত $S = (a_1, a_2, a_3\}$, য'ত সকলোবোৰ a_i বিভিন্ন।

$\therefore$ S অত 3! অর্থাৎ $3 \times 2 \times 1$, অর্থাৎ 6 টা বিন্যাস আছে। এইবোৰ হ'ল

$$i = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}$$

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ S = {1, 2, 3, 4}

S অত মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা 4! অর্থাৎ $4 \times 3 \times 2 \times 1$, অর্থাৎ 24.

S অত যিকোনো 5 টা বিন্যাস হ'ল

$$i=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\quad f_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix},\quad f_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$$

$$f_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix},\quad f_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) $fg=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&1&5\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&2&1\end{pmatrix}$$

$$f\phi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}$$

$$f\psi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&4&2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&5&3&2\end{pmatrix}$$

$$g\psi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&4&2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&1&4&2\end{pmatrix}$$

(ii) $g\phi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{pmatrix}$$

$$\phi g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&1&5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{pmatrix}$$

স্পষ্টত ঃ $g\phi=\phi g$

(iii) $\phi\psi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&4&2&1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

স্পষ্টত ঃ $\phi\psi \neq \psi\phi$

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(ii) $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত S = {1, 2, 3}

S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ বিন্যাসবোৰ হ'ল

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 3) = (1\ \ 3)(1\ \ 2)$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 2) = (1\ \ 2)(1\ \ 3)$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ \ 3)$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 3)$$

$$f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} 3 = (1\ \ 2)$$

যুগ্ম বিন্যাস : i, f_1, f_2

অযুগ্ম বিন্যাস : f_3, f_4, f_5.

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

(i) $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

$= (1 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6) = (1 \quad 6)(1 \quad 5)(1 \quad 4)(1 \quad 3)$

$\therefore$ f_1 এটা যুগ্ম বিন্যাস।

(ii) $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$= (1 \quad 2 \quad 3 \quad 5)(4 \quad 6)$

$= (1 \quad 5)(1 \quad 3)(1 \quad 2)(4 \quad 6)$

$\therefore$ f_2 এটা যুগ্ম বিন্যাস।

(iii) $f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$= (1 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2)$

$= (1 \quad 2)(1 \quad 3)(1 \quad 4)(1 \quad 5)(1 \quad 6)$

$\therefore$ f_3 এটা অযুগ্ম বিন্যাস।

(iv) $f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

$= (3 \quad 4 \quad 5 \quad 6) = (3 \quad 6)(3 \quad 5)(3 \quad 4)$

$\therefore$ f_4 এটা অযুগ্ম বিন্যাস।

(v) $f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$= (2 \quad 5 \quad 3 \quad 4) = (2 \quad 4)(2 \quad 3)(2 \quad 5)$

$\therefore$ f_5 এটা অযুগ্ম বিন্যাস।

৭ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত S = {1, 2, 3, ..., n}

ধৰা হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো অযুগ্ম বিন্যাসৰ সংগতিটো O_n.

ধৰা হ'ল $f, g \in O_n$

আমি জানো যে দুটা অযুগ্ম বিন্যাসৰ পূ�ৰণফল এটা যুগ্ম বিন্যাস।

$\therefore$ $fg \notin O_n$

$\therefore$ O_n সংঘ হ'ব নোৱাৰে।

৮ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত S = {1, 2, 3, 4}

V = {i, f_1, f_2, f_3}, য'ত

$$i=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\ f_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$$

$$f_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix},\ f_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$$

(i) সাৰণীৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে বিন্যাসৰ পূ�ৰণৰ অধীনত V আৱদ্ধ।

(ii) আমি জানো যে বিন্যাসৰ পূৰণে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) $i=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\in v$

আৰু if = f = f_1, $\forall f \in V$.

$\therefore$ i একক মৌল।

(iv) V ৰ প্ৰতিটো মৌলৰ বিপৰীত V ত আছে।

i ৰ বিপৰীত i.

f_1 অৰ বিপৰীত f_1.

f_2 ৰ বিপৰীত f_2.

f_3 ৰ বিপৰীত f_3.

[এই ক্ষেত্ৰত প্ৰত্যেক মৌলই নিজে নিজৰ বিপৰীত।]

$\therefore$ বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত V এটা সংঘ।

দ্বিতীয় অংশ ঃ সাৰণীৰ পৰা দেখা গ'ল যে পূৰণে ক্ৰমবিনিময়ে বিধি মানি চলে।

$\therefore$ V এটা আবেলীয় সংঘ।

৯ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}

ধৰা হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংহতিটো S_3 বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_3 এটা সংঘ।

স্পষ্টত ঃ S_3 এটা সসীম সংঘ আৰু ইয়াৰ ক্ৰম 3! অর্থাৎ 6.

S_3 আবেলীয় সংঘ নহয়।



৫.৯ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.

2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).

3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).

4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.

5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



৫.১০ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2}. S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংহতিটো S_2। প্ৰমাণ কৰক যে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_2 এটা আবেলীয় সংঘ।

প্ৰশ্ন ২ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ তলৰ বিন্যাসবোৰক পৰিৱৰ্তৰ পূৰণফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰক।

(i) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

(ii) $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

প্ৰশ্ন ৩ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4}

ধৰা হ'ল V = {1, f_1, f_2, f_3}, য'ত i, f_1, f_2, f_3 হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ বিন্যাস, আৰু

$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $f_1 = (1 \quad 2)(3 \quad 4)$

$f_2 = (1 \quad 3)(2 \quad 4)$, $f_3 = (1 \quad 4)(2 \quad 3)$

বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত V আবেলীয় সংঘ হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, ..., n}. S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংহতিটো S_n। প্ৰমাণ কৰক যে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_n এটা সংঘ।

*** ***** ***