অধ্যায় ৬ ঃ সহ সংহতি (COSETS)

অধ্যায় গাঁথনি

৬.১ উদ্দেশ্য
৬.২ পৰিচয়
৬.৩ সহ সংহতি
৬.৪ লাগ্ৰাঞ্জৰ উপসংঘৰ ক্ৰম সম্পৰ্কীয় উপপাদ্য
৬.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
৬.৬ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান
৬.৭ অধিক জানিবলৈ
৬.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

৬.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি অধোলিখিত বিষয়বোৰৰ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব—

- উপসংঘৰ সহ সংহতি
- লাগ্ৰাঞ্জৰ উপসংঘৰ ক্ৰম সম্পৰ্কীয় উপপাদ্য।

৬.২ পৰিচয়

সংঘ, উপসংঘ আৰু ইয়াৰ ধৰ্মসমূহৰ বিষয়ে আমি ইতিমধ্যে তৃতীয় আৰু চতুৰ্থ অধ্যায়ত আলোচনা কৰিলো। এই অধ্যায়টিত আমি উপসংঘৰ সহ সংহতি বিষয়ে আলোচনা কৰিম। লাগ্ৰাঞ্জৰ উপসংঘৰ ক্ৰম সম্পৰ্কীয় উপপাদ্যৰ বিষয়ে এই অধ্যায়টিত আলোচ্য বিষয়।

৬.৩ সহ সংহতি

ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু $H \leq G$

ধৰা হ'ল $a \in G$

$Ha = \{ha : h \in H\}$ সংহতিটোক G ত H অৰ সোঁ সহসংহতি (right coset) বুলি কোৱা হয়।

সেইদৰে, $aH = \{ah : h \in H\}$ H সংহতিটোক G ত H অৰ বাওঁ সহসংহতি (left coset) বুলি কোৱা হয়।

টোকা ঃ (1) সোঁ (বা বাওঁ) সহসংহতি ৰিক্ত হ'ব নোৱাৰে। আমি জানো $e \in H$

$\therefore ea = a \in Ha$ $\quad \therefore Ha \neq \phi$

সেইদৰে $ae = a \in aH$ $\quad \therefore aH \neq \phi$

(2) $H \leq G$, কিন্তু Ha বা aH, G ৰ উপসংঘ নহ'বও পাৰে।

(3) যদি G এটা যোগাধীনত সংঘ আৰু H, G ৰ উপসংঘ, G ত H ৰ সোঁ সহসংহতি হ'ব

এনেধৰণৰ $H+a = \{h+a : h \in H\}$

সেইদৰে G ত H ৰ বাওঁ সহসংহতি হ'ল এনেধৰণৰ $a+H=\{a+h : h \in H\}$

(4) যদি G আবেলীয় হয়, তেন্তে প্ৰত্যেকটো বাওঁ সহ সংহতিয়ে সোঁ সহ সংহতি হয়।

উদাহৰণ ঃ আমি জানো অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Z যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ।

আকৌ আমি জানো যে $2Z = \{0, \pm2, \pm4, \pm6,...\} \leq Z$

এতিয়া

$0+2Z = \{0, \pm2, \pm4, \pm6,...\} = 2Z$

$1+2Z = \{\pm1, \pm3, \pm5, \pm7, ...\}$

$2+2Z = \{0, \pm2, \pm4, \pm6, ...\}$

$3+2Z = \{\pm1, \pm3, \pm5, \pm7, ...\}$ এইদৰে উলিয়াই থাকিব পৰা যাব।

আমি দেখিলোঁ যে $2Z = 2+2Z = 4+2Z = ...$

$1+2Z = 3+2Z = 5+2Z = ...$

$\therefore$ 2Z অৰ দুটা পৃথক বাওঁ সহসংহতি আছে, যথা 2Z আৰু 1+2Z যাতে

$2Z \cup (1+2Z) = Z$

$2Z \cap (1+2Z) = \phi$

সেইদৰে 2Z অৰ দুটা পৃথক সোঁ সহসংহতি আছে, যথা 2Z আৰু 2Z + 1 যাতে

$2Z \cup (2Z+1) = Z$

$2Z \cap (2Z+1) = \phi$

উপপাদ্য ১ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু $H \leq G$.

(i) $aH = H \Leftrightarrow a \in H$; $Ha = H \Leftrightarrow a \in H$

(ii) $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$; $Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$.

প্ৰমাণ ঃ (i) ধৰা হ'ল $aH = H$

আমি জানো $ae \in aH$, e হ'ল G ৰ একক মৌল

$\Rightarrow ae \in H$ [$\because aH = H$]

$\Rightarrow a \in H$

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল $a \in H$

ধৰা হ'ল $x \in aH$

$\Rightarrow x = ah$, কোনো $h \in H$ অৰ বাবে

এতিয়া $a \in H, h \in H$ $\therefore ah \in H \Rightarrow x \in H$

গতিকে, $x \in aH \Rightarrow x \in H$

$\therefore aH \subseteq H$ ... (1)

আকৌ, ধৰা হ'ল $y \in H$

$\therefore a \in H, \therefore a^{-1} \in H$

$\therefore a^{-1}y \in H$

$\Rightarrow a^{-1}y = h_1$, কোনো $h_1 \in H$ অৰ বাবে

$\Rightarrow a(a^{-1}y) = ah_1$

$\Rightarrow (aa^{-1})y = ah_1$

$\Rightarrow ey = ah_1$

$\Rightarrow y = ah_1 \in aH$

গতিকে $y \in H \Rightarrow y \in aH$

$\therefore H \subseteq aH$ ... (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা $aH = H$

সেইদৰে $Ha = H \Leftrightarrow a \in H$.

(ii) $aH = bH$

$\Leftrightarrow a^{-1}(aH) = a^{-1}(bH)$

$\Leftrightarrow (a^{-1}a)H = (a^{-1}b)H$

$\Leftrightarrow eH = (a^{-1}b)H$

$\Leftrightarrow H = (a^{-1}b)H$

$\Leftrightarrow a^{-1}b \in H$ ((1)ৰ পৰা)

সেইদৰে, $Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$.

উপপাদ্য ২ ঃ (i) এটা উপসংঘৰ যিকোনো দুটা বাওঁ (বা সোঁ) সহসংহতি অসংযুক্ত বা সমান।

(ii) এটা সংঘ G ইয়াৰ উপসংঘ H ৰ প্ৰত্যেকটো সোঁ (বাওঁ) সহসংহতিবোৰ মিলন হয়।

[দুটা সংহতি A, B অসংযুক্ত (disjoint) যদি $A \cap B = \phi$]

প্ৰমাণ ঃ (i) ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু $H \leq G$.

ধৰা হ'ল $a, b \in G$

গতিকে, aH আৰু bH হ'ল G ত H অৰ দুটা বাওঁ সহসংহতি।

স্পষ্টত ঃ aH, bH অসংযুক্ত বা অসংযুক্ত নহয়।

ধৰা হ'ল aH, bH অসংযুক্ত নহয়, অৰ্থাৎ $aH \cap bH \neq \phi$.

ধৰা হ'ল $x \in aH \cap bH$

$\Rightarrow x \in aH$ আৰু $x \in bH$

এতিয়া $x \in aH \Rightarrow x = ah_1$ কোনো $h_1 \in H$ অৰ বাবে

$x \in bH \Rightarrow x = bh_2$ কোনো $h_2 \in H$ অৰ বাবে

$\therefore ah_1 = bh_2$

$\Rightarrow (ah_1)h_1^{-1} = (bh_2)h_1^{-1}$

$\Rightarrow a\, h_1 h_1^{-1} = b\, h_2 h_1^{-1}$

$\Rightarrow ae = bh_2 h_1^{-1}$, e হ'ল G ৰ একক মৌল

$\Rightarrow a = bh_2 h_1^{-1}$

সেইদৰে $b = ah_1 h_2^{-1}$

ধৰা হ'ল $p \in aH$

$\therefore p = ah_3$ কোনো $h_3 \in H$ অৰ বাবে

$= bh_2 h_1^{-1} h_3$

$\in bH$, $\quad \Theta\ h_2 h_1^{-1} h_3 \in H$

এইদৰে, $p \in aH \Rightarrow p \in bH \quad \therefore aH \subseteq bH \quad (1)$

আকৌ, ধৰা হ'ল $q \in bH$

$\Rightarrow q = bh_4$ কোনো $h_4 \in H$ অৰ বাবে

$\Rightarrow q = ah_1 h_2^{-1} h_4$

$\in aH$, $\quad \Theta\ h_1 h_2^{-1} h_4 \in H$

গতিকে $q \in bH \Rightarrow q \in aH \quad \therefore bH \subseteq aH \quad (2)$

(1) আৰু (2), $aH = bH$

গতিকে aH, bH অসংযুক্ত বা সমান।

৬.৪ লাগ্ৰাঞ্জৰ উপ সংঘৰ ক্ৰম সম্পৰ্কীয় উপপাদ্য

উপপাদ্য ঃ (লাগ্ৰাঞ্জৰ উপসংঘৰ ক্ৰম সম্পৰ্কীয় উপপাদ্য) এটা সসীম সংঘৰ উপসংঘৰ ক্ৰমৰ দ্বাৰা সংঘটোৰ ক্ৰম বিভাজ্য।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সসীম সংঘ আৰু $0(G) = n$.

ধৰা হ'ল $H \leq G$

ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e.

প্ৰথম ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল $H = \{e\}$,

এই ক্ষেত্ৰত প্ৰমাণ কৰিবলৈকে একোৱেই নাই, কিয়নো $O(H)=1$ আৰু 1 অৰ দ্বাৰা n বিভাজ্য।

দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল $H = G$.

এই ক্ষেত্ৰতো প্ৰমাণ কৰিবলৈকে একোৱেই নাই, $O(H) = n = O(G)$

তৃতীয় ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল $H \neq \{e\}$, $H \neq G$.

ধৰা হ'ল $0(H) = m$, $m < n$.

ধৰা হ'ল $H = \{h_1, h_2, h_3, \ldots h_m\}$, য'ত h_i বোৰ পৃথক।

ধৰা হ'ল $a \in G$, $a \notin H$

তলৰ বাওঁ সহসংহতিটো লোৱা হ'ল

$aH = \{ah_1, ah_2, ah_3, ..., ah_m\}$

aH অৰ সকলোবোৰ মৌলই পৃথক, কিয়নো যদি $ah_i = ah_j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$, $i \neq j$ তেনেহ'লে $h_i = h_j$, (বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা)। এইটো স্ববিৰোধী কথা, যিহেতু H অৰ আটাইবোৰ মৌলই পৃথক।

আকৌ H অৰ কোনো মৌল aH অৰ কোনো মৌলৰ সমান নহয়, কিয়নো যদি $h_i = ah_j$, তেনেহ'লে $h_i h_j^{-1} = ah_j h_j^{-1}$ অর্থাৎ $h_i h_j^{-1} = a$ অর্থাৎ $a = h_i h_j^{-1} \in H$
অর্থাৎ $a \in H$, এইটোৱো স্ববিৰোধী কথা, যিহেতু $a \notin H$

এইদৰে আমি G ৰ m+m = 2m টা মৌল তালিকাভুক্ত কৰিলোঁ। ইয়ে যদি G ৰ সকলোবোৰ মৌল সামৰি লয়, তেনেহ'লে 2m = n অর্থাৎ m অৰ দ্বাৰা n বিভাজ্য।
যদি নহয়, ধৰা হ'ল $b \in G$, $b \notin H$, $b \notin aH$
তলৰ বাওঁ সহসংহতিটো লোৱা হ'ল $bH = \{bh_1, bh_2, ..., bh_m\}$
স্পষ্টত ঃ bH অৰ সকলোবোৰ মৌল পৃথক। আকৌ H অৰ কোনো মৌল bH অৰ কোনো মৌলৰ সমান নহয়।

আকৌ aH অৰ কোনো মৌল bH অৰ কোনো মৌলৰ সমান নহয়, কিয়নো যদি $ah_i = bh_j$, তেনেহ'লে $ah_i h_j^{-1} = bh_j h_j^{-1}$ অর্থাৎ $ah_i h_j^{-1} = b$ অর্থাৎ $b = ah_i h_j^{-1} \notin aH$,
($\Theta\ h_i h_j^{-1} \in H$) অর্থাৎ $b \in aH$, এইটো স্ববিৰোধী কথা, যিহেতু $b \notin aH$.

এইদৰে আমি G ৰ m+m+m = 3m টা মৌল তালিকাভুক্ত কৰিলোঁ। ইয়ে যদি G ৰ সকলোবোৰ মৌল সামৰি লয়, তেনেহ'লে 3m = n অর্থাৎ m অৰ দ্বাৰা n বিভাজ্য।

যদি নহয়, আকৌ আমি একেদৰে আগবাঢ়িম। যিহেতু G সসীম, আমি এটা সময়ত ৰব লাগিব। ধৰা হ'ল k বাৰৰ পাছত আমি ৰবলগীয়া হ'ল।
$\therefore$ mk = n অর্থাৎ m অৰ দ্বাৰা n বিভাজ্য।

টোকা ঃ জোছেফ লুই লাগ্রাঞ্জ (Joseph Louis Lagrange, 1736 – 1813) আছিল এজন বিশিষ্ট গণিতজ্ঞ।

মন্তব্য ঃ লাগ্রাঞ্জৰ উপপাদ্যৰ বিপৰীতটো সত্য নহয়



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ 2Z ৰ উপসংঘ 4Z ৰ সহ সংহতিবোৰ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ঃ 2Z ৰ উপসংঘ 6Z ৰ সংসংহতিবোৰ নির্ণয় কৰক।



৬.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- যদি H, G ৰ এটা উপসংঘ হয়, Ha = {ha : h ∈ H}, a ∈ G, সংহতিটোক G ত H অৰ সোঁ সহসংহতি বুলি কোৱা হয়। সেইদৰে বাওঁ সহসংহতিৰ সংজ্ঞা দিয়া হয়।
- এটা উপসংঘৰ যিকোনো দুটা বাওঁ (বা সোঁ) সহসংহতি অসংযুক্ত বা সমান।
- লাগ্ৰাজৰ উপসংঘৰ ক্ৰম সম্পৰ্কীয় উপপাদ্য মতে এটা সসীম সংঘৰৰুপসংঘৰ ক্ৰমৰ দ্বাৰা সংঘটোৰ ক্ৰম বিভাজ্য।



৬.৬ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ যিহেতু 2Z আবেলীয়। গতিকে ইয়াৰ সোঁ সহ সংহতি আৰু বাওঁ সহ সংহতিবোৰ সমান। অখণ্ড সংখ্যা 0 থকা বাওঁ সহসংহতি হ'ল 0+4z = { . . . -8, -4, 0, 4, 8 . . .} আৰু অখণ্ড সংখ্যা Z থকা বাওঁ সহ সংহতিবোৰ হ'ল 2+4z = { . . ., -2, 2, 6, 10, . . .}.

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে কৰিবলৈ চেষ্টা কৰক।



৬.৭ অধিক জানিবলৈ

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.
2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).
3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).
4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.

5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



৬.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ঃ G এটা সংঘ আৰু H, G ৰ এটা উপসংঘ। ধৰা হ'ল a, b ∈ G. দেখুৱাওক যে Ha, Hb সোঁ সহসংহতি দুটা সমান যদি আৰু যদিহে $a^{-1}H$, $b^{-1}H$ বাওঁ সহসংহতি দুটা সমান।

প্ৰশ্ন ২ঃ Z ৰ উপসংঘ 4Z ৰ সহ সংহতিবোৰ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ঃ **উপসংঘৰ সূচক** (Index of a subgroup) ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু H, G ৰ এটা উপসংঘ। G ত Hঅৰ বাওঁ বা (সোঁ) পৃথক সহ সংহতিৰ সংখ্যাক G ত H অৰ সূচক বুলি কোৱা হয়। সাধাৰণতে ইয়াক [G : H] প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হয়।

G এটা সসীম সংহতি হ'লে প্ৰমাণ কৰক যে $[G : H] = \frac{o(G)}{o(H)}$

*** ***** ***