UG MA S2 01
(DSE)

চাৰি বছৰীয়া স্নাতক পাঠ্যক্ৰম

(চি. বি. চি. এচ; এন ই পি ২০২০ অনুসৰি)

বিমুৰ্ত বীজগণিত আৰু বিচ্ছিন্ন গণিত

দ্বিতীয় ষাণ্মাসিক

বিষয় সম্পৰ্কীয় ঐচ্ছিক পাঠ্যবিষয় - ২

গণিত

হিৰণ্য চন্দ্ৰ ভূঞা বিজ্ঞান আৰু প্ৰযুক্তিবিদ্যা অধ্যয়ন সত্ৰ

কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

বিষয় বিশেষজ্ঞ

অধ্যাপক বিপন হাজৰিকা, গণিত বিভাগ, গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়
ড° দিলীপ কুমাৰ **শর্মা**, প্রাক্তন মুৰব্বী, গণিত বিভাগ, কটন কলেজ, গুৱাহাটী

সমন্বয়ৰক্ষীঃ হৰেকৃষ্ণ ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

প্রস্তুতি গোটৰ সদস্য

অধ্যায়	*অৰিহণা যোগাইছে*	*ভাষান্তৰকাৰী*
১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ৮,৯, ১০, ১১, ১২, ১৪	ড° দিলীপ কুমাৰ **শর্মা** কটন মহাবিদ্যালয়, গুৱাহাটী	অধ্যায় ১, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ৮,৯,১০, ১১, ১২, ১৪ ড° দিলীপ কুমাৰ **শর্মা** অধ্যায় ২ গীতাঞ্জলি মেধি
১৩	হৰেকৃষ্ণ ডেকা কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়	অধ্যায় ১৩ গীতাঞ্জলি মেধি

সম্পাদনাঃ

বিষয়বস্তু সম্পাদনা ঃ অধ্যাপক বিশ্বজিৎ ভাগৱতী, প্রাক্তন মুৰব্বী অধ্যাপক গণিত বিভাগ, কটন কলেজ
গাঁথনিক সম্পাদনা ঃ হৰেকৃষ্ণ ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

প্রথম প্রকাশ ঃ মার্চ, ২০২৩

Copyright © Krishna Kanta Handiqui State Open University

This Self Learning Material (SLM) of the Krishna Kanta Handiqui State University is made available under a Creative Commons Attribution-Non Commercial-ShareAlike4.0 License (International) : http.//creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0.

কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ৰ হৈ পঞ্জীয়কৰ দ্বাৰা মুদ্রিত আৰু প্রকাশিত।

এই শিক্ষণ সামগ্রী প্রস্তুতিৰ বাবে আর্থিক অনুদান আগবঢ়োৱা
দূৰ শিক্ষা ব্যুৰো, বিশ্ববিদ্যালয় অনুদান আয়োগৰ ওচৰত বিশ্ববিদ্যালয় কৃতজ্ঞ।

মুখ্য কার্যালয় ঃ পাটগাঁও, ৰাণীগেট, গুৱাহাটী-৭৮১০১৭
নগৰ কার্যালয় ঃ ৰেচম নগৰ, খানাপাৰা, গুৱাহাটী-৭৮১০২২
Web : www.kkhsou.in

পাঠ্যবিষয় পৰিচয়

'বিমুর্ত বীজগণিত আৰু বিচ্ছিন্ন গণিত' হ'ল স্নাতক (কলা) গণিত বিষয়ৰ দ্বিতীয় পাঠ্যবিষয়। এই পাঠ্যবিষয়টি চৈধ্যটা—

অধ্যায়েৰে গঠিত।

এই পাঠ্যবিষয়টিৰ প্রথম অধ্যায়টোত সম্বন্ধ আৰু ফলনৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব। এই অধ্যায়টিত বিভিন্ন প্রকাৰৰ সম্বন্ধ আৰু ফলনৰ বিষয়েও জানিব পাৰিব। দ্বিতীয় অধ্যাটিত দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ সংজ্ঞা আৰু বিভিন্ন প্রকাৰৰ দ্বৈত প্রক্রিয়া বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব। তৃতীয় অধ্যায়টোত সংঘ আৰু ইয়াৰ বিভিন্ন ধর্ম বিষয়ে জানিব পাৰিব। সেইদৰে চতুর্থ অধ্যায়টিত উপসংঘ আৰু ইয়াৰ বিভিন্ন ধর্ম বিষয়ে আলোচনা কৰা হৈছে। ইয়াৰ উপৰিও চক্রীয় উপসংঘৰ বিষয়ে এই অধ্যায়টিত জানিব পাৰিব।পঞ্চম অধ্যায়টিত বিন্যাস সংঘৰ বিষয়ে আমি জানিব পাৰিম। বিন্যাসৰ সংজ্ঞা, বিন্যাসৰ পূৰণ আৰু বিন্যাস সংঘৰ বিষয়ে এই অধ্যায়টিত আলোচনা কৰা হ'ব। ষষ্ঠ অধ্যায়টিত সহসংহতি আৰু লাগ্রাঞ্জৰ উপসংঘ ক্রমৰ উপপাদ্য বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব। সপ্তম অধ্যায়টিত নিশ্চৰ উপসংঘ আৰু ভাগফল সংঘৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব। অষ্টম অধ্যায়টিত সংঘৰ অনুৰূপতা বিষয়ে অৱগত কৰা হ'ব। এই অধ্যায়টিত অনুৰূপতা বিভিন্ন প্রকাৰ আৰু অনুৰূপতাৰ ধর্মৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।নৱম অধ্যায়টিত বলয় আৰু ইয়াৰ ধর্মসমূহৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব। সেইদৰে, দশম অধ্যায়টিত সমাকল প্রান্ত আৰু ক্ষেত্রৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব। ভেক্টৰ স্থান, ভেক্টৰ স্থানৰ উপস্থান, ৰৈখিক পৰতন্ত্রতা আৰু স্বতন্ত্রতা বিষয়ে একাদশ অধ্যায়টিত আলোচনা কৰা হ'ব। আকৌ, ভেক্টৰ স্থানৰ আধাৰ আৰু মাত্রাৰ বিষয়েও এই অধ্যায়টিত জানিব পাৰিব।মিশ্রিত গণিতৰ বিষয়ে দ্বাদশ অধ্যায়ত আলোচনা কৰা হ'ব। এই অধ্যায়টিত বিন্যাস আৰু দলৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।ত্রয়োদশ অধ্যায়ত গাণিতিক যুক্তি বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব। এই অধ্যায়টিত কিছুমান বৌদ্ধিক সংযোজক বিষয়েও জানিব পাৰিব। বুলীয় বীজগণিতৰ বিষয়ে চতুদর্শ অধ্যায়ত আলোচনা কৰা হ'ব। এই অধ্যায়টিত বুলীয় বীজগণিতৰ মূল বিধি আৰু বুলীয় ৰাশি বিষয়ে জানিব পাৰিব।

এই পাঠ্যবিষয়টি অধ্যয়ন কৰোতে মূল পাঠত 'জানি থোৱা ভাল' বাকচবোৰৰ মূল পাঠৰ সৈতে জড়িত কিছু গুৰুত্বপূর্ণ তথ্যৰ সম্ভেদ আছে। প্রতিটো অধ্যায়ত থকা 'অগ্রগতি নিৰীক্ষণ' যোগে আগবঢ়োৱা প্রশ্নাৱলীয়ে অধ্যয়নৰ অগ্রগতি সম্পর্কে স্ব-পৰীক্ষণৰ সুবিধা দিব। অধ্যয়নৰ লগে লগে উক্ত প্রশ্নাৱলীৰ উত্তৰসমূহ লিখি শেষত দিয়া 'অগ্রগতিৰ খতিয়ানে'ৰ সৈতে ৰিজাই চোৱাটো অধিক লাভদায়ক হ'ব। অধ্যায়বোৰৰ শেষত 'আৰ্হি প্রশ্ন' হিচাপে কেইটিমান প্রশ্নৰ আৰ্হিও তুলি দিয়া হৈছে।

বিষয় সূচী

পৃষ্ঠা নং

অধ্যায় ১ঃ **সম্বন্ধ আৰু ফলন** ৭-২৯

সম্বন্ধৰ ধাৰণা, বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ সম্বন্ধ, সমতুল্যতা সম্বন্ধ, ফলনৰ ধাৰণা, বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ ফলন।

অধ্যায় ২ঃ **দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া** ৩০-৩৯

দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া ঃ ক্ৰম বিনিময়ে দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, সাহচৰ্য্য দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, একক মৌল, মৌলৰ বিপৰীত।

অধ্যায় ৩ঃ **সংঘ** ৪০-৪৯

সংঘ, সংঘৰ ধৰ্ম।

অধ্যায় ৪ঃ **উপসংঘ** ৫০-৫৯

উপসংঘ, উপসংঘৰ ধৰ্ম, চক্ৰীয় উপসংঘ।

অধ্যায় ৫ঃ **বিন্যাস সংঘ** ৬০-৮১

বিন্যাসৰ সংজ্ঞা, উদাহৰণ, বিন্যাসৰ পূৰণ, বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ বিন্যাস, বিন্যাস সংঘ।

অধ্যায় ৬ঃ **সহ সংহতি** ৮২-৮৮

সহসংহতি, লাগ্ৰাঞ্জৰ উপসংঘ ক্ৰমৰ উপপাদ্য।

অধ্যায় ৭ঃ **নিশ্চৰ উপসংঘ আৰু ভাগফল সংঘ** ৮৯-৯৬

নিশ্চৰ উপসংঘ, ভাগফল সংঘ।

অধ্যায় ৮ঃ **সংঘৰ অনুৰূপতা** ৯৭-১১৪

সংঘৰ অনুৰূপতা, সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ, অনুৰূপতাৰ বিভিন্ন প্ৰকাৰ, অনুৰূপতাৰ ধৰ্ম।

অধ্যায় ৯ঃ **বলয়** ১১৫-১২৬

বলয়, বলয়ৰ ধর্ম।

অধ্যায় ১০ঃ **সমাকল প্ৰান্ত আৰু ক্ষেত্ৰ** ১২৭-১৩৪

সমাকল প্ৰান্ত, ক্ষেত্ৰ।

অধ্যায় ১১ঃ **ভেক্টৰ স্থান** ১৩৫-১৬১

ভেক্টৰ স্থানৰ সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ, প্ৰাথমিক ধর্ম, ভেক্টৰ স্থানৰ উপস্থান, ৰৈখিক পৰতন্ত্ৰতা আৰু স্বতন্ত্ৰতা, আধাৰ আৰু মাত্ৰা।

অধ্যায় ১২ঃ **মিশ্ৰিত গণিত** ১৬২-১৭৮

যোগৰ নিয়ম, পূৰণৰ নিয়ম, বিন্যাস, দল।

অধ্যায় ১৩ঃ **গাণিতিক যুক্তি** ১৭৯-১৯৬

উক্তিৰ সংজ্ঞা, উক্তিৰ উদাহৰণ, যৌক্তিক সংযোজক ঃ নেতিপদ, সংযোজক পদ, বিমুক্তি পদ, সপ্ৰতিবন্ধ পদ, দ্বি প্ৰতিবন্ধ পদ।

অধ্যায় ১৪ঃ **বুলীয় বীজগণিত** ১৯৭-২২৭

সংজ্ঞা, ধর্ম আৰু উদাহৰণ, বুলীয় বীজগণিতৰ মূল বিধি, বুলীয় ৰাশি।

অধ্যায় ১ ঃ সম্বন্ধ আৰু ফলন (RELATIONS AND FUNCTIONS)

অধ্যায় গাঁথনি

১.১ উদ্দেশ্য

১.২ পৰিচয়

১.৩ সম্বন্ধৰ ধাৰণা

  ১.৩.১ একক সম্বন্ধ

  ১.৩.২ বিপৰীত সম্বন্ধ

১.৪ বিভিন্ন প্রকাৰৰ সম্বন্ধ

  ১.৫.১ সমতুল্যতা শ্রেণী

১.৫ সমতুল্যতা সম্বন্ধ

১.৬ ফলনৰ ধাৰণা

  ১.৬.১ একক সম্বন্ধ

  ১.৬.২ ধ্রুৱক সম্বন্ধ

১.৭ বিভিন্ন প্রকাৰৰ ফলন

১.৮ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১.৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১.১০ অধিক জানিবলৈ

১.১১ আৰ্হি প্রশ্ন

১.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি অধোলিখিত বিষয়বোৰৰ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব—

- সম্বন্ধৰ ধাৰণা
- বিভিন্ন প্রকাৰৰ সম্বন্ধ
- সমতুল্যতা সম্বন্ধ, সমতুল্যতা শ্রেণী
- ফলনৰ ধাৰণা
- বিভিন্ন প্রকাৰৰ ফলন

১.২ পৰিচয়

সংহতি তত্ত্বক (Set Theory) আধুনিক গণিতৰ ভাষা বুলি ক'ব পাৰি। আমি জানো যে সংহতি (set) হ'ল সুসংজ্ঞাৱদ্ধ 'বস্তুৰ' সংগ্রহ (well-defined collection of objects)। আমি সংহতিৰ উপসংহতিৰ কথাও জানো। যদি এটা সংহতি B ৰ প্রতিটো মৌল বা উপাদান

সংহতি A ত থাকে, তেনেহ'লে B ক A ৰ উপসংহতি বুলি কোৱা হয়। প্ৰতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে বুজোৱা হয় $B \subseteq A$.

আমি এইটোৰো জানো যে n টা মৌলবিশিষ্ট এটা সসীম সংহতিৰ (finite set) উপসংহতিৰ সংখ্যা হ'ল 2^n.

আকৌ A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি হ'লে A ৰ আৰু B কার্টেজীয় পূৰণফল (cartesian product) A x Bৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা হ'ল– $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

(a, b) ক এটা ক্ৰমিত যোৰ (ordered pair) বুলি কোৱা হয়।

ধৰা হ'ল $a \in A$, $c \in A$; $b \in B$, $d \in B$.

$\therefore (a, b) \in A \times B$, $(c, d) \in A \times B$

আমি জানো যে $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$.

আকৌ আমি জানো যে যদি A, B দুটা সসীম সংহতি আৰু n(A)=x, n(B)=y, তেনেহ'লে n(AxB) = n(BxA)=xy

[ইয়াত n(A) য়ে Aৰ মৌলৰ সংখ্যা বুজাইছে।]

যদি A আৰু B সংহতি দুটাৰ এটা অসীম হয়, তেনেহ'লে A x B আৰু B x A অসীম।

এই অধ্যায়ত আমি সম্বন্ধ (relations) আৰু ফলন (functions) সম্বন্ধে অধ্যয়ন কৰিম। সম্বন্ধ আৰু ফলন হ'ল দুটা সংহতিৰ কার্টেজীয় পূৰণফলৰ উপসংহতি।

স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতিক 'N' এৰে, অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিক Z এৰে, পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতিক Q ৰে, বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতিক IR এৰে আৰু জটিল সংখ্যাৰ সংহতিক C ৰে বুজোৱা হ'ব।

১.৩ সম্বন্ধৰ ধাৰণা

তলৰ বাক্যবোৰলৈ মন কৰক।

(1) 10 অতকৈ 11 ডাঙৰ।

(2) 7 এৰে 35 বিভাজ্য।

(3) ভাৰতবৰ্ষৰ ৰাজধানী নতুন দিল্লী।

প্ৰতিটো বাক্যত এযোৰ 'বস্তুৰ' মাজত এটা সম্বন্ধ আছে।

সংহতি-তত্ত্বত সম্বন্ধই কি বুজায়, সেয়া এতিয়া চোৱা যাওক।

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল A আৰু B দুটা অৰিক্ত সংহতি। A x B ৰ যিকোনো উপসংহতিক A ৰ পৰা B লৈ এটা **সম্বন্ধ** (relation) বুলি কোৱা হয়।

যদি A=B, তেনেহ'লে A x A ৰ যিকোনো উপসংহতিক Aত এটা সম্বন্ধ বুলি কোৱা হয়।

যদি $R \subseteq A \times B$, আৰু $(a, b) \in R$; $a \in A$, $b \in B$, তেনেহ'লে ইয়াক aRbৰেও বুজোৱা হয় আৰু ইয়াক এনেদৰে পঢ়া হয় ঃ b ৰ লগত a ৰ R সম্বন্ধ আছে।

টোকা ঃ 1. R অৰ ক্রমিত যোৰবোৰৰ প্রথম উপাদানৰ সংহতিটোক **আদিক্ষেত্র** (domain) আৰু দ্বিতীয় উপাদানৰ সংহতিটোক পৰিসৰ (range) বুলি কোৱা হয়।

2. যদি A, B সসীম সংহতি আৰু n(A)=x, n(B)=y; তেনেহ'লে n(AxB)=xy. গতিকে AxBৰ উপসংহতিৰ সংখ্যা 2^{xy}. গতিকে Aৰ পৰা B লৈ সম্বন্ধৰ সংখ্যা 2^{xy}.

উদাহৰণ ১ ঃ ধৰা হ'ল A ={1, 2, 3}, B={8, 9}

∴A x B ={(1, 8), (1, 9), (2, 8), (2, 9), (3, 8), (3, 9)}

ধৰা হ'ল R = {(1, 8), (2, 9), (3, 9)}

স্পষ্টত ঃ R⊆ AxB

∴R হ'ল Aৰ পৰা Bলৈ এটা সম্বন্ধ।

আকৌ 1R8, 2R9, 3R9

R অৰ আদিক্ষেত্র = {1, 2, 3}

R অৰ পৰিসৰ = {8, 9}

উদাহৰণ ২ ঃ ধৰা হ'ল IR বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল R = {(x, y) : x, y ∈IR, x<y} ⊆IR x IR

∴IR অত R এটা সম্বন্ধ।

৩ 3<5, ∴(3, 5) ∈R অর্থাৎ 3R5

19<27, ∴(19, 27) ∈R অর্থাৎ 19R27

কিন্তু 5>3, ∴(5, 3) ∉ R, অর্থাৎ 5$\not R$3.

উদাহৰণ ৩ ঃ ধৰা হ'ল X অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল R = {(x, y) : x, y ∈ X আৰু x+y অযুগ্ম}

আমি জানো যে দুটা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগফল এটা যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।

∴যদি x, y অযুগ্ম হয়, তেনেহ'লে x+y অযুগ্ম হ'ব নোৱাৰে।

∴R =ϕ⊆X x X

এই ক্ষেত্রত R অক X অত **ৰিক্ত সম্বন্ধ** (empty relation) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ ৪ ঃ ধৰা হ'ল E যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল R = {(x, y) : x, y ∈ E আৰু x+y যুগ্ম}

আমি জানো যে দুটা যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগফল এটা যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।

∴ যদি x, y যুগ্ম হয়, তেনেহ'লে x+y সদায় যুগ্ম।

∴ R = E x E ∈ E x E

এই ক্ষেত্রত R অক Eঅত **সর্বজনীন সম্বন্ধ** (Universal relation) বুলি কোৱা হয়।

১.৩.১ একক সম্বন্ধ

ধৰা হ'ল A অৰিক্ত সংহতি।

$I_A = \{(a, a) : a \in A\} \subseteq A \times A$

I_A ক Aত **একক সম্বন্ধ** (identity relation) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ ৫ ঃ ধৰা হ'ল $A = \{1, 2, 3, 4\}$

তেনেহ'লে $I_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\} \subseteq A \times A$.

স্পষ্টত ঃ A ত I_A একক সম্বন্ধ।

১.৩.২ বিপৰীত সম্বন্ধ

A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি। Aৰ পৰা B লৈ R এটা সম্বন্ধ। অর্থাৎ $R \subseteq AxB$। R অৰ বিপৰীত সম্বন্ধক (inverse relation) R^{-1}ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা হ'ল এনেধৰণৰ–

$R^{-1}=\{(b, a) : (a, b) \in R\} \subseteq B \times A$

স্পষ্টত ঃ R^{-1} অৰ আদিক্ষেত্র = R অৰ পৰিসৰ

R^{-1} অৰ পৰিসৰ = R অৰ আদিক্ষেত্র

উদাহৰণ ৬ ঃ ধৰা হ'ল $A = \{1, 2, 3\}$

$B = \{5, 6\}$

$R = \{(1, 5), (2, 6), (3, 5)\} \subseteq A \times B$

$R^{-1} = \{(5, 1), (6, 2), (5, 3)\} \subseteq B \times A$.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল A, B দুটা সসীম সংহতি আৰু n(A)=4, n(B)=3. A ৰ পৰা B লৈ কিমানটা সম্বন্ধ আছে?

প্রশ্ন নং ২ঃ ধৰা হ'ল A ত সসীম সংহতি আৰু n(A) =5 ত কিমানটা সম্বন্ধ আছে?

প্রশ্ন নং ৩ঃ IN স্বাভাৰিক সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল $R = \{(x, y) : x, y \in IN, x > y\}$.

তলৰ ক্রমিত যোৰবোৰ Rঅত আছেনে নাই পৰীক্ষা কৰক।

(7, 4), (23, 32), (5, 5), (72, 27), (18, 19).

প্রশ্ন নং ৪ঃ E হ'ল যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল $R = \{(x, y) : x, y \in E$ আৰু $x+y$ অযুগ্ম$\}$

E ত R ৰিক্ত সম্বন্ধ হয়নে? যুক্তি যুক্ততা প্রতিপন্ন কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ ধৰা হ'ল $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

A ত একক সম্বন্ধটো লিখক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ ধৰা হ'ল $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{7, 8, 9\}$

ধৰা হ'ল $R = \{(4, 7), (5, 8), (6, 7), (6, 8), (6, 9)\}$

R^{-1}টো লিখক।

১.৪ বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ সম্বন্ধ

ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি আৰু Aত R এটা সম্বন্ধ, অৰ্থাৎ $R \subseteq A \times A$.

1. R সম্বন্ধটো **প্ৰতিফলনীয়** (reflexive) বুলি কোৱা হয় যদি $(a, a) \in R$, অৰ্থাৎ যদি $aRa, \forall a \in A$.
2. R সম্বন্ধটো **সমমিত (বা প্ৰতিসম)** (symmetric) বুলি কোৱা হয় যদি $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$, অৰ্থাৎ যদি aRb, তেনেহ'লে bRa; $a, b \in A$.
3. R সম্বন্ধটো **প্ৰতিসমমিত** (anti-symmetric) বুলি কোৱা হয় যদি $(a, b) \in R, (b, a) \in R \Rightarrow a = b$, অৰ্থাৎ, যদি aRb, $bRa \Rightarrow a=b$; $a, b \in A$.
4. R সম্বন্ধটো **সংক্ৰামক** (transitive) বুলি কোৱা হয় যদি $(a, b), (b, c) \in R$, তেনেহ'লে $(a, c) \in R$, অৰ্থাৎ যদি aRb, bRc, তেনেহ'লে aRc; $\forall a, b, c \in A$.

উদাহৰণ ৭ ঃ ধৰা হ'ল $A = \{1, 2, 3\}$

$R = (1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\}$

R প্ৰতিফলনীয়, সমমিত, প্ৰতিসমমিত আৰু সংক্ৰামক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ $(1, 1) \in R, (2, 2) \in R$; কিন্তু $(3, 3) \notin R$.

$\therefore$ R প্ৰতিফলনীয় নহয়।

আকৌ, $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

$\therefore$ R সমমিত।

আকৌ, $(1, 2) \in R, (2, 1) \in R$, কিন্তু $1 \neq 2$

$\therefore$R প্ৰতিসমমিত নহয়।

আকৌ, যদি $(a, b) \in R, (b, c), \in R$, তেনেহ'লে $(a, c) \in R$

$\therefore$R সংক্ৰামক।

উদাহৰণ ৮ ঃ Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি, আৰু $R = \{(x, y) : x, y \in Z, x \leq y\}$

R প্ৰতিফলনীয়, সমমিত, প্ৰতিসমমিত আৰু সংক্ৰামক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে $a \leq a, \forall a \in Z$

অৰ্থাৎ, $(a, a) \in R, \forall a \in Z$

$\therefore$ R প্ৰতিফলনীয়।

আকৌ, যদি $a \leq b, b \leq a$

অৰ্থাৎ, $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

$\therefore$ R সমমিত নহয়।

আকৌ, $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$

অৰ্থাৎ, $(a, b) \in R, (b, a) \in R \Rightarrow a = b$

$\therefore$ R প্ৰতিসমমিত।

আকৌ, $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$

অর্থাৎ $(a, b), (b, c), \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

$\therefore$ R সংক্রামক।

উদাহৰণ ৯ ঃ এনে এটা সম্বন্ধৰ উদাহৰণ দিয়ক যিটো সংক্রামক; কিন্তু প্রতিফলনীয় নহয়, সমমিতও নহয়।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $A = \{1, 2\}$

ধৰা হ'ল $R = \{(1, 1), (1, 2)\} \subseteq A \times A$

স্পষ্টত ঃ A ত R এটা সম্বন্ধ।

$(2, 2) \notin R$.

$\therefore$ R প্রতিফলনীয় নহয়।

আকৌ, $(1, 2) \in R$, কিন্তু $(2, 1) \notin R$

$\therefore$ R সমমিত নহয়।

কিন্তু R সংক্রামক।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল $A = \{1, 2, 3\}$ আৰু সর্বনিম্ন ক্রমিতযোৰ বিশিষ্ট R এটা প্রতিফলনীয় সম্বন্ধ। A ত R সম্বন্ধটো লিখক।

প্রশ্ন নং ২ঃ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ সংহতিটোত এটা সম্বন্ধ লিখক যাতে

(i) সম্বন্ধটো প্রতিসম, কিন্তু প্রতিফলনীয় নহয়, সংক্রামকো নহয়;

(ii) প্রতিফলনীয় আৰু সংক্রামক, কিন্তু সমমিত নহয়;

(iii) প্রতিফলনীয় আৰু সমমিত, কিন্তু সংক্রামক নহয়।

১.৫ সমতুল্যতা সম্বন্ধ

ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি আৰু A ত R এটা সম্বন্ধ। R সম্বন্ধটোক সমতুল্যতা সম্বন্ধ (equivalence relation) বুলি কোৱা হয় যদি ই প্রতিফলনীয়, সমমিত আৰু সংক্রামক হয়।

উদাহৰণ ১০ ঃ Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি আৰু

$R = \{(x, y) : x, y \in Z$ আৰু $x+y$ যুগ্ম$\}$

Z অত R সম্বন্ধটো সমতুল্যতা সম্বন্ধে হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $x \in Z$

$\therefore x+x$ যুগ্ম

$\Rightarrow (x, x) \in R, \forall\ x \in Z$

$\therefore$ R প্ৰতিফলনীয়।

$(x, y) \in R \Rightarrow x+y$ যুগ্ম

$\Rightarrow y+x$ যুগ্ম

$\Rightarrow (y, x) \in R.$

$\therefore$ R সমমিত

আকৌ, $(x, y) \in R, (y, z) \in R$

$\Rightarrow x+y$ যুগ্ম, $y+z$ যুগ্ম

$\Rightarrow (x+y)+(y+z)$ যুগ্ম

$\Rightarrow (x+z)+2y$ যুগ্ম

$\Rightarrow x+z$ যুগ্ম

$(x, z) \in R$

$\therefore$ R সংক্ৰামক

$\therefore$ Z অত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

উদাহৰণ ১১ ঃ এখন সমতলত থকা সকলো সৰল ৰেখাৰ সংহতি A লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $R = \{(x, y) : x, y \in A$ আৰু $x \perp y\}$

R সম্বন্ধটো প্ৰতিফলনীয়, সমমিত আৰু সংক্ৰামক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ এডাল ৰেখা নিজৰ ওপৰত লম্ব হ'ব নোৱাৰে, অৰ্থাৎ $x \not\perp x$

$\therefore (x, x) \notin R$

$\therefore$ R প্ৰতিফলনীয় নহয়।

এডাল ৰেখা x আন এডাল ৰেখা y ৰ ওপৰত লম্ব হ'লে, y ৰেখাডাল x অৰ ওপৰত লম্ব হ'ব,

অৰ্থাৎ $x \perp y \Rightarrow y \perp x$

$\therefore (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$

$\therefore$ R সমমিত।

যদি $x \perp y, y \perp z$, তেনেহ'লে $x \not\perp z$

$\therefore (x, y), (y, z) \in R \not\Rightarrow (x, z) \in R$

যদি x, y ৰ ওপৰত লম্ব; আৰু y, z অৰ ওপৰত লম্ব, তেনেহ'লে x, z অৰ সমান্তৰাল।

$\therefore$ R সংক্ৰামক নহয়।

উদাহৰণ ১২ ঃ এখন সমতলত থকা সকলো সৰল ৰেখাৰ সংহতি A লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $R = \{(x, y) : x, y \in A$ আৰু $x \| y\}$

A ত R সম্বন্ধটো সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ এডাল ৰেখা নিজেই নিজৰ সমান্তৰাল, অৰ্থাৎ $x \| x \ \forall \ x \in A$

$\therefore (x, x) \in R, \forall x \in R$

$\therefore$ R প্ৰতিফলনীয়।

$x||y \Rightarrow y||x$

$\therefore (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$

$\therefore$ R সমমিত।

$x||y, y||z \Rightarrow x||z$

$\therefore (x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R.$

$\therefore$ R সংক্রামক।

গতিকে, A ত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

উদাহৰণ ১৩ ঃ IN স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি। IN x IN অত R সম্বন্ধটো এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল ঃ

(a, b) R (c, d) যদি আৰু যদিহে ad = bc.

প্ৰমাণ কৰক যে IN x IN অত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

সমাধান ঃ আমি জানো ab = ba

$\therefore (a, b) R (a, b)$

$\therefore$ R প্ৰতিফলনীয়।

$(a, b) R (c, d) \Rightarrow ad = bc; a, b, c, d, \in IN$

$\Rightarrow cb = da$

$\Rightarrow (c, d) R (a, b)$

$\therefore$ R সমমিত।

$(a, b) R (c, d)$ আৰু $(c, d) R (e, f); a, b, c, d, e, f, \in IN$

$\Rightarrow ad = bc$ আৰু $cf = de$

$\Rightarrow adcf = bcde$

$\Rightarrow af = be$

$\Rightarrow (a, b) R (e, f)$

$\therefore$ R সংক্রামক।

গতিকে, IN x IN অত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

উদাহৰণ ১৪ ঃ (সৰ্বাংসমতা ম'ডুল' n)

Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি, আৰু n এটা স্থিৰ ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

ধৰা হ'ল $a, b \in Z$

a, b ৰ সৰ্বাংগসম ম'ডুল' n (congruent modulo n) বুলি কোৱা হয় যদি আৰু যদিহে n অৰ দ্বাৰা a–b বিভাজ্য। প্ৰতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে লিখা হয় $a \equiv b \pmod n$

দেখুৱাওক যে 'সৰ্বাংগসমতা ম'ডুল' n' (congruence modulo n) সম্বন্ধটো Z অত এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

সমাধান ঃ আমি জানো যে n অৰ দ্বাৰা a–a বিভাজ্য, অৰ্থাৎ $a \equiv a \pmod n$

$\therefore$ সম্বন্ধটো প্ৰতিফলনীয়।

ধৰা হ'ল $a \equiv b \pmod n$

$\Rightarrow$ n অৰ দ্বাৰা a–b বিভাজ্য

$\Rightarrow$ n অৰ দ্বাৰা b–a বিভাজ্য

$\Rightarrow b \equiv a \pmod n$

$\therefore$ সম্বন্ধটো সমমিত।

ধৰা হ'ল $a \equiv b \pmod n$, $b \equiv c \pmod n$

$\Rightarrow$ n অৰ দ্বাৰা a–b বিভাজ্য, n অৰ দ্বাৰা b–c বিভাজ্য

$\Rightarrow$ n অৰ দ্বাৰা a–b+b–c বিভাজ্য

$\Rightarrow$ n অৰ দ্বাৰা a–c বিভাজ্য

$\Rightarrow a \equiv c \pmod n$

$\therefore$ সম্বন্ধটো সংক্ৰামক।

গতিকে, Z অত 'সৰ্বাংগসমতা ম'ডুল' n' এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

আমি জানো যে 4 অৰ দ্বাৰা 15-3 বিভাজ্য।

$\therefore$15, 3 ৰ সৰ্বাংগসম ম'ডুল' 4 অৰ্থাৎ

$15 \equiv 3 \pmod 4$

7 অৰ দ্বাৰা15–3 বিভাজ্য নহয়।

$\therefore$15, 3 ৰ সৰ্বাংগসম ম'ডুল' 7 নহয় অৰ্থাৎ$15 \not\equiv 3 \pmod 7$

উদাহৰণ ১৫ ঃ Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল $R = \{(a, b) : a, b \in Z, ab \geq 0\}$

Z অত R সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো $aa \geq 0$

$\therefore (a, a) \in R, \forall a \in Z$

$\therefore$R প্ৰতিফলনীয়।

ধৰা হ'ল $(a, b) \in R$

$\therefore ab \geq 0$

$\Rightarrow ba \geq 0$

$\Rightarrow (b, a) \in R$

$\therefore$ R সমমিত।

আমি জানো (–2) x 0 = 0, 0x2=0

$\therefore (–2, 0), (0, 2) \in R$

কিন্তু (–2) x 2 = – 4<0

$\therefore (–2, 2) \notin R$

$\therefore$ R সংক্রামক নহয়।

গতিকে, R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ নহয়।

উপপাদ্য ১ ঃ এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধৰ বিপৰীতো এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি। ধৰা হ'ল A ত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

R প্ৰতিফলনীয়।

$\therefore (x, x) \in R, \forall x \in A$

$\Rightarrow (x, x) \in R^{-1}, \forall x \in A$

$\therefore R^{-1}$ প্ৰতিফলনীয়।

ধৰা হ'ল $(x, y) \in R^{-1}$

$\Rightarrow (y, x) \in R$ [R^{-1} অৰ সংজ্ঞামতে]

$\Rightarrow (x, y) \in R$ [$\therefore$ R সমমিত]

$\Rightarrow (y, x) \in R^{-1}$

$\therefore R^{-1}$ সমমিত।

ধৰা হ'ল $(x, y), (y, z) \in R^{-1}$

$\Rightarrow (y, x), (z, y) \in R$ [R^{-1} অৰ সংজ্ঞামতে]

$\Rightarrow (z, y), (y, x) \in R$

$\Rightarrow (z, x) \in R$ [$\therefore$ R সংক্রামক]

$\Rightarrow (x, z) \in R^{-1}$

$\therefore R^{-1}$ সংক্রামক।

গতিকে, R^{-1} এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

উপপাদ্য ২ ঃ দুটা সমতুল্যতা সম্বন্ধৰ ছেদনো এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি।

ধৰা হ'ল A ত R আৰু S দুটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

R আৰু S প্ৰতিফলনীয়।

$\therefore (x, x) \in R$ আৰু $(x, x) \in S, \forall x \in A$

$\Rightarrow (x, x) \in R \cap S, \forall x \in A$

$\therefore R \cap S$ প্ৰতিফলনীয়।

ধৰা হ'ল $(x, y) \in R \cap S$

$\Rightarrow (x, y) \in R$ আৰু $(x, y) \in S$

$\Rightarrow (y, x)$ R আৰু $(y, x) \in S$ [$\therefore$ R, S সমমিত]

$\Rightarrow (y, x) \in R \cap S$

$\therefore R \cap S$ সমমিত।

ধৰা হ'ল $(x, y) \in R \cap S, (y, z) \in R \cap S$

$\Rightarrow$ (x, y) R আৰু (x, y) $\in$ S, (y, z) $\in$ R আৰু (y, z) $\in$ S

$\Rightarrow$ (x, y) $\in$ R, (x, z) $\in$ R আৰু (x, y) $\in$ S, (y, z) $\in$ S

$\Rightarrow$ (x, x) $\in$ R আৰু (x, z) $\in$ S [$\therefore$ R, S সংক্রামক]

$\Rightarrow$ (x, z) $\in$ R$\cap$S

$\therefore$ R$\cap$S সংক্রামক।

গতিকে, R$\cap$S এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

মন্তব্য ঃ দুটা সমতুল্যতা সম্বন্ধৰ মিলন সদায় সমতুল্যতা সম্বন্ধ নহয়।

A = {1, 2, 3} সংহতিটো লোৱা হ'ল।

R = {(1, 1), 2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1)}

S = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)}

A ত দুটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

R$\cup$S = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1), (1, 2), (2, 1)}

(2, 1) $\in$ R$\cup$S, (1, 3) $\in$ R$\cup$S)

কিন্তু (2, 3) $\notin$ R$\cup$S

$\therefore$ R$\cup$S সংক্রামক নহয়।

$\therefore$ R$\cup$S এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ নহয়।

১.৫.১ সমতুল্যতা শ্রেণী

অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Z লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল R = {(a, b) : a, b $\in$ Z, 3 ৰ দ্বাৰা a–b বিভাজ্য}

অর্থাৎ R = {(a, b) : a, b $\in$ Z, a $\equiv$ b (mod 3)}

স্পষ্টত ঃ R প্রতিফলনীয়, সমমিত আৰু সংক্রামক।

$\therefore$ Z অত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

ধৰা হ'ল [0] এ 3n আকাৰৰ সংখ্যাবোৰ বুজাইছে। (n $\in$ Z) গতিকে

[0] = {...., –9, –6, –3, 0, 3, 6, 9, ...}

[1] এ 3n+1 আকাৰৰ সংখ্যাবোৰ বুজাইছে।

[1] = {..., –8, –5, –2, 1, 4, 7, 10, ...}

[2] এ 3n+2 আকাৰৰ সংখ্যাবোৰ বুজাইছে।

[2] = {...., –7, – 4, –1, 2, 5, 8, 11, ...}

আমি দেখিম যে—

..... = [0] = [3] = [6] =.....

..... = [1] = [4] = [7] =.....

..... = [2] = [5] = [8] =.....

[0], [1], [2] ৰ প্ৰত্যেককে **সমতুল্যতা শ্ৰেণী** (equivalence class) বুলি কোৱা হয়। [0] হ'ল 0 ৰ সমতুল্যতা শ্ৰেণী, [1] হ'ল 1 অৰ সমতুল্যতা শ্ৰেণী, [2] হ'ল 2 ৰ সমতুল্যতা শ্ৰেণী।

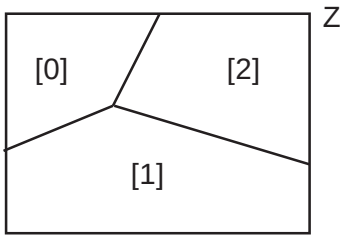
আমি দেখিলোঁ যে তিনিটা পৃথক (distinct) সমতুল্যতা শ্ৰেণী আছে, যথা, [0], [1], [2].

আকৌ আমি দেখিছোঁ যে

$[0] \cup [1] \cup [2] = Z$

$[0] \cap [1] = \phi$, $[1] \cap [2] = \phi$ $[2] \cap [0] = \phi$

{[0], [1], [2]} সংহতিটোক Z অৰ এটা বিভাজন (partition) বুলি কোৱা হয়।



সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি আৰু A ত R এটা সম্বন্ধ।

কোনো $a \in A$ ৰ বাবে, a ৰ সমতুল্যতা শ্ৰেণী [a]ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$[a] = \{x \in A : xRa\}$

অৰ্থাৎ a ৰ সমতুল্যতা শ্ৰেণী [a] হ'ল A ৰ সেইবোৰ মৌলৰ সংহতি যিবোৰ R সম্বন্ধৰ অধীনত a ৰ লগত সম্পৰ্কিত।

টোকা ঃ $[a] \neq \phi$, Θ aRa

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি। Aৰ অৰিক্ত উপসংহতিৰ সংহতি P ক A ৰ এটা বিভাজন বুলি কোৱা হয় যদি

(i) P ৰ সকলোবোৰ উপাদানৰ মিলন A,

(ii) P ৰ যিকোনো দুটা পৃথক উপাদান অসংযুক্ত (disjoint)।

উপপাদ্য ৩ ঃ ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি আৰু A ত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ। ধৰা হ'ল $a, b \in A$. তেনেহ'লে $[a] = [b]$ যদি আৰু যদিহে $(a, b) \in R$.

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল $[a] = [b]$

Θ R প্ৰতিফলনীয়, $\therefore$ aRa

$\therefore a \in [a]$

$\Rightarrow a \in [b]$ [Θ $[a]=[b]$]

$\Rightarrow$ aRb

$\Rightarrow (a, b) \in R$

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল $(a, b) \in R$. $\therefore$ aRb

ধৰা হ'ল $x \in [a]$. $\therefore xRa$

এতিয়া xRa আৰু aRb

$\therefore xRb$ [Θ R সংক্রামক]

$\Rightarrow x \in [b]$

গতিকে, $x \in [a] \Rightarrow x \in [b]$

$\therefore [a] \subseteq [b]$ ... (1)

আকৌ, ধৰা হ'ল $y \in [b]$ $\therefore yRb$

এতিয়া, yRb আৰু bRa [Θ R সমমিত, $aRb \Rightarrow bRa$]

$\therefore yRa$ [Θ R সংক্রামক]

$\Rightarrow y \in [a]$

গতিকে, $y \in [b] \Rightarrow y \in [a]$

$\therefore [b] \subseteq [a]$ ... (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা [a] = [b]

উপপাদ্য ৪ ঃ দুটা সমতুল্যতা শ্রেণী সমান বা অসংযুক্ত।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি। ধৰা হ'ল A ত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

ধৰা হ'ল $a, b \in A$.

তেনেহ'লে [a], [b] হয় অসংযুক্ত নতুবা অসংযুক্ত নহয়।

ধৰা হ'ল [a], [b] অসংযুক্ত নহয়

অর্থাৎ $[a] \cap [b] \neq \phi$.

ধৰা হ'ল $x \in [a] \cap [b]$

$\Rightarrow x \in [a]$ আৰু $x \in [b]$

$\Rightarrow$ xRa আৰু xRb

$\Rightarrow$ aRx আৰু xRb [Θ R প্রতিসম, $xRa \Rightarrow aRx$]

$\Rightarrow$ aRb[Θ R সংক্রামক]

ধৰা হ'ল $y \in [a]$

$\Rightarrow$ yRa

এতিয়া yRa আৰু aRb

$\therefore yRb$ [Θ R সংক্রামক]

$\Rightarrow y \in [b]$

গতিকে, $y \in [a] \Rightarrow y \in [b]$

$\therefore [a] \subseteq [b]$

সেইদৰে, $[b] \subseteq [a]$

$\therefore$ [a] = [b]



A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি হ'লে হয় $A \cap B \neq \phi$ নতুবা $A \cap B = \phi$

গতিকে, যদি [a], [b] অসংযুক্ত নহয়, তেনেহ'লে সিহঁত সমান।

∴ [a], [b] সমান বা অসংযুক্ত।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৩

প্রশ্ন নং ১ঃ কোনো সংহতিত এটা সম্পন্ধ প্রতিফলনীয়, প্রতিসম আৰু সংক্রামক হ'লে সম্বন্ধটোৰ নাম কি?

প্রশ্ন নং ২ঃ স্বাভাৰিক সংখ্যাৰ সংহতি IN অত "<" সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয়নে? উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা প্রতিপন্ন কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি। ধৰা হ'ল

R = {(a, b) : a, b ∈ Z, 5 অৰ দ্বাৰা (a–b) বিভাজ্য}

Z অত R সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ এখন সমতলত থকা সকলো ত্রিভুজৰ সংহতি A লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল R = {(x, y) : x, y ∈ A, x, y ৰ সদৃশ}

A ত R সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল R = {(x, y) : x, y ∈ Z, x–y যুগ্ম}

Z অত R সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয়নে? উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা প্রতিপন্ন কৰক।

১.৬ ফলনৰ ধাৰণা

ধৰা হ'ল A আৰু B দুটা অৰিক্ত সংহতি আৰু $f \subseteq A \times B$ যাতে

(i) $(x, y) \in f$, $\forall x \in A$ আৰু যিকোনো $y \in B$

(ii) $(x, y) \in f$ আৰু $(x, y') \in f \Rightarrow y = y'$.

এই ক্ষেত্রত f অক A ৰ পৰা B লৈ **ফলন** বা **মানচিত্রণ** (function or mapping) বুলি কোৱা হয় আৰু ইয়াক $f : A \to B$ প্রতীকেৰে বুজোৱা হয়।

A ক f অৰ **আদিক্ষেত্র** (domain) আৰু B ক f অৰ **সহক্ষেত্র** (codomain) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ ১৬ ঃ ধৰা হ'ল A = {1, 2}, B = {7, 8, 9}

$f = \{(1, 8), (2, 7)\} \subseteq A \times B$.

A ৰ প্রতিটো মৌলই f অৰ ক্রমিতযোৰৰ প্রথম মৌল। তদুপৰি প্রতিটো ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌলৰ বিপৰীতে পৃথক দ্বিতীয় মৌল নাই।

∴A ৰ পৰা B লৈ f এটা ফলন।

উদাহৰণ ১৭ ঃ ধৰা হ'ল A = {1, 2}, B = {7, 8, 9}

$g = \{(1, 7), (1, 9)\} \subseteq A \times B$

g ত এনে ক্রমিত যোৰ নাই যাৰ প্রথম মৌল 2 অর্থাৎ A ৰ প্রতিটো মৌলই g ৰ ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌল নহয়। তদুপৰি ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌল 1 অৰ বিপৰীতে দুটা পৃথক দ্বিতীয় মৌল 7, 9 আছে।

∴ সেয়ে, A ৰ পৰা B লৈ g ফলন নহয়।

উদাহৰণ ১৮ ঃ ধৰা হ'ল A = {1, 2, 3, 4}, B = {x, y, z, w}

অধোলিখিত সম্বন্ধবোৰ A ৰ পৰা B লৈ ফলন হয়নে?

(i) $f_1 = \{(1, x), (1, w), (2, x), (2, z), (4, w)\}$

(ii) $f_2 = \{(1, y), (2, z), (3, x), (4, w)\}$

সমাধান ঃ (i) নহয়। (1, x), (1, w) ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌল একে। কিন্তু দ্বিতীয় মৌল বেলেগ বেলেগ। তদুপৰি f_1 অত এনে ক্রমিত যোৰ নাই যাৰ প্রথম মৌল 3।

∴ f_1 ফলন নহয়।

(ii) হয়। A ৰ প্রতিটো মৌলই f_2 ৰ ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌল। তদুপৰি প্রতিটো ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌলৰ বিপৰীতে পৃথক দ্বিতীয় মৌল নাই।

আমি দেখিলোঁ যে

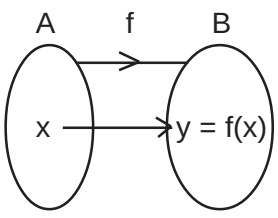
প্রত্যেক ফলনেই এটা সম্বন্ধ, কিন্তু প্রত্যেক সম্বন্ধই ফলন নহয়।

ফলনৰ এই ধাৰণাটোক এনেদৰেও সংজ্ঞাকৃত কৰিব পাৰি। যদি দুটা অৰিক্ত সংহতি A আৰু B ৰ মৌলবোৰৰ মাজত এনে এটা যোগাযোগ থাকে যে A ৰ প্রতিটো মৌলৰ সৈতে B ৰ এটা অদ্বিতীয় মৌল সংযুক্ত হয়, তেনেহ'লে যি নিয়মটোৱে এই সংযোগ স্থাপন কৰে, তাক A ৰ পৰা B লৈ এটা ফলন বোলা হয়। ইয়াক f, g ইত্যাদি আখৰেৰে বুজোৱা হয়। A, B সংহতি দুটা একে হ'ব পাৰে।

ধৰা হ'ল A সংহতিৰ পৰা B সংহতিলৈ f এটা ফলন অর্থাৎ $f : A \to B$ এটা ফলন। ফলন f এ Bৰ যিটো অদ্বিতীয় মৌল y ক Aৰ মৌল x অৰ লগত সংযোগ কৰে, তাক f -অৰ অধীনত x অৰ **প্রতিচ্ছায়া** (image) বোলা হয় আৰু x অক y ৰ **পূর্বচ্ছায়া** (pre-image) বোলা হয়। Bৰ যিবোৰ মৌল A ৰ মৌলবোৰৰ প্রতিচ্ছায়া, সেই সকলোবোৰ মৌল লৈ গঠিত সংহতিটোক **পৰিসৰ** (range) বোলে।

উদাহৰণ ১৯ ঃ IN স্বাভাৰিক সংখ্যাৰ সংহতি আৰু Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

$f : IN - Z, f(x) = (-1)^x; x \in IN$



স্পষ্টত ঃ f অৰ আদিক্ষেত্র = IN

f অৰ সহক্ষেত্র = Z

এতিয়া $f(1) = (-1)^1 = -1$, $f(2) = (-1)^2 = 1$, $f(3) = (-1)^3 = -1$ ইত্যাদি।

∴ f অৰ পৰিসৰ = {–1, 1}.

১.৬.১ একক ফলন

ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি আৰু i : A – A, i (x) = x, $\forall x \in A$

i ক একক ফলন (identity function) বোলে।

টোকা ঃ একক ফলনৰ ক্ষেত্ৰত আদিক্ষেত্ৰ আৰু সহক্ষেত্ৰ একে।

১.৬.২ ধ্ৰুবক ফলন

A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি আৰু $f : A \to B$ এটা ফলন যাতে f(x) = k, $\forall x \in A$

f অক ধ্ৰুবক ফলন (constant function) বোলে।

টোকা ঃ ধ্ৰুবক ফলনৰ পৰিসৰ এটা এক মৌল সংহতি (singleton set)

১.৭ বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ ফলন

A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি আৰু $f : A \to B$ এটা ফলন।

1. যদি B ত অন্ততঃ এটা মৌল থাকে যিটো A ৰ কোনো মৌলৰ প্ৰতিচ্ছায়া নহয়, তেনেহ'লে f ফলনটোক **অনাচ্ছাদক ফলন** (into function) বুলি কোৱা হয়।
2. যদি B ৰ প্ৰতিটো মৌল A ৰ অন্ততঃ এটা মৌলৰ প্ৰতিচ্ছায়া হয়, তেনেহ'লে f **আচ্ছাদক ফলন** (onto function or surjective function or surjection) বুলি কোৱা হয়।

টোকা ঃ আচ্ছাদক ফলনৰ ক্ষেত্ৰত, f অৰ পৰিসৰ = f অৰ আদিক্ষেত্ৰ।

3. A ৰ ভিন্ন ভিন্ন মৌলৰ প্ৰতিচ্ছায়াত B ত ভিন্ন ভিন্ন হ'লে, f ফলনটোক **একৈকী ফলন** (one-one fuction or injective function or injection) বোলে।
4. যদি A ৰ দুটা (বা ততোধিক) মৌলৰ B ত একেটা প্ৰতিচ্ছায়া থাকে, তেনেহ'লে f অক **বহু-এক** ফলন (many-one function) বোলে।
5. এটা ফলনক **দ্বিমুখী** (bijective) বুলি কোৱা হয় যদি ই একৈকী আৰু আচ্ছাদক।

টোকা ঃ একক ফলন দ্বিমুখী।

এটা ফলন f একৈকী বুলি কেনেদৰে প্ৰমাণ কৰিব লাগে ?

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \in A$

যদি $f(x) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, তেনেহ'লে f একৈকী।

বা,

যদি $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, তেনেহ'লে f ঐকৈকী।

এটা ফলন f আচ্ছাদক বুলি কেনেদৰে প্ৰমাণ কৰিব লাগে ?

ধৰা হ'ল $y \in B$ (codomain)

ধৰা হ'ল y = f(x)

y ৰ মাধ্যমত x অক প্ৰকাশ কৰা হ'ল।

যদি $x \in A$, তেনেহ'লে f আচ্ছাদক, অন্যথা নহয়।

উদাহৰণ ২০ ঃ IN স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল $f : IN \to IN$, $f(x) = 3x+7$

f ফলনটো দ্বিমুখী বুলি প্ৰমাণ কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $x_1, x_2 \in IN$ (আদিক্ষেত্ৰ)

$f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow 3x_1+7=3x_2+7$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ f একৈকী।

ধৰা হ'ল $y \in IN$ (সহক্ষেত্ৰ)

ধৰা হ'ল $y = f(x)$

$\Rightarrow y = 3x + 7$

$\Rightarrow x = \frac{y-7}{3}$

যদি $y = 1$, $x = \frac{1-7}{3} = -2 \notin N$

$\therefore$ f আচ্ছাদক নহয়।

$\therefore$ f দ্বিমুখী নহয়।

উদাহৰণ ২১ ঃ ধৰা হ'ল 1 তাৰ বাহিৰে সকলো বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতিটো X। প্ৰমাণ কৰক যে f

: $X \to X$, $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ ফলনটো একৈকী আৰু আচ্ছাদক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $x_1, x_2, x_2 \in X$ (আদিক্ষেত্ৰ)

ধৰা হ'ল $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1}$

$\Rightarrow \frac{(x_1+1)+(x_1-1)}{(x_1-1)-(x_1-1)} = \frac{(x_2+1)+(x_2-1)}{(x_2-1)-(x_2-1)}$ (যোগ-ভাগ ক্ৰিয়াৰ সহায়ত)

$\Rightarrow \frac{2x_1}{2} = \frac{2x_2}{2}$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ f একৈকী।

ধৰা হ'ল $y \in X$ (সহক্ষেত্ৰ)

$y = f(x)$

$\Rightarrow y = \frac{x+1}{x-1}$

$\Rightarrow y(x-1) = x+1$

$\Rightarrow yx-y = x+1$

$\Rightarrow yx - x = y+1$

$\Rightarrow x(y-1) = y+1$

$\Rightarrow x = \frac{y+1}{y-1} \in X$ (আদিক্ষেত্ৰ)

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

উদাহৰণ ২২ ঃ ধৰা হ'ল A = {1, 2, 3,}. A ৰ পৰা A লৈকে সকলো দ্বিমুখী ফলন লিখক।

সমাধান ঃ

$i : A \to A, i(1) = 1, i(2) = 2, i(3) = 3$

$f_1 : A \to A, f_1(1) = 1, f_1(2) = 3, f_1(3) = 2$

$f_2 : A \to A, f_2(1) = 2, f_2(2) = 1, f_2(3) = 3$

$f_3 : A \to A, f_3(1) = 3, f_3(2) = 2, f_3(3) = 1$

$f_4 : A \to A, f_4(1) = 2, f_4(2) = 3, f_4(3) = 1$

$f_5 : A \to A, f_5(1) = 3, f_5(2) = 1, f_5(3) = 2$

টোকা ঃ A = {1, 2, 3} ৰ পৰা A লৈকে মুঠতে 6 =3! টা দ্বিমুখী ফলন আছে।

যদি A ৰ মৌলৰ সংখ্যা n টা হয়, A ৰ পৰা A লৈকে n! টা দ্বিমুখী ফলন থাকিব।

উপপাদ্য ৫ ঃ ধৰা হ'ল A এটা সসীম সংহতি আৰু $f : A \to A$ আচ্ছাদক। তেনেহ'লে f এঁকেকী।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল A এটা সসীম সংহতি আৰু A ৰ মৌলৰ সংখ্যা n.

ধৰা হ'ল $A = \{a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots\ldots a_n)$, য'ত a_i^{-1} বোৰ ভিন্ন ভিন্ন।

ধৰা হ'ল $f : A \to A$ আচ্ছাদক

f অৰ পৰিসৰ = $\{f(a_1), f(a_2), \ldots\ldots\ldots\ldots, f(a_n)\}$

$\therefore$ f আচ্ছাদক, f অৰ পৰিসৰ = f অৰ সহক্ষেত্ৰ = A.

$\therefore A = \{f(a_1), f(a_2), \ldots\ldots\ldots\ldots, f(a_n)\}$

$\therefore$ A ৰ মৌলৰ সংখ্যা n,

$\therefore f(a_1), f(a_2), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, f(a_n)$ ভিন্ন ভিন্ন।

গতিকে, Aৰ (আদিক্ষেত্ৰ) ভিন ভিন মৌলৰ প্ৰতিচ্ছায়াও A ত (সহক্ষেত্ৰ) ভিন ভিন।

$\therefore$ f এঁকেকী।

টোকা ঃ অসীম সংহতিৰ ক্ষেত্ৰত এই ফলটো প্ৰযোজ্য নহয়।

IN স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি।

$f : IN \to IN, f(x) \begin{cases} =1, \text{ যদি } x = 1 \text{ আৰু } x = 2, \\ = x-1, \text{ যদি } x \geq 3 \end{cases}$

স্পষ্টত ঃ f আচ্ছাদক, কিন্তু এঁকেকী নহয়।

উপপাদ্য ৬ ঃ ধৰা হ'ল A এটা সসীম সংহতি আৰু $f:A \to A$ এঁকেকী। তেনেহ'লে f আচ্ছাদক।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল A এটা সসীম সংহতি আৰু A ৰ মৌল সংখ্যা n.

ধৰা হ'ল $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, য'ত a_i বোৰ ভিন্ন ভিন্ন।

ধৰা হ'ল $f : A \to A$ একৈকী।

$\therefore f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)$ হ'ল Aৰ (সহক্ষেত্ৰ) n টা পৃথক মৌল।

ধৰা হ'ল $u \in A$ (সহক্ষেত্ৰ)

ধৰা হ'ল $u = f(a_i), 1 \leq i \leq n$

$\therefore$ A ত (আদিক্ষেত্ৰ) a_i আছে যাতে $f(a_i) = u$.

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

টোকা ঃ অসীম সংহতিৰ ক্ষেত্ৰত এই ফলটো প্ৰযোজ্য নহয়।

IN স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি।

$f : IN \to IN, f(x) = 5x$

স্পষ্টত ঃ f একৈকী, কিন্তু আচ্ছাদক নহয়।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৪

প্ৰশ্ন নং ১ঃ IN স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি।

$f : IN \to IN, f(x) = x^2+1$

f (i) একৈকী, (ii) আচ্ছাদক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২ঃ IR বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি।

$f : IR \to IR$ এনেদৰে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{যদি } x > 0 \\ 0, & \text{যদি } x = 0 \\ -1, & \text{যদি } x < 0 \end{cases}$$

f (i) একৈকী, (ii) আচ্ছাদক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ $f : IR \to IR$ এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হৈছে $f(x) = |x|$

f (i) একৈকী, (ii) আচ্ছাদক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

$$\left[f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{যদি } x \geq 0 \\ -x, & \text{যদি } x < 0 \end{cases} \right]$$

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ যদি $A = \{1, 2\}$, A ৰ পৰা A লৈকে সকলো দ্বিমুখী ফলন লিখক।

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ কি চর্তৰ অধীনত এটা ধ্ৰুবক ফলন আচ্ছাদক হ'ব?

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ কি চর্তৰ অধীনত এটা ধ্ৰুবক ফলন একৈকী হ'ব?



১.৮ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি হ'লে, A x B ৰ এটা উপ সংহতিক A ৰ পৰা B লৈ এটা সম্বন্ধ বুলি কোৱা হয়।
- যদি A, B দুটা সসীম সংহতি হয় আৰু n(A) = x, n(B) = y, A ৰ পৰা B লৈ সম্বন্ধৰ সংখ্যা 2^{xy}.
- A এটা অৰিক্ত সংহতি হ'লে, $I_A = \{(a, a) : a \in A\}$ ক A ত একক ফলন বুলি কোৱা হয়।
- A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি আৰু R, A ৰ পৰা B লৈ এটা সম্বন্ধ হ'লে, বিপৰীত সম্বন্ধ R^{-1} অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

  $R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$
- অৰিক্ত সংহতি A ত এটা সম্বন্ধ R অক

  (i) প্রতিফলনীয় বুলি কোৱা হয় যদি $(a, a) \in R, \forall a \in A$;

  (ii) সমমিত বুলি কোৱা হয় যদি $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$;

  (iii) প্রতিসমমিত বুলি কোৱা হয় যদি $(a, b) \in R, (b, a) \in R \Rightarrow a = b$;

  (iv) সংক্রামক বুলি কোৱা হয় যদি $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.
- অৰিক্ত সংহতি Aত এটা সম্বন্ধ R অক সমতুল্যতা সম্বন্ধ বুলি কোৱা হয় যদি ই প্রতিফলনীয়, সমমিত আৰু সংক্রামক হয়।
- এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধৰ বিপৰীতো এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।
- দুটা সমতুল্যতা সম্বন্ধৰ ছেদনো এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।
- কোনো অৰিক্ত সংহতি A ত R এটা সম্বন্ধ হ'লে, কোনো $a \in A$ ৰ সমতুল্যতা শ্রেণী [a] হ'ল A ৰ সেইবোৰ মৌলৰ সংহতি যিবোৰ R সম্বন্ধৰ অধীনত a ৰ লগত সম্পর্কিত।
- দুটা সমতুল্যতা শ্রেণী সমান বা অসংযুক্ত।
- যদি দুটা অৰিক্ত সংহতি A আৰু B ৰ মৌলবোৰৰ মাজত এনে এটা যোগাযোগ থাকে যে A ৰ প্রতিটো মৌলৰ সৈতে B ৰ এটা অদ্বিতীয় মৌল সংযুক্ত হয়, তেনেহ'লে যি নিয়মটোৱে এই সংযোগ স্থাপন কৰে, তাক A ৰ পৰা B লৈ এটা ফলন বোলা হয়।
- প্রত্যেক ফলনেই এটা সম্বন্ধ, কিন্তু প্রত্যেক সম্বন্ধই ফলন নহয়।
- আদিক্ষেত্রৰ ভিন্ন ভিন্ন মৌলৰ প্রতিচ্ছায়াও সহক্ষেত্রত ভিন্ন ভিন্ন হ'লে ফলনটো একৈকী।
- যদি সহ ক্ষেত্রৰ প্রতিটো মৌল আদি ক্ষেত্রৰ অন্ততঃ এটা মৌলৰ প্রতিচ্ছায়া হয়, তেনেহ'লে ফলনটো আচ্ছাদক।
- এটা ফলন দ্বিমুখী যদি ই একৈকী আৰু আচ্ছাদক।

- A এটা সসীম সংহতি আৰু f : A→A আচ্ছাদক হ'লে, f এঁকেকী।
- A এটা সসীম সংহতি আৰু f : A→A এঁকেকী হ'লে, f আচ্ছাদক।



১.৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ 2^{12}

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ 2^{25}

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (7, 4), (72, 27) R অত আছে।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ হয়। দুটা যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগফল অযুগ্ম হ'ব নোৱাৰে।

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $I_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $R^{-1} = \{(7, 4), (8, 5), (7, 6), (8, 6), (9, 6)\}$

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৩

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নহয়। প্ৰতিফলনীয় নহয়, সমমিতও নহয়।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ হয়।

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৪

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ এঁকেকী, কিন্তু আচ্ছাদক নহয়।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ এঁকেকী নহয়, আচ্ছাদকো নহয়।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ এঁকেকী নহয়, আচ্ছাদকো নহয়।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ i : A→A, i(1) = 1, i(2) = 2

f : A→A, f(1) = 2, f(2) = 1

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ সহক্ষেত্ৰ এটা একমৌল সংহতি।

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ আদিক্ষেত্ৰ এটা একমৌল সংহতি।



১.১০ অধিক জানিবলৈ

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.
2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).
3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).
4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.
5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



১.১১ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ঃ ধৰা হ'ল A = {1, 2, 3}, B = {3, 4, 5}.
A ৰ পৰা B লৈ কিমানটা সম্বন্ধ আছে? A ৰ পৰা B লৈ যিকোনো চাৰিটা সম্বন্ধ লিখক।

প্ৰশ্ন ২ঃ ধৰা হ'ল A = {3, 4, 5}, B = {5, 6, 7}
তলৰ কোনবোৰ সম্বন্ধ A ৰ পৰা B লৈ ফলন? যদি ফলন হয়, ই একৈকী হয়নে? আচ্ছাদক হয়নে?
(i) {(3, 5), (4, 5), (5, 7)}
(ii) {(3, 7), (4, 5), (5, 6)}
(iii) {(3, 6), (4, 6), (5, 6)}
(iv) {(3, 6), (4, 7), (5, 5)}

প্ৰশ্ন ৩ঃ Q পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি। f : Q→Q ফলনটো এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হৈছে।
f(x) = 4x+5
ফলনটো দ্বিমুখী হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ঃ এখন সমতলত থকা সকলো ত্ৰিভুজৰ সংহতি A লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল R = {(x, y) : x, y $\in$ A আৰু x, y ৰ সৰ্বাংগসম}

A ত R সম্বন্ধটো সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ৫ঃ IN স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি। IN x IN অত R সম্বন্ধটো এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'লঃ (a, b), R (c, d) যদি আৰু যদিহে a+d = b+c, দেখুৱাওক যে IN x IN অত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

প্ৰশ্ন ৬ঃ ধৰা হ'ল A = {1, 2, 3}

R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), 2, 3)}

দেখুৱাওক যে R প্ৰতিফলনীয়; কিন্তু সমমিত নহয়, সংক্ৰামকো নহয়।

প্ৰশ্ন ৭ঃ C জটিল সংখ্যাৰ সংহতি আৰু IR বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি।

f : C$\rightarrow$ IR, f(z) = |z|, z $\in$ C.

f (i) এঁকেকী, (ii) আচ্ছাদক হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ৮ঃ A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি।

f : A x B $\rightarrow$ B x A, f(a, b) = (b, a); (a, b) $\in$ A x B

দেখুৱাওক যে f দ্বিমুখী।

প্ৰশ্ন ৯ঃ f : IN x IN $\rightarrow$ IN, f(a, b) = $3^a 4^b$, (a, b) $\in$ IN x IN

f (i) এঁকেকী, (ii) আচ্ছাদক হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ১০ঃ f : Z x Z $\rightarrow$ Z, f(a, b) = ab, (a, b) $\in$ Z x Z

f (i) এঁকেকী, (ii) আচ্ছাদক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

*** ***** ***

অধ্যায় ২ ঃ দ্বৈত প্রক্রিয়া (BINARY OPERATION)

অধ্যায় গাঁথনি

২.১ উদ্দেশ্য

২.২ পৰিচয়

২.৩ দ্বৈত প্রক্রিয়া

- ২.৩.১ ক্রম বিনিময়ে দ্বৈত প্রক্রিয়া (Commutative Binary Operation)
- ২.৩.২ সাহচর্য্য দ্বৈত প্রক্রিয়া (Associative Binary Operation)
- ২.৩.৩ একক মৌল (Identity Element)
- ২.৩.৪ মৌলৰ বিপৰীত (Inverse of an Element)

২.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

২.৫ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

২.৬ অধিক জানিবলৈ

২.৭ আৰ্হি প্রশ্ন

২.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- সংহতি (set) এটাৰ দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব

২.২ পৰিচয়

ইয়াৰ আগৰ অধ্যায়বোৰত আমি সম্বন্ধ (relation) আৰু ফলনৰ (function) বিষয়ে অধ্যয়ন কৰিছো। এই অধ্যায়টিত আমি দ্বৈত প্রক্রিয়া আৰু ইয়াৰ প্রকাৰবোৰৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

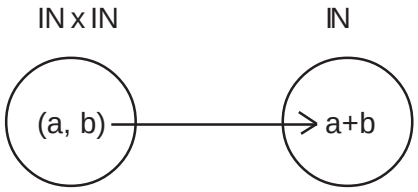
২.৩ দ্বৈত প্রক্রিয়া (BINARY OPERATION)

ধৰা হ'ল, IN এটা স্বাভাৰিক সংখ্যাৰ সংহতি।

প্রতিটো ক্রমিক যুটী (ordered pair) (a, b) $\in$ IN x IN ৰ বাবে

আমি একমাত্র এটা সংহতি a+b $\in$ IN পাম।

অর্থাৎ, আমি f ফলনৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিব পাৰিম f ঃ IN x IN $\rightarrow$ IN, f(a, b) = a+b.



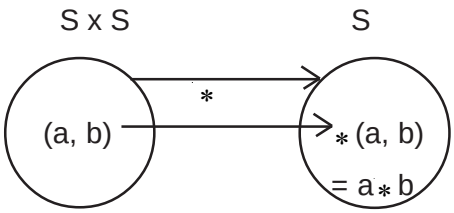
এই ফলনটোক (function) IN ৰ দ্বৈত প্রক্রিয়া বোলা হয়। অর্থাৎ, যোগ কৰা কামটো হ'ল IN ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

একেদৰে, পূৰণ কৰা কামটো হ'ল IN ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া। কাৰণ, প্রতিটো ক্রমিক যুটী (a, b) $\in$ IN x IN হয়। ইয়াৰ পৰা পোৱা একমাত্র সংহতিটো হ'ল ab $\in$ IN। কিন্তু, বিয়োগ কৰা কামটো IN ৰ ওপৰত চলা দ্বৈত প্রক্রিয়া নহয়। কাৰণ, প্রতিটো ক্রমিক যুটী (a, b) $\in$ IN x IN ৰ বিয়োগফল a–b $\in$ IN নহয়। ধৰা হ'ল (2, 3) $\in$ IN x IN, কিন্তু 2–3 = -1 $\notin$ IN.

সংজ্ঞা ঃ এটা অ-শূন্য (non-empty) সংহতি S ৰ এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'ব S x S ৰ পৰা S লৈ হোৱা ফলন।

যেনে—

$* : S \times S \to S$



ইয়াত, (a, b) $\in$ S x S ৰ প্রতিবিম্বটো $*$ ফলনৰ অধীন। অর্থাৎ $*$ (a, b) ক আমি a $*$ b বুলিও বুজাব পাৰোঁ।

ইয়াৰ পৰা গম পোৱা গ'ল যে

সকলো a, b $\in$ S ৰ ক্ষেত্রত, যদি a $*$ b $\in$ S হয়, তেন্তে $*$ হ'ল S ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল, $*$ হ'ল এটা অ-শূন্য সংহতি S ৰ দ্বৈত প্রক্রিয়া,

H হ'ল Sৰ এটা উপ-সংহতি।

যদি সকলো a b $\in$ H হয়, তেন্তে H ক $*$ ৰ বন্ধনীৰ অধীন বুলি কোৱা হ'ব।

অর্থাৎ, আমি পালো a x b $\in$ H.

এটা সসীম সংহতিৰ ওপৰত চলা দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ সংখ্যা (Number of Binary operations on a finite set)

ধৰা হ'ল, A আৰু B দুটা সসীম সংহতি, যদি n (A) = m আৰু n (B) = n তেন্তে,

A ৰ পৰা B লৈ ফলনৰ সংখ্যা হ'ব n^m. [A ৰ প্রথম উপাদানটোৰ n ধৰণে সহযোগ বিধি ঘটাব পৰা যাব, দ্বিতীয় উপাদানটোৰ n ধৰণে সহযোগ বিধি ঘটাব পৰা যাব আৰু শেষত m তম

উপাদানটোৰ n ধৰণে সহযোগ বিধি ঘটাব পৰা যাব।

∴ ফলনৰ সংখ্যা হ'ব

= n. n ... ... n (m সংখ্যক উৎপাদক) = n^m]

আমি জানো যে, n (A x A) = mm = m^2

∴ A ৰ ওপৰত চলা দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ সংখ্যা হ'ব

= A x A ৰ পৰা A লৈ হোৱা ফলনৰ সংখ্যা

= m^{m^2}

উদাহৰণ

1. যোগ কৰা কামটো হ'ল IN ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।
2. বিয়োগ কৰা কামটো IN ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া নহয়।
3. পূৰণ কৰা কামটো হ'ল IN ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।
4. যোগ কৰা কামটো হ'ল Z ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।
5. অ-শূন্য অখণ্ড সংখ্যাৰে গঠিত S = Z – {0} সংহতিটোৰ ওপৰত যোগ কৰা কামটোৰে দ্বৈত প্রক্রিয়া সংঘটিত কৰিব নোৱাৰে। কাৰণ, যদি ইয়াত $3 \in S$, $-3 \in S$ বুলি ধৰা হয়, তেন্তে $3+(-3) = 0 \notin S$.
6. বিয়োগ কৰা কামটো হ'ল Z ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।
7. ধৰা হ'ল, আটাইবোৰ বাস্তৱ মেট্রিক্সৰ সংগ্রহ হ'ল S। এতিয়া মেট্রিক্সবোৰৰ যোগফল S ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া নহ'ব। কাৰণ আমি এটা 2 x 3 মেট্রিক্স আৰু এটা 3 x 4 মেট্রিক্সৰ যোগফল উলিয়াব নোৱাৰো।
8. ধৰা হ'ল, M_{mxn} হ'ল সকলোবোৰ m x n বাস্তৱ মেট্রিক্সৰ সংগ্রহ। ইয়াৰ মেট্রিক্স যোগ কৰা কামটো হ'বা M_{mxn} ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।
9. ধৰা হ'ল, M_{nxn} হ'ল সকলোবোৰ n x n বাস্তৱ মেট্রিক্সৰ সংগ্রহ। ইয়াৰ মেট্রিক্স পূৰণ কৰা কামটো হ'ব M_{nxn} ৰ এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।
10. যোগ (আৰু পূৰণ) কৰা কামটো হ'ল জটিল সংখ্যাৰ সংহতি C ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

উদাহৰণ ১ঃ $a * b = a-b+10$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত $*$ টো Z ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'ব পাৰেনে?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $a, b \in Z$

দিয়া আছে, $a-b+10 \in Z, \forall\ a, b \in Z$

অর্থাৎ, $a * b \in Z, \forall a, b \in Z$

∴ $*$ হ'ল Z ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

উদাহৰণ ২ঃ $a * b = \frac{ab}{5}$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত $*$ টো Q ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'ব

পাৰেনে?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $a, b \in Q$

$\therefore ab \in Q$ (দুটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ পূৰণফল সদায় এটা পৰিমেয় সংখ্যাই হ'ব)

$\therefore \frac{ab}{5} \in Q$

অর্থাৎ, $a * b \in Q, \forall a, b \in Q$

$\therefore *$ হ'ল Q ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

উদাহৰণ ৩ঃ ধৰা হ'ল, P হৈছে এটা অ-শূন্য সংহতি S ৰ সকলোবোৰ উপ-সংহতিৰ সংহতি। সংযুক্তকৰণ (union) আৰু খণ্ডিতকৰণ (intersection) P ৰ ওপৰত চলা দুটা দ্বৈত প্রক্রিয়া বুলি প্রমাণ কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $A, B \in P$ ইয়াত $A \subseteq S, B \subseteq S$

$\therefore A \cup B \subseteq S$ ইয়াত $A \cup B \in P$

$\therefore \cup$ হ'ল P ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া

একেদৰে, $A \cap B \in P, \forall A, B \in P$

$\therefore \cap$ হ'ল P ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

প্রক্রিয়া (অথবা সংযোজন) তালিকা [Operation (or composition) Table]

ধৰা হ'ল, S এটা সসীম সংহতি। S ত থকা উপাদানৰ সংখ্যা কম। সংহতিটোৰ উপাদানেৰে আমি এখন তালিকা গঠন কৰিব পাৰো। ইয়াক প্রক্রিয়া (অথবা সংযোজন) তালিকা বোলা হয়। তালিকাখন এনেধৰণৰ হ'ব—

ধৰা হ'ল, $A = \{a_1, a_2, a_3\}$.

আমি সংহতিটোৰ উপাদানবোৰ a_1, a_2, a_3 পথালি শাৰীত আৰু দীঘলীয়া স্তম্ভত লিখিব পাৰে।। ওপৰফালে বাওঁকোণৰ দ্বৈত প্রক্রিয়া $*$ লিখিব পাৰোঁ। তাৰ পাছত চিত্র ২.১ত দেখুওৱাৰ দৰে (i, j) তম কক্ষত আমি $9(=3^2)$ টাৰ প্রতিটো উপাদান $a_i \times a_j$ (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3) লিখিম। এই 9 টা সংখ্যাৰ প্রতিটোৱেই A ৰ উপাদান। কাৰণ $*$ হ'ল A ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

$*$	a_1	a_2	a_3
a_1	$a_1 * a_1$	$a_1 * a_2$	$a_1 * a_3$
a_2	$a_2 * a_1$	$a_2 * a_2$	$a_2 * a_3$
a_3	$a_3 * a_1$	$a_3 * a_2$	$a_3 * a_3$

তালিকা ২.১

উদাহৰণ ৪ঃ {–1, 0, 1} ৰ ওপৰত পূৰণ কৰা কামটো এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'বনে?

সমাধান ঃ 9 টা উপাদানৰ প্রতিটোৱেই A ৰ অংশ।

$\therefore$ পূৰণ কৰা কামটো {–1, 0, 1} ৰ এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

উদাহৰণ ৫ঃ {–1, 0, 1} ৰ ওপৰত যোগ কৰা কামটো এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'বনে?

$*$	–1	0	1
–1	1	0	–1
0	0	0	0
1	–1	0	1

তালিকা ২.২

সমাধান ঃ $-2 \notin \{-1, 0, 1\}$

$2 \notin \{-1, 0, 1\}$

$\therefore$ যোগ কৰা কামটো {–1, 0, 1} ৰ ওপৰত চলা

দ্বৈত প্রক্রিয়া নহয়।

উদাহৰণ ৬ঃ $a * b=|a-b|$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত $*$ টো $\{0, 1, 2\}$ ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'বনে?

সমাধান ঃ $0 * 0 = |0-0|=0$,

$0 * 1 = |0-1|=1$,

$0 * 2 = |0-2|=2$;

$1 * 0 = |1-0|=1$, $1 * 1 = |1-1|=0$,

$1 * 2 = |1-2|=1$;

$2 * 0 = |2-0|=2$, $2 * 1 = |2-1|=1$,

$2 * 2 = |2-2|=0$,

তালিকাৰ সহায়ত আমি গম পালোঁ যে $*$ হ'ল $\{0, 1, 2\}$ ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

x	–1	0	1
–1	–2	–1	0
0	–1	0	1
1	0	1	2

তালিকা ২.৩

x	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	1
2	2	1	0

তালিকা ২.৪

২.৩.১ ক্রম বিনিময়ে দ্বৈত প্রক্রিয়া (Commutative Binary Operation)

যদি $a * b = b * a$ আৰু $\forall a, b \in S$ হয়, তেন্তে এটা অ-শূন্য S সংহতিৰ দ্বৈত প্রক্রিয়াটো ক্রম বিনিময়ে প্রকৃতিৰ হ'ব।

টোকা ঃ কোনো এটা সসীম সংহতিৰ দ্বৈত প্রক্রিয়াটো তেতিয়াহে ক্রম বিনিময়ে প্রকৃতিৰ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি প্রক্রিয়া তালিকাৰ অন্তর্ভুক্ত উপাদানবোৰ প্রধান বিকর্ণ মেট্রিক্স (principal diagonal) অনুসৰি সমমিত (symmetric) হয়।

উদাহৰণ স্বৰূপে তালিকা ২.৪ত অন্তর্ভুক্ত উপাদানবোৰ প্রধান বিকর্ণ মেট্রিক্স 0, 0, 0 অনুসৰি সমমিত। সেয়েহে উদাহৰণ 6 ত উল্লেখ কৰা $*$ টো $\{0, 1, 2\}$ৰ ওপৰত চলা ক্রম বিনিময়ে দ্বৈত প্রক্রিয়া।

উদাহৰণ ৭ঃ $a * b = a-b+5$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত দ্বৈত প্রক্রিয়া $*$ টো Z ৰ ওপৰত চলা ক্রম বিনিময়ে প্রক্রিয়া হয়নে?

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $a * b = a-b+5$

$b * a = b-a+5$, $\forall a, b \in Z$

স্পষ্টকৈ গম পোৱা গ'ল যে, $a * b \neq b * a$

$\therefore$ $*$ প্রক্রিয়াটো Z ৰ ওপৰত চলা ক্রম বিনিময়ে প্রক্রিয়া নহয়।

উদাহৰণ ৮ঃ ধৰা হ'ল, Q এটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি।

$a * b = ab^2$, $\forall a, b \in Q$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত $*$ হ'ল Q ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া। এতিয়া, $*$ এটা ক্রম বিনিময়ে প্রক্রিয়া হ'বনে?

সমাধান ঃ $a * b = ab^2$, $b * a = ba^2$, $\forall a, b \in Q$

$\therefore a * b \neq b * a$

$\therefore$ $*$ ক্রম বিনিময়ে দ্বৈত প্রক্রিয়া নহয়।

২.৩.২ সাহচর্য্য দ্বৈত প্রক্রিয়া (Associative Binary Operation)

এটা অ-শূন্য সংহতি S ৰ ওপৰত চলা $*$ দ্বৈত প্রক্রিয়াটোক সহযোগ বিধিৰ বুলি তেতিয়াহে কোৱা হ'ব যেতিয়া $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in S$ হ'ব।

উদাহৰণ ৯ঃ $a * b = a-b+5$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত $*$ দ্বৈত প্রক্রিয়াটো Z ৰ ওপৰত চলা সহযোগ বিধিৰ প্রক্রিয়া হ'বনে?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $a, b, c \in Z$.

$(a * b) * c = (a-b+5) * c$

$= (a-b+5) - c+5$

$= a-b-c+10$

$a * (b * c) = a * (b-c+5)$

$= a - (b-c+5)+ 5$

$= a - b + c - 5 + 5$

$= a - b + c$

$\therefore (a * b) * c \neq a * (b * c)$

$\therefore *$ সহযোগ বিধিৰ দ্বৈত প্রক্রিয়া নহয়।

উদাহৰণ ১০ঃ ধৰা হ'ল, X হৈছে ১ নথকা পৰিমেয় সংখ্যাৰ এটা সংহতি।

1. X ৰ ওপৰত $*$ ক আমি তলত দিয়া ধৰণে নির্ধাৰণ কৰিব পাৰোঁ—

$a * b = a + b - ab$, $\forall a, b \in X$.

প্রমাণ কৰক যে $*$ হ'ল X ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

$*$ প্রক্রিয়াটো (i) ক্রম বিনিময় নে (ii) সহযোগি বিধিৰ পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $a, b \in X$

$\therefore a, b$ দুটা পৰিমেয় সংখ্যা আৰু $a \neq 1, b \neq 1$.

এতিয়া, $a + b - ab$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা আৰু $a+b-ab \neq 1$, যদি $a+b-ab=1$, তেন্তে

$a+b-ab-1=0$

অর্থাৎ, $(a-1)-b(a-1)=0$

অর্থাৎ, $(a-1)(1-b)=0$

অর্থাৎ, $a-1=0, 1-b=0$

অর্থাৎ, $a = 1, b = 1$, ই এক অসংগতি।

$\therefore a+b-ab \in X$

অর্থাৎ, $a * b \in X$, $\forall a, b \in X$

$\therefore$ $*$ হ'ল X ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

দ্বিতীয় অংশ

$a * b = a+b-ab$

$= b+a-ba$

$= b * a$

$\therefore$ $*$ হ'ল X ৰ ওপৰত চলা ক্ৰম বিনিময়ে দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া

আকৌ, $(a * b) * c$

$= (a+b-ab) * c$

$= (a+b-ab) + c - (a+b-ab)c$

$= a+b-ab+c - ac-bc+abc$

$= a+b+c-ab-bc-ca+abc$

$a*(b*c) = a * (b+c-bc)$

$= a+(b+c-bc) - a(b+c-bc)$

$= a+b+c-ab-bc-ca+abc$

$\therefore (a*b) * c = a * (b*c)$

$\therefore$ $*$ হ'ল এটা সহযোগ বিধিৰ দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

২.৩.৩ একক মৌল (Identity Element)

ধৰা হ'ল, S এটা অ-শূন্য সংখ্যাৰ সংহতি আৰু $*$ ইয়াৰ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া। এতিয়া, $e \in S$ মৌলটোক তেতিয়াহে $*$ ৰ অভেদ মৌল বোলা হ'ব যদিহে—

$$a * e = a = e * a, \forall a \in S.$$

টোকা ঃ যদি কোনো দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ বাবে কোনো অভেদ মৌল থাকে, তেন্তে ই একক মৌল হ'ব।

উদাহৰণ ঃ

1. IN ৰ ওপৰত পূৰণ কৰা কামটো এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া। ইয়াত এটা $1 \in$ IN আছে, যিটো

$$a * 1 = a = 1 * a, \forall\ a \in IN$$

$\therefore$ 1 হ'ল IN ত পূৰণৰ বাবে থকা একমাত্ৰ অভেদ মৌল।

2. যোগ কৰা কামটো হ'ল Z ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।
ইয়াত এটা $0 \in Z$ আছে, যিটো

$$a + 0 = a = 0+a, \forall a \in Z$$

$\therefore$ 0 হ'ল Z ত যোগৰ বাবে থকা একমাত্ৰ অভেদ মৌল।

3. যোগ কৰা কামটো হ'ল IN ৰ ওপৰত চলা এক দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া। কিন্তু IN ত যোগ কৰাৰ বাবে কোনো অভেদ মৌল নাই।

4. মেট্রিক্স যোগ হ'ল M_{mxn} ৰ ওপৰত চলা এক দ্বৈত প্রক্রিয়া। আটাইবোৰ m x n বাস্তৱ মেট্রিক্সৰ সংহতি হ'ল M_{mxn}। m x n নথকা শূন্য মেট্রিক্সটো হ'ব M_{mxn}ত মেট্রিক্স যোগৰ অভেদ মৌল।

২.৩.৪ মৌলৰ বিপৰীত (Inverse of an Element)

ধৰা হ'ল, S এটা অ-শূন্য সংখ্যাৰ সংহতি। ইয়াৰ $*$ হ'ল এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া আৰু e হ'ল অভেদ মৌল। এতিয়া $*$ ৰ অধীনত $b \in S$ এটা প্রতিলোম মৌল হ'ব যদিহে

$$a * b = e = b * a$$

টোকা ঃ 1. মৌলৰ প্রতিলোম হ'ল কোনো এক দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ অধীনস্থ এটা উপাদান। যদি প্রক্রিয়া এটাত প্রতিলোমৰ উপস্থিতি ধৰা পৰে তেন্তে ই হ'ব একক উপাদান।

2. a মৌলৰ প্রতিলোম বুজাবলৈ সাধাৰণতে a^{-1} লিখা হয়। বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্রত যোগ অংকৰ অধীনস্থ সংখ্যাৰ প্রতিলোমক (যোগাত্মক প্রতিলোম/additive inverse) –a বুলি লিখা হয়। পূৰণ অংকৰ অধীনস্থ a মৌলৰ ($a \neq 0$) প্রতিলোমক (গুণক প্রতিলোম/multiplicative inverse) $\frac{1}{a}$ বুলি লিখা হয়।

উদাহৰণ ঃ

1. পূৰণ কৰা কামটো হ'ল IN ৰ ওপৰত চলা এক দ্বৈত প্রক্রিয়া। $1 \in$ IN হ'ল পূৰণৰ বাবে থকা অভেদ মৌল। কিন্তু 1 ৰ বাহিৰে IN ৰ আন কোনো উপাদানৰে IN ত পূৰণ কার্যৰ অধীনত প্রতিলোম নাথাকে।

2. যোগ কৰা কামটো হ'ল Z ৰ ওপৰত চলা এক দ্বৈত প্রক্রিয়া। $0 \in Z$ হ'ল যোগৰ বাবে থকা অভেদ মৌল। প্রতিটো $a \in Z$ ৰ বাবে একোটা $-a \in Z$ থাকে, য'ত $a+(-a) = 0=(-a) + a$.

   $\therefore$ –a হ'ল যোগৰ প্রতিলোম।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল A এটা সসীম সংহতি। ইয়াত 4 টা উপাদান আছে। A ৰ ওপৰত চলা দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ সংখ্যা কিমান?

প্রশ্ন নং ২ঃ $a * b = \frac{a}{b}$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত $*$ টো IR ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'বনে?

প্রশ্ন নং ৩ঃ {–1, 1, i, –i} ৰ ওপৰত পূৰণ কৰা কামটো এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'বনে? ইয়াত $i = \sqrt{-1}$.

প্রশ্ন নং ৪ঃ ধৰা হ'ল, Q এটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি। $a * b = a + ab$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত $*$ টো Q ৰ ওপৰত চলা এক দ্বৈত প্রক্রিয়া বুলি প্রমাণিত কৰক।

$*$ টো (i) ক্রম বিনিময়ে নে, (ii) সহযোগ বিধিৰ পৰীক্ষা কৰক।



২.৪ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- এটা অ-শূন্য সংহতি S ৰ দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'ব S x S ৰ পৰা Sলৈ হোৱা ফলন।
- যদি S এটা m সংখ্যক উপাদান থকা সসীম সংহতি হয়, তেন্তে Sৰ ওপৰত চলা দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ সংখ্যা হ'ব m^{m^2}.
- যদি $a * b = b * a$ আৰু $\forall\, a, b \in S$ হয়, তেন্তে এটা অ-শূন্য S সংহতিৰ দ্বৈত প্রক্রিয়াটো ক্রম বিনিময়ে প্রকৃতিৰ হ'ব।
- এটা অ-শূন্য সংহতি S ৰ ওপৰত চলা $*$ দ্বৈত প্রক্রিয়াটোক সাহচর্য্য বিধিৰ বুলি তেতিয়াহে কোৱা হ'ব যেতিয়া $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall\, a, b, c \in S$ হ'ব।
- এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া সম্বলিত অ-শূন্য সংহতি Sত থকা e মৌলটোক একক মৌল বোলা হ'ব যদিহে $a * e = a = e * a$, $\forall\, a \in S$ হয়।
- এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া সম্বলিত অ-শূন্য সংহতি S ত থকা b মৌলটোক S সংহতিৰ a মৌলৰ বিপৰীত বোলা হ'ব যদিহে $a * b = e = b * a$ হয়।



২.৫ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $4^{4^2} = 4^{16}$

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নহয়।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ হয়।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ক্রম বিনিময়ে নহয়, সহযোগ বিধিৰ নহয়।



২.৬ অধিক জানিবলৈ

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.

2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).

3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).

4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.

5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



২.৭ আৰ্হি প্রশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্রশ্ন ১ঃ ধৰা হ'ল IR এটা বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি। $a * b = a+5b$; $a, b \in IR$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত দ্বৈত প্রক্রিয়া $*$ টো (i) ক্রম বিনিময়ে নে (ii) সাহচর্য্য বিধিৰ পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন ২ঃ ধৰা হ'ল S সংহতিটোৰ 3 টা উপাদান আছে। S ৰ ওপৰত কিমানটা দ্বৈত প্রক্রিয়া চলিব পাৰে?

*** ***** ***

অধ্যায় ৩ ঃ সংঘ (GROUP)

অধ্যায় গাঁথনি

৩.১ উদ্দেশ্য

৩.২ পৰিচয়

৩.৩ সংঘ

৩.৪ সংঘৰ ধৰ্মসমূহ

৩.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৩.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৩.৭ অধিক জানিবলৈ

৩.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

৩.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি অধোলিখিত বিষয়বোৰৰ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব—

- সংঘ
- সংঘৰ ধৰ্মসমূহ

৩.২ পৰিচয়

দ্বিতীয় অধ্যায়ত আমি সংহতিৰ দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া বিষয়ে আলোচনা কৰিছোঁ। এই অধ্যায়ত সংঘৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব। সংঘ হ'ল এটা বীজগণিতীয় গাঁথনি, অর্থাৎ কেইটামান নির্দিষ্ট স্বীকার্য সিদ্ধ কৰা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াযুক্ত এটা অৰিক্ত সংহতি। বিমূর্ত বীজগণিতৰ অধ্যয়নত সংঘ-তত্ত্বই এক গুৰুত্বপূর্ণ স্থান অধিকাৰ কৰি আছে।

৩.৩ সংঘ

দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া $*$ যুক্ত এটা অৰিক্ত সংহতি G ক সংঘ (group) বুলি কোৱা হয় যদি তলৰ স্বীকার্যকেইটা সিদ্ধ হয়।

(i) সাহচর্য্য বিধি

$(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$

(ii) একক মৌলৰ অস্তিত্ব

G ত এনে এটা মৌল e আছে যাতে

$a * e = a = e * a, \forall a \in G.$

e ক একক মৌল বুলি কোৱা হয়।

(iii) বিপৰীত মৌলৰ অস্তিত্ব

প্ৰত্যেক $a \in G$ ৰ বাবে G ত এটা মৌল b আছে যাতে

$a * b = e = b * a$

b ক a ৰ বিপৰীত বুলি কোৱা হয় আৰু ইয়াক a^{-1}ৰে চিহ্নিত কৰা হয়।

তদুপৰি যদি দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া $*$ ক্ৰমবিনিময় হয়, তেনেহ'লে G ক আবেলীয় সংঘ (Abelian group) বুলি কোৱা হয়। স্মৰ্তব্য যে নিলছ হেনৰিক আবেল (1802–1829) আছিল নৰৱেৰ এজন প্ৰথিতযশা গণিতজ্ঞ।

টোকা ঃ 1. সংঘ হ'বলৈ হ'লে উপৰিউক্ত স্বীকাৰ্যকেইটা সিদ্ধ কৰা এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াযুক্ত অৰিক্ত সংহতি থাকিব লাগিব। পাছত আমি 'ধৰা হ'ল G এটা সংঘ' বুলি লিখিম। এইটো কথা মনত ৰাখিব লাগে যে G ত এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া আছে।

2. আমি দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ প্ৰতীকটো বাদ দিম আৰু ab বুলিহে লিখিম। মনত ৰাখিব লাগিব যে এয়া আমাৰ সাধাৰণ পূৰণ নহয়।

3. দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াযুক্ত এটা অৰিক্ত সংহতি G ক **অৰ্ধসংঘ** (semigroup) বুলি কোৱা হয় যদিহে দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াটো সাহচৰ্য্য হয়।

সসীম আৰু অসীম সংঘ

এটা সংঘ G ক **সসীম সংঘ** (finite group) বুলি কোৱা হয় যদি G সংহতিটো সসীম, অন্যথাই ইয়াক **অসীম সংঘ** (infinite group) বুলি কোৱা হয়।

সংঘৰ ক্ৰম

এটা সসীম সংঘৰ G ৰ মৌলৰ সংখ্যাক G ৰ ক্ৰম (order) বুলি কোৱা হয়। প্ৰতীকৰ সহায়ত $0(G)$ বা $|G|$ ৰে বুজোৱা হয়।

উদাহৰণ ১ ঃ ধৰা হ'ল $G = \{1\}$

স্পষ্টত ঃ G ত পূৰণ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

তদুপৰি সংঘৰ আটাইকেইটা স্বীকাৰ্য সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G এটা সংঘ।

তদুপৰি G এটা আবেলীয় সংঘ।

উদাহৰণ ২ ঃ ধৰা হ'ল $G = \{-1, 1\}$, অৰ্থাৎ G সংহতিটো একৰ বৰ্গমূল দুটাৰে গঠিত।

x	–1	1
–1	1	–1
1	–1	1

তালিকা ৩.১

(i) সাৰণীৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে G ত পূৰণ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

(ii) আমি জানো যে বাস্তৱ সংখ্যাৰ পূৰণে সাহচৰ্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত একক মৌল হ'ল 1।

(iv) G ৰ প্ৰতিটো মৌলৰ G ত গুণাত্মক বিপৰীত আছে,

যথা 1 অৰ গুণাত্মক বিপৰীত 1।

–1 অৰ গুণাত্মক বিপৰীত –1.

∴ পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G এটা সংঘ।

(v) তদুপৰি বাস্তৱ সংখ্যাৰ পূৰণে ক্ৰমবিনিময়ে বিধি মানি চলে।

∴ G এটা আবেলীয় সংঘ।

উদাহৰণ ৩ ঃ ধৰা হ'ল G = {z : z জটিল সংখ্যা আৰু $z^n=1$}, অৰ্থাৎ G সংহতিটো একৰ n তম মূলেৰে গঠিত। ($n \in IN$)

(i) ধৰা হ'ল $z_1, z_2 \in G$

∴ $z_1^n=1, z_2^n=1$

এতিয়া $(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n = 1$ ∴ $z_1 z_2 \in G$

∴ G ত পূৰণ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

(ii) আমি জানো যে জটিল সংখ্যাৰ পূৰণে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) $1 \in G$ আৰু $1z = z = z1, \forall z \in G$.

∴1 হ'ল একক মৌল।

(iv) ধৰা হ'ল $z \in G$. ∴$z^n = 1$

এতিয়া $\frac{1}{z}$ এটা জটিল সংখ্যা আৰু $\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = 1$

$$\therefore \frac{1}{z} \in G$$

গতিকে, প্ৰত্যেক $z \in G$ ৰ বাবে, $\frac{1}{z} \in G$ যাতে $z\frac{1}{z}=1=\frac{1}{z}z$

∴ $\frac{1}{z}$ হ'ল z অৰ বিপৰীত।

∴ জটিল সংখ্যাৰ পূৰণৰ অধীনত G এটা সংঘ।

(v) তদুপৰি, জটিল সংখ্যাৰ পূৰণে ক্ৰমবিনিময়ে বিধি মানি চলে।

∴ G এটা আবেলীয় সংঘ।

টোকা ঃ আমি দেখিলোঁ যে প্ৰত্যেক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n অৰ বাবে এটা n ক্ৰমৰ আবেলীয় সংঘ আছে।

উদাহৰণ ৪ ঃ Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

(i) ধৰা হ'ল $a, b \in Z$

∴ $a+b \in Z, \forall\ a, b \in Z$

Z অত যোগ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

(ii) আমি জানো যে অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) $0 \in Z$ আৰু $a+0 = a = 0+a, \forall a \in Z$

∴ 0 একক মৌল।

(iv) প্ৰত্যেক $a \in Z$ অৰ বাবে, $-a \in Z$ যাতে $a+(-a) = 0 = (-a) +a$.

∴ যোগৰ অধীনত Z এটা সংঘ।

(v) তদুপৰি অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগ ক্রমবিনিময়ে।

∴ যোগৰ অধীনত Z এটা আবেলীয় সংঘ।

টোকা ঃ Z এটা অসীম সংঘ।

সংঘৰ আন কেইটামান উদাহৰণ

- যোগৰ অধীনত Q এটা আবেলীয় সংঘ।
- যোগৰ অধীনত IR এটা আবেলীয় সংঘ।
- পূৰণৰ অধীনত অশূন্য পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি Q_0 এটা আবেলীয় সংঘ।
- পূৰণৰ অধীনত অশূন্য বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি IR_0 এটা আবেলীয় সংঘ।
- যোগৰ অধীনত C এটা আবেলীয় সংঘ।
- পূৰণৰ অধীনত অশূন্য জটিল সংহতি C_0 এটা আবেলীয় সংঘ।

উদাহৰণ ৫ ঃ ধৰা হ'ল G = $\left\{\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} : \alpha \in IR\right\}$

(i) ধৰা হ'ল $A_\alpha = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \in G,$

$$A_\beta = \begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix} \in G\ ;\ \alpha, \beta \in IR$$

এতিয়া $A_\alpha\ A_\beta = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix} = A_{\alpha+\beta} \in G$$

অর্থাৎ G ত মৌলকক্ষৰ পূৰণ এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

(ii) আমি জানো যে মৌলকক্ষৰ পূৰণে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}\cos 0 & -\sin 0\\ \sin 0 & \cos 0\end{pmatrix} \in G$$

আৰু $A_\alpha I = A_\alpha = IA_\alpha, \forall A_\alpha \in G$.

∴ I হ'ল একক মৌল।

(iv) $|A_\alpha| = \begin{vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}$

$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0$$

$\therefore A_\alpha^{-1}$ আছে

$$\therefore \text{adj}A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\therefore A_\alpha^{-1} = \frac{1}{|A_\alpha|} adj\ A_\alpha$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \in G$$

∴ মৌলকক্ষৰ পূৰণৰ অধীনত G এটা সংঘ।

(v) তদুপৰি $A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta} = A_{\beta+\alpha} = A_\beta A_\alpha$

∴ G এটা আবেলীয় সংঘ।

উদাহৰণ ৬ ঃ ধৰা হ'ল G = $\left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} : x \in IR,\ x \neq 0 \right\}$

(i) ধৰা হ'ল $\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \in G,\ \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix} \in G$

$x, y \in IR,\ x \neq 0,\ y \neq 0$

এতিয়া $\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{pmatrix} \in G,\ xy \in IR,\ xy \neq 0$

(ii) আমি জানো যে মৌলকক্ষৰ পূৰণে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in G$

আৰু $\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2}+\frac{x}{2} & \frac{x}{2}+\frac{x}{2} \\ \frac{x}{2}+\frac{x}{2} & \frac{x}{2}+\frac{x}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$$

$\therefore \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ হ'ল একক মৌল।

(iv) প্ৰত্যেক $\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \in G$ ৰ বাবে $\begin{pmatrix} \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \\ \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \end{pmatrix} \in G$

যাতে $\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \\ \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \\ \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$ অৰ বিপৰীত হ'ল $\begin{pmatrix} \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \\ \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \end{pmatrix}$.

$\therefore$ মৌলকক্ষৰ পূৰণৰ অধীনত G এটা সংঘ।

(v) তদুপৰি $\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 2yx & 2yx \\ 2yx & 2yx \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$$

$\therefore$ G এটা আবেলীয় সংঘ।

টোকা ঃ উপৰিউক্ত উদাহৰণটোত একক মৌল $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

উদাহৰণ ৭ ঃ ধৰা হ'ল 1 অৰ বাহিৰে সকলো পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতিটো G. G ত $*$ এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল— $a * b = a+b-ab, \forall\ a, b \in G$

(i) G ত $*$ এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

[দ্রষ্টব্য অধ্যায় 2 ৰ উদাহৰণ 10]

(ii) G ত $*$ এ সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) $0 \in G$ আৰু

$a * 0 = a + 0 - a0 = a$

$0 * a = 0 + a - 0a = a$

$\therefore *$ সাপেক্ষে 0 একক মৌল।

(iv) প্রত্যেক $a \in G$ ৰ বাবে, $\frac{a}{a-1} \in G$ যাতে

$$a * \frac{a}{a-1} = 0 = \frac{a}{a-1} * a$$

$\therefore *$ সাপেক্ষে a ৰ বিপৰীত $\frac{a}{a-1}$.

$\therefore$ $*$ সাপেক্ষে G এটা সংঘ।

(v) তদুপৰি, $*$ ক্ৰমবিনিময়ে়।

[দ্ৰষ্টব্য অধ্যায় 2 ৰ উদাহৰণ 10]

$\therefore$ G এটা আবেলীয় সংঘ।

৩.৪ সংঘৰ ধৰ্মসমূহ

উপপাদ্য ১ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ। তেনেহ'লে

(i) একক মৌল অদ্বিতীয় (unique);

(ii) G ৰ প্ৰত্যেক মৌলৰ বিপৰীত অদ্বিতীয়;

(iii) $(a^{-1})^{-1} = a$, $\forall a \in G$, য'ত a^{-1} এ a ৰ বিপৰীত বুজাইছে;

(iv) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, $\forall a, b \in G$

(v) $ab = ac \Rightarrow b = c$, (বাওঁ বিলোপন বিধি)

$ba = ca \Rightarrow b = c$, (সোঁ বিলোপন বিধি) $\forall a, b, c \in G$.

প্ৰমাণ ঃ (i) যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল Gৰ দুটা একক মৌল e, f.

$\therefore ef = e = fe$ [Θ f একক মৌল]

আকৌ $ef = f = fe$ [Θ e একক মৌল]

$\therefore e = f$

গতিকে, একক মৌল অদ্বিতীয়।

(ii) ধৰা হ'ল $a \in G$ আৰু G ৰ একক মৌল e.

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল b আৰু c, a ৰ দুটা বিপৰীত।

$\therefore ab = e = ba$ [Θ b, a ৰ বিপৰীত]

$ac = e = ca$ [Θ c, a ৰ বিপৰীত]

এতিয়া $b = be$ [Θ e একক মৌল]

$= b(ac)$ [Θ $e = ac$]

$= (ba)c$ [সাহচর্য্য বিধিৰ পৰা]

$= ec$

$= c$ [Θ e একক মৌল]

গতিকে a ৰ বিপৰীত অদ্বিতীয়।

(iii) আমি জানো $aa^{-1} = e = a^{-1}a$

$\therefore a^{-1}$, a ৰ বিপৰীত, তেনেদৰে a, a^{-1} ৰ বিপৰীত।

$\therefore (a^{-1})^{-1} = a$

(iv) ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e আৰু $a, b \in G$

এতিয়া $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1}$

$= a\ e\ a^{-1}$

$= aa^{-1}$

$= e$

$(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b$

$= b^{-1}\ eb$

$= b^{-1}\ b$

$= e$

$\therefore$ $b^{-1}a^{-1}$, abৰ বিপৰীত, অৰ্থাৎ, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

(v) $ab = ac$

$\Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac)$

$\Rightarrow (a^{-1}a)b=(a^{-1}a)c$, [সাহচর্য্য বিধিৰ পৰা]

$\Rightarrow eb = ec$

$\Rightarrow b = c$, [Θ e একক মৌল]

আকৌ $ba = ca$

$\Rightarrow (ba)a^{-1} = (ca)\ a^{-1}$

$\Rightarrow b(aa^{-1}) = c(aa^{-1})$ [সাহচর্য্য বিধিৰ পৰা]

$\Rightarrow be = ce$

$\Rightarrow b = c$ [Θ e একক মৌল]

উদাহৰণ ৮ ঃ যদি এটা সংঘ G ত, প্ৰত্যেক মৌল নিজেই নিজৰ বিপৰীত হয়, প্ৰমাণ কৰক যে G আবেলীয়।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ। ধৰা হ'ল $a, b \in G$

$\therefore$ $a^{-1} = a$, $b^{-1} = b$ (দিয়া আছে)

এতিয়া $ab = (ab)^{-1}$ (দিয়া আছে)

$= b^{-1}\ a^{-1}$ [উপপাদ্য ১ (iv)]

$\therefore$ G আবেলীয়।

উদাহৰণ ৯ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে এটা সংঘ G আবেলীয় হ'ব যদি আৰু যদিহে $(ab)^2 = a^2b^2$, $\forall$ $a, b \in G$.

সমাধান ঃ $(ab)^2 = a^2\ b^2$

$\Leftrightarrow$ $(ab)\ (ab) = (aa)\ (bb)$

$\Leftrightarrow$ $a(ba)b = a(ab)b$

$\Leftrightarrow$ $(ba)b = (ab)b$, [বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা]

$\Leftrightarrow$ $ba = ab$, [সোঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা]

$\Leftrightarrow$ G আবেলীয়



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ দেখুৱাওক যে একৰ ঘনমূল কেইটাৰ দ্বাৰা গঠিত $G = \{1, \omega, \omega^2\}$ সংহতিটো পূৰণ প্রক্রিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ। (ω একৰ এটা জটিল ঘনমূল)

প্রশ্ন নং ২ঃ দেখুৱাওক যে বাস্তৱ সংখ্যাত সকলো 2 x 2 অক্ষীয়মান মৌলকক্ষেৰে (non-singular matrices) গঠিত G সংহতিটো মৌলকক্ষৰ পূৰণৰ অধীনত এটা সংঘ।

প্রশ্ন নং ৩ঃ ধৰা হ'ল $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : x \in IR, x \neq 0 \right\}$ দেখুৱাওক যে মৌলকক্ষৰ পূৰণৰ অধীনত G এটা আবেলীয় সংঘ।

প্রশ্ন নং ৪ঃ কোনো সংঘ G ৰ প্রতিটো মৌল a ৰ বাবে যদি $a^2 = e$ হয়, প্রমাণ কৰক যে G আবেলীয়। (e হ'ল Gৰ একক মৌল)



৩.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- সংঘ হ'ল এটা বীজগণিতীয় গাঁথনি, অর্থাৎ কেইটামান নির্দিষ্ট স্বীকার্য্য সিদ্ধ কৰা দ্বৈত প্রক্রিয়াযুক্ত এটা অৰিক্ত সংহতি।
- সংঘৰ প্রাথমিক ধর্মসমূহ আলোচনা কৰা হ'ল।



৩.৬ অধিক জানিবলৈ

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.
2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).
3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).

4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.

5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



৩.৭ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে কৰিবলৈ চেষ্টা কৰক।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে কৰিবলৈ চেষ্টা কৰক।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে কৰিবলৈ চেষ্টা কৰক।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে কৰিবলৈ চেষ্টা কৰক।



৩.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ঃ ধৰা হ'ল G অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি। G ত দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া $*$ এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হৈছে। $a * b = a+b-1;\ a, b \in G.$

দেখুৱাওক যে $*$ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G এটা আবেলীয় সংঘ।

প্ৰশ্ন ২ঃ প্ৰমাণ কৰক যে এটা সংঘ G এটা আবেলীয় হ'ব যদি আৰু যদিহে $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, $\forall\ a, b \in G.$

*** ***** ***

অধ্যায় ৪ ঃ উপসংঘ (SUBGROUPS)

অধ্যায় গাঁথনি

৪.১ উদ্দেশ্য
৪.২ পৰিচয়
৪.৩ উপসংঘ
৪.৪ চক্রীয় সংঘ
৪.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
৪.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
৪.৭ অধিক জানিবলৈ
৪.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

৪.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি অধোলিখিত বিষয়বোৰৰ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব—

- উপসংঘ
- চক্রীয় সংঘ

৪.২ পৰিচয়

তৃতীয় অধ্যায়টিত আমি সংঘ আৰু ইয়াৰ ধর্মসমূহৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিলো। এই অধ্যায়টিত আমি উপসংঘ আৰু ইয়াৰ ধর্মসমূহৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। আমি চক্রীয় সংঘৰ বিষয়েও এই অধ্যায়টিত আলোচনা কৰিম।

৪.৩ উপসংঘ

অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Z লোৱা হ'ল।

আমি জানো যে যোগ প্রক্রিয়াৰ অধীনত Z এটা সংঘ।

$2Z = \{0, \pm 2, \pm 4, ...\}$ হ'ল যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

স্পষ্টত ঃ 2Z, Z অৰ এটা অৰিক্ত উপসংহতি।

তদুপৰি যোগ প্রক্রিয়াৰ অধীনত 2Z এটা সংঘ।

এই ক্ষেত্রত 2Z অক Z অৰ এটা অৰিক্ত উপসংঘ বুলি কোৱা হয়।

সংজ্ঞা ঃ এটা সংঘ G ৰ কোনো অৰিক্ত উপসংহতি H অক উপসংঘ (subgroup) বুলি কোৱা হয় যদি G ৰ দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ অধীনত H ও এটা সংঘ হয়। প্রতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে লিখা হয় $H \leq G$.

টোকা ঃ (1) যদি e, G ৰ একক মৌল হয়, {e} ও G ৰ এটা উপসংঘ। ইয়াক তুচ্ছ (trivial) উপসংঘ বুলি কোৱা হয়। বাকীবোৰ উপসংঘ অতুচ্ছ।

(2) G নিজেই G ৰ এটা উপসংঘ। ইয়াক G ৰ অপ্রকৃত উপসংঘ (improper subgroup) বুলি কোৱা হয়। বাকীবোৰ উপসংঘ প্রকৃত।

[দ্রষ্টব্য John B. Fraleigh, A First Course in Abstract Algebra (First Indian Reprint, 2003)]

উদাহৰণ ১ ঃ ধৰা হ'ল G = {–1, 1, –i, i}, i = $\sqrt{-1}$

আমি জানো যে পূৰণ প্রক্রিয়াৰ অধীনত G এটা সংঘ।

ধৰা হ'ল H = {–1, 1}.

স্পষ্টত ঃ H ⊆ G.

আকৌ, পূৰণ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে H এটা সংঘ।

∴ H ≤ G এইটো G ৰ প্রকৃত উপসংঘ।

টোকা ঃযোগ প্রক্রিয়াৰ অধীনত বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি IR এটা সংঘ। পূৰণ প্রক্রিয়াৰ অধীনত ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি IR_+ এটা সংঘ। IR_+, IR অৰ এটা উপসংহতি, কিন্তু উপসংঘ নহয়। দ্বৈত প্রক্রিয়া বেলেগ।

উপপাদ্য ১ ঃ G সংঘৰ H এটা উপসংঘ। তেনেহ'লে

(i) H অৰ একক মৌলই G ৰ একক মৌল,

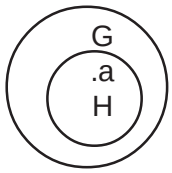
(ii) H অৰ কোনো মৌলৰ বিপৰীত, G ৰ মৌল হিচাপেও সেই একেটা মৌলৰ বিপৰীত একে।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু H≤G.

(i) যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e আৰু H অৰ একক মৌল f.

ধৰা হ'ল a ∈ H

∴ af = a = fa [Θ H অৰ একক মৌল f]



আকৌ a ∈ H ⇒ a ∈ G

∴ ae = a = ea [Θ G ৰ একক মৌল e]

∴ af = ae

⇒ f = e [বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা]

(ii) ধৰা হ'ল Gৰ একক মৌলও e.

∴ H অৰ একক মৌল e.

ধৰা হ'ল a ∈ H

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল H অত a ৰ বিপৰীত b আৰু Gত a ৰ বিপৰীত c.

∴ ab = e = ba

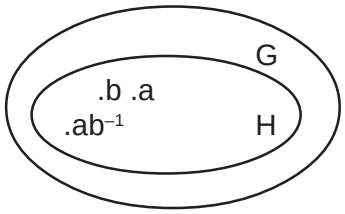
ac = e = ca

∴ ab = ac .⇒ b = c [বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা]

টোকা ঃ সংঘ G ৰ H, K দুটা উপসংঘ হ'লে আৰু G ৰ একক মৌল e হ'লে, H আৰু K উভয়ৰে একক মৌল হ'ব e. গতিকে H আৰু K ৰ অন্ততঃ এটা উমৈহতীয়া মৌল আছে, যথা একক মৌল। গতিকে আমি এইটো সিদ্ধান্তত উপনীত হ'ব পাৰো যে এটা সংঘৰ দুটা অসংযুক্ত (disjoint) উপসংঘ থাকিব নোৱাৰে।

উপপাদ্য ২ ঃ সংঘ G ৰ এটা অৰিক্ত উপসংহতি H, G ৰ উপসংঘ হ'ব যদি আৰু যদিহে

$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.



প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল $H \leq G$

ধৰা হ'ল $a, b \in H$

$b \in H \Rightarrow b^{-1} \in H$ [Θ H এটা সংঘ]

এতিয়া $a \in H, b^{-1} \in H$

$\therefore ab^{-1} \in H$

বিপৰীত ক্ৰমে, ধৰা হ'ল $H \subseteq G$ যাতে $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$

(i) এতিয়া $a, a \in H \Rightarrow aa^{-1} \in H$ (প্ৰদত্ত চৰ্তমতে)

$\Rightarrow e \in H$,

য'ত e হ'ল Gৰ একক মৌল।

(ii) $e \in H, a \in H \Rightarrow ea^{-1} \in H$

$\Rightarrow a^{-1} \in H$

$\therefore$ H অৰ প্ৰতিটো মৌলৰ বিপৰীত H অত আছে।

(iii) $b \in H \Rightarrow b^{-1} \in H$ ((ii)ৰ পৰা)

এতিয়া $a \in H, b^{-1} \in H \Rightarrow a(b^{-1})^{-1} \in H$

$\Rightarrow ab \in H$

(iv) যিহেতু দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াটোৱে G ত সাহচর্য্য বিধি মানি চলে, ই H অতো মানি চলিব।

$\therefore$ G ৰ যিটো দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, সেই একে দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত H এটা সংঘ। আকৌ $H \subseteq G$.

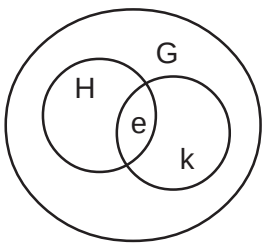
$\therefore H \leq G$.

টোকা ঃ যদি যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G এটা সংঘ হয়, তেনেহ'লে G ৰ এটা অৰিক্ত উপসংহতি H, Gৰ উপসংঘ হ'ব যদি আৰু যদিহে $a, b \in H \Rightarrow a-b \in H$.

উপপাদ্য ৩ ঃ এটা সংঘৰ দুটা উপসংঘৰ ছেদনো এটা উপসংঘ।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু e, G ৰ একক মৌল।

ধৰা হ'ল $H \leq G, K \leq G$.



আমি জানো যে $H \cap K \neq \phi$,

কিয়নো অন্ততঃ একক মৌল $e \in H \cap K$

ধৰা হ'ল $a, b \in H \cap K$

$a \in H \cap K \Rightarrow a \in H$ আৰু $a \in K$

$b \in H \cap K \Rightarrow b \in H$ আৰু $b \in K$

এতিয়া $a, b \in H$ আৰু $H \leq G$. $\therefore ab^{-1} \in H$

$a, b \in K$ আৰু $K \leq G$. $\therefore ab^{-1} \in K$

$ab^{-1} \in H$ আৰু $ab^{-1} \in K \Rightarrow ab^{-1} \in H \cap K$

$\therefore H \cap K \leq G$

টোকা ঃ দুটা উপসংঘৰ মিলন সদায় এটা উপসংঘ নহয়।

অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$ যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ।

ধৰা হ'ল $2Z = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, ...\}$

$3Z = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, ...\}$

স্পষ্টত ঃ $2Z \leq Z$, $3Z \leq Z$

এতিয়া $2 \in 2Z \cup 3Z$, $3 \in 2Z \cup 3Z$

কিন্তু $2+3 = 5 \notin 2Z \cup 3Z$

$\therefore 2Z \cup 3Z$ অত যোগ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া নহয়।

$\therefore 2Z \cup 3Z$ সংঘ হ'ব নোৱাৰে।

উপপাদ্য ৪ ঃ দুটা উপসংঘৰ মিলন এটা উপসংঘ হ'ব যদি আৰু যদিহে এটা আনটোৰ উপসংহতি হয়।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু $H \leq G$, $K \leq G$

ধৰা হ'ল $H \subseteq K$. $\therefore H \cup K = K$

Θ $K \leq G$, $\therefore H \cup K \leq G$

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল $H \leq G$, $K \leq G$ যাতে $H \cup K \leq G$.

ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e.

প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে $H \subseteq K$বা $K \subseteq H$

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল এইটো সত্য নহয়।

$\therefore H \not\subseteq K$ আৰু $K \not\subseteq H$

$\therefore$ H অত এনে এটা a আছে যাতে $a \notin K$

আৰু K ত এনে এটা b আছে যাতে $b \notin H$

এতিয়া $a \in H \Rightarrow a \in H \cup K$

$b \in K \Rightarrow b \in H \cup K$

$\therefore ab \in H \cup K \Rightarrow ab \in H$ বা $ab \in K$

যদি $ab \in H$, তেনেহ'লে $a \in H$, $ab \in H \Rightarrow a^{-1}(ab) \in H$

$\Rightarrow (a^{-1}a)b \in H$

$\Rightarrow eb \in H$

$\Rightarrow b \in H$,

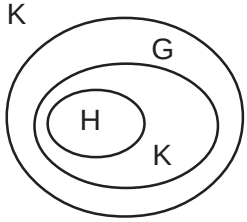
এইটো স্ববিৰোধী কথা।

সেইদৰে, যদি $ab \in K$, তেনেহ'লে $ab \in K, b \in K \Rightarrow (ab)b^{-1} \in K$

$\Rightarrow a(bb^{-1}) \in K$

$\Rightarrow ae \in K$

$\Rightarrow a \in K,$



এইটো স্ববিৰোধী কথা।

গতিকে আমি ধৰি লোৱা কথাটো ভুল।

সেয়ে $H \subseteq K$ বা $K \subseteq H$.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

প্রশ্ন নং ১ঃ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি IR_+ গুণাত্মকত সংঘ আৰু বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি IR যোগাধীনত সংঘ। IR_+, IR অৰ উপসংঘ হয়নে? যুক্তি দিয়ক।

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা সংঘৰ দুটা অসংযুক্ত উপসংঘ থাকিব পাৰেনে? যুক্তি দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ এটা আবেলীয় সংঘৰ এটা অনা-আৱেলীয় উপসংঘ থাকিব পাৰেনে? যুক্তি দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Z যোগাধীনত এটা সংঘ। m এটা নির্দিষ্ট অখণ্ড সংখ্যা। দেখুৱাওক যে $m\,Z = \{0, \pm m, \pm 2m, \pm 3m, ...\}$ সংহতিটো Z অৰ এটা উপসংঘ।

প্রশ্ন নং ৫ঃ 2 x 2 আকাৰৰ সকলো অপ্রতিম বাস্তৱ মৌলকক্ষৰ সংহতি G মৌলকক্ষৰ পূৰণৰ অধীনত এটা সংঘ।

ধৰা হ'ল $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \text{ বাস্তৱ আৰু } ad-bc = 1 \right\}$

দেখুৱাওক যে H, G ৰ এটা উপসংঘ।

প্রশ্ন নং ৬ঃ এটা উদাহৰণ দি দেখুৱাওক যে এটা সংঘক ইয়াৰ দুটা প্রকৃত উপসংঘৰ মিলন হিচাপে প্রকাশ কৰিব নোৱাৰি।

৪.৪ চক্রীয় সংঘ

সংজ্ঞা ঃ এটা সংঘ G ক চক্রীয় (cyclic) বুলি কোৱা হয় যদি G ত এটা মৌল a থাকে যাতে G ৰ প্রতিটো মৌলক a^n, $n \in Z$ আকাৰত প্রকাশ কৰিব পাৰি। a ক G ৰ এটা জনক (generator) বুলি কোৱা হয়। প্রতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে লিখা হয় $G = \langle a \rangle$, অর্থাৎ, a ৰ দ্বাৰা জনিত G এটা চক্রীয় সংঘ। আমি এনেকৈও লিখিব পাৰো $G = \{a^2 : a \in G : n \in z\}$ এ

টোকা ঃ যদি G সংঘটো যোগ প্রক্রিয়াৰ অধীনত হয়, G ৰ প্রতিটো মৌল na আকাৰত প্রকাশ কৰা হয়।

উদাহৰণ ঃ

(1) আমি জানো যে G = {–1, 1} সংহতিটো পূৰণ প্রক্রিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ।

এতিয়া, $(-1)^1 = -1$, $(-1)^2=1$

∴ – 1 অৰ দ্বাৰা জনিত G এটা চক্রীয় সংঘ অর্থাৎ G = <–1>

(2) আমি জানো যে G = {1, ω , ω^2} সংহতিটো পূৰণ প্রক্রিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ, ω হ'লে একৰ এটা জটিল ঘনমূল।

এতিয়া $\omega^1 = \omega^2$, $\omega^2 = \omega^2$, $\omega^3 = 1$

∴ ω অৰ দ্বাৰা জনিত G এটা চক্রীয় সংঘ অর্থাৎ G = $<\omega>$, সেইদৰে G = $<\omega^2>$

(3) আমি জানো যে G = {–1, 1, –i, i} সংহতিটো পূৰণ প্রক্রিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ।

এতিয়া $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -1$, $i^4 = 1$

∴ i ৰ দ্বাৰা জনিত G এটা চক্রীয় সংঘ অর্থাৎ G = < i >

সেইদৰে G = < – i >

(4) অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Z যোগ প্রক্রিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ।

ধৰা হ'ল $x \in Z$ এতিয়া x = 1x

∴ 1 অৰ দ্বাৰা জনিত G এটা চক্রীয় সংঘ অর্থাৎ G = < 1 >

সেইদৰে G = < –1 >.

উপপাদ্য ৫ ঃ প্রত্যেক চক্রীয় সংঘই আবেলীয়।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল G = < a > এটা চক্রীয় সংঘ।

ধৰা হ'ল $x, y \in G$.

গতিকে এনে অখণ্ড সংখ্যা m, n আছে যাতে $x = a^m$, $y = a^n$

এতিয়া $xy = a^m a^n$

$= a^{m+n}$

$= a^{n+m}$

$= a^n a^m$

$= yx$

∴ G আবেলীয়।

উপপাদ্য ৬ ঃ এটা চক্রীয় সংঘ G ৰ a এটা জনক হ'লে, a^{-1} ও G ৰ এটা জনক।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল G = < a > এটা চক্রীয় সংঘ।

ধৰা হ'ল $x \in G$.

গতিকে এনে এটা অখণ্ড সংখ্যা m আছে যাতে $x = a^m = (a^{-1})^{-m}$

$\therefore G = < a^{-1} >$.

Z অৰ বাবে হৰণৰ নিয়ম

b এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা আৰু a এটা অখণ্ড সংখ্যা হ'লে, অদ্বিতীয় (unique) অখণ্ড সংখ্যা, q, r আছে যাতে $a = bq+r$, $0 \leq r < b$.

ইয়াক Z অৰ বাবে হৰণৰ নিয়ম (Division Algorithm) বুলি কোৱা হয়।

উপপাদ্য ৭ ঃ এটা চক্রীয় সংঘৰ উপসংঘও চক্রীয়।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল $G = <a>$ এটা চক্রীয় সংঘ।

ধৰা হ'ল $H \leq G$

ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e.

প্রথম ক্ষেত্র ঃ ধৰা হ'ল $H = \{e\}$, তেনেহ'লে প্রমাণ কৰিবলৈকে একো নাই।

দ্বিতীয় ক্ষেত্র ঃ ধৰা হ'ল $H = G$, এই ক্ষেত্রতো প্রমাণ কৰিবলৈ একো নাই।

তৃতীয় ক্ষেত্র ঃ ধৰা হ'ল $H \neq G$, $H \neq \{e\}$

H অৰ প্রতিটো মৌলই a ৰ ঘাত (power)।

ধৰা হ'ল m য়েই **সবাতোকৈ সৰু** ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা যাতে $a^m \in H$.

ধৰা হ'ল $x \in H$.

তেনেহ'লে কোনো p ৰ বাবে $x = a^p$

এতিয়া হৰণৰ নিয়মৰ পৰা এনে অদ্বিতীয় অখণ্ড সংখ্যা q আৰু r আছে যাতে

$p = mq + r$, য'ত $0 \leq r < m$

$\therefore r = p - mq$

$\therefore a^r = a^{p-mq} = a^p (a^m)^{-q} = x(a^m)^{-q}$

এতিয়া $x (a^m)^{-q} \in H$ $\therefore a^r \in H$

কিন্তু m য়েই সবাতোকৈ সৰু ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা যাতে $a^m \in H$.

$\therefore$ r শূন্য হ'ব লাগিব।

$\therefore p = mq$

$\Rightarrow x = a^p = a^{mq} = (a^m)^q$

$\therefore H = <a^m>$ এটা চক্রীয় সংঘ।

উপপাদ্য ৮ ঃ এটা সংঘৰ ক্রম মৌলিক সংখ্যা হ'লে সংঘটো চক্রীয়।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সসীম সংঘ আৰু $0 (G) = p$, য'ত p এটা মৌলিক সংখ্যা।

ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e.

ধৰা হ'ল $a \in G$ যাতে $a \neq e$.

ধৰা হ'ল $H = \{a^n : n$ এটা অখণ্ড সংখ্যা$\}$

স্পষ্টতঃ H, G ৰ এটা চক্রীয় উপসংঘ।

$\therefore$ লাগ্রাঞ্জৰ উপসংঘৰ ক্রম সম্বন্ধীয় উপপাদ্যৰ পৰা, 0 (H)ৰ দ্বাৰা 0 (G) বিভাজ্য।

ইয়াৰ পৰা আমি পাম 0(H) = 1 বা p, যিহেতু 0(G) এটা মৌলিক সংখ্যা।

কিন্তু 0(H) $\neq$1, Θ a $\neq$e.

$\therefore$ 0 (H) = p = 0(G)

$\therefore$ H = G

$\therefore$ a ৰ দ্বাৰা জনিত G এটা চক্ৰীয় সংঘ।

উদাহৰণ ২ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে এটা সংঘৰ ক্ৰম $\leq$ 5 হ'লে সংঘটো আবেলীয়।

সমাধান ঃ স্পষ্টতঃ এটা সংঘৰ ক্ৰম 1 অৰ্থাৎ মৌলৰ সংখ্যা 1 হ'লে সংঘটো আবেলীয়।

আমি জানো যে এটা সংঘৰ ক্ৰম মৌলিক সংখ্যা হ'লে সংঘটো চক্ৰীয় আৰু প্ৰত্যেক চক্ৰীয় সংঘই আবেলীয়।

$\therefore$ যিবোৰ সংঘৰ ক্ৰম 2, 3 আৰু 5 সেইবোৰ আবেলীয়।

এতিয়া এটা চাৰিটা মৌল বিশিষ্ট সংঘ লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল G = {e, a, b, c} য'ত সকলোবোৰ মৌল পৃথক আৰু G ৰ একক মৌল হ'ল e.

স্পষ্টতঃ e নিজেই নিজৰ বিপৰীত। সেইদৰে, যদি বাকী তিনিটা মৌলৰ প্ৰতিটোৱেই নিজৰ বিপৰীত হয়, তেনেহ'লে G আবেলীয়। (দ্ৰষ্টব্য উদাহৰণ 18)

যদি নহয়, ধৰা হ'ল b^{-1} = c, c^{-1} = b. তেনেহ'লে a^{-1} = a

এতিয়া প্ৰক্ৰিয়া-সাৰণীখন সম্পূৰ্ণ কৰা যাওক।

Θ a^{-1} = a $\quad\therefore$ aa = e

G ৰ প্ৰতিটো মৌল প্ৰক্ৰিয়া-সাৰণীখনৰ প্ৰতিটো শাৰী বা স্তম্ভত মাত্ৰ এবাৰকৈ থাকিব।

$\therefore$ ab = b or ab = c.

এতিয়া ab = b $\Rightarrow$ ab = eb $\Rightarrow$ a = e (সোঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা)

এইটো স্ববিৰোধী কথা।

$\therefore$ ab = c আৰু $\therefore$ ac = b

$\therefore$ b = c^{-1}, $\therefore$ bc = e

$\therefore$ ba = a বা ba = c

ba = a $\Rightarrow$ba = ea$\Rightarrow$ b = e,

এইটো স্ববিৰোধী কথা।

$\therefore$ ba = c আৰু bb = a

আকৌ, Θ c = b^{-1} $\therefore$ cb = e

$\therefore$ ca = a বা ca = b

ca = a $\Rightarrow$ c = e, এইটো স্ববিৰোধী কথা।

$\therefore$ ca = b, আৰু cc = a

.	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

সাৰণী ৪.১

আমি দেখিলোঁ যে প্ৰক্ৰিয়া-সাৰণীখন মুখ্য কৰ্ণ সাপেক্ষে সমমিত।

$\therefore$ G আবেলীয়।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

প্রশ্ন নং ১ঃ এটা চক্রীয় সংঘ a ৰ ক্রম 10 ৰ কিমানটা জনক থাকিব?

প্রশ্ন নং ২ঃ তলৰ কোনটোৰ সংঘ চক্রীয়? প্রত্যেকটো চক্রীয় সংঘৰ বাবে জনকবোৰ উল্লেখ কৰক।

(a) $G = \langle z, + \rangle$ **(b)** $G = \langle Q, + \rangle$ **(c)** $G = \langle Q^+, + \rangle$ **(d)** $G = \{6^n : n \in z\}$ পূৰণৰ অধীনত।



৪.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- এটা সংঘ G ৰ কোনো অৰিক্ত উপসংহতি H অক উপসংঘ বুলি কোৱা হয় যদি G ৰ দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ অধীনত H ও এটা সংঘ হয়।
- এটা সংঘ G ক চক্রীয় বুলি কোৱা হয় যদি G ৰ প্রতিটো মৌলক a^n আকাৰত প্রকাশ কৰিব পাৰি, $n \in Z$.



৪.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নহয়। দ্বৈত প্রক্রিয়া বেলেগ বেলেগ।

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নহয়। দুটা উপসংঘৰ মাজত অতি কমেও এটা উমৈহতীয়া মৌল থাকে যেনে- একক মৌলটো।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নহয়।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে কৰিবলৈ চেষ্টা কৰক।

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে কৰিবলৈ চেষ্টা কৰক।

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ এটা যোগাত্মক সংঘ।

$2Z = \{0, \pm 2, \pm 3, \pm 6 \ldots\}$ আৰু

$3Z = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 0 \ldots\}$ হ'ল Z ৰ দুটা উপসংঘ

$\therefore \quad Z \neq eZ \cup 3Z$

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ যিহেতু 1, 3, 7, 9 হ'ল 10 ৰ আপেক্ষিক মৌলিক। গতিকে a ৰ জনকবোৰ হ'ব a, a^3, a^7 আৰু a^9.

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে কৰিবলৈ চেষ্টা কৰক।



৪.৭ অধিক জানিবলৈ

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.
2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).
3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).
4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.
5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



৪.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

প্রশ্ন ১ঃ ধৰা হ'ল G এটা আবেলীয় সংঘ। প্রমাণ কৰক যে $H = \{x \in G : x = x^{-1}\}$ সংহতিটো G ৰ এটা উপসংঘ।

প্রশ্ন ২ঃ দেখুৱাওক যে এটা সংঘৰ মৌলৰ সংখ্যা 4 হ'লে সংঘটো আবেলীয়।

প্রশ্ন ৩ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু e, G ৰ একক মৌল। প্রমাণ কৰক যে G আবেলীয় যদি $b^{-1}a^{-1}ba = e, \forall a, b \in G$

*** ***** ***

অধ্যায় ৫ ঃ বিন্যাস সংঘ (GROUP OF PERMUTATIONS)

অধ্যায় গাঁথনি

৫.১ উদ্দেশ্য

৫.২ পৰিচয়

৫.৩ বিন্যাসৰ সংজ্ঞা, উদাহৰণ

৫.৪ বিন্যাসৰ পূৰণ

৫.৫ বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ বিন্যাস

৫.৬ বিন্যাস সংঘ

৫.৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৫.৮ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

৫.৯ অধিক জানিবলৈ

৫.১০ আৰ্হি প্ৰশ্ন

৫.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

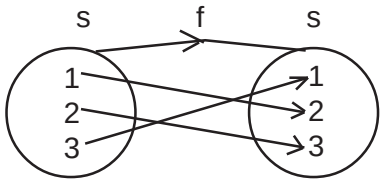
- বিন্যাসৰ সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- বিন্যাসৰ পূৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- বিভিন্ন ধৰণৰ বিন্যাস সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- বিন্যাস সংঘ সম্বন্ধে জানিব।

৫.২ পৰিচয়

বিন্যাস শব্দটো দুই ধৰণে ব্যৱহৃত হয়। প্ৰথমতে ই হ'ল পৃথক মৌলৰ এটা সসীম সংহতিৰ মৌলবোৰৰ ক্ৰমিত সজ্জা। মিশ্ৰিত গণিতত আমি ক্ৰমিত সজ্জা হিচাপে বিন্যাস শব্দটো ব্যৱহাৰ কৰোঁ। দ্বিতীয়তে এটা অৰিক্ত সংহতিৰ পৰা সেই একেটা সংহতি এটা একৈয়ী আৰু আচ্ছাদক ফলনেই হ'ল বিন্যাস। সংঘ-তত্ত্বত বিন্যাস বুলি ক'লে আমি এটা অৰিক্ত, সংহতিৰপৰা নিজলৈকে একৈকী আৰু আচ্ছাদক ফলন বুলি বুজিম। এই অধ্যায়ত আমি বিন্যাসৰ সংজ্ঞা দিম, উদাহৰণ দিম আৰু এটা অৰিক্ত সংহতিৰ পৰা নিজলৈকে বিন্যাসৰ সংখ্যা নিৰ্ধাৰণ কৰিম। আমি প্ৰমাণ কৰিম যে এটা সসীম সংহতিৰ বিন্যাসৰ সংহতিটো বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত এটা সংঘ। এই সংঘটোক বিন্যাস সংঘ (বা সমমিত সংঘ) বুলি কোৱা হয়।

৫.৩ বিন্যাসৰ সংজ্ঞা, উদাহৰণ (DEFINITION OF PERMUTATION, EXAMPLES)

এটা অৰিক্ত সংহতি পৰা নিজলৈকে এটা একৈকী আৰু আচ্ছাদক ফলনক সংহতিটোত এটা বিন্যাস (permutation) বুলি কোৱা হয়।



উদাহৰণ 1 ঃ S = {1, 2, 3} সংহতিটো লোৱা হ'ল। ধৰাহ'ল f ; S $\rightarrow$ S এটা ফলন যাতে f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1

স্পষ্টত ঃ S অৰ পৰা S অলৈকে f এটা একৈকী আৰু আচ্ছাদক ফলন।

$\therefore$ S অত f এটা বিন্যাস।

বিন্যাসৰ বাবে প্রতীক

ওপৰৰ বিন্যাসটো লোৱা হ'ল।

S = {1, 2, 3}

f : S $\rightarrow$ S, f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1

ওপৰৰ বিন্যাসটোক সাধাৰণতে এনেধৰণে লিখা হয়।

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

আমি প্রথম শাৰীত S সংহতিটোৰ মৌলবোৰ লিখোঁ। দ্বিতীয় শাৰীত আমি অনুৰূপ মৌলবোৰ লিখো। f অৰ অধীনত 1 অৰ প্রতিচ্ছায়া 2। 1 অৰ ঠিক তলত 2 লিখা হয়। সেইদৰে 2 ৰ প্রতিচ্ছায়া 3। 2 ৰ ঠিক তলত 3 লিখা হয়। সেইদৰে 3 ৰ ঠিক তলত। লিখা হয়। এনেধৰণে বিন্যাস এটা লিখা হয়।

S = {1, 2, 3} সংহতিত বিন্যাসৰ সংখ্যা

S সংহতিটোত তিনিটা পৃথক মৌল আছে।

এতিয়া 1 মৌলটো তিনিধৰণে সংযোগ কৰিব পাৰি। ইয়াক 1 অৰ সৈতে বা 2 ৰ সৈতে বা 3 ৰ সৈতে সংযোগ কৰিব পাৰি।

2 ক দুটা উপায়ে সংযোগ কৰিব পাৰি।

3 ক এটা উপায়ে সংযোগ কৰিব পাৰি।

$\therefore$ বিন্যাসৰ সংখ্যা = $3 \times 2 \times 1 = 3!$

n টা মৌলবিশিষ্ট এটা সসীম সংহতিত বিন্যাসৰ সংখ্যা

ধৰা হ'ল S সংহতিটোত n টা পৃথক মৌল আছে।

প্রথম মৌলটো n টা উপায়ে সংযোগ কৰিব পাৰি।

দ্বিতীয় মৌলটো (n-1) টা উপায়ে সংযোগ কৰিব পাৰি।

তৃতীয় মৌলটো (n-2) টা উপায়ে সংযোগ কৰিব পাৰি।

এনেদৰে (n-1)তম মৌলটো দুটা উপায়ে সংযোগ কৰিব পাৰি, আৰু n তম মৌলটো

এটা উপায়ে সংযোগ কৰিব পাৰি।

$\therefore$ বিন্যাসৰ সংখ্যা

$= n(n-1)(n-2) \ldots\ldots 2.1 = n!$

উদাহৰণ 2 ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2}. S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাস লিখক।

সমাধান ঃ S অৰ মৌলৰ সংখ্যা হ'ল 2.

$\therefore$ S অত 2! টা অর্থাৎ 2 টা বিন্যাস আছে। সেইকেইটা হ'ল

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

টোকা ঃ i বিন্যাসটোক একক বিন্যাস (identity permutation) বুলি কোৱা হয়। এই ক্ষেত্রত 1 অৰ প্রতিচ্ছায়া 1, 2 ৰ প্রতিচ্ছায়া 2.

উদাহৰণ 3 ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}. S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাস লিখক।

সমাধান ঃ S অৰ মৌলৰ সংখ্যা 3.

$\therefore$ S অত 3! টা অর্থাৎ 6 টা বিন্যাস আছে।

সেইকেইটা হ'ল

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

টোকা ঃ এই ক্ষেত্রত $i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

হ'ল একক বিন্যাস।

একক বিন্যাস

ধৰা হ'ল S = $\{a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n\}$ য'ত সকলোবোৰ a_i পৃথক।

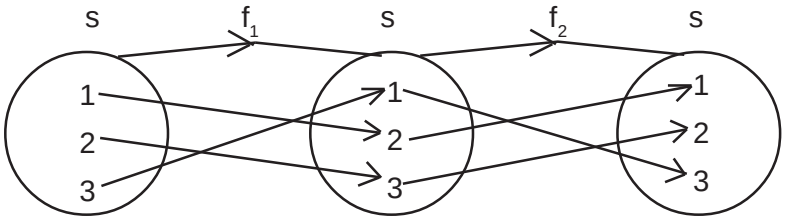
S অত একক বিন্যাস i ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$i = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots\ldots a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 \ldots\ldots a_n \end{pmatrix}$$

৫.৪ বিন্যাসৰ পূৰণ (MULTIPLICATION OF PERMUTATION)

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}. S অত তলৰ বিন্যাস দুটা লোৱা হ'ল।

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



গতিকে আমি তলৰ সংযুক্ত ফলনটো পাম

$f_2of_1 : S \to S$, যাতে

$(f_2of_1)(1) = f_2(f_1(1)) = f_2(2) = 1$

$(f_2of_1)(2) = f_2(f_1(2)) = f_2(3) = 2$

$(f_2of_1)(3) = f_2(f_1(3)) = f_2(1) = 3$

স্পষ্টতঃ, S অত f_2of_1 এটা বিন্যাস আৰু $f_2of_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

সেইদৰে S অত f_1of_2 ও এটা বিন্যাস।

f_2o f_1 সংযুক্ত ফলনৰ দ্বাৰা বিন্যাসৰ পূৰণফল f_2f_1 অৰ সংজ্ঞা দিয়া হয়।

$$f_2 f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

টোকা ঃ 1. আমি জানো যে দুটা এঁকেকী আৰু আচ্ছাদক ফলনৰ সংযুক্ত ফলনো এটা এঁকেকী আৰু আচ্ছাদক ফলন। গতিকে, দুটা বিন্যাসৰ পূৰণফলো এটা বিন্যাস।

2. আমি জানো যে ফলনৰ সংযোগে (composition) সাহচর্য্য বিধি মানি চলে। গতিকে, বিন্যাসৰ পূৰণে সাহচর্য বিধি মানি চলে।

3. আমি জানো যে ফলনৰ সংযোগে সাধাৰণতে ক্রমবিনিময় বিধি মানি নচলে। গতিকে, বিন্যাসৰ পূৰণে সাধাৰণতে ক্রমবিনিময় বিধি মানি নচলে।

ধৰা হ'ল S = {a_1, a_2 , ..., a_3} য'ত সকলোবোৰ a_i পৃথক।

ধৰা হ'ল S অত দুটা বিন্যাস।

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & .....a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & f(a_3)..... f(a_n) \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & .....a_n \\ g(a_1) & g(a_2) & g(a_3).....g(a_n) \end{pmatrix}$$

তেনেহ'লে $fg = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & ..... & a_n \\ f(g(a_1)) & f(g(a_2)) & f(g(a_3)).....f(g(a_n)) \end{pmatrix}$

সেইদৰে

$$fg = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots\ldots\ldots & a_n \\ g(f(a_1)) & g(f(a_2)) & g(f(a_3)) & \ldots\ldots & g(f(a_n)) \end{pmatrix}$$

উদাহৰণ 4 ঃ ধৰা হ'ল S ={1, 2, 3, 4}. S অত তলৰ f আৰু g বিন্যাস দুটা লোৱা হ'ল।

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \; g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

fg আৰু gf নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ f(g(1) & f(g(2) & f(g(3) & f(g(4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ f(4) & f(2) & f(1) & f(3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$gf = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ g(f(1) & g(f(2) & g(f(3) & g(f(4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ g(2) & g(3) & g(4) & g(1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

স্পষ্টত ঃ $fg \neq gf$ [দুটা ফলনৰ সমতাৰ সংজ্ঞা দ্ৰষ্টব্য।]

উদাহৰণ 5 ঃ ধৰা হ'ল S= {1, 2, 3, 4}. S অত তলৰ বিন্যাস দুটা লোৱা হ'ল।

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \; \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$\phi\psi$ আৰু $\psi\phi$ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $\phi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\psi\phi = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 4 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$$

এই ক্ষেত্রত $\phi\psi = \psi\phi$

উদাহৰণ 6 ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4}. S অত তলৰ বিন্যাস দুটা লোৱা হ'ল।

$$f = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$$

hf আৰু fh নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $fh = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = i$$

$$hf = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = i$$

এই ক্ষেত্রত fh = hf = i

টোকা ঃ ওপৰৰ উদাহৰণটোত fh=hf = i, য'ত i হ'ল একক বিন্যাস। f অক h অৰ বিপৰীত (inverse) বুলি কোৱা হয়, h অক f অৰ বিপৰীত বোলা হয়। ইয়াক এনেদৰে লিখা হয়

$f = h^{-1}$ or $h = f^{-1}$

বিন্যাসৰ বিপৰীত

ধৰা হ'ল $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ য'ত সকলোবোৰ a_i পৃথক।

ধৰা হ'ল S অত $f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & f(a_3) & \ldots & f(a_n)\end{pmatrix}$ এটা বিন্যাস। f অৰ বিপৰীতক f^{-1} এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} f(a_1) & f(a_2) & f(a_2) & \ldots & f(a_n)\\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n\end{pmatrix}$$

মন কৰিবলগীয়া যে $ff^{-1} = f^{-1}f = i$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল S = {a_1, a_2, a_3}, য'ত সকলোবোৰ a_i পৃথক। S অত মুঠতে কিমানটা বিন্যাস আছে? S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাস লিখক।

প্রশ্ন নং ২ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4}. S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ যিকোনো পাঁচটা বিন্যাস লিখক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5}. S অত তলৰ বিন্যাসকেইটা লোৱা হ'ল।

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&1&5\end{pmatrix}$$

$$\phi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix},\quad \psi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&4&2&1\end{pmatrix}$$

(i) $fg,\ f\phi,\ f\psi,\ g\psi$ নির্ণয় কৰক।

(ii) $g\phi,\ \phi g$, নির্ণয় কৰক। সিহঁত সমাননে?

(iii) $\phi\psi,\ \psi\phi$, নির্ণয় কৰক। সিহঁত সমাননে?

প্রশ্ন নং ৪ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ তলৰ প্রতিটো বিন্যাসৰ বিপৰীতটো লিখক।

(i) $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&4&5&6&7&1\end{pmatrix}$

(ii) $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$

(iii) $h=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&4&5&6&7&2&1\end{pmatrix}$

৫.৫ বিভিন্ন প্রকাৰৰ বিন্যাস (DIFFERENT KINDS OF PERMUTATION)

চক্রীয় বিন্যাস

ধৰা হ'ল S এটা সসীম সংহতি। ধৰা হ'ল S অত f এটা বিন্যাস। f অক চক্রীয় বিন্যাস (cyclic permutation) বুলি কোৱা হয় যদি S অত $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ মৌল থাকে যাতে $f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_3$, $f(a_3)=a_4$, ..., $f(a_{n-1}) = a_n$, $f(a_n) = a_1$, আৰু বাকী সকলোবোৰ মৌল, যদিহে থাকে, f অৰ অধীনত স্থিৰ হৈ থাকে, অর্থাৎ f(a) = a, সকলোবোৰ $a \in S$ অৰ বাবে।

এই ক্ষেত্রত f অক $(a_1, a_2, a_3 \ldots . a_n)$ এৰে বুজোৱা হয়।

f অক n দৈর্ঘ্যৰ (length) চক্রীয় বিন্যাস বুলি কোৱা হয়।

টোকা ঃ এটা চক্রীয় বিন্যাসক চক্র (cycle) বুলিও কোৱা হয়। এটা n দৈর্ঘ্যৰ চক্রীয় বিন্যাসক n চক্র বুলি কোৱা হয়।

পৰিৱর্ত

2 দৈর্ঘ্যৰ এটা চক্রীয় বিন্যাসক পৰিৱর্ত (transposition) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ 7 ঃ ধৰা হ'ল S ={1, 2, 3}

ধৰা হ'ল S অত $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

ইয়াত f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1

$1 \to 2 \to 3 \to 1$

গতিকে, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3)$

f হ'ল 3 দৈর্ঘ্যৰ এটা চক্রীয় বিন্যাস বা 3-চক্র।

উদাহৰণ 8 ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5}. ধৰা হ'ল

S অত $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ এটা বিন্যাস।

ইয়াত f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 2

$2 \to 3 \to 4 \to 2$

আৰু f(1) = 1, f(5) = 5

অর্থাৎ, f অৰ অধীনত 1, 5 স্থিৰ হৈ থাকে, অর্থাৎ f(1) = 1, f(5) = 5

গতিকে, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (2 \quad 3 \quad 4)$

f হ'ল 3 দৈর্ঘ্যৰ এটা চক্রীয় বিন্যাস বা 3-চক্র।

উদাহৰণ 9 ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4}. ধৰা হ'ল

S অত $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ এটা বিন্যাস

ইয়াত f(2) = 3, f(3) = 2

$2 \to 3 \to 2$

আৰু f(1) = 1, f(4) = 4

গতিকে $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (2 \quad 3)$

f হ'ল 2 দৈর্ঘ্যৰ এটা চক্রীয় বিন্যাস, অর্থাৎ, f এটা পৰিৱর্ত।

টোকা ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3) \qquad (1)$$

এটা চক্রীয় বিন্যাস।

আকৌ, S = {1, 2, 3}.

সংহতিটো লোৱা হ'ল

S = {1, 2, 3, 4, 5} সংহতিত

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3) \qquad (2)$$

এটা চক্রীয় বিন্যাস।

মন কৰিব লগীয়া যে (1) আৰু (2) দুটা পৃথক বিন্যাস। (1) অৰ ক্ষেত্রত (1 2 3) এ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ বিন্যাস বুজায়।

আনহাতেদি (2) ৰ ক্ষেত্রত (1, 2, 3) এ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ বিন্যাস বুজায়।

বিন্যাসৰ চর্ত ঃ

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3} সংহতিত $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3)$

এটা বিন্যাস।

এতিয়া $(1 \quad 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $(1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$(1 \quad 3)(1 \quad 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3)$$

গতিকে আমি দেখিলোঁ যে

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3) = (1 \quad 3)(1 \quad 2)$$

আকৌ, S = {1, 2, 3, 4, 5} সংহতিটো লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5} সংহতিত

$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5)$ এটা বিন্যাস।

দেখুৱাব পাৰি যে

$g = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5)$

$= (1 \quad 5)(1 \quad 4)(1 \quad 3)(1 \quad 2)$

আকৌ, S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} সংহতিটো লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} সংহতিত $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

এটা বিন্যাস।

h অক এনেদৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি

$h = (1 \quad 2 \quad 3)(4 \quad 5 \quad 6)$

$(1 \quad 2 \quad 3), (4 \quad 5 \quad 6)$ অক h বিন্যাসৰ চক্ৰ বুলি কোৱা হয়। এই ক্ষেত্ৰত $(1 \quad 2 \quad 3)$ আৰু $(4 \quad 5 \quad 6)$ অৰ কোনো উমৈহতীয়া মৌল নাই। ইহঁতক অসংযুক্ত চক্ৰ (disjoint cycles) বুলি কোৱা হয়।

অসংযুক্ত বিন্যাস

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} সংহতিত $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$= (1 \quad 2 \quad 3)$

আৰু $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

$= (4 \quad 5 \quad 6)$

দুটা বিন্যাস।

মন কৰিব লগীয়া যে $(1 \quad 2 \quad 3)$, আৰু $(4 \quad 5 \quad 6)$ অৰ কোনো উমৈহতীয়া মৌল নাই। এই ক্ষেত্ৰত f আৰু g বিন্যাস দুটাক অসংযুক্ত বিন্যাস (disjoint permutations) বুলি কোৱা হয়।

আকৌ, S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} সংহতিত

$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$

$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (3 \quad 4 \quad 5 \quad 6)$

বিন্যাস দুটা লোৱা হ'ল।

এই ক্ষেত্রত $(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)$ আৰু $(3\ \ 4\ \ 5\ \ 6)$ অৰ উমৈহতীয়া মৌল আছে। গতিকে, ϕ আৰু ψ বিন্যাস দুটা অসংযুক্ত নহয়।

গতিকে অসংযুক্ত বিন্যাসৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

এটা সসীম সংহতি S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ f আৰু g বিন্যাস দুটাক অসংযুক্ত বুলি কোৱা হয় যদি

(i) $f(a) \neq a \ \Rightarrow g(a) = a,$ যিকোনো $a \in S$ অৰ বাবে

আৰু (ii) $g(a) \neq a \ \Rightarrow f(a) = a,$ যিকোনো $a \in S$ অৰ বাবে

প্রমাণ কৰিব পাৰি যে দুটা অসংযুক্ত চক্র তথা অসংযুক্ত বিন্যাসৰ পূৰণে ক্রমবিনিময়ে বিধি মানি চলে।

যুগ্ম আৰু অযুগ্ম বিন্যাস

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3} সংহতিত

$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ এটা বিন্যাস।

আকৌ, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 3) = (1\ \ 3) = (1\ \ 2)$

আকৌ, S = {1, 2, 3, 4} সংহতিটো লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4} সংহতিত $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ এটা বিন্যাস।

এতিয়া $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4) = (1\ \ 4)(1\ \ 3)(1\ \ 2)$

আমি দেখিলোঁ যে f অক যুগ্ম সংখ্যক (দুটা) পৰিৱর্তৰ পূৰণফল হিচাপে প্রকাশ কৰা হৈছে। আনহাতেদি g ক অযুগ্ম সংখ্যক (তিনিটা) পৰিৱর্তৰ পূৰণফল হিচাপে প্রকাশ কৰা হৈছে।

যদি এটা বিন্যাসক যুগ্ম সংখ্যক পৰিৱর্তৰ পূৰণফল হিচাপে প্রকাশ কৰিব পাৰি, তেনে বিন্যাসক যুগ্ম বিন্যাস (even permutation) বুলি কোৱা হয়। আনহাতেদি, যদি এটা বিন্যাসক অযুগ্ম সংখ্যক পৰিৱর্তৰ পূৰণফল হিচাপে প্রকাশ কৰিব পাৰি, তেনে বিন্যাসক অযুগ্ম বিন্যাস (odd permutation) বোলে।

ওপৰৰ f বিন্যাসটো যুগ্ম, আনহাতেদি g বিন্যাসটো অযুগ্ম।

এতিয়া প্রমাণ ব্যতিৰেকে তলৰ ফলকেইটা উল্লেখ কৰা হ'ল।

1. দুটা যুগ্ম বিন্যাসৰ পূৰণফল এটা যুগ্ম বিন্যাস।
2. দুটা অযুগ্ম বিন্যাসৰ পূৰণফল এটা অযুগ্ম বিন্যাস।
3. এটা যুগ্ম বিন্যাস আৰু এটা অযুগ্ম বিন্যাসৰ পূৰণফল এটা অযুগ্ম বিন্যাস।
4. একক বিন্যাস এটা যুগ্ম বিন্যাস।

5. এটা যুগ্ম বিন্যাসৰ বিপৰীত যুগ্ম।

6. এটা অযুগ্ম বিন্যাসৰ বিপৰীত অযুগ্ম।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৫ঃ S = {1, 2, 3}, সংহতিত সংজ্ঞাৱদ্ধ আটাইকেইটা বিন্যাস লিখক, আৰু তাৰ পৰা যুগ্ম বিন্যাস আৰু অযুগ্ম বিন্যাসকেইটা বাছি উলিয়াওক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. S সংহতিত সংজ্ঞাৱদ্ধ তলৰ বিন্যাসবোৰ যুগ্ম নে অযুগ্ম নির্ণয় কৰক।

(i) $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(iii) $f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(iv) $f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

(v) $f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

S = {1, 2, 3, . . . , n} সংহতিত যুগ্ম বিন্যাস আৰু অযুগ্ম বিন্যাসৰ সংখ্যা, $n \geq 2$

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, ..., n}

ধৰা হ'ল S সংহতিত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংহতিটো S_n। গতিকে S_n অৰ মৌলৰ সংখ্যা n!. এই n! টা বিন্যাসৰ কিছুমান যুগ্ম বিন্যাস, আৰু কিছুমান অযুগ্ম বিন্যাস।

ধৰা হ'ল যুগ্ম বিন্যাসৰ সংখ্যা m আৰু অযুগ্ম বিন্যাসৰ সংখ্যা k.

স্পষ্টত ঃ m+k = n!

ধৰা হ'ল যুগ্ম বিন্যাসকেইটা $e_1, e_2, \ldots, e_m$; য'ত সকলোবোৰ e_i বিভিন্ন।

ধৰা হ'ল f এটা পৰিৱর্ত।

গতিকে $fe_1, fe_2, \ldots, fe_m$ অযুগ্ম বিন্যাস, আৰু বিভিন্ন, কিয়নো যদি $fe_i = fe_j$, তেনেহ'লে $e_i = e_j$, এইটো পৰস্পৰ বিৰোধী কথা।

যিহেতু অযুগ্ম বিন্যাসৰ সংখ্যা k,

$\therefore\ m \leq k$

m আৰু k সালসলনি কৰি আমি পাওঁ

$k \le m$

$\therefore\ m = k$

$\Theta\ m + k = n!, \quad \therefore\ m = k = \frac{n!}{2}$

$\therefore$ S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ যুগ্ম বিন্যাস $\frac{n!}{2}$ আৰু S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ অযুগ্ম বিন্যাস $\frac{n!}{2}$, য'ত S = {1, 2, 3, ..., n}, $r \ge 2$.

৫.৬ বিন্যাস সংঘ (PERMUTATION GROUP)

ধৰ হ'ল S = 1, 2, 3, 4, ... , n}, ধৰা হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংহতিটো S_n.

(i) ধৰা হ'ল $f, g \in S_n$.

আমি জানো যে fg পূৰণফলটো fog সংযুক্ত ফলনৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ।

আমি জানোযে দুটা একৈকী আৰু আচ্ছাদক ফলনৰ যংযুক্ত ফলনো একৈকী আৰু আচ্ছাদক। গতিকে দুটা বিন্যাসৰ পূৰণফলো এটা বিন্যাস।

$\therefore\ fg \in S_n$

(ii) আমি জানো যে ফলনৰ সংযোগে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে। গতিকে বিন্যাসৰ পূৰণে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) একক বিন্যাস

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ..... & n \\ 1 & 2 & 3 & ..... & n \end{pmatrix} \in S_n$$

আকৌ if = f = fi, $\forall f \in S_n$

S_n অৰ একক মৌল i.

(iv) ধৰা হ'ল $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ..... & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & ..... & f(n) \end{pmatrix} \in S_n$

এতিয়া $g = \begin{pmatrix} f(1) & f(2) & f(3) & ..... & f(n) \\ 1 & 2 & 3 & ..... & n \end{pmatrix} \in S_n$

আৰু fg = i = gf

$\therefore$ f অৰ বিপৰীত g.

g ক f^{-1} অৰ দ্বাৰা বুজোৱা হয়।

অর্থাৎ, $ff^{-1} = i = f^{-1} f$.

গতিকে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_n এটা সংঘ। ইয়াক n মাত্রাৰ (degree) বিন্যাস

সংঘ (বা সমমিত সংঘ) বুলি কোৱা হয়।

টোকা ঃ 1) S_n সংঘটো আবেলীয় নহয়, কিয়নো ফলনৰ সংযোগে সাধাৰণতে ক্রমবিনিময়ে বিধি মানি নচলে।

2) S_n অৰ মৌলৰ সংখ্যা n!, অর্থাৎ S_n অৰ ক্রম n!.

উদাহৰণ 10 ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}. ধৰা হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংহতিটো S_3. প্রমাণ কৰক যে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_3 এটা সংঘ। সংঘটো আবেলীয় হয়নে?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $S_n = \{i, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$, য'ত

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 3)$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 2),\ f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ \ 3)$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 3),\ f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ \ 2)$$

তলত প্রক্রিয়া সাৰণীখন দিয়া হ'ল।

	i	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
i	i	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	i	f_5	f_3	f_4
f_2	f_2	i	f_1	f_4	f_5	f_3
f_3	f_3	f_4	f_5	i	f_1	f_2
f_4	f_4	f_5	f_3	f_2	i	f_1
f_5	f_5	f_3	f_4	f_1	f_2	i

(i) সাৰণীখনৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_3 আৱদ্ধ।

(ii) আমি জানো যে বিন্যাসৰ পূৰণে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) একক বিন্যাস $i \in S_3$, আৰু if = f = fi, $\forall f \in S_3$

(iv) S_3 ৰ প্রতিটো মৌলৰ বিপৰীত S_3 ত আছে।

i ৰ বিপৰীত i.

f_1 অৰ বিপৰীত f_2.

f_2 ৰ বিপৰীত f_1.

f_3 ৰ বিপৰীত f_3.

f_4 ৰ বিপৰীত f_4.

f_5 ৰ বিপৰীত f_5.

গতিকে, বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_3 এটা সংঘ।

দ্বিতীয় অংশ ঃ S_3 সংঘটো আবেলীয় নহয়।

$$f_2 f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = f_4$$

$$f_3 f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = f_5$$

$\therefore \; f_2 f_3 \neq f_3 f_2$

পৰিৱৰ্তী সংঘ

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, ..., n}.

ধৰা হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো যুগ্ম বিন্যাসৰ সংহতিটো A_n. বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত A_n এটা সংঘ। ইয়াক n মাত্রাৰ পৰিৱৰ্তী সংঘ (alternating group) বুলি কোৱা হয়।

A_n অৰ মৌলৰ সংখ্যা $\frac{n!}{2}$, অৰ্থাৎ A_n ৰ ক্রম $\frac{n!}{2}$.

স্পষ্টতঃ S_n অৰ A_n এটা উপসংঘ।

উদাহৰণ 11 ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}. ধৰা হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো যুগ্ম বিন্যাসৰ সংহতিটো A_3. প্রমাণ কৰক যে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত A_3 এটা সংঘ। সংঘটো আবেলীয় হয়নে?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}.

ধৰা হ'ল সকলো যুগ্ম বিন্যাসৰ সংহতিটো A_3.

ধৰা হ'ল A_3 = {i, f_1, f_2}, য'ত

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \;\; 3 \;\; 2) = (1 \;\; 3)(1 \;\; 2)$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \;\; 3 \;\; 2) = (1 \;\; 2)(1 \;\; 3)$$

i, f_1, f_2 যুগ্ম বিন্যাস।

তলত প্রক্রিয়া সাৰণীখন গঠন কৰা হ'ল।

(i) সাৰণীখনৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত A_3 আৱদ্ধ।

(ii) আমি জানো যে বিন্যাসৰ পূৰণে সাহচর্য বিধি মানি চলে।

(iii) একক বিন্যাস $i \in A_3$, আৰু if = f = fi, $\forall f \in A_3$

(iv) A_3 ৰ প্রতিটো মৌলৰ A_3 ত বিপৰীত আছে।

i ৰ বিপৰীত i.

f_1 অৰ বিপৰীত f_2.

f_2 ৰ বিপৰীত f_1.

গতিকে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত A_3 এটা সংঘ।

দ্বিতীয় অংশ ঃ সাৰণীখনৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে পূৰণে ক্ৰমবিনিময়ে বিধি মানি চলে।

$\therefore$ A_3 এটা আবেলীয় সংঘ।

টোকা ঃ দেখা গ'ল যে S_3 সংঘটো আবেলীয় নহয়, কিন্তু A_3 এটা আবেলীয় সংঘ।

তদুপৰি S_3 ৰ A_3 এটা উপসংঘ।

গতিকে, দেখা গ'ল যে এটা অনা-আবেলীয় সংঘৰ এটা আবেলীয় উপসংঘ থাকিব পাৰে।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ৭ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, ..., n}, S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো অযুগ্ম ফলনৰ সংহতিটো সংঘ হয়নে? যুক্তি দিয়ক।

প্ৰশ্ন নং ৮ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4}

ধৰা হ'ল V = {1, f_1, f_2, f_3}, য'ত

$$i=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\quad f_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$$

$$f_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix},\quad f_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$$

প্ৰমাণ কৰক যে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত V এটা সংঘ। সংঘটো আবেলীয় হয়নে?

প্ৰশ্ন নং ৯ঃ এটা সসীম অনা-আবেলীয় সংঘৰ উদাহৰণ দিয়ক।



৫.৭ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- এটা অৰিক্ত সংহতিৰ পৰা নিজলৈকে এটা একৈকী আৰু আচ্ছাদক ফলনক সংহতিটোত এটা বিন্যাস বুলি কোৱা হয়।
- n টা মৌলবিশিষ্ট এটা সসীম সংহতি S অত বিন্যাসৰ সংখ্যা n!.
- ধৰা হ'ল S এটা সসীম সংহতি। ধৰা হ'ল S অত f এটা বিন্যাস। f অক n দৈৰ্ঘ্যৰ চক্ৰীয়

বিন্যাস বুলি কোৱা হয় যদি S অত $a_1, a_2, a_3, \ldots . a_{n-1}, a_n$ মৌল থাকে যাতে $f(a_1) = a_2, f(a_2) = a_3, \ldots ., f(a_{n-1}) = a_n, f(a_n) = a_1$, আৰু বাকী সকলোবোৰ মৌল, যদিহে থাকে, f অৰ অধীনত স্থিৰ হৈ থাকে, অর্থাৎ f(a) = s, সকলোবোৰ $a \in s$ অৰ বাবে। এই ক্ষেত্ৰত f অক $(a_1\ a_2\ a_3 \ldots . a_n)$ এৰে বুজোৱা হয়।

- 2 দৈর্ঘ্যৰ এটা চক্রীয় বিন্যাসক পৰিৱর্ত বুলি কোৱা হয়।
- যদি এটা বিন্যাসক যুগ্ম সংখ্যক পৰিৱর্তৰ পূৰণফল হিচাপে প্রকাশ কৰিব পাৰি, তেনে বিন্যাসক যুগ্ম বিন্যাস বুলি কোৱা হয়।
- যদি এটা বিন্যাসক অযুগ্ম সংখ্যক পৰিৱর্তৰ পূৰণফল হিচাপে প্রকাশ কৰিব পাৰি, তেনে বিন্যাসক অযুগ্ম বিন্যাস বুলি কোৱা হয়।
- ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, ..., n}. ধৰা হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংহতিটো S_n. বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_n এটা সংঘ। ইয়াক n মাত্রাৰ আৰু n! ক্রমৰ বিন্যাস সংঘ (বা সমমিত সংঘ) বুলি কোৱা হয়।

  যদি S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো যুগ্ম বিন্যাসৰ সংহতিটো A_n হয়, তেনেহ'লে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত A_n এটা সংঘ। ইয়াক n মাত্রাৰ আৰু $\frac{n!}{2}$ ক্রমৰ পৰিৱর্তী সংঘ বুলি কোৱা হয়।

৫.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত $S = (a_1, a_2, a_3\}$, য'ত সকলোবোৰ a_i বিভিন্ন।

$\therefore$ S অত 3! অর্থাৎ $3 \times 2 \times 1$, অর্থাৎ 6 টা বিন্যাস আছে। এইবোৰ হ'ল

$$i = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}$$

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ S = {1, 2, 3, 4}

S অত মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা 4! অর্থাৎ $4 \times 3 \times 2 \times 1$, অর্থাৎ 24.

S অত যিকোনো 5 টা বিন্যাস হ'ল

$$i=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\quad f_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix},\quad f_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$$

$$f_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix},\quad f_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) $fg=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&1&5\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&2&1\end{pmatrix}$$

$$f\phi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}$$

$$f\psi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&4&2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&5&3&2\end{pmatrix}$$

$$g\psi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&4&2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&1&4&2\end{pmatrix}$$

(ii) $g\phi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{pmatrix}$$

$$\phi g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&1&5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{pmatrix}$$

স্পষ্টত ঃ $g\phi=\phi g$

(iii) $\phi\psi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&4&2&1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

স্পষ্টত ঃ $\phi\psi \neq \psi\phi$

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(ii) $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত S = {1, 2, 3}

S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ বিন্যাসবোৰ হ'ল

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 3) = (1\ \ 3)(1\ \ 2)$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 2) = (1\ \ 2)(1\ \ 3)$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ \ 3)$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 3)$$

$$f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} 3 = (1\ \ 2)$$

যুগ্ম বিন্যাস : i, f_1, f_2

অযুগ্ম বিন্যাস : f_3, f_4, f_5.

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

(i) $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

$= (1 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6) = (1 \quad 6)(1 \quad 5)(1 \quad 4)(1 \quad 3)$

$\therefore$ f_1 এটা যুগ্ম বিন্যাস।

(ii) $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$= (1 \quad 2 \quad 3 \quad 5)(4 \quad 6)$

$= (1 \quad 5)(1 \quad 3)(1 \quad 2)(4 \quad 6)$

$\therefore$ f_2 এটা যুগ্ম বিন্যাস।

(iii) $f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$= (1 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2)$

$= (1 \quad 2)(1 \quad 3)(1 \quad 4)(1 \quad 5)(1 \quad 6)$

$\therefore$ f_3 এটা অযুগ্ম বিন্যাস।

(iv) $f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

$= (3 \quad 4 \quad 5 \quad 6) = (3 \quad 6)(3 \quad 5)(3 \quad 4)$

$\therefore$ f_4 এটা অযুগ্ম বিন্যাস।

(v) $f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$= (2 \quad 5 \quad 3 \quad 4) = (2 \quad 4)(2 \quad 3)(2 \quad 5)$

$\therefore$ f_5 এটা অযুগ্ম বিন্যাস।

৭ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত S = {1, 2, 3, ..., n}

ধৰা হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো অযুগ্ম বিন্যাসৰ সংগতিটো O_n.

ধৰা হ'ল $f, g \in O_n$

আমি জানো যে দুটা অযুগ্ম বিন্যাসৰ পূ�ৰণফল এটা যুগ্ম বিন্যাস।

$\therefore$ $fg \notin O_n$

$\therefore$ O_n সংঘ হ'ব নোৱাৰে।

৮ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত S = {1, 2, 3, 4}

V = {i, f_1, f_2, f_3}, য'ত

$$i=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\ f_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$$

$$f_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix},\ f_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$$

(i) সাৰণীৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে বিন্যাসৰ পূ�ৰণৰ অধীনত V আৱদ্ধ।

(ii) আমি জানো যে বিন্যাসৰ পূৰণে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) $i=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\in v$

আৰু if = f = f_1, $\forall f \in V$.

$\therefore$ i একক মৌল।

(iv) V ৰ প্ৰতিটো মৌলৰ বিপৰীত V ত আছে।

i ৰ বিপৰীত i.

f_1 অৰ বিপৰীত f_1.

f_2 ৰ বিপৰীত f_2.

f_3 ৰ বিপৰীত f_3.

[এই ক্ষেত্ৰত প্ৰত্যেক মৌলই নিজে নিজৰ বিপৰীত।]

$\therefore$ বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত V এটা সংঘ।

দ্বিতীয় অংশ ঃ সাৰণীৰ পৰা দেখা গ'ল যে পূৰণে ক্ৰমবিনিময়ে বিধি মানি চলে।

$\therefore$ V এটা আবেলীয় সংঘ।

৯ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}

ধৰা হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংহতিটো S_3 বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_3 এটা সংঘ।

স্পষ্টত ঃ S_3 এটা সসীম সংঘ আৰু ইয়াৰ ক্ৰম 3! অর্থাৎ 6.

S_3 আবেলীয় সংঘ নহয়।



৫.৯ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.

2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).

3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).

4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.

5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



৫.১০ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2}. S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংহতিটো S_2। প্ৰমাণ কৰক যে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_2 এটা আবেলীয় সংঘ।

প্ৰশ্ন ২ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ তলৰ বিন্যাসবোৰক পৰিৱৰ্তৰ পূৰণফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰক।

(i) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

(ii) $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

প্ৰশ্ন ৩ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4}

ধৰা হ'ল V = {1, f_1, f_2, f_3}, য'ত i, f_1, f_2, f_3 হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ বিন্যাস, আৰু

$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $f_1 = (1 \quad 2)(3 \quad 4)$

$f_2 = (1 \quad 3)(2 \quad 4)$, $f_3 = (1 \quad 4)(2 \quad 3)$

বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত V আবেলীয় সংঘ হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, ..., n}. S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংহতিটো S_n। প্ৰমাণ কৰক যে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_n এটা সংঘ।

*** ***** ***

অধ্যায় ৬ ঃ সহ সংহতি (COSETS)

অধ্যায় গাঁথনি

৬.১ উদ্দেশ্য
৬.২ পৰিচয়
৬.৩ সহ সংহতি
৬.৪ লাগ্ৰাঞ্জৰ উপসংঘৰ ক্ৰম সম্পৰ্কীয় উপপাদ্য
৬.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
৬.৬ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান
৬.৭ অধিক জানিবলৈ
৬.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

৬.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি অধোলিখিত বিষয়বোৰৰ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব—

- উপসংঘৰ সহ সংহতি
- লাগ্ৰাঞ্জৰ উপসংঘৰ ক্ৰম সম্পৰ্কীয় উপপাদ্য।

৬.২ পৰিচয়

সংঘ, উপসংঘ আৰু ইয়াৰ ধৰ্মসমূহৰ বিষয়ে আমি ইতিমধ্যে তৃতীয় আৰু চতুৰ্থ অধ্যায়ত আলোচনা কৰিলো। এই অধ্যায়টিত আমি উপসংঘৰ সহ সংহতি বিষয়ে আলোচনা কৰিম। লাগ্ৰাঞ্জৰ উপসংঘৰ ক্ৰম সম্পৰ্কীয় উপপাদ্যৰ বিষয়ে এই অধ্যায়টিত আলোচ্য বিষয়।

৬.৩ সহ সংহতি

ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু $H \leq G$

ধৰা হ'ল $a \in G$

$Ha = \{ha : h \in H\}$ সংহতিটোক G ত H অৰ সোঁ সহসংহতি (right coset) বুলি কোৱা হয়।

সেইদৰে, $aH = \{ah : h \in H\}$ H সংহতিটোক G ত H অৰ বাওঁ সহসংহতি (left coset) বুলি কোৱা হয়।

টোকা ঃ (1) সোঁ (বা বাওঁ) সহসংহতি ৰিক্ত হ'ব নোৱাৰে। আমি জানো $e \in H$

$\therefore ea = a \in Ha$ $\quad \therefore Ha \neq \phi$

সেইদৰে $ae = a \in aH$ $\quad \therefore aH \neq \phi$

(2) $H \leq G$, কিন্তু Ha বা aH, G ৰ উপসংঘ নহ'বও পাৰে।

(3) যদি G এটা যোগাধীনত সংঘ আৰু H, G ৰ উপসংঘ, G ত H ৰ সোঁ সহসংহতি হ'ব

এনেধৰণৰ $H+a = \{h+a : h \in H\}$

সেইদৰে G ত H ৰ বাওঁ সহসংহতি হ'ল এনেধৰণৰ $a+H=\{a+h : h \in H\}$

(4) যদি G আবেলীয় হয়, তেন্তে প্ৰত্যেকটো বাওঁ সহ সংহতিয়ে সোঁ সহ সংহতি হয়।

উদাহৰণ ঃ আমি জানো অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Z যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ।

আকৌ আমি জানো যে $2Z = \{0, \pm2, \pm4, \pm6,...\} \leq Z$

এতিয়া

$0+2Z = \{0, \pm2, \pm4, \pm6,...\} = 2Z$

$1+2Z = \{\pm1, \pm3, \pm5, \pm7, ...\}$

$2+2Z = \{0, \pm2, \pm4, \pm6, ...\}$

$3+2Z = \{\pm1, \pm3, \pm5, \pm7, ...\}$ এইদৰে উলিয়াই থাকিব পৰা যাব।

আমি দেখিলোঁ যে $2Z = 2+2Z = 4+2Z = ...$

$1+2Z = 3+2Z = 5+2Z = ...$

$\therefore$ 2Z অৰ দুটা পৃথক বাওঁ সহসংহতি আছে, যথা 2Z আৰু 1+2Z যাতে

$2Z \cup (1+2Z) = Z$

$2Z \cap (1+2Z) = \phi$

সেইদৰে 2Z অৰ দুটা পৃথক সোঁ সহসংহতি আছে, যথা 2Z আৰু 2Z + 1 যাতে

$2Z \cup (2Z+1) = Z$

$2Z \cap (2Z+1) = \phi$

উপপাদ্য ১ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু $H \leq G$.

(i) $aH = H \Leftrightarrow a \in H$; $Ha = H \Leftrightarrow a \in H$

(ii) $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$; $Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$.

প্ৰমাণ ঃ (i) ধৰা হ'ল $aH = H$

আমি জানো $ae \in aH$, e হ'ল G ৰ একক মৌল

$\Rightarrow ae \in H$ [$\because aH = H$]

$\Rightarrow a \in H$

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল $a \in H$

ধৰা হ'ল $x \in aH$

$\Rightarrow x = ah$, কোনো $h \in H$ অৰ বাবে

এতিয়া $a \in H, h \in H$ $\therefore ah \in H \Rightarrow x \in H$

গতিকে, $x \in aH \Rightarrow x \in H$

$\therefore aH \subseteq H$ ... (1)

আকৌ, ধৰা হ'ল $y \in H$

$\therefore a \in H, \therefore a^{-1} \in H$

$\therefore a^{-1}y \in H$

$\Rightarrow a^{-1}y = h_1$, কোনো $h_1 \in H$ অৰ বাবে

$\Rightarrow a(a^{-1}y) = ah_1$

$\Rightarrow (aa^{-1})y = ah_1$

$\Rightarrow ey = ah_1$

$\Rightarrow y = ah_1 \in aH$

গতিকে $y \in H \Rightarrow y \in aH$

$\therefore H \subseteq aH$ ... (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা $aH = H$

সেইদৰে $Ha = H \Leftrightarrow a \in H$.

(ii) $aH = bH$

$\Leftrightarrow a^{-1}(aH) = a^{-1}(bH)$

$\Leftrightarrow (a^{-1}a)H = (a^{-1}b)H$

$\Leftrightarrow eH = (a^{-1}b)H$

$\Leftrightarrow H = (a^{-1}b)H$

$\Leftrightarrow a^{-1}b \in H$ ((1)ৰ পৰা)

সেইদৰে, $Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$.

উপপাদ্য ২ ঃ (i) এটা উপসংঘৰ যিকোনো দুটা বাওঁ (বা সোঁ) সহসংহতি অসংযুক্ত বা সমান।

(ii) এটা সংঘ G ইয়াৰ উপসংঘ H ৰ প্ৰত্যেকটো সোঁ (বাওঁ) সহসংহতিবোৰ মিলন হয়।

[দুটা সংহতি A, B অসংযুক্ত (disjoint) যদি $A \cap B = \phi$]

প্ৰমাণ ঃ (i) ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু $H \leq G$.

ধৰা হ'ল $a, b \in G$

গতিকে, aH আৰু bH হ'ল G ত H অৰ দুটা বাওঁ সহসংহতি।

স্পষ্টত ঃ aH, bH অসংযুক্ত বা অসংযুক্ত নহয়।

ধৰা হ'ল aH, bH অসংযুক্ত নহয়, অৰ্থাৎ $aH \cap bH \neq \phi$.

ধৰা হ'ল $x \in aH \cap bH$

$\Rightarrow x \in aH$ আৰু $x \in bH$

এতিয়া $x \in aH \Rightarrow x = ah_1$ কোনো $h_1 \in H$ অৰ বাবে

$x \in bH \Rightarrow x = bh_2$ কোনো $h_2 \in H$ অৰ বাবে

$\therefore ah_1 = bh_2$

$\Rightarrow (ah_1)h_1^{-1} = (bh_2)h_1^{-1}$

$\Rightarrow a\, h_1 h_1^{-1} = b\, h_2 h_1^{-1}$

$\Rightarrow ae = bh_2 h_1^{-1}$, e হ'ল G ৰ একক মৌল

$\Rightarrow a = bh_2 h_1^{-1}$

সেইদৰে $b = ah_1 h_2^{-1}$

ধৰা হ'ল $p \in aH$

$\therefore p = ah_3$ কোনো $h_3 \in H$ অৰ বাবে

$= bh_2 h_1^{-1} h_3$

$\in bH$, $\quad \Theta\ h_2 h_1^{-1} h_3 \in H$

এইদৰে, $p \in aH \Rightarrow p \in bH \quad \therefore aH \subseteq bH \quad (1)$

আকৌ, ধৰা হ'ল $q \in bH$

$\Rightarrow q = bh_4$ কোনো $h_4 \in H$ অৰ বাবে

$\Rightarrow q = ah_1 h_2^{-1} h_4$

$\in aH$, $\quad \Theta\ h_1 h_2^{-1} h_4 \in H$

গতিকে $q \in bH \Rightarrow q \in aH \quad \therefore bH \subseteq aH \quad (2)$

(1) আৰু (2), $aH = bH$

গতিকে aH, bH অসংযুক্ত বা সমান।

৬.৪ লাগ্ৰাঞ্জৰ উপ সংঘৰ ক্ৰম সম্পৰ্কীয় উপপাদ্য

উপপাদ্য ঃ (লাগ্ৰাঞ্জৰ উপসংঘৰ ক্ৰম সম্পৰ্কীয় উপপাদ্য) এটা সসীম সংঘৰ উপসংঘৰ ক্ৰমৰ দ্বাৰা সংঘটোৰ ক্ৰম বিভাজ্য।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সসীম সংঘ আৰু $0(G) = n$.

ধৰা হ'ল $H \leq G$

ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e.

প্ৰথম ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল $H = \{e\}$,

এই ক্ষেত্ৰত প্ৰমাণ কৰিবলৈকে একোৱেই নাই, কিয়নো $O(H)=1$ আৰু 1 অৰ দ্বাৰা n বিভাজ্য।

দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল $H = G$.

এই ক্ষেত্ৰতো প্ৰমাণ কৰিবলৈকে একোৱেই নাই, $O(H) = n = O(G)$

তৃতীয় ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল $H \neq \{e\}$, $H \neq G$.

ধৰা হ'ল $0(H) = m$, $m < n$.

ধৰা হ'ল $H = \{h_1, h_2, h_3, \ldots h_m\}$, য'ত h_i বোৰ পৃথক।

ধৰা হ'ল $a \in G$, $a \notin H$

তলৰ বাওঁ সহসংহতিটো লোৱা হ'ল

$aH = \{ah_1, ah_2, ah_3, ..., ah_m\}$

aH অৰ সকলোবোৰ মৌলই পৃথক, কিয়নো যদি $ah_i = ah_j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$, $i \neq j$ তেনেহ'লে $h_i = h_j$, (বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা)। এইটো স্ববিৰোধী কথা, যিহেতু H অৰ আটাইবোৰ মৌলই পৃথক।

আকৌ H অৰ কোনো মৌল aH অৰ কোনো মৌলৰ সমান নহয়, কিয়নো যদি $h_i = ah_j$, তেনেহ'লে $h_i h_j^{-1} = ah_j h_j^{-1}$ অর্থাৎ $h_i h_j^{-1} = a$ অর্থাৎ $a = h_i h_j^{-1} \in H$
অর্থাৎ $a \in H$, এইটোৱো স্ববিৰোধী কথা, যিহেতু $a \notin H$

এইদৰে আমি G ৰ m+m = 2m টা মৌল তালিকাভুক্ত কৰিলোঁ। ইয়ে যদি G ৰ সকলোবোৰ মৌল সামৰি লয়, তেনেহ'লে 2m = n অর্থাৎ m অৰ দ্বাৰা n বিভাজ্য।
যদি নহয়, ধৰা হ'ল $b \in G$, $b \notin H$, $b \notin aH$
তলৰ বাওঁ সহসংহতিটো লোৱা হ'ল $bH = \{bh_1, bh_2, ..., bh_m\}$
স্পষ্টত ঃ bH অৰ সকলোবোৰ মৌল পৃথক। আকৌ H অৰ কোনো মৌল bH অৰ কোনো মৌলৰ সমান নহয়।

আকৌ aH অৰ কোনো মৌল bH অৰ কোনো মৌলৰ সমান নহয়, কিয়নো যদি $ah_i = bh_j$, তেনেহ'লে $ah_i h_j^{-1} = bh_j h_j^{-1}$ অর্থাৎ $ah_i h_j^{-1} = b$ অর্থাৎ $b = ah_i h_j^{-1} \notin aH$,
($\Theta\ h_i h_j^{-1} \in H$) অর্থাৎ $b \in aH$, এইটো স্ববিৰোধী কথা, যিহেতু $b \notin aH$.

এইদৰে আমি G ৰ m+m+m = 3m টা মৌল তালিকাভুক্ত কৰিলোঁ। ইয়ে যদি G ৰ সকলোবোৰ মৌল সামৰি লয়, তেনেহ'লে 3m = n অর্থাৎ m অৰ দ্বাৰা n বিভাজ্য।

যদি নহয়, আকৌ আমি একেদৰে আগবাঢ়িম। যিহেতু G সসীম, আমি এটা সময়ত ৰব লাগিব। ধৰা হ'ল k বাৰৰ পাছত আমি ৰবলগীয়া হ'ল।
$\therefore$ mk = n অর্থাৎ m অৰ দ্বাৰা n বিভাজ্য।

টোকা ঃ জোছেফ লুই লাগ্রাঞ্জ (Joseph Louis Lagrange, 1736 – 1813) আছিল এজন বিশিষ্ট গণিতজ্ঞ।

মন্তব্য ঃ লাগ্রাঞ্জৰ উপপাদ্যৰ বিপৰীতটো সত্য নহয়



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ 2Z ৰ উপসংঘ 4Z ৰ সহ সংহতিবোৰ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ঃ 2Z ৰ উপসংঘ 6Z ৰ সংসংহতিবোৰ নির্ণয় কৰক।



৬.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- যদি H, G ৰ এটা উপসংঘ হয়, Ha = {ha : h ∈ H}, a ∈ G, সংহতিটোক G ত H অৰ সোঁ সহসংহতি বুলি কোৱা হয়। সেইদৰে বাওঁ সহসংহতিৰ সংজ্ঞা দিয়া হয়।
- এটা উপসংঘৰ যিকোনো দুটা বাওঁ (বা সোঁ) সহসংহতি অসংযুক্ত বা সমান।
- লাগ্ৰাজৰ উপসংঘৰ ক্ৰম সম্পৰ্কীয় উপপাদ্য মতে এটা সসীম সংঘৰৰুপসংঘৰ ক্ৰমৰ দ্বাৰা সংঘটোৰ ক্ৰম বিভাজ্য।



৬.৬ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ যিহেতু 2Z আবেলীয়। গতিকে ইয়াৰ সোঁ সহ সংহতি আৰু বাওঁ সহ সংহতিবোৰ সমান। অখণ্ড সংখ্যা 0 থকা বাওঁ সহসংহতি হ'ল 0+4z = { . . . -8, -4, 0, 4, 8 . . .} আৰু অখণ্ড সংখ্যা Z থকা বাওঁ সহ সংহতিবোৰ হ'ল 2+4z = { . . ., -2, 2, 6, 10, . . .}.

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে কৰিবলৈ চেষ্টা কৰক।



৬.৭ অধিক জানিবলৈ

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.
2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).
3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).
4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.

5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



৬.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ঃ G এটা সংঘ আৰু H, G ৰ এটা উপসংঘ। ধৰা হ'ল a, b ∈ G. দেখুৱাওক যে Ha, Hb সোঁ সহসংহতি দুটা সমান যদি আৰু যদিহে $a^{-1}H$, $b^{-1}H$ বাওঁ সহসংহতি দুটা সমান।

প্ৰশ্ন ২ঃ Z ৰ উপসংঘ 4Z ৰ সহ সংহতিবোৰ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ঃ **উপসংঘৰ সূচক** (Index of a subgroup) ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু H, G ৰ এটা উপসংঘ। G ত Hঅৰ বাওঁ বা (সোঁ) পৃথক সহ সংহতিৰ সংখ্যাক G ত H অৰ সূচক বুলি কোৱা হয়। সাধাৰণতে ইয়াক [G : H] প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হয়।

G এটা সসীম সংহতি হ'লে প্ৰমাণ কৰক যে $[G : H] = \frac{o(G)}{o(H)}$

*** ***** ***

অধ্যায় ৭ ঃ নিশ্চৰ উপসংঘ আৰু ভাগফল সংঘ (NORMAL SUBGROUP & QUOTIENT GROUP)

অধ্যায় গাঁথনি

৭.১ উদ্দেশ্য

৬.২ পৰিচয়

৭.৩ নিশ্চৰ উপসংঘ

৭.৪ ভাগফল সংঘ

৭.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৭.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৭.৭ অধিক জানিবলৈ

৭.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

৭.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি অধোলিখিত বিষয়বোৰৰ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব—

- নিশ্চৰ উপসংঘ
- ভাগফল সংঘ

৭.২ পৰিচয়

এই অধ্যায়টিত আমি সংঘৰ নিশ্চৰ উপসংঘৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। আকৌ এই অধ্যায়টিত ভাগফল সংঘৰ বিষয়েও আলোচনা কৰা হ'ব।

৭.৩ নিশ্চৰ উপসংঘ

সংজ্ঞা ঃ সংঘ G ৰ কোনো উপসংঘ H অক নিশ্চৰ উপসংঘ (normal subgroup) বুলি কোৱা হয় যদি $aH = Ha$, $\forall a \in G$, অর্থাৎ যদি H অৰ বাওঁ আৰু সোঁ সহসংহতি একে হয়।

প্রতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে প্রকাশ কৰা হয় $H \Delta G$.

টোকা ঃ এটা সংঘ G ৰ অন্ততঃ দুটা নিশ্চৰ উপসংঘ আছে, যথা, G আৰু {e}. G আৰু {e} ৰ বাহিৰে অন্য নিশ্চৰ উপসংঘ নথকা সংঘক **সৰল সংঘ** (simple group) বোলে।

উদাহৰণ ঃ ধৰা হ'ল $G = \{-1, 1, -i, i\}$

আমি জানো যে পূৰণ প্রক্রিয়ৰ অধীনত G এটা সংঘ।

ধৰা হ'ল $H = \{-1, 1\}$, আৰু $H \leq G$

এতিয়া $1H = \{-1, 1\} = H1 = H$

$(-1)H = \{1, -1\} = H(-1)$

$iH = \{-i, i\} = Hi$

$(-i)H = \{i, -i\} = H(-i)$

এইদৰে $aH = Ha, \forall a \in G$

$\therefore H \Delta G$.

টোকা ঃ ওপৰৰ উদাহৰণটোত H অৰ দুটা পৃথক বাওঁ (বা সোঁ) সহসংহতি আছে, যথা H, iH.[H = (–1)H, iH = (–i)H] মন কৰিব লগীয়া যে iH, H অৰ উপসংঘ নহয়।

উপপাদ্য ১ ঃ প্ৰত্যেক আবেলীয় সংঘৰ উপসংঘ নিশ্চৰ।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা আবেলীয় সংঘ।

ধৰা হ'ল $H \leq G$.

ধৰা হ'ল $a \in G$

এতিয়া $aH = \{ah : h \in H\}$

$= \{ha : h \in H\}$ [Θ G আবেলীয়]

$= Ha$

$\therefore H \Delta G$.

উপপাদ্য ২ ঃ সংঘ G ৰ এটা উপসংঘ H নিশ্চৰ হ'ব যদি আৰু যদিহে $ghg^{-1} \in H, \forall g \in G, h \in H$

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল $H \Delta G$

$\therefore aH = Ha, \forall a \in G$

ধৰা হ'ল $g \in G, h \in H$

$\therefore gh \in gH$

$\Rightarrow gh \in Hg$ [Θ $H \Delta G$, $gH = Hg$]

$\Rightarrow gh = hg$, কোনো $h_1 \in H$ অৰ বাবে

$\Rightarrow ghg^{-1} = h_1 gg^{-1}$, e হ'ল Gৰ একক মৌল

$\Rightarrow ghg^{-1} = h_1 \in H$

অৰ্থাৎ $ghg^{-1} \in H$

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল $H \leq G$ যাতে $ghg^{-1} \in H, \forall g \in G, h \in H$.

ধৰা হ'ল $a \in G$ $\therefore ah \in aH$

প্ৰদত্ত চৰ্তমতে $aha^{-1} \in H$

$\Rightarrow (aha^{-1})a \in Ha$

$\Rightarrow ah(a^{-1}a) \in Ha$

$\Rightarrow ah \in Ha$

অর্থাৎ $ah \in aH \Rightarrow ah \in Ha$

$\therefore aH \subseteq Ha$ (1)

এতিয়া $ha \in Ha$

ধৰা হ'ল $a^{-1} = b \in G$

$\therefore bhb^{-1} \in H$

$\Rightarrow a^{-1}h(a^{-1})^{-1} \in H$

$\Rightarrow a^{-1}ha \in H$

$\Rightarrow a(a^{-1}ha) \in aH$

$\Rightarrow (aa^{-1})ha \in aH$

$\Rightarrow ha \in aH$

অর্থাৎ $ha \in Ha \Rightarrow ha \in aH$

$\therefore Ha \subseteq aH$ (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা $aH = Ha$

$\therefore H \Delta G$.

উপপাদ্য ৩ ঃ এটা সংঘৰ দুটা নিশ্চৰ উপসংঘৰ ছেদনো এটা নিশ্চৰ উপসংঘ।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু $H \Delta G$, $K \Delta G$.

$\therefore H \leq G, K \leq G$ আৰু $H \cap K \leq G$.

ধৰা হ'ল $g \in G, h \in H \cap K$

এতিয়া $h \in H \cap K \Rightarrow h \in H$ আৰু $h \in K$

এতিয়া $g \in G, h \in H$ আৰু $H \Delta G$

$\therefore ghg^{-1} \in H$

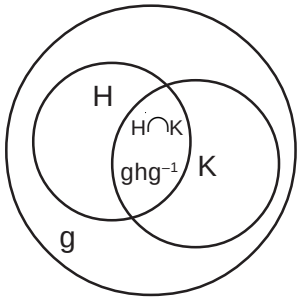
আকৌ $g \in G, h \in K$ আৰু $K \Delta G$

$\therefore ghg^{-1} \in K$

অর্থাৎ $ghg^{-1} \in H$ আৰু $ghg^{-1} \in K$

$\therefore ghg^{-1} \in H \cap K$

$\therefore H \cap K \Delta G$.



টোকা ঃ দুটা নিশ্চৰ উপসংঘৰ মিলন এটা নিশ্চৰ উপসংঘ নহ'বও পাৰে। উদাহৰণস্বৰূপে, $2z \Delta z, 3z \Delta z$ কিন্তু $2z \Delta z, 3z \Delta z$ আৰু সেই কাৰণে ই $2z \cup 3z \not< z$ ৰ নিশ্চৰ উপসংঘ নহয়।

৭.৪ ভাগফল সংঘ

ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু H, G ৰ এটা নিশ্চৰ উপসংঘ।

যিহেতু H এটা নিশ্চৰ উপসংঘ, এটা বাওঁ সহসংহতি আৰু অনুৰূপ সোঁ সহসংহতিৰ মাজত

পার্থক্য নাই। গতিকে সহসংহতি বুলি ক'লে আমি বাওঁ সহসংহতি (বা সোঁ সহসংহতিক) বুজিম।

ধৰা হ'ল G ত H অৰ সকলো সহসংহতিৰ সংহতিটো G/H .

ধৰা হ'ল $a, b \in G$ $\therefore aH, bH \in G/H$

G/H অত এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল

$(aH)(bH) = abH, ab \in G$

আমি দেখুৱাম যে দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াটো সুসংজ্ঞাৱদ্ধ।

ধৰা হ'ল $aH = cH, bH = dH; a, b, c, d \in H$

এতিয়া $aH = cH \Rightarrow a^{-1}(aH) = a^{-1}(cH)$

$\Rightarrow (a^{-1}a)H = a^{-1}cH$

$\Rightarrow H = a^{-1}cH$

$\Rightarrow a^{-1}c \in H$ [উপপাদ্য ৬ (i)]

$\Rightarrow a^{-1}c = h_1$, কোনো $h_1 \in H$ অৰ বাবে

সেইদৰে $bH = dH \Rightarrow b^{-1}d \in H \Rightarrow b^{-1}d = h_2$, কোনো $h_2 \in H$ অৰ বাবে

এতিয়া $(ab)^{-1}(cb) = (b^{-1}a^{-1})(cd)$

$= b^{-1}(a^{-1}c)d$

$= b^{-1}h_1d$

$= b^{-1}dh_1$ [Θ $dH = Hd$]

$= h_2h_1 \in H$

অৰ্থাৎ $(ab)^{-1}(cd) \in H$

$\therefore (ab)^{-1}(cd)H = H$

$\Rightarrow abH = cdH$

অৰ্থাৎ $\left.\begin{matrix} aH = cH \\ bH = dH \end{matrix}\right\} \Rightarrow abH = cdH$

$\therefore$ উপৰিউক্ত দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াটো সুসংজ্ঞাৱদ্ধ।

উপপাদ্য ৪ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু H, G ৰ এটা নিশ্চৰ উপসংঘ। G ত H অৰ সকলো সহসংহতিৰ সংহতিটোক G/H এৰে বুজোৱা হ'ল। তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞাৱদ্ধ দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G/H এটা সংঘ।

$(aH)(bH) = abH$; $a, b \in G$

প্ৰমাণ ঃ (i) $(aH)(bH) = abH \in G/H$; $a, b \in G$

আকৌ আমি জানো যে দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াটো সুসংজ্ঞাৱদ্ধ।

(ii) ধৰা হ'ল $a, b, c \in G$

$\therefore aH, bH, cH \in G/H$

এতিয়া $\{(aH)(bH)\}(cH) = (abH)(cH)$

$= (ab)c\ H$

$= a(bc)H$ [ΘG এটা সংঘ, $(ab)c = a(bc)$]

$= (aH)\{(bc)H\}$

$= (aH)\{(bH)(cH)\}$

∴ দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াটোৰে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e.

∴ $eH = H \in G/H$

এতিয়া $(aH)H = (aH)(eH) = aeH = aH$

$H(aH) = (eH)(aH) = eaH = aH.$

∴ H একক মৌল।

(iv) $a \in G \Rightarrow a^{-1} \in G$

$(aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = H$

$(a^{-1}H)(aH) = (a^{-1}a)H = eH = H$

∴ aH অৰ বিপৰীত মৌল $a^{-1}H$.

∴ উপৰিউক্ত দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G/H এটা সংঘ।

টোকা ঃ এই সংঘটোক H অৰ দ্বাৰা G ৰ ভাগফল সংঘ বা উৎপাদক সংঘ (quotient group or factor group) বোলা হয়।

উপপাদ্য ৫ ঃ আবেলীয় সংঘৰ প্ৰতিটো ভাগফল সংঘই আবেলীয়।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা আবেলীয় সংঘ আৰু $H \leq G$

∴ G আবেলীয়, ∴ H এটা নিশ্চৰ উপসংঘ।

গতিকে আমি G/H ভাগফল সংঘটো গঠন কৰিব পাৰোঁ।

ধৰা হ'ল $a, b \in G$. ∴$aH, bH \in G/H$.

এতিয়া $(aH)(bH) = abH$

$= baH$ [Θ G আবেলীয়, $ab = ba$]

$= (bH)(aH)$

∴ G/H আবেলীয়।

উপপাদ্য ৬ ঃ চক্ৰীয় সংঘৰ প্ৰতিটো ভাগফল সংঘই চক্ৰীয়।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল $G = \langle a \rangle$ এটা চক্ৰীয় সংঘ।

ধৰা হ'ল $H \leq G$

Θ G চক্ৰীয়, ∴G আবেলীয় আৰু সেয়ে H, G ৰ নিশ্চৰ উপসংঘ।

গতিকে আমি G/H ভাগফল সংঘটো গঠন কৰিব পাৰোঁ।

ধৰা হ'ল $x \in G$, $\therefore xH \in G/H$.

এতিয়া $x = a^m$, m এটা অখণ্ড সংখ্যা

ধৰা হ'ল $m > 0$

এতিয়া $xH = a^mH$

$= (a\ a\ a \ldots\ a)H$

m বাৰ

$= (aH)(aH)(aH) \ldots (aH)$

$= (aH)^m$

$\therefore$ aH অৰ দ্বাৰা জনিত G/H এটা চক্রীয় সংঘ।

$m = 0$ বা $m < 0$ ৰ বাবেও আমি ফলটো অনায়াসে প্রমাণ কৰিব পাৰোঁ।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ এটা অনা-আবেলীয় সংঘ চক্রীয় হ'ব পাৰে নে? যুক্তি দিয়ক।

প্রশ্ন নং ২ঃ দেখুৱাওক যে এটা অনা-আবেলীয় সংঘত অন্ততঃ 6 টা মৌল থাকিবই লাগিব।

প্রশ্ন নং ৩ঃ ধৰা হ'ল $G = \{1, \omega, \omega^2\}$, ω একৰ জটিল ঘনমূল। G সংহতিটো পূৰণ প্রক্রিয়াৰ অধীনত সংঘ। এই সংঘটো সৰল হয়নে?

প্রশ্ন নং ৪ঃ এটা সংঘৰ ক্রম 7 হ'লে সংঘটো অনা-আবেলীয় হ'ব পাৰেনে?

প্রশ্ন নং ৫ঃ অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Z যোগ প্রক্রিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ।

$3Z = \{0, \pm 3, \pm 6, \ldots.\}$ Z অৰ এটা উপসংঘ। ভাগফল উপসংঘ $Z/3Z$ অৰ মৌলৰ সংখ্যা কিমান?



৭.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- সংঘ G ৰ কোনো উপসংঘ H অক নিশ্চৰ উপসংঘ বুলি কোৱা হয় যদি $aH = Ha, \forall\ a \in G$.
- সংঘ G ৰ H এটা নিশ্চৰ উপসংঘ হ'লে G ত H অৰ সকলো সহসংহতিৰ সংহতি G/H ও এটা সংঘ। ইয়াক ভাগফল সংঘ (বা উৎপাদক সংঘ) বুলি কোৱা হয়।



৭.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ প্রত্যেক চক্রীয় সংঘ আবেলীয়। গতিকে অনা-আবেলীয় সংঘ অনা-চক্রীয়।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ হয়। G, {1} ত বাহিৰে ইয়াৰ আন কোনো নিশ্চৰ উপসংঘ নাই।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নহয়। মৌলিক ক্রমৰ প্রত্যেক সংঘই চক্রীয় আৰু প্রত্যেক চক্রীয় সংঘ আবেলীয়।

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ তিনিটা।



৭.৭ অধিক জানিবলৈ

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.
2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).
3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).
4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.
5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



৭.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

প্রশ্ন ১ঃ যদি $N_1, N_2, \ldots N_r$ এটা সংঘ G ৰ নিশ্চৰ উপসংঘ হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰক যে $(N_1 \mathrm{I}\ N_2 \mathrm{I}\ \ldots N_n)$ এটা G ৰ নিশ্চৰ উপসংঘ।

প্ৰশ্ন ২ঃ ধৰা হ'ল G = $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ o & d \end{pmatrix} : a, b, d \in IR \text{ আৰু } ad \neq 0 \right\}$

দেখুৱাওক যে মৌলকক্ষৰ পূৰণৰ অধীনত G এটা অনা-আবেলীয় সংঘ।

ধৰা হ'ল H = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ o & 1 \end{pmatrix} : b \in IR \right\}$

দেখুৱাওক যে G ৰ H এটা নিশ্চৰ উপসংঘ।

প্ৰশ্ন ৩ঃ দেখুৱাওক যে এটা সংঘৰ মৌলৰ সংখ্যা মৌলিক সংখ্যা হ'লে সংঘটো সৰল।

*** ***** ***

অধ্যায় ৮ ঃ সংঘৰ অনুৰূপতা (HOMOMORPHISM OF GROUPS)

অধ্যায় গাঁথনি

৮.১ উদ্দেশ্য

৮.২ পৰিচয়

৮.৩ সংঘৰ অনুৰূপতা ঃ সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ

৮.৪ অনুৰূপতাৰ বিভিন্ন প্ৰকাৰ

৮.৫ অনুৰূপতাৰ ধৰ্ম

৮.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৮.৭ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

৮.৮ অধিক জানিবলৈ

৮.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন

৮.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- সংঘৰ অনুৰূপতাৰ ধাৰণা সম্পৰ্কে অৱগত হ'ব
- বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ অনুৰূপতা সম্পৰ্কে জানিব পাৰিব
- অনুৰূপতাৰ ধৰ্ম আৰু আনুষংগিক উপপাদ্য সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

৮.২ পৰিচয়

অনুৰূপতাক ইংৰাজীত homomorphism বুলি কোৱা হয়। homomorphism শব্দটো গ্ৰীক ভাষাৰ homos (অৰ্থ একে) আৰু morphe (অৰ্থ ৰূপ বা আকৃতি) শব্দযুগলৰ পৰা আহিছে। গতিকে homomorphism শব্দটোৰ অৰ্থ 'একে ৰূপৰ বা অনুৰূপৰ'।

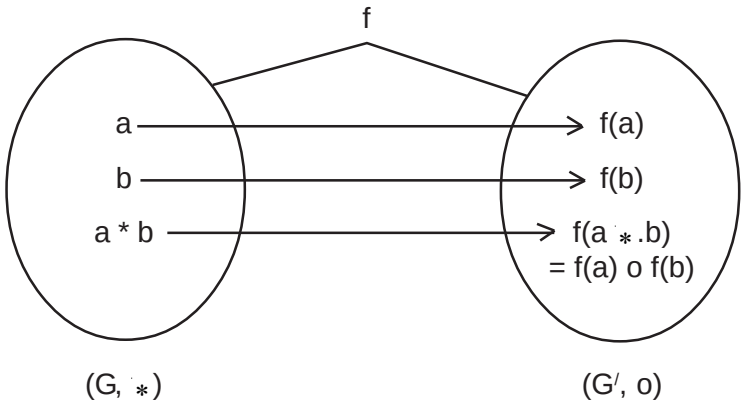
অনুৰূপতা হ'ল দুটা বীজগণিতীয় গাঁথনিৰ মাজৰ গাঁথনি-সংৰক্ষিত মানচিত্ৰণ। গতিকে, সংঘৰ অনুৰূপতা হ'ল এনে অনুৰূপতা যিয়ে সংঘৰ গাঁথনি সংৰক্ষণ কৰে।

৮.৩ সংঘৰ অনুৰূপতা (HOMOMORPHISM OF GROUPS)

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল ' * ' দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G এটা সংঘ আৰু ' o ' দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G' এটা সংঘ।

ধৰা হ'ল $f : G \to G'$ এটা মানচিত্ৰণ। f অক এটা অনুৰূপতা (homomorphism) বুলি কোৱা হয় যদি

f(a $*$ b) = f(a) of (b), $\forall\ a, b \in G$



টোকা ঃ 1. এই ক্ষেত্ৰত a ৰ লগত f(a) যুক্ত, b ৰ লগত f(b) যুক্ত। আকৌ a $*$ b ৰ লগত f(a) o f(b) যুক্ত। গতিকে f মানচিত্ৰণে অকল G ৰ দুটা মৌলক G/ অৰ দুটা অদ্বিতীয় মৌলৰ লগত সংযুক্ত নকৰে, ই a $*$ b ক G/ অৰ f(a) o f(b)ৰ লগতো সংযুক্ত কৰে। গতিকে দেখা গ'ল যে f মানচিত্ৰণে প্ৰণালীটোৰ বীজগণিতীয় গাঁথনি সংৰক্ষণ কৰে।

2. ইয়াৰ পিছৰ আলোচনাবোৰত আমি দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ বাবে প্ৰতীক ব্যৱহাৰ নকৰোঁ। আমি এনেদৰে লিখিম f(ab) = f(a) f(b).

কিন্তু এইটো কথা মনত ৰাখিব লাগিব যে দুয়োটা সংঘৰ দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া একে নহ'ব পাৰে।

উদাহৰণ ১ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণ এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল

$$f : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{Z}},\quad f(x) = -x, \forall x \in \underline{\underline{Z}}$$

ধৰা হ'ল $a,\ b \in \underline{\underline{Z}}$

এতিয়া f(a+b) = –(a+b), f অৰ সংজ্ঞামতে

= – a – b

= (–a) + (–b)

= f(a) + f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

টোকা ঃ ওপৰৰ উদাহৰণটোত দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া হ'ল "+" । তদুপৰি, একে দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত দুয়োটা সংঘই একে।

উদাহৰণ ২ঃ ধৰা হ'ল R বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ আৰু R_+ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ গুণাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণ এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল

$f : R \to R_+,\ f(x) = e^x$

f অনুৰূপতা হয়নে নহয়, সেয়া পৰীক্ষা কৰিব লাগে। R অত দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া হ'ল " + ", আৰু R_+ অত দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া হ'ল " . ". গতিকে f(a+b) = f(a) f(b), $\forall\ a, b \in R$ হয়নে নহয়, সেয়া পৰীক্ষা কৰিব লাগে।

এতিয়া $f(a+b) = e^{a+b}$, f অৰ সংজ্ঞামতে

$= e^a e^b$

$= f(a)\ f(b)$

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

উদাহৰণ ৩ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণ এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল

$f : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{Z}},\ \ f(x) = x + 5$

ধৰা হ'ল $a,\ b \in \underline{\underline{Z}}$

এতিয়া f(a+b) = (a+b) + 5

f(a) + f(b) = (a+5) + (b+5)

= (a+b) +10

$\therefore$ f(a+b) $\neq$ f(a) + f(b)

$\therefore$ f অনুৰূপতা নহয়।

উদাহৰণ ৪ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। ধৰা হ'ল G = {–1, 1} গুণাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হ'ল

$$f(x)\begin{cases} = 1, & \text{যদি } x \text{ যুগ্ম} \\ = -1, & \text{যদি } x \text{ অযুগ্ম} \end{cases}$$

ধৰা হ'ল $a,\ b \in \underline{\underline{Z}}$

প্ৰথম ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল a যুগ্ম, b যুগ্ম।

$\therefore$ f(a) = 1, f(b) = 1

আকৌ, a + b যুগ্ম

$\therefore$ f (a + b) = 1

= 1 x 1

= f(a) f(b)

দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল a অযুগ্ম, b অযুগ্ম

$\therefore$ f(a) = –1, f(b) = –1

$\therefore$ a, b অযুগ্ম, $\therefore$ a + b যুগ্ম

$\therefore$ f (a + b) = 1

= (–1) x (–1)

= f(a) f(b)

তৃতীয় ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল a যুগ্ম, b অযুগ্ম

$\therefore$ f(a) = 1, f(b) = –1

Θ a যুগ্ম আৰু b অযুগ্ম, $\therefore$ a + b অযুগ্ম

$\therefore$ f(a + b) = –1

= 1 x (–1)

= f(a) f(b)

সেইদৰে, যদি a অযুগ্ম আৰু b যুগ্ম, তেনেহ'লে f(a + b) = f(a) f(b)

দেখা গ'ল যে তিনিওটা ক্ষেত্ৰতে f(a + b) = f(a) f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

উদাহৰণ ৫ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু G ৰ একক মৌল e. এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে।

$f(x) = e, \ \forall \ x \in G$

ধৰা হ'ল $a, b \in G$

$\therefore \ ab \in G$

এতিয়া f(a) = e, f(b) = e

আকৌ f(ab) = e

= e e (Θ e একক মৌল)

= f(a) f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ১

প্ৰশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$f : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{Z}}, \ f(x) = 5x$

f অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে।

$f : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{Z}}, \ f(x) = x + 3$

f অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{R}}_+$ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ গুণাধীনত সংঘ আৰু $\underline{\underline{R}}$ হ'ল বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$f : \underline{\underline{R}}_+ \to \underline{\underline{R}}_+, \ f(x) = \frac{1}{x}$

f অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{R}}_+$ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ গুণাধীনত সংঘ আৰু $\underline{\underline{R}}$ হ'ল বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে।

$$f : \underline{\underline{R}}_+ \to \underline{\underline{R}}, \quad f(x) = \log_e x$$

f অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}, S_3 হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ দ্বাৰা গঠিত সংঘ। ধৰা হ'ল G = {–1, 1} গুণাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$$f(\alpha)\begin{cases} = 1, & \text{যদি } \alpha \text{ এটা যুগ্ম বিন্যাস} \\ = -1, & \text{যদি } \alpha \text{ এটা অযুগ্ম বিন্যাস} \end{cases}$$

f অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

৮.৪ অনুৰূপতাৰ বিভিন্ন প্ৰকাৰ (TYPES OF HOMOMORPHISM)

ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G′ সংঘলৈ $f : G \to G'$ এটা অনুৰূপতা।

1. অনুৰূপতা f অক এটা একৈকী অনুৰূপতা (monomorphism) বুলি কোৱা হয় যদি f একৈকী হয়।
2. অনুৰূপতা f অৰ এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা (epimorphism) বুলি কোৱা হয় যদি f আচ্ছাদক হয়।
3. এটা সংঘৰ পৰা নিজলৈকে অনুৰূপতাক স্বানুৰূপতা (endomorphism) বুলি কোৱা হয়।
4. অনুৰূপতা f অক সম অনুৰূপতা (isomorphism) বুলি কোৱা হয় যদি f একৈকী আৰু আচ্ছাদক অৰ্থাৎ দ্বিমুখী।

   ইংৰাজী 'isomorphism' শব্দটোৱো গ্ৰীক ভাষাৰ "isos" অৰ্থ সমান আৰু "morphe" (অৰ্থ ৰূপ বা আকৃতি) শব্দদ্বয়ৰ পৰা আহিছে। দুটা সংঘৰ মাজত এটা সম অনুৰূপতা থাকিলে, সিহঁতক 'বিমূৰ্তভাৱে সৰ্বাংগসম' বুলি ক'ব পাৰি। সিহঁতক দুটা পৃথক সংঘ হিচাপে বিবেচনা নকৰি এটা সংঘ হিচাপে ল'ব পাৰি।
5. এটা সংঘৰ পৰা নিজলৈকে এটা সম অনুৰূপতাক সম স্বানুৰূপতা (automorphism) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ ৬ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$$f : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{Z}}, \ f(x) = -x, \ \forall \ x \in \underline{\underline{Z}}$$

(i) ইতিমধ্যে আমি দেখুৱাইছোঁ যে f এটা অনুৰূপতা (উদাহৰণ ১)।

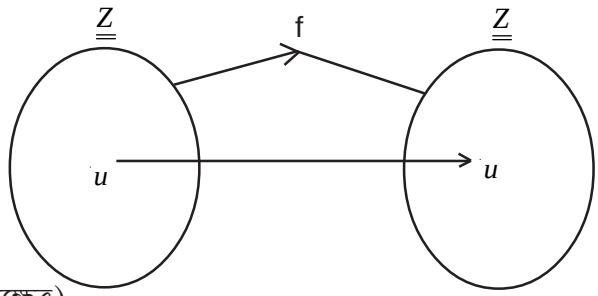
(ii) ধৰা হ'ল $a,b \in \underline{\underline{Z}}$

f(a) = f(b)

$\Rightarrow$ –a = – b

$\Rightarrow$ a = b

$\therefore$ f একৈকী।



(iii) ধৰা হ'ল $u \in \underline{\underline{Z}}$ (সহক্ষেত্ৰ)

গতিকে $\underline{\underline{Z}}$ অত (আদিক্ষেত্ৰ) এটা মৌল $-u$ আছে যাতে

$f(-u) = -(-u) = u$

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

গতিকে দেখা গ'ল যে f আচ্ছাদক, f একৈকী আৰু f আচ্ছাদক।

$\therefore$ f এটা সম অনুৰূপতা।

যিহেতু $\underline{\underline{Z}}$ অৰ পৰা $\underline{\underline{Z}}$ অলৈ f এটা সম অনুৰূপতা,

$\therefore$ f এটা সম স্বানুৰূপতা।

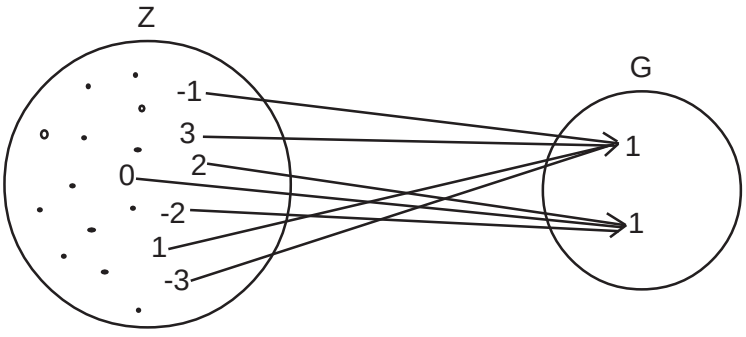
উদাহৰণ ৭ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। ধৰা হ'ল G = {–1, 1} গুণাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$$f(x)\begin{cases} = 1, & \text{যদি } x \text{ যুগ্ম} \\ = -1, & \text{যদি } x \text{ অযুগ্ম} \end{cases}$$

(i) ইতিমধ্যে আমি দেখুৱাইছোঁ যে f এটা অনুৰূপতা (উদাহৰণ ৪)।

(ii) স্পষ্টতঃ f একৈকী নহয়।

(iii) স্পষ্টতঃ f আচ্ছাদক।



সকলো যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ প্ৰতিচ্ছায়া 1, আৰু সকলো অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ প্ৰতিচ্ছায়া –1।

গতিকে, f এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা, কিন্তু সম অনুৰূপতা নহয়।

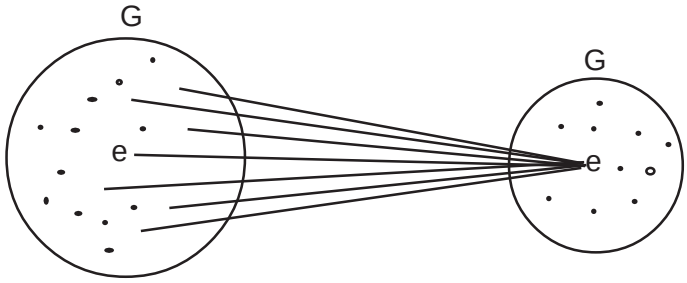
উদাহৰণ ৮ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু ধৰা হ'ল e ৰ G একক মৌল। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা

এনেদৰে দিয়া আছে।

$$f(x) = e,\ \forall x \in G$$

(i) ইতিমধ্যে আমি দেখুৱাইছোঁ যে f এটা অনুৰূপতা (উদাহৰণ ৫)।

(ii) স্পষ্টতঃ f একৈকী নহয়। সকলোবোৰ মৌল e ৰ লগত যুক্ত।



(iii) f আচ্ছাদক নহয়। e য়েই একমাত্র প্রতিচ্ছায়া।

∴ f সম অনুৰূপতা নহয়। f একৈকী অনুৰূপতা নহয়, f আচ্ছাদক অনুৰূপতাও নহয়।

যিহেতু f, G অৰ পৰা G লৈ এটা অনুৰূপতা, গতিকে ই স্বানুৰূপতা।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

প্রশ্ন নং ৬ঃ ধৰা হ'ল C জটিল সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্রণ f অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে।

$$f : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{C}},\ f(z) = \bar{z},\ \forall z \in \underline{\underline{C}}$$

f সম স্বানুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন নং ৭ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{R}}$ বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ আৰু $\underline{\underline{R}}_+$ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ গুণাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্রণ f অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে,

$$f : \underline{\underline{R}} \to \underline{\underline{R}}_+,\ f(x) = e^x$$

f সম অনুৰূপণতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন নং ৮ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ আৰু $\underline{\underline{2Z}}$ যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ গুণাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্রণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$$f : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{2Z}},\ f(x) = 2x,\ \forall x \in \underline{\underline{Z}}$$

f সম অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন নং ৯ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{2Z}} = \{\ldots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 9, \ldots\}$

$\underline{\underline{3Z}} = \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$

$\underline{\underline{2Z}}$ আৰু $\underline{\underline{3Z}}$ যোগাধীনত সংঘ।

এটা মানচিত্রণ f অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে $f : \underline{\underline{2Z}} \to \underline{\underline{3Z}}$, f(2x)=3x য'ত x এটা অখণ্ড সংখ্যা।

f সম অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ১০ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{R}}_+$ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ গুণাধীনত সংঘ, আৰু $\underline{\underline{R}}$ বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণ f অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$f : \underline{\underline{R}}_+ \to \underline{\underline{R}},\ f(x) = \log_{10} x$

f সম অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

৮.৫ অনুৰূপতাৰ ধৰ্ম (PROPERTIES OF HOMOMORPHISM)

উপপাদ্য ঃ ধৰা হ'ল G, G′ দুটা সংঘ। ধৰা হ'ল e, e′ ক্ৰমে G, G′ অৰ একক মৌল। ধৰা হ'ল f : G $\to$ G′ এটা অনুৰূপতা, তেনেহ'লে

(i) f(e) = e′

(ii) f(x^{-1}) = (f(x))$^{-1}$, $x \in G$

(iii) f(x^n) = (f(x))^n, $x \in G$, n এটা অখণ্ড সংখ্যা।

প্ৰমাণ ঃ (i) আমি জানো

e e = e

$\Rightarrow$ f(e e) = f(e)

$\Rightarrow$ f(e) f(e) = f(e), Θ f এটা অনুৰূপতা

$\Rightarrow$ f(e) f(e) = f(e)e′, f(e) $\in$ G′ আৰু e′ হ'ল G′ অৰ একক মৌল।

$\Rightarrow$ f(e) = e′, বাওঁ বিলোপন বিধিৰ সহায়ত

(ii) আমি জানো

$x x^{-1} = e = x^{-1}x$

$\Rightarrow f(x x^{-1}) = f(e) = f(x^{-1}x)$

$\Rightarrow f(x) f(x^{-1}) = e' = f(x^{-1}) f(x)$

$\Rightarrow f(x^{-1})$ অৰ বিপৰীত হ'ল f

অৰ্থাৎ $(f(x)^{-1}) = f(x^{-1})$

(iii) ধৰা হ'ল n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা ঃ

তেনেহ'লে $f(x^n) = f(x x x....x)$

= $f(x) f(x) f(x) f(x).... f(x)$, Θ f এটা অনুৰূপতা

= $(f(x))^n$

ধৰা হ'ল n = 0 :

তেনেহ'লে x^0 = e

$\therefore$ f (x^0) = f(e)

$= e'$

$= (f(x))^0$

ধৰা হ'ল n এটা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা ঃ

ধৰা হ'ল n = –m, য'ত m এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

এতিয়া $f(x^n) = f(x^{-m})$

$= f(x^{-1})^m)$

$= ((f(x))^{-1})^m$

$= (f(x))^{-m}$

$= (f(x))^n$

গতিকে, $f(x^n) = (f(x))^n$, যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা n অৰ বাবে

উপপাদ্য ঃ ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G′ সংঘলৈ $f : G \to G'$ এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা। যদি G আবেলীয়, তেনেহ'লে G′ ও আবেলীয়।

প্ৰমাণ ঃ এই ক্ষেত্ৰত $f : G \to G'$ এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা। ধৰা হ'ল $u, v \in G'$

Θ f আচ্ছাদক, G ত মৌল a, b আছে, যাতে f(a) = u, f(b) = v

এতিয়া $uv = f(a)\, f(b)$

$= f(ab),$ Θ f এটা অনুৰূপতা

$= f(ba),$ Θ G আবেলীয়

$= f(b)\, f(a),$ Θ f এটা অনুৰূপতা

$= vu$

গতিকে, $uv = vu, \ \forall u, v \in G'$

$\therefore$ G আবেলীয়।

টোকা ঃ ওপৰৰ উপপাদ্যটোৰ বিপৰীতটো সত্য নহয়।

S = {1, 2, 3} সংহতিত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংঘ S_3 বোলা হ'ল।

ধৰা হ'ল G = {–1, 1} গুণাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণ এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল।

$$f(\alpha)\begin{cases} = 1, & \text{যদি } \alpha \text{ এটা যুগ্ম বিন্যাস} \\ = -1, & \text{যদি } \alpha \text{ এটা অযুগ্ম বিন্যাস} \end{cases}$$

f এটা অনুৰূপতা। তদুপৰি f আচ্ছাদক, অৰ্থাৎ, f এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা।

G আবেলীয়, কিন্তু S_3 আবেলীয় নহয়।

উপপাদ্য ঃ ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G′ সংঘলৈ $f : G \to G'$ এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা। যদি G চক্ৰীয়, তেনেহ'লে G′ ও চক্ৰীয়।

প্ৰমাণ ঃ এই ক্ষেত্ৰত $f : G \to G'$ এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা।

ধৰা হ'ল চক্রীয় সংঘ G ৰ $a \in G$ এটা জনক।

ধৰা হ'ল $u \in G$

গতিকে G ত এটা মৌল ρ আছে যাতে

u = f(ρ)

= f(a^m), Θ p = a^m, যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা m অৰ বাবে

= (f(a))^m

$\Rightarrow$ G′ এটা চক্রীয় সংঘ আৰু f(a) ইয়াৰ এটা জনক।

টোকা ঃ ওপৰৰ উপপাদ্যটোৰ বিপৰীতটো সত্য নহয়।

আগৰ উপপাদ্যটোৰ উদাহৰণটো লোৱা হ'ল।

ইয়াত G = {–1, 1} চক্রীয়, কিন্তু S_3 চক্রীয় নহয়।

উপপাদ্য ঃ ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G′ সংঘলৈ f : G $\rightarrow$ G′ এটা অনুৰূপতা।

(i) যদি G ৰ H এটা উপসংঘ, তেনেহ'লে G′ অৰ f(H) এটা উপসংঘ।

(ii) যদি G′ অৰ K এটা উপসংঘ, তেনেহ'লে G ৰ f^{-1}(K) এটা উপসংঘ।

[f(H) = {f(h) : h $\in$ H}, ইয়াক f অৰ অধীনত H অৰ প্রতিচ্ছায়া বুলি কোৱা হয়।

f^{-1}(K) = {a $\in$ G : f(a) $\in$ K}, ইয়াক f অৰ অধীনত K ৰ বিপৰীত প্রতিচ্ছায়া বুলি কোৱা হয়।

মন কৰিব লগীয়া যে যদিও f এটা অনুৰূপতা, f^{-1} অনুৰূপতা নহ'বও পাৰে।]

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e আৰু G′ অৰ একক মৌল e′.

$\therefore$ f(e) = e′

(i) আমি জানো e′ = f(e) $\in$ f(H)

$\therefore$ $f(H) \neq \phi$

ধৰা হ'ল $u, v \in f(H)$

$\therefore$ H অত মৌল a, b আছে যাতে f(a) = u, f(b)= v

এতিয়া uv^{-1} = f(a) (f(b))$^{-1}$

= f(a) f(b^{-1})

= f(ab^{-1})

Θ G ৰ H এটা উপসংঘ, $\therefore$ $ab^{-1} \in$ H

$\therefore$ f(ab^{-1}) $\in$ f(H)

$\therefore$ $uv^{-1} \in f(H)$

দেখা গ'ল যে $u, v \in f(H) \Rightarrow uv^{-1} \in f(H)$

$\therefore$ G′ অৰ f(H) এটা উপসংঘ।

(ii) আমি জানো $e' \in K$

$\Rightarrow f(e) \in K$

$\Rightarrow e \in f^{-1}(K)$

$\therefore f^{-1}(K) \neq \phi$

ধৰা হ'ল a, $b \in f^{-1}(K)$

$\therefore f(a) \in K, f(b) \in K$

$\Rightarrow f(a)\,(f(b))^{-1} \in K,$ Θ G/ অৰ K এটা উপসংঘ

$\Rightarrow f(a)\, f(b^{-1}) \in K$

$\Rightarrow f(ab^{-1}) \in K$

$\Rightarrow ab^{-1} \in f^{-1}(K)$

দেখা গ'ল যে a, $b \in f^{-1}(K)$ $\Rightarrow ab^{-1} \in f^{-1}(K)$

$\therefore$ G/ অৰ $f^{-1}(K)$ এটা উপসংঘ।

উদাহৰণ ৯ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ। ধৰা হ'ল মানচিত্রণ $f : G \to G, f(x) = x^{-1}$ এটা অনুৰূপতা। দেখুওৱা যে G আবেলীয়।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল a, $b \in G$.

এতিয়া $f(ab) = f(a)\, f(b)$, Θ f এটা অনুৰূপতা f অৰ সংজ্ঞাৰ পৰা

$\Rightarrow ((ab)^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1}\,(a^{-1})^{-1}$

$\Rightarrow ab = (b^{-1})^{-1}(a^{-1})^{-1}$

$\Rightarrow ab = ba$

$\therefore$ G আবেলীয়।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৩

প্রশ্ন নং ১১ঃ ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা Gলৈকে $f : G \to G, f(x) = x$ এটা মানচিত্রণ। প্রমাণ কৰক যে f এটা সম স্বানুৰূপতা।

প্রশ্ন নং ১২ঃ ধৰা হ'ল G এটা আবেলীয় সংঘ। প্রমাণ কৰক যে $f : G \to G, f(x) = x^{-1}$ এটা সম স্বানুৰূপতা।



৮.৬ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

ধৰা হ'ল $*$ দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ অধীনত G এটা সংঘ আৰু o দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ অধীনত G/ এটা সংঘ। ধৰা হ'ল $f : G \to G'$ এটা মানচিত্রণ। f অক এটা অনুৰূপতা বুলি কোৱা হয় যদি $f(a * b) = f(a)\,(b)$ $\forall a, b \in G$

- এটা অনুৰূপতাক একৈকী অনুৰূপতা বুলি কোৱা হয় যদি ই একৈকী হয়।
- এটা অনুৰূপতাক আচ্ছাদক অনুৰূপতা বুলি কোৱা হয় যদি ই আচ্ছাদক হয়।
- এটা অনুৰূপতাক সম অনুৰূপতা বুলি কোৱা হয় যদি ই একৈকী আৰু আচ্ছাদক হয়।
- এটা সংঘৰ পৰা নিজলৈকে অনুৰূপতাক স্বানুৰূপতা বুলি কোৱা হয়।
- এটা সংঘৰ পৰা নিজলৈকে এটা সম অনুৰূপতাক সম স্বানুৰূপতা বুলি কোৱা হয়।
- ধৰা হ'ল G, G′ দুটা সংঘ। ধৰা হ'ল e, e′ ক্ৰমে G, G′ অৰ একক মৌল।
  (i) f(e) = e′
  (ii) $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$, $x \in G$
  (iii) $f(x^n) = (f(x))^n$, n এটা অখণ্ড সংখ্যা।
- ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G′ সংঘলৈ f $G \to G'$ এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা।
  (i) যদি G আবেলীয়, তেনেহ'লে G′ ও আবেলীয়।
  (ii) যদি G চক্ৰীয়, তেনেহ'লে G′ ও চক্ৰীয়।
  ওপৰৰ (i) আৰু (ii) ৰ প্ৰত্যেকৰে বিপৰীতটো সত্য নহয়।
- ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G′ সংঘলৈ f : $G \to G'$ এটা অনুৰূপতা।
  (i) যদি G ৰ H এটা উপসংঘ, তেনেহ'লে G′ অৰ f(H) এটা উপসংঘ।
  (ii) যদি G′ অৰ K এটা উপসংঘ, তেনেহ'লে G ৰ f^{-1}(K) এটা উপসংঘ।



৮.৭ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{Z}}$, $f(x) = 5x$

ধৰা হ'ল $a, b \in \underline{\underline{Z}}$

এতিয়া f(a+b) = 5(a+b)

=5a+ 5b

= f(a) + f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{Z}}$, $f(x) = x + 3$

ধৰা হ'ল $a, b \in \underline{\underline{Z}}$

f(a+b) = (a+b) + 3 = a+b+3

f(a) +f(b) = (a+3) + (b+3)

= a + b + 6

$\therefore$ f(a+b) $\neq$ f(a) + f(b)

$\therefore$ f অনুৰূপতা নহয়।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ অ $f : \underline{\underline{R}}_+ \to \underline{\underline{R}}_+,\ f(x) = \frac{1}{x}$

ধৰা হ'ল $a, b \in \underline{\underline{R}}_+$

এতিয়া $f(ab) = \frac{1}{ab}$

$= \frac{1}{a}\frac{1}{b}$

= f(a)f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : \underline{\underline{R}}_+ \to \underline{\underline{R}},\ f(x) = \log_e x$

ধৰা হ'ল $a, b \in \underline{\underline{R}}_+$

এতিয়া $f(ab) = \log_e ab$

$= \log_e a + \log_e b$

$= f(a) + f(b)$

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : S_3 \to G = \{-1, 1\}$, য'ত

$$f(\alpha)\begin{cases} = 1, & \text{যদি } \alpha \text{ এটা যুগ্ম বিন্যাস} \\ = -1, & \text{যদি } \alpha \text{ এটা অযুগ্ম বিন্যাস} \end{cases}$$

প্ৰথম ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল α, β যুগ্ম বিন্যাস।

$\therefore\ f(\alpha) = 1,\ f(\beta) = 1$

আমি জানো যে দুটা যুগ্ম বিন্যাসৰ পূৰণফল এটা যুগ্ম বিন্যাস

$\therefore\ f(\alpha\beta) = 1$

$= 1 \times 1$

$= f(\alpha) f(\beta)$

দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল α, β অযুগ্ম বিন্যাস।

$\therefore\ f(\alpha) = -1,\ f(\beta) = -1$

আমি জানো যে দুটা অযুগ্ম বিন্যাসৰ পূৰণফল এটা অযুগ্ম বিন্যাস।

$\therefore\ f(\alpha\beta) = 1$

$= (-1) \times (-1)$

$= f(\alpha) f(\beta)$

তৃতীয় ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল α এটা যুগ্ম বিন্যাস আৰু β এটা অযুগ্ম বিন্যাস।

$\therefore\ f(\alpha) = 1,\ f(\beta) = -1$

আমি জানো যে এটা যুগ্ম বিন্যাস আৰু এটা অযুগ্ম বিন্যাসৰ পূৰণফল এটা অযুগ্ম বিন্যাস।

$\therefore f(\alpha\beta) = -1$

$= 1 \times (-1)$

$= f(\alpha) f(\beta)$

সেইদৰে, যদি α এটা অযুগ্ম বিন্যাস আৰু β এটা যুগ্ম বিন্যাস, তেতিয়াও

$f(\alpha\beta) = f(\alpha) f(\beta)$

গতিকে, সকলো ক্ষেত্ৰতে দেখা গ'ল যে

$f(\alpha\beta) = f(\alpha) f(\beta)$

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{C}},\ f(x) = \bar{z}$

ধৰা হ'ল $z, w \in \underline{\underline{C}}$

এতিয়া $f(z+w) = \overline{z+w}$

$= \bar{z} + \bar{w}$

$= f(z) + f(w)$

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

ধৰা হ'ল f(z) = f(w)

$\Rightarrow \bar{z} = \bar{w}$

$\Rightarrow z = w$

$\therefore$ f এটা এককী।

ধৰা হ'ল $z \in \underline{\underline{C}}$ (সহক্ষেত্ৰ)

গতিকে আদিক্ষেত্ৰ $\bar{z} \in \underline{\underline{C}}$ মৌল আছে যাতে

$f(\bar{z}) = (\bar{\bar{z}}) = z$

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

$\therefore$ f এটা সম অনুৰূপতা।

Θ $\underline{\underline{C}}$ ৰ পৰা নিজলৈকে f এটা সম অনুৰূপতা,

$\therefore$ f এটা সম স্বানুৰূপতা।

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : \underline{\underline{R}} \to \underline{\underline{R}}_+,\ f(x) = e^x$

ধৰা হ'ল $a, b \in \underline{\underline{R}}$

এতিয়া $f(a+b) = e^{a+b}$

$= e^a e^b$

$= f(a)\ f(b)$

ধৰা হ'ল f(a) = f(b)

$\Rightarrow e^a = e^b$

$\Rightarrow a = b$

$\therefore$ f একৈকী।

ধৰা হ'ল $u \in \underline{\underline{R}}_+$ যাতে f(c) = u

$\therefore e^c = u$

$\therefore e = \log_e u \in \underline{\underline{R}}$

দেখা গ'ল যে প্ৰত্যেক $u \in \underline{\underline{R}}_+$, অৰ বাবে, $\log_e u \in \underline{\underline{R}}$ আছে যাতে $f(\log_e u) = u$

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

$\therefore$ f এটা সম অনুৰূপতা।

৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : \underline{\underline{Z}} \to 2\underline{\underline{Z}},\ f(x) = 2x$

ধৰা হ'ল $a, b \in \underline{\underline{Z}}$

এতিয়া f(a+b) = z(a+b)

= 2a + 2b

= f(a) + f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

ধৰা হ'ল f(a) = f(b)

$\Rightarrow$ 2a = 2b

$\Rightarrow$ a = b

$\therefore$ f একৈকী।

ধৰা হ'ল $u \in 2\underline{\underline{Z}}$

গতিকে $\frac{u}{2} \in \underline{\underline{Z}}$ যাতে $f\left(\frac{u}{2}\right) = 2\frac{u}{2} = u$

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

$\therefore$ f এটা সম অনুৰূপতা।

৯ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : \underline{\underline{2Z}} \to \underline{\underline{3Z}},\ f(2x) = 3x$, য'ত x এটা অখণ্ড সংখ্যা।

ধৰা a, b অখণ্ড সংখ্যা।

$\therefore$ $2a, 2b \in 2Z$

এতিয়া f (2a+2b) = f(2(a+b))

= 3(a+b)

= 3a + 3b

= f(2a)+ f(2b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

ধৰা হ'ল f(2a) = f(2b)

$\Rightarrow$ 3a = 3b

$\Rightarrow$ a = b

$\Rightarrow$ 2a = 2b

$\therefore$ f একৈকী।

ধৰা হ'ল $3u \in 3\underline{\underline{Z}}$, য'ত u এটা অখণ্ড সংখ্যা।

গতিকে $2u \in 2Z$ আছে যাতে f (2u) = 3u

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

$\therefore$ f এটা সম অনুৰূপতা।

১০ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : \underline{\underline{R}}_+ \to \underline{\underline{R}}_+ \quad f(x) = \log_{10} x$

ধৰা হ'ল $a, b \in \underline{\underline{R}}_+$

এতিয়া f(ab) = $\log_{10}$ ab

= $\log_{10}$a = $\log_{10}$b

= f(a) + f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

ধৰা হ'ল f(a) = f(b)

$\Rightarrow$ $\log_{10}$a = $\log_{10}$b

$\Rightarrow$ a = b

$\therefore$ f একৈকী।

ধৰা হ'ল $u \in \underline{\underline{R}}$

গতিকে $10^u \in \underline{\underline{R}}_+$ যাতে

$f(10^u) = \log_{10}{}^{10^u}$

$= u \log_{10}{}^{10}$

$= u$

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

$\therefore$ f এটা সম অনুৰূপতা।

১১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : G \to G, \quad f(x) = x$

ধৰা হ'ল $a, b \in G$

এতিয়া f(ab) = ab

= f(a) f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

f(a) = f(b)

$\Rightarrow$ a = b

$\therefore$ f এঁকেকী।

প্ৰত্যেক $a \in G$ ৰ বাবে, f(a) = a

$\therefore$ f আচ্ছাদক

$\therefore$ G ৰ পৰা নিজলৈকে f এটা সম অনুৰূপতা।

$\therefore$ f এটা সম স্বানুৰূপতা।

১২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : G \to G, \quad f(x) = x^{-1}$

ধৰা হ'ল $a, b \in G$

এতিয়া $f(ab) = (ab)^{-1}$

$= b^{-1} a^{-1}$

$= a^{-1}b^{-1}$, Θ G আবেলীয়

= f(a) f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

ধৰা হ'ল f(a) = f(b)

$\Rightarrow$ a = b

$\therefore$ f এঁকেকী।

ধৰা হ'ল $u \in G$.

গতিকে $u^{-1} \in G$ যাতে

$f(u^{-1}) = (u^{-1})^{-1}$

$= u$

$\therefore$ f আচ্ছাদক

$\therefore$ G ৰ পৰা নিজলৈকে f এটা সম অনুৰূপতা।

$\therefore$ f এটা সম স্বানুৰূপতা।



৮.৮ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

১) Fraleigh, Johu B : *A First Course in Abetract Algebra* (2003), Pearson Education (Singapure) Pvt. Ltd, Indian Branch, Delhi 110092.

২) Mapa, S.K. : *Higher Algebra* (Abstract and Linear) (1994), Asoke Prakasan, Calcutta 700007.

৩) Khanna, V. K. and Bhambri, S. K. : *A Course in Abstract Algebra* (2006), Vikas Publishing House Pvt. Ltd. New Delhi 110014.



৮.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{R}}$ বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ।

$f : \underline{\underline{R}} \to \underline{\underline{R}},\ f(x) = 5x$

এটা মানচিত্ৰণ।

f অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ২ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{3Z}}$ ={. . . ., –9, –6, –3, 0, 3, 6, 9, ...}

$\underline{\underline{5Z}}$ ={. . . ., –20, –15, –10, –5, 0, 5, 10, 15, 20, ...}

$\underline{\underline{3Z}}$ আৰু $\underline{\underline{5Z}}$ যোগাধীনত সংঘ।

ধৰা হ'ল $f : \underline{\underline{3Z}} \to \underline{\underline{5Z}},\ f(3x) = 5x$, য'ত x এটা অখণ্ড সংখ্যা।

f অনুৰূপতা হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ঃ এটা অসীম সংঘৰ পৰা এটা সসীম সংঘলৈ এটা অনুৰূপতাৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্ৰশ্ন ৪ঃ ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G' সংঘলৈ $f : G \to G'$ এটা সম অনুৰূপতা। যদি G' আবেলীয়, প্ৰমাণ কৰক যে G আবেলীয়।

প্ৰশ্ন ৫ঃ ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G' সংঘলৈ $f : G \to G'$ এটা সম অনুৰূপতা। যদি G' চক্ৰীয়, প্ৰমাণ কৰক যে G চক্ৰীয়।

*** ***** ***

অধ্যায় ৯ ঃ বলয় (RING)

অধ্যায় গাঁথনি

৯.১ উদ্দেশ্য

৯.২ পৰিচয়

৯.৩ বলয়

৯.৪ বলয়ৰ ধর্ম

৯.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৯.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৯.৭ অধিক জানিবলৈ

৯.৮ আর্হি প্রশ্ন

৯.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰাৰ পাছত আপুনি অধোলিখিত বিষয়বোৰ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

- বলয়
- বলয়ৰ ধর্ম

৯.২ পৰিচয়

আমি সংঘ আৰু ইয়াৰ বিভিন্ন ধর্ম, উপসংঘ, সহসংহতি, চক্রীয় সংঘ, নিশ্চৰ উপসংঘ আৰু ভাগফল সংঘ সম্বন্ধে আলোচনা কৰিছোঁ। এই অধ্যায়ত আমি বলয় সম্বন্ধে অধ্যয়ন কৰিম। সংঘ এটা বীজগণিতীয় গাঁথনি অর্থাৎ কেইটামান নির্দিষ্ট স্বীকার্য সিদ্ধ কৰা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়াযুক্ত অৰিক্ত সংহতি। বলয়ো এটা বীজগণিতীয় গাঁথনি অর্থাৎ কেইটামান নির্দিষ্ট স্বীকার্য সিদ্ধ কৰা দুটা দ্বৈত প্রক্রিয়াযুক্ত এটা অৰিক্ত সংহতি।

৯.৩ বলয়

যোগ (+) আৰু পূৰণ (.) এই দুটা দ্বৈত প্রক্রিয়াযুক্ত এটা অৰিক্ত সংহতি R অক বলয় (ring) বুলি কোৱা হয় যদি অধোলিখিত স্বীকার্যকেইটা সিদ্ধ হয়।

(1) যোগৰ অধীনত R এটা আবেলীয় সংঘ,

(2) পূৰণৰ অধীনত R এটা অর্ধসংঘ,

(3) বিতৰণ বিধি দুটা প্রযোজ্য হয়, যথা,

a. (b + c) = a.b + a.c, (বাওঁ বিতৰণ বিধি)

$(a + b).\ c = a.c + b.c$, (সোঁ বিতৰণ বিধি) $\forall\ a, b, c \in R$

টোকা 1. বলয় হ'বলৈ হ'লে উপৰিউক্ত স্বীকার্যকেইটা সিদ্ধ কৰা + আৰু . দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াযুক্ত এটা অৰিক্ত সংহতি থাকিব লাগিব। পাছত আমি মাত্ৰ 'ধৰা হ'ল R এটা বলয়' বুলিহে লিখিম। কিন্তু এইটো কথা মনত ৰাখিব লাগিব যে R অত দুটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া আছে, যথা + আৰু .।

2. এইটো কথাও মনত ৰাখিব লাগিব যে + আৰু . দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া দুটা আমাৰ সচৰাচৰ যোগ আৰু পূৰণ নহ'ব পাৰে।

3. যিহেতু যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত R এটা আবেলীয় সংঘ, গতিকে যোগাত্মক একক মৌল 0, R অত আছে। ইয়াক R অৰ শূন্য মৌল (zero element) বুলি কোৱা হয়। ইয়াত O এটা প্ৰতীক। ইয়াক বাস্তৱ সংখ্যা শূন্য বুলি ভাবিব নালাগে।

4. যদি $a, b \in R$, তেনেহ'লে $-b \in R$ (Θ R যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ)। $a + (-b)$ ক সাধাৰণতে $a - b$ ৰে বুজোৱা হয়।

5. a.b ক সাধাৰণতে ab ৰে বুজোৱা হয়।

ক্ৰমবিনিময় বলয়

এটা বলয় R অক ক্ৰমবিনিময় (commutative) বুলি কোৱা হয় যদি $ab = ba, \forall\ a, b \in R$.

এককসহ বলয়

এটা বলয় R অক এককসহ বলয় (ring with unity or identity) বোলা হয় যদি R অত এনে এটা মৌল e থাকে যাতে $ae = a = ea, \forall\ a \in R$

টোকা 1. এটা বলয়ৰ একক থাকিবও পাৰে, নাথাকিবও পাৰে।

2. যদি R এটা এককসহ বলয় হয়, একক আৰু শূন্য মৌল একে হ'বও পাৰে। উদাহৰণস্বৰূপে {0} এটা এককসহ ক্ৰমবিনিময় বলয়। ইয়াত 0 হ'ল যোগাত্মক তথা গুণাত্মক একক। এই বলয়টোক **শূন্য বলয়** (zero ring) বুলি কোৱা হয়।

উপপাদ্য 3.1 যদি R এটা এককসহ বলয়, একক অদ্বিতীয়।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল R এটা এককসহ বলয়। যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল e আৰু f, R অৰ দুটা একক।

$\therefore\ ef = e = fe$ [Θ f একক]

$ef = f = fe$ [Θ e একক]

$\therefore e = f$

উদাহৰণ 1. ধৰা হ'ল $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \text{ অখণ্ড সংখ্যা} \right\}$

I (i) ধৰা হ'ল $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R, \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R,$

$a, b, c, d \in Z$

এতিয়া $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in R$

$\therefore$ R অত মৌলকক্ষৰ যোগ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

(ii) আমি জানো যে মৌলকক্ষৰ যোগে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) $0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in R,$

আৰু $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(iv) প্ৰত্যেক $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in R$, অৰ বাবে, $\begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in R$ যাতে

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ৰ যোগাত্মক বিপৰীত হ'ল $\begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(v) আমি জানো যে মৌলকক্ষৰ যোগ ক্ৰমবিনিময়ে।

$\therefore$ মৌলকক্ষৰ যোগৰ অধীনত R এটা আবেলীয় সংঘ।

II. (i) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac & ad \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in R$

$\therefore$ R অত মৌলকক্ষৰ পূৰণ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

(ii) আমি জানো যে মৌলকক্ষৰ পূৰণে সাহচর্য বিধি মানি চলে।

III. আমি জানো যে মৌলকক্ষৰ যোগৰ ওপৰত মৌলকক্ষৰ পূৰণে বিতৰণ বিধি (distributive law) মানি চলে। দুয়োটা বিতৰণ বিধি (বাওঁ আৰু সোঁ) সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ মৌলকক্ষৰ যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত R এটা বলয়।

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in R,\ \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in R$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$ R বলয়টো ক্ৰমবিনিময়ে নহয়। আকৌ G ত এনে কোনো X নাই যাৰ বাবে

$$X\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X \text{ , } \forall \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$$

$\therefore$ R এটা একক বিহীন বলয়।

উদাহৰণ 2 ঃ ধৰা হ'ল R হ'ল অখণ্ড সংখ্যাৰ ওপৰত সকলো 2 x 2 মৌলকক্ষৰ সংহতি।

I. স্পষ্টতঃ মৌলকক্ষৰ যোগৰ অধীনত R এটা আবেলীয় সংঘ।

II. মৌলকক্ষৰ পূৰণৰ অধীনত R এটা অর্ধসংঘ।

III. দুয়োটা বিতৰণ বিধি সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ মৌলকক্ষৰ যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত R এটা বলয়।

আমি জানো যে মৌলকক্ষৰ পূৰণে সাধাৰণতে ক্রমবিনিময়ে বিধি মানি নচলে।

$\therefore$ R বলয়টো ক্রমবিনিময়ে নহয়।

আকৌ I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$, আৰু AI = A = IA, $\forall$ $A \in R$

$\therefore$ R এটা এককসহ বলয়।

উদাহৰণ 3 ঃ ধৰা হ'ল যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিটো 2 Z.

I. যোগৰ অধীনত 2Z এটা আবেলীয় সংঘ।

II. পূৰণৰ অধীনত 2Z এটা অর্ধসংঘ।

III. দুয়োটা বিতৰণ বিধি সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত 2Z এটা বলয়।

তদুপৰি, 2Z এটা ক্রমবিনিময়ে বলয়।

2Z এটা এককবিহীন বলয়, কিয়নো $1 \notin 2Z$

উদাহৰণ 4 ঃ ধৰা হ'ল Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

I. যোগৰ অধীনত Z এটা আবেলীয় সংঘ।

II. পূৰণৰ অধীনত Z এটা অর্ধসংঘ।

III. দুয়োটা বিতৰণ বিধি সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত Z এটা বলয়।

তদুপৰি Z এটা ক্রমবিনিময়ে বলয়। ই এটা এককসহ বলয়, $1 \in Z$.

আন কেইটামান এককসহ ক্রমবিনিময়ে বলয়ৰ উদাহৰণ হ'ল -

- পৰিমেয় সংখ্যাৰ বলয় Q
- বাস্তৱ সংখ্যাৰ বলয় IR
- জটিল সংখ্যাৰ বলয় C

উদাহৰণ 5 ঃ [a, b] ত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বাস্তৱ মানবিশিষ্ট অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ সংহতিটো C [a, b]ৰে বুজোৱা হ'ল, $a, b \in R$

ধৰা হ'ল $f, g \in C [a, b]$

সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল যে (f + g) (x)= f (x) + g (x)

(fg) (x) = f (x) g (x), $x \in [a, b]$

I. (i) (f + g) (x) = (x) + g (x) $\in$ R

আকৌ, দুটা অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ যোগফল অবিচ্ছিন্ন।

$\therefore$ f + g অবিচ্ছিন্ন আৰু সেয়ে f + g $\in$ C [a, b]

$\therefore$ C [a, b] ত ফলনৰ যোগ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

(ii) ধৰা হ'ল f, g, h $\in$ c [a, b], x $\in$ [a, b]

$$((f+g)+h)(x) = (f+g)(x)+h(x)$$
$$= \big(f(x)+g(x)\big)+h(x)$$
$$= f(x)+\big(g(x)+h(x)\big)$$
$$= f(x)+(g+h)(x)$$
$$= \big(f+(g+h)\big)(x), \forall x \in [a,b]$$

$\therefore$ (f + g) + h = f + (g + h)

(iii) 0 : [a, b] $\rightarrow$ R, 0 (x) = 0, $\forall$ x $\in$ [a, b]

স্পষ্টতঃ 0 $\in$ C [a, b], আৰু

0 + f = f = f + 0

(iv) প্ৰত্যেক f $\in$ C [a, b], ৰ বাবে

– f : [a, b] $\rightarrow$ R, (– f) (x) = –f (x)

সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল

$$\big(f+(-f)\big)(x) = f(x)+(-f)(x) = f(x)-f(x) = 0 = 0(x)$$

$\therefore$ f + (–f) = 0

সেইদৰে (–f) + f = 0

(v) (f + g) (x) = f (x) + g (x)

= g (x) + f (x)

= (g + f) (x), $\forall$ x $\in$ [a, b]

$\therefore$ f + g = g + f

$\therefore$ ফলনৰ যোগৰ অধীনত C [a, b] এটা আবেলীয় সংঘ।

II. (i) (fg) (x) = f (x) g (x) $\in$ R

আকৌ, দু টা অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ পূৰণফল অবিচ্ছিন্ন।

$\therefore$ fg অবিচ্ছিন্ন আৰু সেয়ে fg $\in$ C [a, b].

$\therefore$ C [a, b] ত ফলনৰ পূৰণ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

(ii) ((fg) h) (x) = (fg) (x) h (x)

= (f (x) g (x)) h (x)

$= f(x)\,(g(x)\,h(x))$

$= f(x)\,(gh)(x)$

$= (f(gh))(x),\ x \in [a, b]$

$\therefore\ (fg)h = f(gh)$

$\therefore$ ফলনৰ পূৰণৰ অধীনত C [a, b] এটা অর্ধসংঘ।

III. $((f+g)\,h)(x) = (f+g)(x)\,h(x)$

$= (f(x) + g(x))\,h(x)$

$= f(x)\,h(x) + g(x)\,h(x)$

$= (f\,h)(x) + (gh)(x)$

$= (fh + gh)(x)$

$\therefore\ (f+g)\,h = fh + gh$

সেইদৰে $f(g+h) = fg + fh$

$\therefore$ ফলনৰ যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত C [a, b] এটা বলয়।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

প্রশ্ন নং ১ঃ এটা মৌলবিশিষ্ট এটা এককসহ ক্রমবিনিময় বলয়ৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা এককবিহীন অক্রমবিনিময় বলয়ৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ এটা এককবিহীন ক্রমবিনিময় বলয়ৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ এটা এককসহ অক্রমবিনিময় বলয়ৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ এটা এককসহ অসীম ক্রমবিনিময় বলয়ৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ ধৰা হ'ল $IR^2 = \{(a, b) : a, b \text{ বাস্তৱ সংখ্যা}\}$

সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$,

$(a, b)\,(c, d) = (ac, bd)$;

a, b, c, d বাস্তৱ।

দেখুৱাওক যে IR^2 এটা এককসহ ক্রমবিনিময় বলয়।

৯.৪ বলয়ৰ ধর্ম

ধৰা হ'ল R এটা বলয়। তেনেহ'লে

(i) $a0 = 0a = 0;\ \forall\ a \in R$

(ii) $a(-b) = (-a)b = -(ab);\ \forall\ a, b \in R$

(iii) $(-a)(-b) = ab$; $\forall\ a, b \in R$

(iv) $a(b - c) = ab - ac$; $\forall\ a, b, c \in R$

প্ৰমাণ (i) $a0 = a(0 + 0)$

$= a0 + a0$, বাওঁ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$\therefore a0 + 0 = a0 + a0$

$\Rightarrow 0 = a0$, যোগাত্মক সংঘ R অত বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা অর্থাৎ $a0 = 0$

সেইদৰে $0a = 0$

(ii) $a0 = 0$

$\Rightarrow a((-b) + b) = 0$, $[\Theta (-b) + b = 0]$

$\Rightarrow a(-b) + ab = 0$, বাওঁ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$\Rightarrow ab$ ৰ যোগাত্মক বিপৰীত $a(-b)$

$\therefore$ অর্থাৎ $a(-b) = -(ab)$

সেইদৰে $(-a)b = -(ab)$

(iii) $(-a)(-b) = l(-b)$, $l = -a$ লৈ

$= -(lb)$, (ii) ৰ সহায়ত

$= -((-a)b)$

$= -(-(ab))$, (ii) ৰ সহায়ত

$= ab$

(iv) $a(b - c) = a(b + (-c))$

$= ab + a(-c)$, বাওঁ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= ab - ac$, (ii) ৰ সহায়ত

বুলীয় বলয়

ধৰা হ'ল R এটা বলয় আৰু $a \in R$, a ক R অৰ **বৰ্গসম মৌল** (idempotent element) বুলি কোৱা হয় যদি $a^2 = a$.

এটা বলয় R অক **বুলীয় বলয়** (Boolean ring) বুলি কোৱা হয় যদি ইয়াৰ প্ৰতিটো মৌল বৰ্গসম।

টোকা ঃ ঊনবিংশ শতিকাৰ জৰ্জ বুল (George Boole, 1815-1864) এজন স্ব শিকাৰু ব্ৰিটিছ। আলোক সন্ধানী গ্ৰন্থ The Laws of Thought. অৰ বাবে তেওঁ বিখ্যাত।

উপপাদ্য 3 ঃ ধৰা হ'ল R এটা বুলীয় বলয়। তেনেহ'লে

(i) $a + a = o$, $\forall a \in R$

অর্থাৎ R অৰ প্ৰতিটো মৌলই নিজেই নিজৰ যোগাত্মক বিপৰীত।

(ii) $a + b = o \Rightarrow a = b$, $\forall a, b \in R$

(iii) R এটা ক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

প্রমাণ (i) ধৰা হ'ল $a \in R$. $\therefore a^2 = a$

আকৌ $a + a \in R$

$\therefore (a + a)^2 = a + a$ [$\therefore$ R এটা বুলীয় বলয়]

$\Rightarrow (a + a)(a + a) = a + a$

$\Rightarrow (a + a)a + (a + a)a = a + a$, বাওঁ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$\Rightarrow (a^2 + a^2) + (a^2 + a^2) - a + a$, সোঁ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$\Rightarrow (a + a) + (a + a) = (a + a) + o$

$\Rightarrow a + a = o$, যোগাত্ম সংঘ R অত বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা

(ii) $a + a = o$

$\therefore a + b = a + a$, (i) অৰ পৰা

$\Rightarrow b = a$, যোগাত্ম সংঘ R অত বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা

অর্থাৎ $a = b$

(iii) ধৰা হ'ল $a, b \in R$ $\therefore a^2 = a, b^2 = b$

আকৌ $a + b \in R$

$\therefore (a + b)^2 = a + b$

$\Rightarrow (a + b)(a + b) = a + b$

$\Rightarrow (a + b)a + (a + b)b = a + b$, বাওঁ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$\Rightarrow (a^2 + ba) + (ab + b^2) = a + b$

$\Rightarrow (a + ba) + (ab + b) = a + b$

$\Rightarrow (a + b) + ba + ab = (a + b) + o$, যোগৰ সাহচর্য্যতা আৰু ক্রমবিনিময়তাৰ পৰা।

$\Rightarrow ba + ab = o$, যোগাত্মক সংঘ R অত বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা

$\Rightarrow ab = ba$, (ii) ৰ পৰা

$\therefore$ R এটা ক্রমবিনিময় বলয়।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল $R = \{a + b\sqrt{2}.a, b. \in Z\}$ দেখুওৱাক যে R এটা যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত এককসহ ক্রমবিনিময় বলয়।

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা বলয় R অত $a^2 = a \; \forall a \in R$, দেখুৱাওক যে $2a = 0$ আৰু $a + b = 0 \Rightarrow a = b$

প্রশ্ন নং ৩ঃ Z ত * আৰু (.) এনেদৰে ধৰা হ'ল যাতে a(.)b = a+b+1, a (.) b = a+b+ab. দেখুওৱাক যে (+) আৰু (.) প্রক্রিয়াৰ অধীনত Z এটা ক্রম বিনিময় বলয়। বলয়টোত একক মৌল আছেনে?



৯.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- যোগ (+) আৰু পূৰণ (.) – এই দুটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াযুক্ত এটা অৰিক্ত সংহতি R অক বলয় বুলি কোৱা হয়। যদি অধোলিখিত স্বীকার্যকেইটা সিদ্ধ হয়।

  (i) যোগৰ অধীনত R এটা আবেলীয় সংঘ,

  (ii) পূৰণৰ অধীনত R এটা অর্ধসংঘ,

  (iii) বিতৰণ বিধি দুটা প্ৰযোজ্য হয়, যথা,

  $a, (b + c) = a.b + a.c$, (বাওঁ বিতৰণ বিধি)

  $(a + b).c = a.c + b.c$, (সোঁ বিতৰণ বিধি)

  $\forall a, b, c \in R$

- এটা বলয় R অক ক্ৰমবিনিময়ে বুলি কোৱা হয় যদি $ab = ba, \forall a, b \in R$
- এটা বলয় R অক এককসহ বলয় বোলা হয় যদি R অত এনে এটা মৌল e থাকে যাতে $ae = a = ea, \forall a \in R$



৯.৬ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ {o} এটা এককসহ ক্ৰমবিনিময়ে বলয়। মনত ৰাখিব লাগিব যে এই বলয়টোত শূন্য যোগাত্মক একক তথা গুণাত্মক একক।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ R = {(a b) : a, b অখণ্ড সংখ্যা} বলয়টো এককবিহীন অক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় 2Z এটা এককবিহীন ক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ অখণ্ড সংখ্যাৰ ওপৰত সকলো 2 x 2 মৌলকক্ষৰ বলয় R এটা এককসহ অক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় Z এটা এককসহ অসীম ক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $IR^2 = \{(a, b) : a, b$ বাস্তৱ সংখ্যা$\}$

I. (i) ধৰা হ'ল $(a, b), (c, d) \in IR^2$, a, b, c, d বাস্তৱ সংখ্যা।

এতিয়া $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in IR^2$

(ii) ধৰা হ'ল (a, b), (c, d), (e, f) $\in IR^2$

$((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, f)$

$= ((a + c) + e, (b + d) + f)$

$= (a + (c + e), b + (d + f))$

$= (a, b) + (c + e, d + f)$

$= (a, b) + ((c, d) + (a, f))$

$\therefore$ যোগে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) $(0, 0) \in IR^2$ আৰু

$(0, 0) + (a, b) = (a, b) = (a, b) + (0, 0)$

$\therefore$ (0, 0) হ'ল যোগাত্মক একক মৌল।

(iv) প্ৰত্যেক $(a, b) \in IR^2$, অৰ বাবে, $(-a, -b) \in IR^2$ আৰু $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$

$= (-a, -b) + (a, b)$

$\therefore$ (a, b) ৰ যোগাত্মক বিপৰীত (–a, – b).

(v) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

$= (c + a, d + b)$

$= (c, d) + (a, b)$

$\therefore$ যোগে ক্ৰমবিনিময়ে বিধি মানি চলে।

$\therefore$ যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত IR^2 এটা আবেলীয় সংঘ।

II. (i) $(a, b) (c, d) = (ac, bd) \in IR^2$

(ii) $((a, b) (c, d)) (e, f) = (ac, bd) (e, f)$

$= ((ac) e, (bd) f)$

$= (a (ce), b (df))$

$= (a, b) (ce, df)$

$= (a, b) ((c, d) (e, f))$

$\therefore$ পূৰণে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

$\therefore$ পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত IR^2 এটা অৰ্ধসংঘ।

III. $(a, b) ((c, d) + (e, f)) = (a, b) (c + e, d + f)$

$= (a (c + e), b (d + f))$

$= (ac + ae, bd + bf)$

$= (ac, bd) + (ae, bf)$

$= (a, b) (c, d) + (a, b) (e, f)$

সেইদৰে $((a, b) + (c, d)) (e, f) = (a, b) (e, f) + (c, d) (e, f)$

$\therefore IR^2$ এটা বলয়।

আকৌ (a, b) (c, d) = (ac, bd)

= (ca, db)

= (c, d) (a, b)

$\therefore$ IR^2 এটা ক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

আকৌ (1, 1) $\in IR^2$, আৰু

(a, b) (1, 1) = (a1, b1) = (a, b) = (1, 1) (a, b)

$\therefore$(1, 1) হ'ল একক মৌল।

গতিকে IR^2 এটা এককসহ ক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ এইটো সহজে প্ৰতিস্থাপন কৰিব পাৰি যে R এটা $0 = 0 + 0\sqrt{2}$ যোগাত্মক একক আৰু $1 = 1 + 0\sqrt{2}$ গুণাত্মক এককসহ এটা ক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ উপপাদ্য 3 (i), (ii) ৰ পৰা।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ এইটো সহজে প্ৰতিস্থাপন কৰিব পাৰি যে Z এটা ক্ৰমবিনিময়ে বলয়। আকৌ $a\,(.)0 = 0 = 0(.)a,\ \forall a \in z$ গতিকে Z = 0 এককসহ এটা বলয়।



৯.৭ অধিক জানিবলৈ

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.
2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).
3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).
4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.
5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



৩.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ঃ Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি। Z অত (+) আৰু (.) অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হৈছে।

$a (+) b = a + b - 1$,

$a (.) b = a + b - ab$, $\forall a, b \in Z$

(+), (.) অৰ অধীনত Z এটা এককসহ ক্ৰমবিনিময়ে বলয় হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ২ঃ প্ৰমাণ কৰক যে বলয় R ক্ৰমবিনিময়ে হ'ব যদি আৰু যদিহে

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $\forall$ $a, b \in R$

[ইয়াত a^2 অৰ অৰ্থ হ'ল aa]

প্ৰশ্ন ৩ঃ ধৰা হ'ল P(S) S ৰ ঘাত সংহতি। A, B P(S) ৰ বাবে, ধৰা হ'ল (+) আৰু (.) একেদৰে দিয়া আছে যে $A (+) B = A \cup B$, $A(.)B = A \cap B$

দেখুওৱাক যে P(S) এটা এককসহ ক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

*** ***** ***

অধ্যায় ১০ ঃ সমাকল প্রান্ত আৰু ক্ষেত্র (INTEGRAL DOMAIN AND FIELD)

অধ্যায় গাঁথনি

১০.১ উদ্দেশ্য

১০.২ পৰিচয়

১০.৩ সমাকল প্রান্ত

১০.৪ ক্ষেত্র

১০.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১০.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১০.৭ অধিক জানিবলৈ

১০.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

১০.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰাৰ পাছত আপুনি অধোলিখিত বিষয়বোৰ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

- সমাকল প্রান্ত আৰু সিহঁতৰ ধর্ম
- সমাকল প্রান্ত, ক্ষেত্র আৰু সিহঁতৰ ধর্ম।

১০.২ পৰিচয়

নৱম অধ্যায়ত আমি বলয় আৰু সিহঁতৰ বিভিন্ন ধর্মসমূহৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিছো। এই অধ্যায়টিত আমি সমাকল প্রান্ত আৰু ক্ষেত্রৰ সম্বন্ধে অধ্যয়ন কৰিম। সমাকল প্রান্ত আৰু ক্ষেত্রত নির্দিষ্ট কিছুমান স্বীকার্য সিদ্ধ কৰা হয়।

১০.৩ সমাকল প্রান্ত

অখণ্ড সংখ্যাৰ ওপৰত সকলো 2 x 2 মৌলকক্ষৰ বলয় R লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in R$

ইয়াত A আৰু B কোনোটোৱেই শূন্য মৌলকক্ষ নহয়।

কিন্তু $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

অর্থাৎ, AB এটা শূন্য মৌলকক্ষ।

গতিকে আমি দেখিলোঁ যে $A \neq 0$, $B \neq 0$; কিন্তু $AB = 0$

আকৌ, অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় Z লোৱা হ'ল। যদি $a, b \in Z$ আৰু $a \neq 0$, $b \neq 0$, তেনেহ'লে $ab \neq 0$

সংজ্ঞা ঃ এটা বলয় R অৰ এটা মৌল a ক ($\neq 0$) শূন্য ভাজক (zero divisor) বুলি কোৱা হয় যদি R অত এটা মৌল b ($\neq 0$) থাকে যাতে $ab = 0$ বা $ba = 0$.

আমি দেখিলোঁ যে অখণ্ড সংখ্যাৰ ওপৰত সকলো 2 x 2 মৌলকক্ষৰ বলয় R অত শূন্য ভাজক আছে। আনহাতেদি অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় Z অত শূন্য ভাজক নাই, কিয়নো যদি $a \in Z$, $b \in Z$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, তেনেহ'লে $ab \neq 0$, $ba \neq 0$.

বিলোপন বিধি ঃ ধৰা হ'ল R এটা বলয়। যিহেতু R এটা যোগাত্মক আবেলীয় সংঘ, গতিকে যোগাত্মক বিলোপন বিধি R অত প্রযোজ্য।

গতিকে বলয়ত বিলোপন বিধি বুলি ক'লে আমি গুণাত্মক বিলোপন বিধিকহে বুজিম (অশূন্য মৌলৰ বিলোপন)

R অত বিলোপন বিধি প্রযোজ্য হয়— যদি $ab = ac \Rightarrow b = c$, $ba = ca \Rightarrow b = c$; য'ত $a, b, c \in R$, $a \neq 0$.

উপপাদ্য 4 ঃ এটা বলয় R অত বিলোপন বিধি প্রযোজ্য যদি আৰু যদিহে R অৰ শূন্য ভাজক নাই।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল বিলোপন বিধি প্রযোজ্য।

ধৰা হ'ল $a, b \in R$ যাতে $ab = 0$

যদি $a \neq 0$, $ab = 0 \Rightarrow ab = a0 \Rightarrow b = 0$, বিলোপন বিধিৰ পৰা

সেইদৰে, যদি $b \neq 0$, $ab = 0 \Rightarrow ab = 0b \Rightarrow a = 0$

$\therefore$ R অৰ শূন্য ভাজক নাই।

বিপৰীত ক্রমে, ধৰা হ'ল R অত শূন্য ভাজক নাই।

ধৰা হ'ল $a, b, c \in R$ আৰু $ab = ac$, $a \neq 0$

$\therefore ab - ac = 0$

$\Rightarrow a(b - c) = 0$

$\therefore a \neq 0$ আৰু R অত শূন্য ভাজক নাই,

$\therefore b - c = 0 \Rightarrow b = c$

গতিকে, যদি $a \neq 0$, $ab = ac \Rightarrow b = c$

সেইদৰে, যদি $a \neq 0$, $ba = ca \Rightarrow b = c$

গতিকে, R অত বিলোপন বিধি প্রযোজ্য।

সংজ্ঞা ঃ এটা একক $e \neq 0$ সহ, শূন্য ভাজকবিহীন ক্ৰমবিনিময়ে বলয় R অক সমাকল প্ৰান্ত (integral domain) বুলি কোৱা হয়।

সমাকল প্ৰান্তৰ সবাতোকৈ সহজ উদাহৰণটো হ'ল অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় Z. এইটো এটা ক্ৰমবিনিময়ে বলয়, একক আছে, শূন্য ভাজক নাই।

টোকা ঃ সমাকল প্ৰান্তক Z অৰ সাধাৰণীকৰণ বুলিব পাৰি।

উদাহৰণ 6 ঃ গাউছীয় অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি R = {a + bi : a, b অখণ্ড সংখ্যা; $i = \sqrt{-1}$} লোৱা হ'ল। [ছি এফ গাউছ (C. F. Gauss (1777-1855) এজন বিখ্যাত গণিতজ্ঞ]

I. (i) ধৰা হ'ল $a + bi, c + di \in R$,

a, b, c, d অখণ্ড সংখ্যা, $i = \sqrt{-1}$

$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i \in R$

(ii) জটিল সংখ্যাৰ যোগে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) $0 = 0 + 0i \in R$

আৰু $0 + (a + bi) = a + bi = (a + bi) + o$

(iv) প্ৰত্যেক $a + bi \in R$, অৰ বাবে, $(–a) + (–b)i \in R$ যাতে

$(a + bi) + ((–a) + (–b)i) = o = ((–a) + (–b)i) + (a + bi)$

(v) জটিল সংখ্যাৰ যোগে ক্ৰমবিনিময়ে বাধি মানি চলে।

$\therefore$ জটিল সংখ্যাৰ যোগৰ অধীনত R এটা আবেলীয় সংঘ।

II. (i) $(a + bi)(c + di) = (ac – bd) + (ad + bc)i \in R$

(ii) জটিল সংখ্যাৰ পূৰণে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

III. স্পষ্টতঃ দুয়োটা বিতৰণ বিধি প্ৰযোজ্য হয়।

$\therefore$ R এটা বলয়।

তদুপৰি, জটিল সংখ্যাৰ পূৰণে ক্ৰমবিনিময়ে বিধি মানি চলে।

$\therefore$ R এটা ক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

আকৌ $1 \in R$ (1=1 + oi)

$\therefore$ R এটা এককসহ বলয়।

আকৌ আমি জানো যে দুটা অশূন্য জটিল সংখ্যাৰ পূৰণফল শূন্য হ'ব নোৱাৰে।

$\therefore$ R অত শূন্য ভাজক নাই।

গতিকে, R এটা সমাকল প্ৰান্ত।

১০.৪ ক্ষেত্ৰ

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল R এটা একক e সহ বলয় ($e \neq 0$)।

যদি R অৰ প্ৰত্যেক অশূন্য মৌলৰ R অত গুণাত্মক বিপৰীত থাকে, তেনেহ'লে R

অক হৰণ বলয় বা বিষম ক্ষেত্ৰ (division ring or a skew field) বুলি কোৱা হয়।

এটা ক্ৰমবিনিময়ে হৰণ বলয়ক ক্ষেত্ৰ (field) বুলি কোৱা হয়।

ক্ষেত্ৰৰ সবাতোকৈ সহজ উদাহৰণ হ'ল বাস্তৱ সংখ্যাৰ বলয় IR.

ই ক্ৰমবিনিময়ে, একক আছে আৰু প্ৰতিটো অশূন্য মৌলৰ গুণাত্মক বিপৰীত IR অত আছে।

সেইদৰে, জটিল সংখ্যাৰ বলয় C এটা ক্ষেত্ৰ।

টোকা ঃ অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় Z ক্ষেত্ৰ নহয়। (কিয়?)

উদাহৰণ 7 ঃ গাউছীয় অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয়

$R = \{a + bi : a, b,$ অখণ্ড সংখ্যা, $i = \sqrt{-1}\}$

ক্ষেত্ৰ হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে R এটা এককসহ ক্ৰমবিনিময়ে বলয় (উদাহৰণ 6 দ্ৰষ্টব্য)।

ধৰা হ'ল $a + bi \in R$ যাতে $a + bi \neq o$

এতিয়া $a + bi$ ৰ গুণাত্মক বিপৰীত হ'ল $\frac{a}{a^2+b^2} + \left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i$ ই R অৰ মৌল নহয়।

$\therefore$ R ক্ষেত্ৰ নহয়।

উপপাদ্য 5 ঃ প্ৰত্যেক ক্ষেত্ৰই এটা সমাকল প্ৰান্ত।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল F এটা ক্ষেত্ৰ।

ধৰা হ'ল $a, b \in F$ যাতে $a \neq o$ আৰু $ab = o$

$\therefore a \neq o, a^{-1} \in F$ (Θ F এটা ক্ষেত্ৰ)

এতিয়া $ab = o$

$\Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} o$

$\Rightarrow (a^{-1} a) b = o$

$\Rightarrow b = o$

সেইদৰে, যদি $b \neq o$ আৰু $ab = o$, তেনেহ'লে $a = o$

$\therefore$ F অৰ শূন্য ভাজক নাই।

গতিকে F এটা শূন্য ভাজকবিহীন এককসহ ক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

$\therefore$ F এটা সমাকল প্ৰান্ত।

টোকা ঃ উপৰিউক্ত উপপাদ্যটোৰ বিপৰীতটো সত্য নহয়, অৰ্থাৎ প্ৰত্যেক সমাকল প্ৰান্তই ক্ষেত্ৰ নহয়।

অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Z লোৱা হ'ল। আমি জানো যে Z এটা সমাকল প্ৰান্ত। কিন্তু Z অৰ মাত্ৰ দুটা মৌল –1 আৰু 1 অৰহে Z অত গুণাত্মক বিপৰীত আছে। গতিকে, Z ক্ষেত্ৰ নহয়।

অৱশ্যে এটা অশূন্য সসীম সমাকল প্ৰান্ত ক্ষেত্ৰ হয়।

উপপাদ্য 6 ঃ এটা অশূন্য সসীম সমাকল প্ৰান্ত ক্ষেত্ৰ।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল R = {a_1, a_2, a_3, ... a_n} এটা সসীম অশূন্য সমাকল প্ৰান্ত, য'ত a_i বোৰ ভিন্ন ভিন্ন।

ধৰা হ'ল R অৰ শূন্য মৌল a_1.

a_2, a_3, ...,a_n অশূন্য মৌলবোৰ বিবেচনা কৰা হ'ল।

ধৰা হ'ল a_p, R অৰ একক নহয় ($p \neq 1$) অর্থাৎ $a_p \neq e$, R ৰ একক।

$a_p a_2$, $a_p a_3$, ..., $a_p a_n$ পূৰণফল কেইটা লোৱা হ'ল।

এই সকলোবোৰ R অৰ মৌল। আকৌ, সকলোবোৰ মৌল ভিন্ন ভিন্ন, কিয়নো যদি

$a_p a_i = a_p a_j$, $2 \leq i \leq n$, $2 \leq j \leq n$, $i \neq j$

তেনেহ'লে $a_p a_i - a_p a_j = 0$

$\Rightarrow a_p (a_i - a_j) = 0$

$\Rightarrow a_i - a_j = 0$, [$\Theta a_p \neq 0$ আৰু R শূন্য ভাজকবিহীন]

$\Rightarrow a_i = a_j$, এইটো স্ববিৰোধী কথা।

এতিয়া $a_p a_2$, $a_p a_3$, ..., $a_p a_n$ বোৰৰ এটা একক হ'ব লাগিব। ধৰা হ'ল $a_p a_q$ = e, য'ত e হ'ল R অৰ একক।

$\therefore a_p a_q = e = a_q a_p$.

$\therefore$ R অত a_p ৰ গুণাত্মক বিপৰীত আছে।

যদি a_p, R অৰ একক, তেনেহ'লে R অত a_pৰ গুণাত্মক বিপৰীত আছে।

গতিকে, R অৰ প্ৰত্যেক অশূন্য মৌলৰ R ত গুণাত্মক বিপৰীত আছে।

$\therefore$ R এটা ক্ষেত্ৰ।

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১ঃ পৰিমেয় সংখ্যাৰ বলয় Q ত শূন্য ভাজক আছেনে?

প্ৰশ্ন নং ২ঃ অখণ্ড সংখ্যাৰ ওপৰত সকলো 2 x 2 মৌলকক্ষৰ বলয় R লোৱা হ'ল। R অত বিলোপন বিধি প্ৰযোজ্য হয়নে?



প্ৰশ্ন নং ৩ঃ যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় 2Z সমাকল প্ৰান্ত হয়নে?

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ এনে এটা সমাকল প্ৰান্তৰ উদাহৰণ দিয়ক যিটো ক্ষেত্ৰ নহয়।

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ $IR^2 = \{(a, b) : a, b \in IR\}$ বলয়টোত শূন্য ভাজক আছেনে?



১০.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- এটা বলয় R অৰ এটা মৌল a ক $a(\neq 0)$ শূন্য ভাজক বুলি কোৱা হয় যদি R অত এটা মৌল b $(\neq 0)$ থাকে যাতে ab = 0 বা ba = 0
- এটা একক $e \neq 0$ সহ, শূন্য ভাজকবিহীন ক্রমবিনিময়ে বলয় R অক সমাকল প্রান্ত বুলি কোৱা হয়।
- ধৰা হ'ল R এটা একক e সহ বলয় $(e \neq 0)$।
  যদি R অৰ প্রত্যেক অশূন্য মৌলৰ R অত গুণাত্মক বিপৰীত থাকে, তেনেহ'লে R অক হৰণ বলয় বা বিষম ক্ষেত্র বুলি কোৱা হয়।
  এটা ক্রমবিনিময়ে হৰণ বলয়ক ক্ষেত্র বুলি কোৱা হয়।
- প্রত্যেক ক্ষেত্রই এটা সমাকল প্রান্ত, কিন্তু প্রত্যেক সমাকল প্রান্তই ক্ষেত্র নহয়।
- এটা অশূন্য সসীম সমাকল প্রান্ত ক্ষেত্র।



১০.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নহয়। যদি $a, b \in Q$ আৰু $a \neq 0, b \neq 0$, তেনেহ'লে $ab \neq 0$.

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নহয়। এটা বলয়ত বিলোপন বিধি প্রযোজ্য যদি আৰু যদিহে বলয়টোত শূন্য ভাজক নাই। অখণ্ড সংখ্যাৰ ওপৰত 2 x 2 মৌলকক্ষৰ বলয়টোত শূন্য ভাজক আছে। গতিকে অখণ্ড সংখ্যাৰ ওপৰত 2 x 2 মৌলকক্ষৰ বলয়টোত বিলোপন বিধি প্রযোজ্য নহয়।

উদাহৰণ স্বৰূপে

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 3\\5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 54\\54 & 72\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 9\\4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 54\\54 & 72\end{pmatrix}$$

অর্থাৎ $\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 3\\5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 9\\4 & 5\end{pmatrix}$,

অর্থাৎ AB = AC, কিন্তু $B \neq C$,

যি'ত $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় 2Z সমাকল প্ৰান্ত নহয়, কিয়নো ইয়াত গুণাত্মক একক মৌল নাই।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় Z এটা সমাকল প্ৰান্ত কিন্তু ক্ষেত্ৰ নহয়। মাত্ৰ –1 আৰু 1 অৰহে Z অত গুণাত্মক বিপৰীত আছে।

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ হয়।

$(7, 0) \in IR^2, (0, 13) \in IR^2, (7, 0) \neq (0, 0), (0, 13) \neq (0, 0)$ কিন্তু (7, 0) (0, 13) = (0, 0)



১০.৭ অধিক জানিবলৈ

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.
2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).
3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).
4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.
5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



১০.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ঃ ধৰা হ'ল R = {(a, b) : a, b বাস্তৱ সংখ্যা} .R অত যোগ আৰু পূৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)

$(a, b)\ (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$

প্ৰমাণ কৰক যে IR^2 এটা ক্ষেত্ৰ।

প্ৰশ্ন ২ঃ ধৰা হ'ল $R = \{a + b\sqrt{-2} : a, b$ পৰিমেয় সংখ্যা$\}$ দেখুৱাওক যে যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত R এটা ক্ষেত্ৰ।

প্ৰশ্ন ৩ঃ ধৰা হ'ল R এটা শূন্য ভাজক বিহীন এককসহ ক্ৰমবিনিময় বলয়। দেখুৱাওক যে শূন্য মৌল আৰু একক মৌলই একমাত্ৰ বৰ্গসম মৌল।

*** ***** ***

অধ্যায় ১১ ঃ ভেক্টৰ স্থান (VECTOR SPACE)

অধ্যায় গাঁথনি

১১.১ উদ্দেশ্য
১১.২ পৰিচয়
১১.৩ ভেক্টৰ স্থানৰ সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ
১১.৪ প্ৰাথমিক ধৰ্ম
১১.৫ ভেক্টৰ স্থানৰ উপস্থান
১১.৬ ৰৈখিক পৰতন্ত্ৰতা আৰু স্বতন্ত্ৰতা
১১.৭ আধাৰ আৰু মাত্ৰা
১১.৮ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১১.৯ অধিক জানিবলৈ
১১.১০ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান
১১.১১ আৰ্হি প্ৰশ্ন

১১.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- ভেক্টৰ স্থানৰ সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ জানিব পাৰিব
- ভেক্টৰ স্থানৰ প্ৰাথমিক ধৰ্ম জানিব পাৰিব
- ভেক্টৰ স্থানৰ উপস্থান সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- ভেক্টৰৰ ৰৈখিক পৰতন্ত্ৰতা আৰু স্বতন্ত্ৰতা সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- ভেক্টৰৰ আধাৰ আৰু মাত্ৰা সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

১১.২ পৰিচয়

আমি ভেক্টৰ (vector) সম্বন্ধে জানো। ভেক্টৰৰ ধাৰণাৰ পৰা ভেক্টৰ স্থানৰ (vector space) ধাৰণা আহিছে। ভেক্টৰত আমি ভেক্টৰৰ যোগ, ভেক্টৰক স্কেলাৰেৰে পূৰণ আৰু ভেক্টৰৰ স্কেলাৰ পূৰণ পাইছোঁ। ভেক্টৰ স্থানতো আমি ভেক্টৰৰ যোগ, ভেক্টৰক স্কেলাৰেৰে পূৰণ আৰু ভেক্টৰৰ স্কেলাৰ পূৰণ পাওঁ। গতিকে ভেক্টৰ স্থানক আমি বলবিজ্ঞান বা বিশ্লেষণাত্মক জ্যামিতিত পোৱা ভেক্টৰৰ সাধাৰণীকৰণ বুলি ক'ব পাৰোঁ।

১১.৩ ভেক্টৰ স্থানৰ সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ (DEFINITION AND EXAMPLES OF VECTOR SPACE)

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল "+" প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীত V এটা আবেলীয় সংঘ। ধৰা হ'ল "+, $\bullet$ " প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীত F এটা ক্ষেত্ৰ।

F অৰ প্ৰত্যেক মৌল α আৰু V ৰ x অৰ বাবে, $\alpha x \in V$. ইয়াক স্কেলাৰ পূৰণ বুলি কোৱা হয়।

তেতিয়া ক্ষেত্ৰ F অৰ ওপৰত V ক ভেক্টৰ স্থান (Vector space over the field F) বুলি কোৱা হয় যদি তলৰ চৰ্তকেইটা সিদ্ধ হয়।

1. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$
2. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$
3. $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$
4. $1x=x$

য'ত $\alpha,\beta\in F$, $x,y\in V$ আৰু 1 হ'ল F অৰ একক মৌল।

আমি এনেদৰে লিখিম, $V(F)$ এটা ভেক্টৰ স্থান।

টোকা

1. V ৰ মৌলবোৰক ভেক্টৰ (vector) আৰু F অৰ মৌলবোৰক স্কেলাৰ (scalar) বুলি কোৱা হয়।
2. $x+y$ এ V ৰ দুটা ভেক্টৰ x আৰু y ৰ 'যোগ' (+) বুজায়, $x,y\in V$. আনহাতেদি $\alpha+\beta$ ই F অৰ দুটা স্কেলাৰ α আৰু β ৰ 'যোগ' (+) বুজায়, $\alpha,\beta\in F$. এই কথাটো মনত ৰাখিব লাগিব যে এই 'যোগ' দুটা পৃথক, যদিও দুয়োটাকে একে প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হৈছে।
3. αx এ V ৰ ভেক্টৰ x আৰু F অৰ স্কেলাৰ α ৰ 'পূৰণ' বুজায়। আনহাতেদি $\alpha\beta$ ই F অৰ দুটা স্কেলাৰ α,β ৰ 'পূৰণ' বুজায়। এই কথাটোৰো মনত ৰাখিব লাগিব যে এই 'পূৰণ' দুটাও পৃথক, যদিও দুয়োটাকে একে প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হৈছে।
4. " + " প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত V আবেলীয় সংঘ। " + " প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত F এটা ক্ষেত্ৰ। আকৌ ভেক্টৰক স্কেলাৰেৰে পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াটোৰো আছে। গতিকে দেখা গ'ল যে এটা ভেক্টৰ স্থানত মুঠতে চাৰিটা প্ৰক্ৰিয়া আছে।
5. " + " প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত V আবেলীয় সংঘ। গতিকে " + " প্ৰক্ৰিয়া সাপেক্ষে একক মৌল 0 আছে। ইয়াক শূন্য মৌল (zero element) বুলি কোৱা হয়। আকৌ F এটা ক্ষেত্ৰ। গতিকে F অত শূন্য মৌল 0 আছে। এই শূন্য দুটা পৃথক, যদিও দুয়োটাকে একে প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হৈছে। আকৌ F অত একক মৌল 1 আছে। মনত ৰাখিব লাগিব যে এই 1 টো বাস্তৱ সংখ্যা 1 নহ'বও পাৰে।

6. যদি $F = R$, অর্থাৎ, যদি F বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্র হয়, তেনেহ'লে $V(R)$ অক বাস্তৱ ভেক্টৰ স্থান (real vector space) বুলি কোৱা হয়।
   যদি $F = C$, অর্থাৎ, যদি F জটিল সংখ্যাৰ ক্ষেত্র হয়, তেনেহ'লে $V(C)$ ক জটিল ভেক্টৰ স্থান (complex vector space) বুলি কোৱা হয়।
7. V ত 'বিয়োগ'ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়, $x - y = x + (-y)$, য'ত $-y$ হ'ল y ৰ যোগাত্মক বিপৰীত (additive inverse), y ; $x, y \in V$.

উদাহৰণ 1 ঃ ধৰা হ'ল $R^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2$ বাস্তৱ$\}$, আৰু R বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্র। R^2 অত যোগ আৰু স্কেলাৰ পূৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad \text{... (1)}$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) \quad \text{... (2)}$$

য'ত $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in R^2$, $\alpha \in R$.

তেনেহ'লে R অৰ ওপৰত R^2 এটা ভেক্টৰ স্থান, অর্থাৎ R^2 এটা বাস্তৱ ভেক্টৰ স্থান।

সমাধান ঃ I. প্রথমতে আমি (1) অৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ + প্রক্রিয়াৰ অধীনত R^2 এটা আবেলীয় সংঘ বুলি প্রমাণ কৰোঁ।

(i) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in R^2$

(ii) ধৰা হ'ল $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in R^2$

এতিয়া $(x + y) + z = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) + (z_1, z_2)$

$$= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2)$$
$$= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2))$$
$$= (x_1, x_2) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2)$$
$$= x + (y + z)$$

$\therefore$ "+" প্রক্রিয়াই সাহচর্য বিধি মানি চলে।

(iii) আমি জানো $0 = (0,0) \in R^2$

আৰু $x + 0 = (x_1, x_2) + (0,0) = (x_1 + 0, x_2 + 0) = (x_1, x_2) = x$

সেইদৰে, $0 + x = x$

অর্থাৎ, $x + 0 = x = 0 + x$

[মন কৰিব লগীয়া যে $0 = (0,0)$, ত, বাওঁহাতৰ 0 টো এটা প্রতীক, বাস্তৱ সংখ্যা 0 নহয়।]

(iv) প্রত্যেক $x = (x_1, x_2) \in R^2$ অৰ বাবে,

$-x = (-x_1, -x_2) \in R^2$ আছে যাতে $x + (-x) = (x_1, x_2) + (-x_1, -x_2)$

$$= (x_1 - x_1, x_2 - x_2)$$
$$= (0,0) \quad = 0$$

সেইদৰে $(-x)+x=0$

অর্থাৎ, $x+(-x)=0=(-x)+x$

(v) $x+y=(x_1,x_2)+(y_1,y_2)$

$=(x_1+y_1,x_2+y_2)$

$=(y_1+x_1,y_2+x_2)$

$\therefore$ "+" প্রক্রিয়াৰ অধীনত R^2 এটা আবেলীয় সংঘ।

II. আমি জানো $\alpha\in R, x=(x_1,x_2)\in R^2$

$\alpha x=\alpha(x_1,x_2)$

$=(\alpha x_1,\alpha x_2)\in R^2$

III. (i) $\alpha(x+y)=\alpha(x_1+y_1,x_2+y_2)$

$=(\alpha x_1+\alpha y_1,\alpha x_2+\alpha y_2)$

$=(\alpha x_1,\alpha x_2)+(\alpha y_1,\alpha y_2)$

$=\alpha(x_1,x_2)+\alpha(y_1,y_2)$

$=\alpha x+\alpha y$

(ii) $(\alpha+\beta)x=(\alpha+\beta)(x_1,x_2)$

$=((\alpha+\beta)x_1,(\alpha+\beta)x_2)$

$=(\alpha x_1+\beta x_1,\alpha x_2+\beta x_2)$

$=(\alpha x_1,\alpha x_2)+(\beta x_1,\beta x_2)$

$=\alpha(x_1,x_2)+\beta(x_1,x_2)$

$=\alpha x+\beta x\ ,\alpha,\beta\in R, x=(x_1,x_2)\in R^2$

(iii) $(\alpha\beta)x=\alpha\beta(x_1,x_2)$

$=((\alpha\beta)x_1,(\alpha\beta)x_2)$

$=(\alpha(\beta x_1),\alpha(\beta x_2))$

$=\alpha(\beta x_1,\beta x_2)$

$=\alpha(\beta(x_1,x_2))$

$=\alpha(\beta x)$

(iv) আমি জানো $1\in R$

$1x=1(x_1,x_2)=(1x_1,1x_2)=(x_1,x_2)=x$

$\therefore$ R অৰ ওপৰত R^2 এটা ভেক্টৰ স্থান, অর্থাৎ R^2 এটা বাস্তৱ ভেক্টৰ স্থান।

উদাহৰণ 2 ঃ ধৰা হ'ল $R^n=\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, x_2$ বাস্তৱ সংখ্যা$\}$, আৰু R বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰ। R^n বাস্তৱ ভেক্টৰ স্থান হ'ব যোগ আৰু স্কেলাৰ পূৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়—

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$$

য'ত $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$ আৰু $\alpha \in R^n$.

আগৰ অংকটোৰ দৰে এইটো প্ৰমাণ কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 3 ঃ ধৰা হ'ল $[a,b]$ত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বাস্তৱ মান বিশিষ্ট অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ সংহতিটো V। তেনেহ'লে V এটা বাস্তৱ ভেক্টৰ স্থান হ'ব যদি যোগ আৰু স্কেলাৰ পুৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

য'ত $f, g \in V$, আৰু $\alpha \in R$.

I. প্ৰথমতে আমি প্ৰমাণ কৰোঁ যে যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত V এটা আবেলীয় সংঘ।

(i) ধৰা হ'ল $f, g \in V$

$\therefore [a,b]$ ত সংজ্ঞাৱদ্ধ f আৰু g দুটা বাস্তৱ মানবিশিষ্ট ফলন।

$\therefore f+g$ ও $[a,b]$ ত সংজ্ঞাৱদ্ধ বাস্তৱ মানবিশিষ্ট ফলন।

$\therefore \quad f+g \in V$.

(ii) ধৰা হ'ল $f, g, h \in V$ আৰু $x \in [a,b]$

এতিয়া, $((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x)$

$$= (f(x) + g(x)) + h(x)$$
$$= f(x) + (g(x) + h(x))$$
$$= f(x) + (g+h)(x)$$
$$= (f + (g+h))(x), \forall x \in [a,b]$$

$\therefore (f+g)+h = f+(g+h), \ \forall f, g, h \in V$

(iii) ধৰা হ'ল $\theta : [a,b] \to R$, $\theta(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$.

স্পষ্টত ঃ $\theta \in V$

এতিয়া $(\theta + f)(x) = \theta(x) + f(x)$

$$= 0 + f(x)$$
$$= f(x), \ \forall x \in [a,b]$$

$\therefore \theta + f = f$

সেইদৰে $f + \theta = f$

$\therefore f + \theta = f = \theta + f$

(iv) V ৰ প্ৰত্যেক f অৰ বাবে, $-f$ অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$$(-f)(x) = -f(x), \forall x \in [a,b]$$

স্পষ্টতঃ $-f \in v$

এতিয়া $(f+(-f))(x) = f(x)+(-f)(x)$

$$= f(x) - f(x)$$
$$= 0$$
$$= \theta(x), \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\therefore f+(-f) = \theta$$

সেইদৰে, $(-f)+f = \theta$

$$\therefore f+(-f) = \theta = (-f)+f$$

(v) $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$$= g(x)+f(x)$$
$$= (g+f)(x), \forall x \in [a,b]$$

$$\therefore f+g = g+f$$

$\therefore$ যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত V এটা আবেলীয় সংঘ।

II. ধৰা হ'ল $\alpha \in R$, $f \in V$, $x \in [a,b]$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \in R$$

যিহেতু f অবিচ্ছিন্ন, $\therefore \alpha f$ ও অবিচ্ছিন্ন।

$$\therefore \alpha f \in V$$

III. (i) $(\alpha(f+g))(x) = \alpha(f+g)(x), \alpha \in R, f, g \in V$

$$= \alpha(f(x)+g(x)), x \in [a,b]$$
$$= \alpha f(x)+\alpha g(x)$$
$$= (\alpha f+\alpha g)(x), \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\therefore \alpha(f+g) = \alpha f+\alpha g$$

(ii) $((\alpha+\beta)f)(x) = (\alpha+\beta)f(x)$

$$= \alpha f(x)+\beta f(x)$$
$$= (\alpha f)(x)+(\beta f)(x)$$
$$= (\alpha f+\beta f)(x) \quad , \forall x \in [a,b]$$

$$\therefore (\alpha+\beta)f = \alpha f+\beta f$$

(iii) $((\alpha\beta)f)(x) = (\alpha\beta)f(x)$

$$= \alpha(\beta f(x))$$

$$= \alpha((\beta f)(x)),\ \forall x \in [a,b]$$

$$\therefore (\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$$

(iv) $(1f)(x) = 1f(x)$

$$= f(x), \forall x \in [a,b]$$

$$\therefore 1f = f$$

$\therefore$ R অৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান,

অর্থাৎ V এটা বাস্তৱ ভেক্টৰ স্থান।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

প্রশ্ন নং ১ঃ প্রমাণ কৰক যে R অৰ ওপৰত বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্র R এটা ভেক্টৰ স্থান।

প্রশ্ন নং ২ঃ প্রমাণ কৰক যে C ৰ ওপৰত জটিল সংখ্যাৰ ক্ষেত্র C এটা ভেক্টৰ স্থান।

প্রশ্ন নং ৩ঃ প্রমাণ কৰক যে R অৰ ওপৰত জটিল সংখ্যাৰ ক্ষেত্র C এটা ভেক্টৰ স্থান। Cৰ ওপৰত R ভেক্টৰ স্থান হয়নে?

প্রশ্ন নং ৪ঃ ধৰা হ'ল বাস্তৱ সংখ্যাৰ ওপৰত সকলো $m \times n$ মৌলকক্ষৰ সংহতিটো V. প্রমাণ কৰক যে R অৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান।

প্রশ্ন নং ৫ঃ ধৰা হ'ল V ={(x_1, x_2) | x_1, x_2 বাস্তৱ}, আৰু $\alpha \in R$. V ত যোগ আৰু স্কেলাৰ পূৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে—

$$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\alpha x = \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, x_2)$$

য'ত $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in V, \alpha \in R$

প্রমাণ কৰক যে R অৰ ওপৰত V ভেক্টৰ স্থান নহয়।

১১.৪ প্রাথমিক ধর্ম (ELEMENTARY PROPERTIES)

ধৰা হ'ল এটা ক্ষেত্র F অৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। ধৰা হ'ল $\alpha, \beta \in F, x, y \in V$. তেনেহ'লে

(i) $\alpha 0 = 0$ (এই "0" টো আবেলীয় সংঘ V ৰ শূন্য মৌল)

(ii) $0x = 0$ (বাওহাতৰ "0" টো ক্ষেত্র F অৰ শূন্য মৌল আৰু সোঁহাতৰ "0" টো V ৰ শূন্য মৌল)

(iii) যদি $\alpha x = 0$, তেনেহ'লে $\alpha = 0$ or $x = 0$

(iv) $(-\alpha)x = \alpha(-x) = -\alpha x$

(v) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$

(vi) $(\alpha-\beta)x=\alpha x-\beta x$

প্ৰমাণ ঃ (i) আমি জানো $0+0=0$

ইয়াত $0\in V$

এতিয়া $\alpha 0=\alpha(0+0)$

$=\alpha 0+\alpha 0$

$\therefore \alpha 0+(-\alpha 0)=\alpha 0+\alpha 0+(-\alpha 0)$

$\Rightarrow 0=\alpha 0$

অৰ্থাৎ $\alpha 0=0$

(ii) আমি জানো $0+0=0$

এইটো $0\in F$

এতিয়া $0x=(0+0)x$

$=0x+0x$

$\therefore 0x+(-0x)=0x+0x+(-0x)$

$\Rightarrow 0=0x$

অৰ্থাৎ $0x=0$

(iii) দিয়া আছে $\alpha x=0$

যদি $\alpha=0$, প্ৰমাণ কৰিবলৈ একোৱেই নাই।

ধৰা হ'ল $\alpha\neq 0$, $\therefore \alpha^{-1}$ আছে।

এতিয়া $x=1x$

$=(\alpha\alpha^{-1})x$

$=\alpha^{-1}(\alpha x)$

$=\alpha^{-1}0$

$=0$

(iv) আমি জানো $x+(-x)=0$, এই 0 টো V ৰ শূন্য মৌল

$\alpha+(-\alpha)=0$, এই 0 টো F ৰ শূন্য মৌল

এতিয়া, $\alpha 0=\alpha(x+(-x))$

$\Rightarrow 0=\alpha x+\alpha(-x)$

$\therefore (-\alpha x)+0=(-\alpha x)+\alpha x+\alpha(-x)$

$\Rightarrow -\alpha x=\alpha(-x)$

আকৌ, $0x=(\alpha+(-\alpha))x$

$\Rightarrow 0=\alpha x+(-\alpha)x$

$\therefore\ (-\alpha x)+0=(-\alpha x)+\alpha x+(-\alpha)x$

$\Rightarrow -\alpha x = (-\alpha)x$

দেখা গ'ল যে, $(-\alpha)x = \alpha(-x) = -\alpha x$.

(v) আমি জানো $x - y = x + (-y)$

আকৌ আমি জানো $\alpha(-y) = -\alpha y$

এতিয়া $\alpha(x-y) = \alpha(x+(-y))$

$= \alpha x + \alpha(-y)$

$= \alpha x - \alpha y$

(vi) ওপৰৰটোৰ দৰেই কৰিব পৰা যাব।

উদাহৰণ 4 ঃ ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। প্ৰমাণ কৰক যে

$$x + x = 2x, \forall x \in V$$

সমাধান ঃ দিয়া আছে

$x + x = 1x + 1x$

$= (1+1)x$

$= 2x$.



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

প্ৰশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। ধৰা হ'ল $x, y \in V$ আৰু $\alpha, \beta \in F$. প্ৰমাণ কৰক যে

(i) যদি $\alpha x = \beta x$, তেনেহ'লে $\alpha = \beta$, $x \neq 0$

(ii) যদি $\alpha x = \alpha y$, তেনেহ'লে $x = y$, $\alpha \neq 0$

(iii) যদি $\alpha x = 0$, আৰু $x \neq 0$, তেনেহ'লে $\alpha = 0$

(iv) যদি $\alpha x = 0$, আৰু $\alpha \neq 0$, তেনেহ'লে $x = 0$

(v) যদি $\alpha x = x$, তেনেহ'লে $\alpha = 1$ বা $x = 0$.

১১.৫ ভেক্টৰ স্থানৰ উপস্থান (SUBSPACE OF A VECTOR SPACE)

ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। ধৰা হ'ল W, V ৰ এটা অৰিক্ত উপসংহতি।

W ক V ৰ উপস্থান (subspace) বুলি কোৱা হয় যদি V ৰ যোগ আৰু স্কেলৰ পূৰণৰ অধীনত W-ও F-অৰ ওপৰত এটা ভেক্টৰ স্থান হয়।

টোকা ঃ 1. V নিজেই V ৰ উপস্থান।

2. যোগাধীনত সংঘ V ৰ শূন্য মৌলৰ দ্বাৰা গঠিত $\{0\}$ সংহতিটোৱেও এটা ভেক্টৰ স্থান। ইয়াক ৰিক্ত স্থান (empty space) বুলি কোৱা হয়। $\{0\}$ ও V ৰ এটা উপস্থান।

উপপাদ্য ঃ V(F) ভেক্টৰ স্থানৰ এট অৰিক্ত উপসংহতি W, V ৰ উপস্থান হ'ব যদি আৰু যদিহে যোগ আৰু স্কেলাৰ পূৰণৰ সহায়ত W আৱদ্ধ হয়।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল, W, V(F) অৰ এটা উপস্থান। গতিকে, সংজ্ঞামতে, যোগ আৰু স্কেলাৰ পূ�ৰণৰ অধীনত W আৱদ্ধ।

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল যোগ আৰু স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত W আৱদ্ধ।

ধৰা হ'ল $a,b \in W$

এতিয়া $1 \in F$

$\therefore -1 \in F$

এতিয়া $-1 \in F, b \in W$

$\therefore (-1)b \in W$ অৰ্থাৎ $-b \in W$

গতিকে, $a \in W, -b \in W$

$\therefore a-b \in W$

$\therefore$ গতিকে যোগাত্মক আবেলীয় সংঘ V ৰ W এটা উপসংঘ।

ভেক্টৰ স্থানৰ বাবে বাকী আটাইকেইটা চর্ত W ত সিদ্ধ হয়, কিয়নো সেই চর্তবোৰ V ত সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ F অৰ ওপৰত W এটা ভেক্টৰ স্থান।

উপপাদ্য ঃ V(F) ভেক্টৰ স্থানৰ এটা অৰিক্ত উপসংহতি W, V ৰ উপস্থান হ'ব যদি আৰু যদিহে $\alpha x + \beta y \in W \ \forall \ \alpha, \beta \in F; x, y \in W$.

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল, W, V ৰ এটা উপস্থান।

ধৰা হ'ল $x, y \in W$, $\alpha, \beta \in F$

$\therefore \alpha x \in W$, $\beta y \in W$

$\therefore \alpha x + \beta y \in W$

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল W, V ৰ এটা অৰিক্ত উপসংহতি যাতে সকলো $\alpha, \beta \in F$; $x, y \in W$, ৰ বাবে $\alpha x + \beta y \in W$.

এতিয়া $1 \in F$

$\therefore 1x + 1y \in W$

অৰ্থাৎ $x + y \in W$

$\therefore$ যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত W আৱদ্ধ।

আকৌ $\alpha \in F$, $0 \in F$

$\therefore \alpha x + 0y \in W$

অৰ্থাৎ, $\alpha x \in W$

$\therefore$ স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত W আৱদ্ধ।

$\therefore$ W, V ৰ এটা উপস্থান (আগৰ উপপাদ্যটোৰ সহায়ত)।

উদাহৰণ 5 ঃ $R^2(R)$ ভেক্টৰ স্থানটো লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $W = \{(a,0) : a \in R\}$

স্পষ্টত ঃ $W \subseteq R^2$ আৰু $W \neq \phi$

ধৰা হ'ল $\alpha,\beta \in R$; $(a,0),(b,0) \in W$

$$\alpha(a,0)+\beta(b,0)=(\alpha a,0)+(\beta a,0)$$
$$=(\alpha a+\beta a,0+0)$$
$$=(\alpha a+\beta a,0)\in W$$

$\therefore$ R^2 অৰ W এটা উপস্থান।

উদাহৰণ 6 ঃ $R^3(R)$ ভেক্টৰ স্থানটো লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $W=\{(x_1,x_2,x_3): x_1+x_2+x_3=0, x_1,x_2,x_3 \in R\}$

স্পষ্টত ঃ $W \subseteq R^3, W \neq \phi$

ধৰা হ'ল $\alpha,\beta \in R$; $x=(x_1,x_2,x_3)\in W$, $y=(y_1,y_2,y_3)\in W$

$$\therefore x_1+x_2+x_3=0$$
$$y_1+y_2+y_3=0$$

এতিয়া, $\alpha x+\beta y=\alpha(x_1,x_2,x_3)+\beta(y_1,y_2,y_3)$

$$=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3)+(\beta y_1,\beta y_2,\beta y_3)$$
$$=(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\beta y_3+\alpha x_3)$$

এতিয়া, $(\alpha x_1+\beta y_1)+(\alpha x_2+\beta y_2)+(\beta y_3+\alpha x_3)$

$$=\alpha(x_1+x_2+x_3)+\beta(y_1+y_2+y_3)$$
$$=\alpha 0+\beta 0$$
$$=0$$

$\therefore \alpha x+\beta y \in W$

$\therefore$ V ৰ W এটা উপস্থান।

উপপাদ্য ঃ এটা ভেক্টৰ স্থানৰ দুটা উপস্থানৰ ছেদনো এটা উপস্থান।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল ক্ষেত্ৰ F অৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান।

ধৰা হ'ল W_1 আৰু W_2, V ৰ দুটা উপস্থান।

$$\therefore W_1 \neq \phi, W_2 \neq \phi$$

$\therefore W_1 \cap W_2 \neq \phi$, কিয়নো অন্ততঃ W ৰ শূন্য মৌল 0 $\in$ $W_1 \cap W$.

ধৰা হ'ল $\alpha,\beta \in F; x,y \in W_1 \cap W_2$

$x \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow x \in W$ আৰু $x \in W_2$

$y \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow y \in W_1$ আৰু $y \in W_2$.

এতিয়া $\alpha,\beta \in F$; $x,y \in W_1$ আৰু V ৰ W_1 এটা উপস্থান।

$$\therefore \alpha x+\beta y \in W_1$$

আকৌ $\alpha,\beta \in F$; $x,y \in W_2$ আৰু V ৰ W_2 উপস্থান।

$$\therefore \alpha x + \beta y \in W_2$$

গতিকে, $\alpha x + \beta y \in W_1$ আৰু $\alpha x + \beta y \in W_2$

$$\therefore \alpha x + \beta y \in W_1 \cap W_2$$

$\therefore$ V ৰ $W_1 \cap W_2$ এটা উপস্থান।

টোকা ঃ দুটা উপস্থানৰ মিলন এটা উপস্থান নহ'বও পাৰে।

আমি জানো যে মৌলক্রমিক যোগ আৰু মৌলক্রমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত R অৰ ওপৰত R^3 এটা ভেক্টৰ স্থান।

ধৰা হ'ল $W_1 = \{(x,0,0) : x \in R\}$

$$W_2 = \{(0, y, 0) : x \in R\}$$

স্পষ্টত ঃ R^3 অৰ W_1 এটা উপস্থান, R^3 অৰ W_2 এটা উপস্থান।

এতিয়া $(5,0,0) \in W_1$, $(0,5,0) \in W_2$

কিন্তু $(5,0,0)+(0,0,5) = (5,5,0) \notin W_1 \cup W_2$

অর্থাৎ, $(5,0,0) \in W_1 \cup W_2$, $(0,5,0) \in W_1 \cup W_2$

কিন্তু $(5,0,0)+(0,0,5) \notin W_1 \cup W_2$

$\therefore$ R^3 অৰ $W_1 \cup W_2$ এটা উপস্থান নহয়।

উপপাদ্য ঃ দুটা উপস্থানৰ মিলন এটা উপস্থান যদি আৰু যদিহে এটা আনটোৰ উপসংহতি হয়।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল ক্ষেত্ৰ F অৰ ওপৰত V ৰ এটা ভেক্টৰ স্থান।

ধৰা হ'ল W_1, W_2 , V ৰ দুটা উপস্থান।

ধৰা হ'ল $W_1 \subseteq W_2$. গতিকে $W_1 \cup W_2 = W_2$

Θ V ৰ W_2 এটা উপস্থান,

$\therefore$ V ৰ $W_1 \cup W_2$ এটা উপস্থান।

বিপৰীতক্রমে, ধৰা হ'ল W_1 আৰু W_2 , V ৰ দুটা উপস্থান যাতে $W_1 \cup W_2$ ও V ৰ এটা উপস্থান।

প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে $W_1 \subseteq W_2$ বা $W_2 \subseteq W_1$

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল এইটো সত্য নহয়।

$$\therefore W_1 \not\subseteq W_2 \text{ আৰু } W_2 \not\subseteq W_1$$

$\therefore$ W_1 অত এনে এটা x আছে যাতে $x \notin W_2$.

আকৌ, W_2 ত এনে এটা y আছে যাতে $y \notin W_1$.

এতিয়া $x \in W_1 \Rightarrow x \in W_1 \cup W_2$

$$y \in W_2 \Rightarrow y \in W_1 \cup W_2$$

Θ V ৰ $W_1 \cup W_2$ এটা উপস্থান,

$$\therefore x + y \in W_1 \cup W_2$$

$\Rightarrow x+y \in W_1$ বা $x+y \in W_2$

ধৰা হ'ল $x+y \in W_i$

এতিয়া $-x \in W_1$ $(\Theta\ x \in W_1)$, $x+y \in W_1$

$\therefore (-x)+x+y \in W_1$

$\Rightarrow (-x+x)+y \in W_1$

$\Rightarrow 0+y \in W_1$

$\Rightarrow y \in W_1$

এইটো স্ববিৰোধী কথা।

সেইদৰে, ধৰা হ'ল $x+y \in W_2$

এতিয়া $x+y \in W_2, -y \in W_2$ $(\Theta\ y \in W_2)$

$\therefore (x+y)+(-y) \in W_2$

$\Rightarrow x+(y+(-y)) \in W_2$

$\Rightarrow x+0 \in W_2$

$\Rightarrow x \in W_2$,

এইটো স্ববিৰোধী কথা।

গতিকে, আমি ধৰি লোৱা কথাটো ভুল।

$\therefore W_1 \subseteq W_2$ বা $W_2 \subseteq W_1$.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৩

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল মৌলক্রমিক যোগ আৰু মৌলক্রমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত $R^3(R)$ এটা ভেক্টৰ স্থান।

(i) ধৰা হ'ল $W=\{(a,2b,3c): a,b,c \in R\}$. প্রমাণ কৰক যে R^3 ৰ W এটা উপস্থান।

(ii) ধৰা হ'ল $W=\{(x,y,z): x-3y+4z=0, x,y,z \in R\}$. প্রমাণ কৰক যে R^3 ৰ W এটা উপস্থান।

(iii) ধৰা হ'ল $W=\{(x,y,z): x^2+y^2=z^2, x,y,z \in R\}$. প্রমাণ কৰক যে R^3 ৰ W উপস্থান নহয়।

প্রশ্ন নং ২ঃ ধৰা হ'ল মৌলক্রমিক যোগ আৰু মৌলক্রমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত $R^n(R)$ এটা ভেক্টৰ স্থান।

ধৰা হ'ল $W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$. প্রমাণ কৰক যে R^n অৰ W উপস্থান নহয়।

১১.৮ ৰৈখিক পৰতন্ত্ৰতা আৰু স্বতন্ত্ৰতা (LINEAR DEPENDENCE AND INDEPENDENCE)

ধৰা হ'ল ক্ষেত্ৰ F অৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। V ৰ ভেক্টৰ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in V$ অক ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ (linearly dependent) বুলি কোৱা হয় যদি F অত স্কেলাৰ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in F$ (সকলোবোৰ শূন্য নহয়) থাকে যাতে

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 .$$

গতিকে V ভেক্টৰ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in V$ ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ হ'ব যদি

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

$\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ অৰ অন্ততঃ এটা শূন্য নহয়।

যদি $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \cdots, \alpha_n = 0$;

তেনেহ'লে $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ভেক্টৰক ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ (linearly dependent) বুলি কোৱা হয়।

এটা সসীম সংহতি $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ অক ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ বুলি কোৱা হয় যদিহে ইয়াৰ n টা মৌল ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ হয়। আনহাতেদি ইয়াক ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ বুলি কোৱা হয় যদি ইয়াৰ n টা মৌল ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ হয়।

V ৰ কোনো উপসংহতি W ক ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ বুলি কোৱা হয় যদি W ৰ প্ৰতিটো সসীম অৰিক্ত উপসংহতি ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ হয়। অন্যথাই ইয়াক ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ বুলি কোৱা হয়।

টোকা ঃ

1. ধৰা হ'ল $x \in V$, আৰু $x \neq 0$

ধৰা হ'ল $\alpha \in F$

এতিয়া $\alpha x = 0$

$\Rightarrow \alpha x = 0x$

$\Rightarrow \alpha = 0$, $[\alpha x = \beta x \Rightarrow \alpha = \beta,$ যদি $x \neq 0]$

$\therefore x$ ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ, অৰ্থাৎ, এটা অশূন্য ভেক্টৰ সদায় ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

2. আমি জানো $1.0 = 0$, কিন্তু $1 \neq 0$, য'ত 1 হ'ল F অৰ একক মৌল।

$\therefore$ শূন্য ভেক্টৰ সদায় ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

3. এটা ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ ভেক্টৰৰ সংহতিৰ অধিসংহতি (superset) ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

4. এটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ ভেক্টৰৰ সংহতিৰ উপসংহতি (subset) ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

উদাহৰণ 7 ঃ মৌলক্ৰমিক যোগ আৰু মৌলক্ৰমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত R^2 (R) ভেক্টৰ

স্থানটো লোৱা হ'ল।

R^2 ৰ $e_1=(1,0), e_2=(0,1)$ ভেক্টৰ দুটা লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $\alpha_1, \alpha_2 \in R$

এতিয়া $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0$

$\Rightarrow \alpha_1(1,0)+\alpha_2(0,1)=(0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1,0)+(0,\alpha_2)=(0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1,\alpha_2)=(0,0)$

$\Rightarrow \alpha_1=0, \alpha_2=0$

$\therefore e_1=(1,0), e_2=(0,1)$ ভেক্টৰ দুটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

উদাহৰণ 8 ঃ মৌলক্ৰমিক যোগ আৰু মৌলক্ৰমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত R^3 (R) ভেক্টৰ স্থানটো লোৱা হ'ল।

R^3 ৰ $x=(1,2,-1), y=(2,2,1), z=(1,-2,3)$ ভেক্টৰ তিনিটা লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$

এতিয়া $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0$

$\Rightarrow \alpha_1(1,2,-1)+\alpha_2(2,2,1)+\alpha_3(1,-2,3)=(0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1,2\alpha_1,-\alpha_1)+(2\alpha_2,2\alpha_2,\alpha_2)+(\alpha_3,-2\alpha_3,3\alpha_3)=(0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3, 2\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3, -\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3)=(0,0,0)$

$\Rightarrow \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0 \ldots$ (1)

$2\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3=0$

অর্থাৎ, $\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0$ ... (2)

$-\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=0$ ... (3)

এতিয়া $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$=1(1+1)-2(1-1)+1(1+1)$

$=4\neq 0$

$\therefore$ (1),(2),(3) সমীকৰণৰ একমাত্ৰ সমাধান হ'ল $\alpha_1=0, \alpha_2=0, \alpha_3=0$.

$\therefore (1,2,-1),(2,2,1),(1,-2,3)$ ভেক্টৰ তিনিটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

উদাহৰণ 9 ঃ $R^3(R)$ ভেক্টৰ স্থানটো লোৱা হ'ল।

R^3 ৰ $x=(1,1,2), y=(1,2,5), z=(5,3,4)$ ভেক্টৰ তিনিটা লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$

এতিয়া $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0$

$\Rightarrow \alpha_1(1,1,2) + \alpha_2(1,2,5) + \alpha_3(5,3,4) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_1, 2\alpha_1) + (\alpha_2, 2\alpha_2, 5\alpha_2) + (5\alpha_3, 3\alpha_3, 4\alpha_3) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \ldots$ (1)

$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \ldots$ (2)

$2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \ldots$ (3)

এতিয়া $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

$= 1 \times (8-15) - 1 \times (4-6) + 5 \times (5-4)$

$= -7 + 2 + 5 = 0$

$\therefore$ সমীকৰণ প্ৰণালীৰ অশূন্য সমাধান আছে।

(1) আৰু (2)ৰ পৰা

$$\frac{\alpha_1}{3-10} = \frac{\alpha_2}{-(3-5)} = \frac{\alpha_3}{2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_1}{-7} = \frac{\alpha_2}{2} = \frac{\alpha_3}{1}$$

$\Rightarrow \alpha_1 = -7k, \alpha_2 = 2k, \alpha_3 = k, k \in R$

(3) ৰ পৰা $2 \times (-7k) + 5 \times 2k + 4k = 0$

$\therefore (-7k, 2k, k)$ এ (3) সিদ্ধ কৰে।

গতিকে, $(-7,2,1)$ এটা সমাধান।

$\therefore -7x + 2y + z = 0$

$\therefore (1,1,2), (1,2,5), (5,3,4)$ ভেক্টৰ তিনিটা ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ

উদাহৰণ 10 ঃ Q ৰ ওপৰত R ভেক্টৰ স্থানটো লোৱা হ'ল।

আমি জানো $1, \sqrt{3} \in R$

ধৰা হ'ল $\alpha, \beta \in Q$ যাতে $1\alpha + \sqrt{3}\beta = 0$

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল $\beta \neq 0$

$$\therefore \sqrt{3} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

এতিয়া $\alpha \in Q, \beta \in Q \quad \therefore -\frac{\alpha}{\beta} \in Q$

$\therefore \sqrt{3} \in Q$, এইটো স্ববিৰোধী কথা।

$\therefore \quad \beta = 0$

ইয়াৰ পৰা $\alpha = 0$

$\therefore$ Q ৰ ওপৰত R অত $\{1, \sqrt{3}\}$ ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

প্ৰমেয় ঃ যদি এটা ভেক্টৰ স্থানৰ দুটা ভেক্টৰ ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ হয়, তেনেহ'লে এটা আনটোৰ স্কেলাৰ গুণিতক হ'ব।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান।

ধৰা হ'ল $x, y \in V$ যাতে x, y ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

গতিকে স্কেলাৰ α, β আছে (দুয়োটা শূন্য নহয়) যাতে,

$$\alpha x + \beta y = 0$$

ধৰা হ'ল $\alpha \neq 0 \quad \therefore \alpha^{-1} \in F$

এতিয়া $\alpha x = -\beta y$

$\Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha x) = \alpha^{-1}(-\beta y)$

$\Rightarrow (\alpha^{-1}\alpha)x = (-\alpha^{-1}\beta)y$

$\Rightarrow x = \delta y$, $-\alpha^{-1}\beta = \delta$ বুলি ধৰা হ'ল

গতিকে, y ৰ স্কেলাৰ গুণিতক হ'ল x.

সেইদৰে, যদি $\beta \neq 0$, x অৰ স্কেলাৰ গুণিতক হ'ব y.



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৪

প্ৰশ্ন নং ১ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $R^3(R)$ অত $(1,1,2), (1,2,5), (5,3,4)$ ভেক্টৰ তিনিটা ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

প্ৰশ্ন নং ২ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $R^3(R)$ অত $(2,3,1), (2,1,3), (1,1,1)$ ভেক্টৰ তিনিটা ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $R^3(R)$ অত $(0,1,1), (1,0,1), (1,1,0)$ ভেক্টৰ তিনিটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $R^3(R)$ অত $(1,2,-1), (2,2,1), (1,-2,3)$ ভেক্টৰ তিনিটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

১১.৭ আধাৰ আৰু মাত্রা (BASIS AND DIMENSION)

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল F ক্ষেত্রৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। ধৰা হ'ল $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in V$ যিকোনো ভেক্টৰ।

$x = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$; য'ত $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in F$ অক $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ভেক্টৰৰ ৰৈখিক সংযোজন (linear combination) বুলি কোৱা হয়।

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল F ক্ষেত্রৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। V ৰ এটা উপসংহতি S অক V ৰ আধাৰ (basis) বুলি কোৱা হয় যদি

(i) S অৰ সসীম সংখ্যক মৌল ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্র,

(ii) V ৰ প্রতিটো ভেক্টৰ S অৰ সসীম সংখ্যক মৌলৰ ৰৈখিক সংযোজন।

উদাহৰণ 11 ঃ $R^2(R)$ ভেক্টৰ স্থানটো লোৱা হ'ল। R^2 ৰ উপসংহতি $S = \{e_1, e_2\}$ লোৱা হ'ল। য'ত $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$

ধৰা হ'ল $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ যাতে

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (0,0)$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2) = (0,0)$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$$

$\therefore$ S ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্র।

ধৰা হ'ল $x = (x_1, x_2) \in R^2$

এতিয়া, $x = (x_1, x_2)$

$$= x_1(1,0) + x_2(0,1)$$

$$= x_1 e_1 + x_2 e_2$$

গতিকে R^2 ৰ প্রতিটো ভেক্টৰক S অৰ মৌলৰ ৰৈখিক সংযোজন হিচাপে প্রকাশ কৰিব পাৰি।

$\therefore$ R^2 ৰ S এটা আধাৰ। ইয়াক প্রামাণিক আধাৰ (standard basis) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ 12 ঃ $R^3(R)$ অৰ প্রামাণিক আধাৰ হ'ল $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ য'ত $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

উদাহৰণ 13 ঃ $R^n(R)$ অৰ প্রামাণিক আধাৰ হ'ল $S = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ য'ত $e_1 = (1,0,0,\cdots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\cdots,0)$, $\cdots, e_n = (0,0,0,\cdots,1)$.

উদাহৰণ 14 ঃ $R^3(R)$ ভেক্টৰ স্থানটো লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল R^3 ৰ $T = \{u_1, u_2, u_3\}$ এটা উপসংহতি য'ত

$u_1=(1,1,0), u_2=(1,0,0), u_3=(0,1,1).$

ধৰা হ'ল $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in R$ যাতে

$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3=0$

$\Rightarrow \alpha_1(1,1,0)+\alpha_2(1,0,0)+\alpha_3(0,1,1)=(0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1,\alpha_1,0)+(\alpha_2,0,0)+(0,\alpha_3,\alpha_3)=(0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3,\alpha_3)=0$

$\therefore \alpha_1+\alpha_2=0$

$\alpha_1+\alpha_3=0$

$\alpha_3=0$

$\therefore \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$

$\therefore$ T ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

ধৰা হ'ল $x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$ যাতে

$x=\beta_1u_1+\beta_2u_2+\beta_3u_3$, য'ত $\beta_1,\beta_2,\beta_3 \in R$

$\Rightarrow (x_1,x_2,x_3)=\beta_1(1,1,0)+\beta_2(1,0,0)+\beta_3(0,1,1)$

$\Rightarrow (x_1,x_2,x_3)=(\beta_1,\beta_1,0)+(\beta_2,0,0)+(0,\beta_3,\beta_3)$

$\Rightarrow (x_1,x_2,x_3)=(\beta_1+\beta_2,\beta_1+\beta_3,\beta_3)$

$\therefore \beta_1+\beta_2=x_1$

$\beta_1+\beta_3=x_2$

$\beta_3=x_3$

$\therefore \beta_1=x_2-\beta_3=x_2-x_3$

$\beta_2=x_1-\beta_1=x_1-x_2+x_3$

$\therefore (x_1,x_2,x_3)=(x_2-x_3)(1,1,0)+(x_1-x_2+x_3)(1,0,0)+x_3(0,1,1)$

গতিকে, R^3 ৰ প্ৰতিটো ভেক্টৰক T ৰ মৌলৰ ৰৈখিক সংযোজন হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

$\therefore R^3$ ৰ T এটা আধাৰ।

টোকা ঃ উদাহৰণ 12 আৰু উদাহৰণ 14 অৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে এটা ভেক্টৰ স্থানৰ একাধিক আধাৰ থাকিব পাৰে।

উদাহৰণ 15 ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $R^3(R)$ ভেক্টৰ স্থানৰ $\{(1,1,2),(1,2,5),(5,3,4)\}$ সংহতিটো আধাৰ নহয়।

সমাধান ঃ আমি ইতিমধ্যে প্ৰমাণ কৰিছোঁ যে $\{(1,1,2),(1,2,5),(5,3,4)\}$ সংহতিটো ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

$\therefore$ প্রদত্ত সংহতিটো R^3 ৰ আধাৰ নহয়।

উপপাদ্য ঃ ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। যদি V ৰ $S=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ এটা আধাৰ, তেনেহ'লে V ৰ প্ৰতিটো মৌলক $u_1,u_2,\cdots,u_n$ অৰ ৰৈখিক সংযোজন হিচাপে অদ্বিতীয়ভাৱে (uniquely) প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

প্ৰমাণ ঃ আধাৰৰ সংজ্ঞাৰ পৰা আমি জানো যে V ৰ প্ৰতিটো মৌলক $u_1,u_2,\cdots,u_n$ অৰ ৰৈখিক সংযোজন হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। আমি দেখুৱাম যে এই প্ৰকাশটো অদ্বিতীয় (unique)

ধৰা হ'ল $x\in V$

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল

$x=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n$

$x=\beta_1u_1+\beta_2u_2+\cdots+\beta_nu_n$

য'ত $\alpha_i\in F$, $\beta_i\in F$, $i=1,2,\cdots,n.$

$\therefore\ \alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n=\beta_1u_1+\beta_2u_2+\cdots+\beta_nu_n$

$\Rightarrow(\alpha_1-\beta_1)u_1+(\alpha_2-\beta_2)u_2+\cdots+(\alpha_n-\beta_n)u_n=0$

$\Theta\ \{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ,

$\therefore\ \alpha_1-\beta_1=0,\alpha_2-\beta_2=0,...,\alpha_n-\beta_n=0$

$\Rightarrow\alpha_1=\beta_1,\alpha_2=\beta_2,...,\alpha_n=\beta_n$

গতিকে, প্ৰকাশটো অদ্বিতীয়।

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল ক্ষেত্ৰ F অৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান।

যদি V ৰ কোনো আধাৰৰ মৌলৰ সংখ্যা সসীম হয়, তেনেহ'লে V ক সসীম মাত্ৰাৰ ভেক্টৰ স্থান (finite dimensional vector space) বুলি কোৱা হয়। ৰিক্ত স্থানৰ কোনো আধাৰ নাই। ইয়াক সসীম মাত্ৰাৰ বুলি কোৱা হয়। অন্য ভেক্টৰ স্থানক অসীম মাত্ৰাৰ (infinite dimensional) বুলি কোৱা হয়। মন কৰিব লগীয়া যে এটা সসীম মাত্ৰাৰ ভেক্টৰ স্থানৰ যিকোনো দুটা আধাৰৰ মৌলৰ সংখ্যা সমান।

এটা ভেক্টৰ স্থান V ৰ কোনো আধাৰৰ মৌলৰ সংখ্যাক V ৰ মাত্ৰা (dimension) বুলি কোৱা হয়। সাধাৰণতে ইয়াক dimV ৰে বুজোৱা হয়। ৰিক্ত স্থানৰ মাত্ৰা 0 বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ 16 ঃ আমি জানো যে $R^2(R)$ ভেক্টৰ স্থানৰ প্ৰামাণিক আধাৰ $\{(1,0),(0,1)\}$ ৰ মৌলৰ সংখ্যা দুই।

$\therefore \dim R^2=2$

উদাহৰণ 17 ঃ $R^3(R)$ অৰ মাত্ৰা 3.

উদাহৰণ 18 ঃ $R^n(R)$ অৰ মাত্ৰা n.

উদাহৰণ 19 ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $C(R)$ ভেক্টৰ স্থানৰ $\{1,i\}$ এটা আধাৰ। $C(R)$ অৰ মাত্ৰা

কিমান ?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $\alpha, \beta \in R$ যাতে

$$1\alpha + i\beta = 0$$
$$\Rightarrow \alpha + i\beta = 0 + i0$$
$$\Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0$$

$\therefore \{1, i\}$ সংহতি ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

এতিয়া $\alpha + i\beta \in C$

$$\alpha + i\beta = 1\alpha + i\beta$$

গতিকে, C ৰ প্ৰত্যেক ভেক্টৰক $\{1, i\}$ সংহতিৰ মৌলৰ ৰৈখিক সংযোজন হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

$\therefore \{1, i\}$ এটা আধাৰ।

$\{1, i\}$ সংহতিৰ মৌলৰ সংখ্যা 2.

$\therefore C(R)$ অৰ মাত্ৰা 2.

উদাহৰণ 20 ঃ $V(F)$ ভেক্টৰ স্থানৰ x, y দুটা মৌল আৰু $\alpha, \beta \in F$ হ'লে, প্ৰমাণ কৰক যে $\{x, y, \alpha x + \beta y\}$ ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

সমাধান ঃ আমি দেখিলোঁ

$$(-\alpha)x + (-\beta)y + 1(\alpha x + \beta y) = 0$$

ইয়াত $1 \neq 0$

$\therefore$ সংহতিটো ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।



১১.৮ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- ধৰা হ'ল "+" প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত V এটা আবেলীয় সংঘ। ধৰা হ'ল "+, $\bullet$" প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত F এটা ক্ষেত্ৰ।

  F অৰ প্ৰত্যেক মৌল α আৰু V ৰ x অৰ বাবে $\alpha x \in V$. ইয়াক স্কেলাৰ পূৰণ বুলি কোৱা হয়।

  তেতিয়া ক্ষেত্ৰ F অৰ ওপৰত V ক ভেক্টৰ স্থান বুলি কোৱা হয়, যদি তলৰ চৰ্তকেইটা সিদ্ধ হয়

  1. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
  2. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

3. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

4. $1x = x$

য'ত $\alpha, \beta \in F$, $x, y \in V$ আৰু 1 হ'ল F অৰ একক মৌল।

- যোগাধীনত সংঘ V ৰ শূন্য মৌলৰ দ্বাৰা গঠিত $\{0\}$ সংহতিটোৱে এটা ভেক্টৰ স্থান। ইয়াক ৰিক্ত স্থান বুলি কোৱা হয়।
- ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। ধৰা হ'ল W, V ৰ এটা অৰিক্ত উপসংহতি। W ক V ৰ উপস্থান বুলি কোৱা হয় যদি V ৰ যোগ আৰু স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত W ও F অৰ ওপৰত এটা ভেক্টৰ স্থান।

  V নিজেই V ৰ উপস্থান।

  $\{0\}$, V ৰ এটা উপস্থান।
- এটা ভেক্টৰ স্থানৰ দুটা উপস্থানৰ ছেদনো এটা উপস্থান। আনহাতেদি দুটা উপস্থানৰ মিলন এটা উপস্থান নহ'বও পাৰে।
- ক্ষেত্ৰ F অৰ ওপৰত ভেক্টৰ স্থান V ৰ ভেক্টৰ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ অক ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ বুলি কোৱা হয় যদি $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$.

  $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ অৰ অন্ততঃ এটা শূন্য নহয়।

  যদি $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$

  $\Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \cdots, \alpha_n = 0$;

  তেনেহ'লে $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ভেক্টৰক ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ বুলি কোৱা হয়।
- এটা অশূন্য ভেক্টৰ সদায় ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।
- শূন্য ভেক্টৰ সদায় ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।
- ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। ধৰা হ'ল $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in V$.

  যিকোনো ভেক্টৰ $x = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$; য'ত $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in F$ অক $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ভেক্টৰৰ ৰৈখিক সংযোজন (linear combination) বুলি কোৱা হয়।
- ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। V ৰ এটা উপসংহতি S অক V ৰ আধাৰ বুলি কোৱা হয় যদি

  (i) S অৰ সসীম সংখ্যক মৌল ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ,

  (ii) V ৰ প্ৰতিটো ভেক্টৰ S অৰ সসীম সংখ্যক মৌলৰ ৰৈখিক সংযোজন।
- এটা ভেক্টৰ স্থান V ৰ কোনো আধাৰৰ মৌলৰ সংখ্যাক V ৰ মাত্ৰা বুলি কোৱা হয়। ৰিক্ত স্থানৰ মাত্ৰা 0 বুলি কোৱা হয়।

১১.৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ I. আমি জানো যে যোগাধীনত R এটা আবেলীয় সংঘ।

II. যদি $\alpha \in R, x \in R$, তেনেহ'লে $\alpha x \in R$.

III.(i) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

(ii) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

(iii) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$

(iv) $1x=x$

য'ত $\alpha, \beta \in R$, $x, y \in R$ আৰু 1 হ'ল R অৰ একক মৌল।

$\therefore$ R অৰ ওপৰত R এটা ভেক্টৰ স্থান।

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ওপৰৰ টোৰ দৰে। নিজে কৰিব।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ প্রথম অংশ ঃ নিজে কৰিব।

দ্বিতীয় অংশ ঃ C ৰ ওপৰত R ভেক্টৰ স্থান নহয়।

$2+3i \in C, 5 \in R$

কিন্তু $(2+3i)5 \notin R$, অর্থাৎ স্কেলাৰ পূৰণ সাপেক্ষে R আৱদ্ধ নহয়।

টোকা ঃ এটা উপক্ষেত্রৰ ওপৰত এটা ক্ষেত্র ভেক্টৰ স্থান হ'ব, কিন্তু এটা ক্ষেত্রৰ ওপৰত এটা উপক্ষেত্র ভেক্টৰ স্থান হ'ব নোৱাৰে।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ I. আমি জানো যে মৌলকক্ষৰ যোগৰ অধীনত V এটা আবেলীয় সংঘ।

II. যদি $\alpha \in R, A \in V$, তেতিয়া $\alpha A \in V$.

III. (i) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

(ii) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

(iii) $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$

(iv) $1A=A$

য'ত $\alpha, \beta \in R$; $A, B \in V$, 1 হ'ল R অৰ একক মৌল।

$\therefore$ R অৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান।

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $\alpha, \beta \in R$, $x=(x_1, x_2) \in V$

এতিয়া $(\alpha+\beta)x=(\alpha+\beta)(x_1, x_2)$

$=((\alpha+\beta)x_1, x_2)$

$=(\alpha x_1+\beta x_1, x_2)$

$$\alpha x+\beta x=\alpha(x_1,x_2)+\beta(x_1,x_2)$$
$$=(\alpha x_1,x_2)+(\beta x_1,x_2)$$
$$=(\alpha x_1+\beta x_1,x_2+x_2)$$
$$=(\alpha x_1+\beta x_1,2x_2)$$
$$\therefore(\alpha+\beta)x\neq\alpha x+\beta x$$

$\therefore$ R অৰ ওপৰত V ভেক্টৰ স্থান নহয়।

অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) $\alpha x=\beta x$, $x\in V;\alpha,\beta\in F,x\neq 0$

$$\Rightarrow\alpha x+(-\beta x)=\beta x+(-\beta x)$$
$$\Rightarrow\alpha x-\beta x=0$$
$$\Rightarrow(\alpha-\beta)x=0$$
$$\Rightarrow\alpha-\beta=0\quad[\Theta\ x\neq 0,0x=0]$$
$$\Rightarrow\alpha=\beta$$

(ii) $\alpha x=\alpha y$, $x,y\in V;\alpha\in F,\alpha\neq 0$

$$\Rightarrow\alpha x-\alpha y=0$$
$$\Rightarrow\alpha(x-y)=0$$
$$\Rightarrow x-y=0\ [\Theta\ \alpha\neq 0,\alpha 0=0]$$
$$\Rightarrow x=y$$

(iii) $\alpha x=0,x\neq 0$

$$\Rightarrow\alpha x=0x$$
$$\Rightarrow\alpha=0$$

(iv) $\alpha x=0,\alpha\neq 0$

$$\Rightarrow\alpha x=\alpha 0$$
$$\Rightarrow x=0$$

(v) $\alpha x=x$

$$\Rightarrow\alpha x-x=0$$
$$\Rightarrow\alpha x-1x=0$$
$$\Rightarrow(\alpha-1)x=0$$
$$\Rightarrow\alpha-1=0\text{ বা }x=0$$
$$\Rightarrow\ \alpha\neq 1\text{ বা }x=0$$

অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ 3

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) ধৰা হ'ল $\alpha,\beta\in R$, আৰু $x=(a_1,2b_1,3c_1)\in W$,

$y=(a_2,2b_2,3c_2)\in W$

এতিয়া $\alpha x+\beta y=\alpha(a_1,2b_1,3c_1)+\beta(a_2,2b_2,3c_2)$

$=(\alpha a_1,2\alpha b_1,3\alpha c_1)+(\beta a_2,2\beta b_2,3\beta c_2)$

$=(\alpha a_1+\beta a_2,2\alpha b_1+2\beta b_2,3\alpha c_1+3\beta c_2)$

$=(\alpha a_1+\beta a_2,2(\alpha b_1+\beta b_2),3(\alpha c_1+\beta c_2))$

$\in W$

$\therefore R^3$ ৰ W এটা উপস্থান।

(ii) নিজে চেষ্টা কৰক।

(iii) নিজে চেষ্টা কৰক।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $\alpha,\beta\in R$

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in W, y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in W$

$\therefore x_1+x_2+\cdots+x_n=1$

$y_1+y_2+\cdots+y_n=1$

এতিয়া $\alpha x+\beta y$

$=\alpha(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\beta(y_1,y_2,\cdots,y_n)$

$=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n)+(\beta y_1,\beta y_2,\cdots,\beta y_n)$

$=(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\cdots,\alpha x_n+\beta y_n)$

এতিয়া, $(\alpha x_1+\beta y_1)+(\alpha x_2+\beta y_2)+\cdots+(\alpha x_n+\beta y_n)$

$=\alpha(x_1+x_2+\cdots+x_n)+\beta(y_1+y_2+\cdots+y_n)$

$=\alpha+\beta$

$\neq 0$, যদি $\alpha\neq 1-\beta$

$\therefore \alpha x+\beta y\notin W$, যদি $\alpha\neq 1-\beta$

$\therefore R^n$ অৰ W উপস্থান নহয়।

অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ 4

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।



১১.১০ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

১) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.

২) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).

৩) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).

৪) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.

৫) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd.Hyderaba500029.



১১.১১ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ প্ৰমাণ কৰক যে যিকোনো উপক্ষেত্ৰ K ৰ ওপৰত ক্ষেত্ৰ F এটা ভেক্টৰ স্থান।

প্ৰশ্ন ২ঃ ধৰা হ'ল মৌলক্ৰমিক যোগ আৰু মৌলিক্ৰমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত $R^3(R)$ এটা ভেক্টৰ স্থান।

ধৰা হ'ল R অৰ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ তিনিটা নিৰ্দিষ্ট মৌল।

$W = \{(x_1, x_2, x_3) : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0, x_1, x_2, x_3 \in R\}$

প্ৰমাণ কৰক যে $R^3(R)$ অৰ W এটা উপস্থান।

প্ৰশ্ন ৩ঃ ধৰা হ'ল মৌলক্ৰমিক যোগ আৰু মৌলক্ৰমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত $R^3(R)$ এটা ভেক্টৰ স্থান।

ধৰা হ'ল $W = \{(x_1, x_2, x_3) : x_2 + 4x_3 = 0, x_1, x_2, x_3 \in R\}$

$R^3(R)$ অৰ W উপস্থান হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ঃ বাস্তৱ সংখ্যাৰ ভেক্টৰ স্থান R(R) লোৱা হ'ল। ধৰা হ'ল $x, y, z \in R$. যদি $\{x + ay + bz, y, z\}$ সংহতিটো ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ হয়, প্ৰমাণ কৰক যে $\{x, y, z\}$ সংহতিটোৱো ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

[**ইংগিত** $\{x + ay + bz, y, z\}$ সংহতিটো ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ, স্কেলাৰ α, β, γ (সকলো শূন্য নহয়) আছে যাতে $\alpha(x + ay + bz) + \beta y + \gamma z = 0$

ইয়াৰ পৰা, $\alpha x + (\alpha a + \beta)y + (\alpha b + \gamma)z = 0$

যদি $\alpha \neq 0$, তেনেহ'লে $\{x, y, z\}$ ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

যদি $\alpha = 0$, তেনেহ'লে β, γ ৰ অন্ততঃ এটা শূন্য নহয়।

যেতিয়া $\alpha = 0$; $\alpha a + \beta = \beta$, $\alpha b + \gamma = \gamma$.

$\therefore$ $\alpha a + \beta$, $\alpha b + \gamma$ ৰ অন্ততঃ এটা শূন্য নহয়।

$\therefore$ $\{x, y, z\}$ সংহতিটো ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

প্ৰশ্ন ৫ঃ ধৰা হ'ল মৌলক্ৰমিক যোগ আৰু মৌলক্ৰমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত $R^3(R)$ এটা ভেক্টৰ স্থান।

$\{(1,2,1),(2,1,0),(1,-1,2)\}$ সংহতিটো $R^3(R)$ অৰ আধাৰ হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ৬ঃ ধৰা হ'ল মৌলক্ৰমিক যোগ আৰু মৌলক্ৰমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত $R^4(R)$ এটা ভেক্টৰ স্থান। প্ৰমাণ কৰক যে $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ সংহতিটো $R^4(R)$ অৰ এটা আধাৰ, য'ত $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$.

*** ***** ***

অধ্যায় ১২ ঃ মিশ্রিত গণিত (COMBINATORICS)

অধ্যায় গাঁথনি

১২.১ উদ্দেশ্য
১২.২ পৰিচয়
১২.৩ যোগৰ নিয়ম
১২.৪ পূৰণৰ নিয়ম
১২.৫ বিন্যাস
১২.৬ দল
১২.৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১২.৮ অধিক জানিবলৈ
১২.৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
১২.১০ আৰ্হি প্রশ্ন

১২.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- যোগৰ নিয়ম সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- পূৰণৰ নিয়ম সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- বিন্যাস সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- দল (বা জোঁট) সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

১২.২ পৰিচয়

মিশ্রিত গণিত (Combinatorics) বিচ্ছিন্ন গণিতৰ (discrete mathematics) এটা প্রয়োজনীয় শাখা। নির্দিষ্ট নিয়মৰ অধীনত এটা সসীম সংগ্রহৰ উপাদানবোৰ সজোৱা বা বাছি উলিওৱাৰ উপায় সম্বন্ধে ইয়াত আলোচনা কৰা হয়, অর্থাৎ বিন্যাস (permutation) আৰু দল বা জোঁটৰ (combination) প্রশ্ন সম্বন্ধে ইয়াত আলোচনা কৰা হয়। কম্পিউটাৰ বিজ্ঞানত মিশ্রিত গণিত বহুলভাৰে ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

১২.৩ যোগৰ নিয়ম (বা বিয়োজক নিয়ম) (THE RULE OF SUM OR DISJUNCTIVE RULE)

এটা কাম A কৰিবলৈ n_1 টা উপায় আছে আৰু এইবোৰতকৈ পৃথক, আন এটা কাম B কৰিবলৈ n_2 টা উপায় আছে, তেনেহ'লে A বা B কৰিবলৈ n_1+n_2 টা উপায় আছে। এই ক্ষেত্রত

দুয়োটা কাম একেলগে কৰিব পৰা নাযায়।

টোকা ঃ এই নিয়মটো সসীম সংখ্যক কামলৈ সম্প্রসাৰণ কৰিব পাৰি। যদি r টা কাম n_1, n_2, ..., n_r টা উপায়ে কৰিব পাৰি আৰু যদি কামকেইটা একেলগে কৰিব নোৱাৰি, তেনেহ'লে এই r টা কামৰ যিকোনো এটা $n_1+n_2+n_3 \ldots + n_r$ টা উপায়ে কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 1 ঃ এটা শ্ৰেণীত 26 জন ল'ৰা আৰু 28 জনী ছোৱালী আছে। শ্ৰেণী প্ৰতিনিধি হিচাপে এজন ছাত্ৰক বছাৰ উপায় নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ এজন ল'ৰা 26 টা উপায়ে বাছিব পাৰি (26 জন ল'ৰাৰ যিকোনো এজনক আমি বাছিব পাৰোঁ।)। এজনী ছোৱালী 28 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

$\therefore$ এজন ছাত্ৰ (ল'ৰা বা ছোৱালী, উভয়ে নহয়) 26+28 অৰ্থাৎ 54 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

উদাহৰণ 2 ঃ এটা পুথিভঁৰালত 30 খন গণিতৰ কিতাপ আৰু 25 খন বিজ্ঞানৰ কিতাপ আছে। এখন গণিতৰ কিতাপ বা এখন বিজ্ঞানৰ কিতাপ কিমানটা উপায়ে বাছিব পাৰি?

সমাধান ঃ আমি এখন কিতাপ বাছিব লাগে, এখন গণিতৰ কিতাপ বা এখন বিজ্ঞানৰ কিতাপ।

এখন গণিতৰ কিতাপ 30 টা উপায়ে বাছিব পাৰি। এখন বিজ্ঞানৰ কিতাপ 25 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

$\therefore$ এখন গণিতৰ কিতাপ বা এখন বিজ্ঞানৰ কিতাপ 30+25 অৰ্থাৎ 55 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

উদাহৰণ 3 ঃ এবাৰ তাচৰ পৰা এখন হৰতন (heart) বা এখন চিৰটন (club) কিমানটা উপায়ে বাছিব পাৰি?

সমাধান ঃ এবাৰ তাচত 52 খিলা তাচপাত থাকে। ইয়াৰে 13 খন হৰতন (hearts), 13 খন ৰোহিতন (diamonds), 13 খন চিৰটন (clubs) আৰু 13 খন ইস্কাপন (spades)।

$\therefore$ এখন হৰতন 13 টা উপায়ে বাছিব পাৰি। এখন চিৰটন 13 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

$\therefore$ এখন হৰতন বা এখন চিৰটন 13+13 অৰ্থাৎ 26 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

১২.৪ পূৰণৰ নিয়ম (বা আনুক্ৰমিক নিয়ম) (THE RULE OF PRODUCT OR SEQUENTIAL RULE)

যদি এটা কাম দুটা ক্ৰমিক ধাপত সম্পন্ন কৰিব পাৰি আৰু প্ৰথম ধাপটো n_1 টা উপায়ে কৰিব পাৰি, আৰু দ্বিতীয় ধাপটো n_2 টা উপায়ে কৰিব পাৰি, তেনেহ'লে কামটো $n_1 \times n_2$ টা উপায়ে কৰিব পাৰি।

টোকা ঃ এই নিয়মটো সসীম সংখ্যক কামলৈ সম্প্রসাৰণ কৰিব পাৰি। যদি এটা কাম r টা ক্ৰমিক ধাপত সম্পন্ন কৰিব পাৰি, আৰু প্ৰথম ধাপটো n_1 টা উপায়ে কৰিব পাৰি, দ্বিতীয় ধাপটো n_2 টা উপায়ে কৰিব পাৰি, আৰু এইদৰে r তম ধাপটো n_r টা উপায়ে কৰিব পাৰি, তেনেহ'লে কামটো $n_1 \times n_2 \times \ldots\ldots\ldots \times n_r$ টা উপায়ে কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 4 ঃ এটা শ্ৰেণীত 25 জন ল'ৰা আৰু 20 জনী ছোৱালী আছে। এজন শিক্ষকে এজন ল'ৰা আৰু এজনী ছোৱালী বাছিব বিচাৰিলে। তেওঁ কিমানটা উপায়ে কামটো কৰিব পাৰিব?

সমাধান ঃ এজন ল'ৰা 25 টা উপায়ে বাছিব পাৰি। এজনী ছোৱালী 20 টা উপায়ে বাছিব পাৰি। গতিকে, প্ৰথম ধাকটো (অৰ্থাৎ এজন ল'ৰা বাছি উলিওৱা কামটো) 25 টা উপায়ে কৰিব পাৰি, দ্বিতীয় ধাপটো (অৰ্থাৎ এজনী ছোৱালী বাছি উলিওৱা কামটো) 20 টা উপায়ে কৰিব পাৰি।

$\therefore$ এজন ল'ৰা আৰু এজনী ছোৱালী 25×20 অৰ্থাৎ 500 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

উদাহৰণ 5 ঃ দুটা অংকবিশিষ্ট অযুগ্ম ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংখ্যা কিমান?

সমাধান ঃ এককৰ স্থানটো 5 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (1, 3, 5, 7, 9 অংককেইটাৰ যিকোনো এটা)। দহকৰ স্থানটো 9 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অংককেইটাৰ যিকোনো এটা)। গতিকে, প্ৰথম ধাপটো 5 টা উপায়ে কৰিব পাৰি, দ্বিতীয় ধাপটো 9 টা উপায়ে কৰিব পাৰি।

$\therefore$ কামটো 5×9 অৰ্থাৎ 45 টা উপায়ে কৰিব পাৰি।

$\therefore$ দুটা অংকবিশিষ্ট অযুগ্ম ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংখ্যা 45.



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ১

প্ৰশ্ন নং ১ঃ 24 জন পুৰুষ আৰু 12 গৰাকী মহিলাৰ মাজৰ পৰা এজন পুৰুষ বা এগৰাকী মহিলা বাছি উলিয়াব লাগে। কিমানটা উপায়ে এইটো কৰিব পৰা যাব?

প্ৰশ্ন নং ২ঃ এটা শ্ৰেণীত 24 জন ল'ৰা আৰু 12 জনী ছোৱালী আছে। এজন শিক্ষকে এজন ল'ৰা আৰু এজনী ছোৱালী বাছি উলিয়াব বিচাৰিলে। কিমানটা উপায়ে কামটো কৰিব পৰা যাব?

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ দুটা অংকবিশিষ্ট যুগ্ম ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ তিনিটা অংকবিশিষ্ট অযুগ্ম ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ তিনিটা অংকবিশিষ্ট যুগ্ম ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ চাৰিটা অংকবিশিষ্ট অযুগ্ম ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৭ঃ চাৰিটা অংকবিশিষ্ট যুগ্ম ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৮ঃ এটা পুথিভঁৰালত 40 খন গণিতৰ কিতাপ আৰু 28 খন বিজ্ঞানৰ কিতাপ আছে। কিমানটা উপায়ে এখন গণিতৰ বা এখন বিজ্ঞানৰ কিতাপ বাছিব পৰা যাব?

প্ৰশ্ন নং ৯ঃ এটা পুথিভঁৰালত 40 খন গণিতৰ কিতাপ আৰু 28 খন বিজ্ঞানৰ কিতাপ আছে। কিমানটা উপায়ে এখন গণিতৰ আৰু এখন বিজ্ঞানৰ কিতাপ বাছিব

পৰা যাব?

প্রশ্ন নং ১০ঃ এটা ডাঙৰ হলত (hall) 12 খন দুৱাৰ আছে। এজন মানুহে কিমানটা উপায়ে এখন দুৱাৰেৰে সোমাই আন এখন বেলেগ দুৱাৰেৰে ওলাব পাৰে?

প্রশ্ন নং ১১ঃ গুৱাহাটী আৰু ডিব্রুগড়ৰ মাজত 15 খন বাছ চলাচল কৰে। এজন মানুহে কিমানটা উপায়ে গুৱাহাটীৰ পৰা ডিব্রুগড়লৈ গৈ বেলেগ এখন বাছেৰে ঘূৰি আহিব পাৰে?

প্রশ্ন নং ১২ঃ এটা শাৰীত (queue) 7 জন ছাত্র কিমানটা উপায়ে থিয় হ'ব পাৰে?

প্রশ্ন নং ১৩ঃ এজন মানুহৰ হাতত 6 খন চিঠি আৰু চিঠি ডাকত দিবলৈ তিনিটা চিঠিৰ বাকছ আছে। মানুহজনে কিমানটা উপায়ে চিঠিকেইখন প'ষ্ট কৰিব পাৰে?

প্রশ্ন নং ১৪ঃ তিনিটা পুৰস্কাৰ 6 জন ছাত্রৰ মাজত কিমানটা উপায়ে বিতৰণ কৰিব পাৰি, যদি প্রতিটো পুৰস্কাৰৰ বাবে প্রতিজন ছাত্রই অর্হতাসম্পন্ন?

প্রশ্ন নং ১৫ঃ এজন অনুজ্ঞা ফলকত ইংৰাজী বর্ণমালাৰ দুটা পৃথক আখৰ আৰু তাৰ ঠিক পাছত চাৰিটা পৃথক অংক আছে। কিমানকেইখন অনুজ্ঞা ফলক প্রস্তুত কৰিব পৰা যাব?

প্রশ্ন নং ১৬ঃ এখন প্রশ্ন কাকতত দহটা সঁচা-মিছা (true-false) লিখিব লগা প্রশ্ন আছে। এজন পৰীক্ষার্থীয়ে কিমানটা উপায়ে প্রশ্নকেইটাৰ উত্তৰ কৰিব পাৰে?

প্রশ্ন নং ১৭ঃ 5 টা মৌলবিশিষ্ট এটা সংহতিৰপৰা 7 টা মৌলবিশিষ্ট এটা সংহতি লৈ কিমানটা ফলন আছে?

প্রশ্ন নং ১৮ঃ 7 টা মৌলবিশিষ্ট এটা সংহতিৰ পৰা 5 টা মৌলবিশিষ্ট এটা সংহতি লৈ কিমানটা ফলন আছে?

প্রশ্ন নং ১৯ঃ 5 টা মৌলবিশিষ্ট এটা সংহতিৰ পৰা 7 টা মৌলবিশিষ্ট এটা সংহতিলৈ কিমানটা একৈকী ফলন আছে?

প্রশ্ন নং ২০ঃ m টা মৌলবিশিষ্ট এটা সংহতিৰ পৰা n টা মৌলবিশিষ্ট এটা সংহতিলৈ কিমানটা একৈকী ফলন আছে?

প্রশ্ন নং ২১ঃ ইংৰাজী বর্ণমালাৰ আখৰ ব্যৱহাৰ কৰি সাতটা বর্ণযুক্ত কিমানটা পেলিনড্র'ম সাজিব পাৰি, যদিহে এটা বর্ণ দুবাৰতকৈ বেছি ব্যৱহাৰ কৰা নহয়?

১২.৫ বিন্যাস (PERMUTATION)

ধৰাহ'ল এটা সংহতিত n টা পৃথক মৌল আছে। সংহতিটোৰ r টা মৌলৰ এটা ক্রমিত সজ্জাক (ordered arrangement) বিন্যাস (বা n টা মৌলৰ r বিন্যাস) বোলা হয়, $r \leq n$.

প্রতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে বুজোৱা হয় ${}^nP_r$, বা P(n, r), বা $P\binom{n}{r}$.

উপপাদ্য ঃ (পুনৰুক্তি নোহোৱাকৈ r-বিন্যাসৰ সংখ্যা) n টা বিভিন্ন বস্তুৰ r-বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ল

$P(n, r) = n(n-1)\, n(-2) \ldots\ldots (n-r+1)$

$$= \frac{n!}{(n-r)!},\ r \le n$$

প্রমাণ ঃ প্রথমটো বস্তু n টা বিভিন্ন উপায়ে বাছিব পাৰি। গতিকে (n-1) টা বস্তু বাকী থাকিল। গতিকে, দ্বিতীয় বস্তুটো (n-1) টা উপায়ে বাছিব পাৰি। সেইদৰে, তৃতীয় বস্তুটো (n-2) টা উপায়ে বাছিব পাৰি। এনেদৰে শেষৰ বস্তুটো, অর্থাৎ r -তম বস্তুটো (n-r+1) টা উপায়ে বাছিব পাৰি। ফলস্বৰূপে, পূৰণৰ নিয়ম অনুসৰি, ক্রমিত সজ্জাৰ সংখ্যা হ'ল n(n-1)(n-2) . . . . (n-r+1) গতিকে

$P(n, r) = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-r+1)$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots..(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\ldots..3.2.1}{(n-r)(n-r-1)\ldots.\ 3.2.1}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

টোকা ঃ $P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!,\ 0!=1$

উদাহৰণ 6 ঃ P(n, 4) = 360 হ'লে, n অৰ মান নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ P (n, 4) = 360

বা, $\frac{n!}{(n-4)!} = 360$

বা, $\frac{n(n-1)(n-2)(4-3)(n-4)!}{(n-4)!} = 360$

বা, n(n-1)(n-2)(n-3) = 6 x 5 x 4 x 3

$\therefore$ n = 6

টোকা ঃ বাওঁপক্ষ চাৰিটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ পূৰণফল। সেইবাবে, সোঁপক্ষকো চাৰিটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ পূৰণফল হিচাবে প্রকাশ কৰা হৈছে।

উদাহৰণ 7 ঃ 1, 2, 3, 5, 7, 8 এই ছয়টা অংকৰপৰা কিমানটা চাৰিটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যা গঠন কৰিব পাৰি, যদি এটা অংক একাধিকবাৰ ব্যৱহাৰ কৰিব নোৱাৰি?

সমাধান ঃ চাৰিটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যাৰ সংখ্যা

= ছয়টা বস্তুৰ (অংকৰ) 4-বিন্যাসৰ সংখ্যা

= P (6, 4)

$= \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!}$ = 6 x 5 x 4 x 3 = 360

উদাহৰণ 8 ঃ 10 খন পৰীক্ষাৰ উত্তৰৰ বহী কেনেদৰে সজাব পাৰি যদি আটাইতকৈ ভাল আৰু

আটাইতকৈ বেয়াখন সদায় একেলগে থাকে?

সমাধান ঃ আটাইতকৈ ভাল আৰু আটাইতকৈ বেয়াখন একেলগে আছে। গতিকে আমি দুয়োখনকে, এখন বুলি ধৰিব পাৰোঁ। তেনেস্থলত 10 টা বস্তুৰ ঠাইত 9 টা বস্তু হ'ব। এই ক্ষেত্ৰত মুঠ উপায় হ'ব $^{9}P_{9}$ অৰ্থাৎ 9!.

আকৌ, আটাইতকৈ ভাল আৰু আটাইতকৈ বেয়াখনক নিজৰ মাজত 2! টা উপায়ে সজাব পাৰি।

∴ উলিয়াব লগীয়া মুঠ উপায়।

$= 9! \times 2!$

$= 725760.$



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

প্ৰশ্ন নং ১ঃ তিনিজন মানুহ এখন ৰে'লগাড়ীত উঠিল। তাত ছয়খন আসন খালী আছে। মানুহকেইজন কিমান উপায়ে আসন কেইখনত বহিব পাৰিব?

প্ৰশ্ন নং ২ঃ এজন মানুহে 6 জন মানুহক নিমন্ত্ৰণ কৰিবলগীয়া হ'ল। নিমন্ত্ৰণী পত্ৰ পঠিয়াবলৈ তিনিজন পত্ৰবাহক আছে। মানুহজনে কিমানটা উপায়ে নিমন্ত্ৰণী পত্ৰ পঠিয়াব পাৰিব?

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ এটা পৰীক্ষাত 5 টা পুৰস্কাৰ 20 জন পৰীক্ষাৰ্থীক দিব লাগে। যদি এজন পৰীক্ষাৰ্থীয়ে মাত্ৰ এটা পুৰস্কাৰহে পাব পাৰে, কিমানটা উপায়ে পুৰস্কাৰবোৰ বিতৰণ কৰিব পৰা যাব?

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ এটা অংক একাধিকবাৰ ব্যৱহাৰ নকৰাকৈ 1, 2, 3, 4, 5 অংককেইটাৰ পৰা 100 আৰু 1000-অৰ মাজৰ কিমানটা সংখ্যা গঠন কৰিব পাৰি? 100 আৰু 10,000 অৰ মাজৰ সংখ্যাৰ সংখ্যা কিমান?

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ 1, 2, 3, 5, 7, 8 অংককেইটাৰ পৰা কিমানটা চাৰিটা অংকবিশিষ্ট যুগ্ম সংখ্যা গঠন কৰিব পাৰি, যদি এটা অংক একাধিকবাৰ ব্যৱহাৰ কৰা নহয়?

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ 1, 2, 3, 5, 7, 8 অংককেইটাৰ পৰা কিমানটা চাৰিটা অংকবিশিষ্ট অযুগ্ম সংখ্যা গঠন কৰিব পাৰি, যদি এটা অংক একাধিকবাৰ ব্যৱহাৰ কৰা নহয়?

প্ৰশ্ন নং ৭ঃ 1, 2, 3, 5, 7, 8 অংককেইটাৰ পৰা 5 এৰে বিভাজ্য কিমানটা চাৰিটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যা গঠন কৰিব পাৰি, যদি এটা অংক একাধিকবাৰ ব্যৱহাৰ কৰা নহয়?

প্ৰশ্ন নং ৮ঃ 10 খন পৰীক্ষাৰ উত্তৰৰ বহী কেনেদৰে সজাব পাৰি যদি আটাইতকৈ ভাল আৰু আটাইতকৈ বেয়াখন কেতিয়াও একেলগে নাথাকে?

প্রশ্ন নং ৯ঃ মিষ্টাৰ X -অৰ 4 খন গণিতৰ কিতাপ, 3 খন পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানৰ কিতাপ আৰু 5 খন অৰ্থবিজ্ঞানৰ কিতাপ আছে। এটা বুক-শ্বেল্‌ফত তেওঁ কিতাপবোৰ কিমান প্ৰকাৰে সজাব পাৰে যদি প্ৰতিটো বিষয়ৰ কিতাপবোৰ একেলগে থাকে আৰু কিতাপবোৰ এই ক্ৰমত থাকে আৰু কিতাপবোৰ এই ক্ৰমত থাকে, গণিত, পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান, অৰ্থবিজ্ঞান।

প্রশ্ন নং ১০ঃ TRIANGLE শব্দটোৰ আখৰবোৰ কিমানটা উপায়ে সজাব পাৰি যদি প্ৰতিটো সজ্জা T ৰে আৰম্ভ হয় আৰু E-ৰে শেষ হয়?

১২.৬ দল বা জোঁট (COMBINATION)

ধৰা হ'ল এটা সংহতিত n টা পৃথক মৌল আছে। সংহতিটোৰ r টা মৌলৰ এটা অক্রমিত বাছনিক (Unordered selection) দল (বা n টা মৌলৰ r-দল) বোলা হয়, $r \le n$.

প্রতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে বজোৱা হয় ${}^nC_r$ বা C(n, r) বা $C(n_r)$

উপপাদ্য ঃ (পুনৰুক্তি নোহোৱাকৈ r-দলৰ সংখ্যা) n টা বিভিন্ন বস্তুৰ r -দলৰ সংখ্যা হ'ল

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{n!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad r \le n$$

প্রমাণ ঃ r-দল বুলি ক'লে আমি বুজোঁ n টা বিভিন্ন বস্তুৰ পৰা r টা বস্তুৰ এটা অক্রমিত বাছনি।

প্রত্যেক r-দলত r টাকৈ বস্তু আছে। এই r টা বস্তুক সিহঁতৰ মাজত ${}^rP_r$ অৰ্থাৎ r! উপায়ে সজাব পাৰি। গতিকে, প্রতিটো r-দলৰ পৰা r! টা বিন্যাস পোৱা যাব।

$\therefore$ C(n, r) টা দলৰ পৰা C(n, r) r! টা বিন্যাস পোৱা যাব।

আমি জানো যে n টা বিভিন্ন বস্তুৰ r-বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ল P(n, r).

$\therefore$ C (n, r) r ! = P (n, r)

বা, $C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!}$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

টোকা ঃ $C(n, n) = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1, \ 0.! = 1$

উপপাদ্য ঃ C(n, r) = C(n, n-r), $r \le n$

প্রমাণ ঃ যদি n টা বস্তুৰ পৰা r টা বস্তু বছা যায়, তেনেহ'লে (n-r) বস্তু বাকী থাকিব।

গতিকে, n টা বস্তুৰ পৰা r টা বস্তু বছাৰ অৰ্থ হ'ল (n-r) টা বস্তু বাদ দিয়া।

গতিকে, প্রত্যেক r-দলৰ অনুৰূপে এটা (n-r) দল আছে।

$\therefore$ C(n, r) = C(n, n-r)

উপপাদ্য ঃ (পাস্কেলৰ অভেদ)

$C(n+1, r) = C(n, r) + C(n, r-1)$, $r \le n$

প্রমাণ ঃ (n+1) টা মৌলবিশিষ্ট এটা সসীম সংহতি A লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল B, A ৰ এটা উপসংহতি আৰু ধৰা হ'ল B ৰ মৌলৰ সংখ্যা n.

ধৰা হ'ল $p \in A$ যাতে $p \notin B$

স্পষ্টতঃ $A = B \cup \{p\}$

গতিকে A ৰ প্রতিটো r মৌলবিশিষ্ট উপসংহতি হয় B ৰ এটা r মৌলবিশিষ্ট উপসংহতি নতুবা B ৰ এটা (r-1) মৌলবিশিষ্ট উপসংহতি আৰু একমৌল সংহতি {p}ৰ মিলন।

প্রথম ক্ষেত্রত, উপসংহতিৰ সংখ্যা C(n, r); আনহাতেদি দ্বিতীয় ক্ষেত্রত উপসংহতিৰ সংখ্যা C(n, r-1).

$\therefore$ A ৰ r টা মৌলবিশিষ্ট উপসংহতিৰ সংখ্যা C(n, r) + C(n, r-1).

কিন্তু আমি জানো যে A ৰ r টা মৌলবিশিষ্ট উপসংহতিৰ সংখ্যা C(n+1, r).

$\therefore$ C(n+1, r) = C(n, r) + C(n, r-1).

টোকা ঃ ব্লেইজ পাস্কেল (Blaise pascal) আছিল সপ্তদশ শতিকাৰ এজন বিখ্যাত ফৰাচী গণিতজ্ঞ।

উদাহৰণ 9 ঃ 9 জন ভদ্রলোক আৰু 6 গৰাকী মহিলাৰ পৰা 6 জন ভদ্রলোক আৰু 3 গৰাকী মহিলাৰে কিমান কমিটী গঠন কৰিব পৰা যাব?

সমাধান ঃ 9 জন ভদ্রলোকৰ পৰা ${}^9C_6$ টা উপায়ে 6 জনীয়া ভদ্রলোকৰ দল গঠন কৰিব পাৰি। 6 জনীয়া ভদ্রলোকৰ দল গঠন কৰিব পাৰি। 6 গৰাকী মহিলাৰ পৰা ${}^6C_3$ টা উপায়ে 3 জনীয়া মহিলাৰ দল গঠন কৰিব পাৰি।

$\therefore$ পূৰণৰ নিয়ম অনুসৰি, মুঠ কমিটীৰ সংখ্যা = ${}^9C_6 \times {}^6C_3$

$$= \frac{9!}{6!\ 3!} \times \frac{6!}{3!\ 3!}$$

$$= \frac{9\times 8\times 7}{3\times 2\times 1} \times \frac{6\times 5\times 4}{3\times 2\times 1}$$

$$= 3\times 4\times 7\times 5\times 4$$

$$= 1680$$

উদাহৰণ 10 ঃ এখন প্রশ্নকাকতত A, B, C তিনিটা ভাগ আছে। A ভাগত 4 টা, B ভাগত 5 টা আৰু C ভাগত 6 টা প্রশ্ন আছে। এজন পৰীক্ষার্থীয়ে কিমানটা উপায়ে 7 টা প্রশ্ন বাছিব পাৰিব যদি তেওঁ প্রত্যেক বিভাগৰ পৰা অন্ততঃ দুটা প্রশ্ন বাছিব লাগে?

সমাধান ঃ ইয়াত সম্ভাৱনা তিনিটা

I A ৰ পৰা দুটা, B ৰ পৰা দুটা, C ৰ পৰা তিনিটা

বা II A ৰ পৰা দুটা, B ৰ পৰা তিনিটা, C ৰ পৰা দুটা

বা III A ৰ পৰা তিনিটা, B ৰ পৰা দুটা, C ৰ পৰা দুটা

I -অৰ ক্ষেত্ৰত মুঠ উপায়

$= {}^4C_2 \times {}^5C_2 \times {}^6C_3 = 6 \times 10 \times 20 = 1200$

II-ৰ ক্ষেত্ৰত মুঠ উপায়

$= {}^4C_2 \times {}^5C_3 \times {}^6C_2 = 6 \times 10 \times 15 = 900$

III-ৰ ক্ষেত্ৰত মুঠ উপায়

$= {}^4C_3 \times {}^5C_2 \times {}^6C_2 = 4 \times 10 \times 20 = 800$

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া মুঠ উপায়

$= 1200 + 900 + 800$

$= 2900$



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৩

প্ৰশ্ন নং ১ঃ এটা কাৰ্যালয়ত 6 জন পুৰুষ আৰু 7 গৰাকী মহিলাই কাম কৰে। কিমানটা উপায়ে 3 জন পুৰুষ আৰু 4 গৰাকী মহিলাৰে গঠিত কমিটী গঠন কৰিব পাৰি?

প্ৰশ্ন নং ২ঃ এটা কাৰ্যালয়ত 6 জন পুৰুষ আৰু 7 গৰাকী মহিলাই কাম কৰে। কিমানটা উপায়ে এটা 4 জনীয়া কমিটী গঠন কৰিব পাৰি যদিহে অন্ততঃ এগৰাকী মহিলা অন্তৰ্ভুক্ত কৰা হয়?

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ এটা কাৰ্যালয়ত 6 জন পুৰুষ আৰু 7 গৰাকী মহিলাই কাম কৰে। কিমানটা উপায়ে এটা 4 জনীয়া কমিটী গঠন কৰিব পাৰি যদিহে অতি বেছি এজন পুৰুষ অন্তৰ্ভুক্ত কৰা হয়?

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ 8 জন ভদ্ৰলোক আৰু 4 গৰাকী ভদ্ৰ মহিলাৰ মাজৰ পৰা 5 জনীয়া দল এটা গঠন কৰিব লাগে। যদি অন্ততঃ এগৰাকী মহিলাক দলটোত অন্তৰ্ভুক্ত কৰিব লাগে, তেনেহ'লে কিমান উপায়ে দলটো গঠন কৰিব পাৰি?

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ এজন মানুহৰ 7 গৰাকী বন্ধু আছে, ইয়াৰে 4 গৰাকী তিৰোতা আৰু 3 জন পুৰুষ। মানুহজনৰ ঘৈনীয়েকৰো 7 গৰাকী বন্ধু আছে, ইয়াৰে 3 গৰাকী তিৰোতা আৰু 4 জন পুৰুষ। এটা ভোজনলৈ ছয় গৰাকী বন্ধুক এনেদৰে নিমন্ত্ৰণ কৰা হ'ল যাতে 3 গৰাকী তিৰোতা বন্ধু আৰু 3 জন পুৰুষ-বন্ধু থাকে আৰু এওঁলোকৰ ভিতৰৰ তিনিগৰাকী মানুহজনৰ পক্ষৰ বন্ধু আৰু তিনিগৰাকী ঘৈনীয়েকৰ পক্ষৰ বন্ধু। কিমানটা উপায়ে এই ছয় গৰাকী বন্ধুক নিমন্ত্ৰণ কৰিব পৰা যাব?



১২.৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- এটা কাম A কৰিবলৈ n_1 টা উপায় আছে আৰু এইবোৰতকৈ পৃথক, আন এটা কাম B কৰিবলৈ n_2 টা উপায় আছে, তেনেহ'লে A বা B কৰিবলৈ n_1+n_2 টা উপায় আছে। এই ক্ষেত্ৰত দুয়োটা কাম একেলগে কৰিব পৰা নাযায়। এইটোক যোগৰ নিয়ম বোলে।
- যদি এটা কাম দুটা ক্ৰমিক ধাপত সম্পন্ন কৰিব পাৰি আৰু প্ৰথম ধাপটো n_1 টা উপায়ে কৰিব পাৰি, আৰু দ্বিতীয় ধাপটো n_2 টা উপায়ে কৰিব পাৰি, তেনেহ'লে কামটো $n_1 \times n_2$ টা উপায়ে কৰিব পাৰি। এইটোক পূৰণৰ নিয়ম বোলে।
- ধৰা হ'ল এটা সংহতিত n টা পৃথক মৌল আছে। সংহতিটোৰ r টা মৌলৰ এটা ক্ৰমিত সজ্জাক n টা মৌলৰ r-বিন্যাস বোলা হয়, $r \le n$ । সংহতিটোৰ r টা মৌলৰ এটা অক্ৰমিত বাছনিক n টা মৌলৰ r-দল বোলা হয়, $r \le n$.
- n টা পৃথক মৌলৰ r-বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ল

  $P(n, r) = n(n-1)(n-2) \ldots . (n-r+1)$

  $$= \frac{n!}{(n-r)!},\ r \le n$$

- n টা পৃথক মৌলৰ r-দলৰ সংখ্যা হ'ল

  $$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{n!} = \frac{n!}{r!(n-r)!},\ r \le n$$

- $C(n, r) = C(n, n-r),\ r \le n$
- $C(n+1, r) = C(n, r) + C(n, r-1)$



১২.৮ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ এজন মানুহ 24 টা উপায়ে বাছিব পাৰি। এগৰাকী মহিলা 12 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

∴ এজন মানুহ বা এগৰাকী মহিলা 24+12 অৰ্থাৎ 36 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ এজন ল'ৰা 24 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

এজনী ছোৱালী 12 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

∴ এজন ল'ৰা আৰু এজনী ছোৱালী 24×12 অর্থাৎ 288 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এককৰ স্থানটো 5 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (0, 2, 4, 6, 8 অংককেইটাৰ যিকোনো এটা)।

দহকৰ স্থানটো 9 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অংককেইটাৰ যিকোনো এটা)।

∴ উলিয়াব লগীয়া সংখ্যাৰ সংখ্যা।

$= 5 \times 9 = 45$

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এককৰ স্থানটো 5 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (1, 3, 5, 7, 9 অংককেইটাৰ যিকোনো এটা)।

দহকৰ স্থানটো 10 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অংককেইটাৰ যিকোনো এটা)।

শতকৰ স্থানটো 9 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অংককেইটাৰ যিকোনো এটা)।

∴ উলিয়াবলগীয়া সংখ্যাৰ সংখ্যা $= 5 \times 10 \times 9 = 450$

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এককৰ স্থানটো 5 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (0, 2, 4, 6, 8 অংককেইটাৰ যিকোনো এটা)।

দহকৰ স্থানটো 10 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অংককেইটাৰ যিকোনো এটা)।

শতকৰ স্থানটো 9 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অংককেইটাৰ যিকোনো এটা)।

∴ উলিয়াবলগীয়া সংখ্যাৰ সংখ্যা

$= 5 \times 10 \times 9 = 450$

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক। উত্তৰ 4500

৭ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক। উত্তৰ 4500

৮ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এখন গণিতৰ কিতাপ বা এখন বিজ্ঞানৰ কিতাপ 40+28 অর্থাৎ 68 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

৯ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এখন গণিতৰ কিতাপ আৰু এখন বিজ্ঞানৰ কিতাপ 40×28 অর্থাৎ 1120 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

১০ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এজন মানুহে হলটোত 12 টা উপায়ে সোমাব পাৰে, অর্থাৎ প্রথম ধাপটো 12 টা উপায়ে কৰিব পাৰি। মানুহজনে হলটোৰ পৰা 11 টা উপায়ে ওলাই আহিব পাৰে। অর্থাৎ দ্বিতীয় ধাপটো 11 টা উপায়ে কৰিব পাৰি।

∴ নির্ণেয় উপায়।

$= 12 \times 11 = 132$

১১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক। উত্তৰ 210

১২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক। উত্তৰ 5040

১৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক। উত্তৰ $3^6 = 729$

১৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক। উত্তৰ $6^3 = 216$

১৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ প্রথম আখৰটো 26 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি।

দ্বিতীয় আখৰটো 25 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি

প্রথম অংকটো 10 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি

দ্বিতীয় অংকটো 9 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি

তৃতীয় অংকটো 8 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি

চতুর্থ অংকটো 7 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি

$\therefore$ উলিয়াব লগীয়া মুঠ উপায়

$= 26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7$

১৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ প্রথম প্রশ্নটোৰ উত্তৰ দুটা উপায়ে কৰিব পাৰি (সঁচা বা মিছা)

সেইদৰে, প্রতিটো প্রশ্নৰ উত্তৰ দুটা উপায়ে কৰিব পাৰি।

$\therefore$ নির্ণেয় উপায়

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^{10} = 1024$

১৭ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ আদিক্ষেত্রৰ মৌলৰ সংখ্যা = 5

সহক্ষেত্রৰ মৌলৰ সংখ্যা = 7

প্রথমটো মৌল 7 টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

সেইদৰে আদিক্ষেত্রৰ প্রতিটো মৌলক 7 টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

$\therefore$ মুঠ ফলনৰ সংখ্যা

$= 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5$

১৮ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ আদিক্ষেত্রৰ মৌলৰ সংখ্যা = 7

সহক্ষেত্রৰ মৌলৰ সংখ্যা = 5

আদিক্ষেত্রৰ প্রতিটো মৌলক 5 টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

$\therefore$ মুঠ ফলনৰ সংখ্যা

$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^7$

১৯ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ আদিক্ষেত্রৰ মৌলৰ সংখ্যা = 5

সহক্ষেত্রৰ মৌলৰ সংখ্যা = 7

প্রথমটো মৌল 7 টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

দ্বিতীয়টো মৌল 6 টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

তৃতীয়টো মৌল 5 টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

চতুর্থটো মৌল 4 টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

পঞ্চমটো মৌল 3 টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

$\therefore$ নির্ণেয় একৈকী ফলনৰ সংখ্যা

$= 7\times6\times5\times4\times3 = 2520$

২০ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এই ক্ষেত্রত m > n, কিয়নো যদি m > n, তেনেহ'লে প্রথম সংহতিটোৰ পৰা দ্বিতীয়টো সংহতিলৈ একৈকী ফলন থাকিব নোৱাৰে।

$\therefore m \le n$

এতিয়া প্রথম মৌলটো n টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

দ্বিতীয় মৌলটো (n-1) টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

তৃতীয় মৌলটো (n-2) টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

এনেদৰে, m তম মৌলটো (n-m+1) টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

$\therefore$ নির্ণেয় একৈকী ফলনৰ সংজ্ঞা

$= n(n-1)(n-2) \ldots . (n-m+1)$

২১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ পেলিনড্র'ম (palindrome) শব্দটোৰ আভিধানিক অর্থ এনেধৰণৰ,— ই শব্দ বা শব্দৰ সমষ্টি বা বাক্য বা সংখ্যা,— আৰম্ভণিৰ পৰা পঢ়িলে যি হয়, শেহৰপৰা পঢ়িলেও একে হয়। যতি-চিহ্নৰ ব্যৱহাৰ মানি চলা নহয়। কেতিয়াবা শব্দবোৰ ভঙাও হয়।

উলিয়াবলগীয়া পেলিনড্র'মৰ সংখ্যা

$= 26\times25\times24\times23$

$= 358800$

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ উলিয়াবলগীয়া উপায় $= {}^6P_3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6\times5\times4\times3!}{3!}$

$= 120$

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ উলিয়াবলগীয়া উপায় $= 3\times3\times3\times3\times3\times3 = 729$

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ উলিয়াবলগীয়া উপায় $= {}^{20}P_5 = \frac{20!}{(20-5)!}$

$= \frac{20!}{15!} = \frac{20\times19\times18\times17\times16\times15!}{15!}$

$= 1860480$

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক। উত্তৰ 60,180

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এককৰ স্থানটো দুটা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (2, 8 অংক দুটাৰ যিকোনো এটা)। বাকী তিনিটা স্থান ${}^5P_3$ টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি।

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া সংখ্যাৰ সংখ্যা

$$= 2 \times {}^5P_3 = 2 \times \frac{5!}{(5-3)!} = 2 \times \frac{5!}{2!} = 2 \times \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!}$$

$= 120$

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এককৰ স্থানটো 4 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (1, 3, 5, 7 অংককেইটাৰ যিকোনো এটা)। বাকী তিনিটা স্থান ${}^5P_3$ টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি।

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া সংখ্যাৰ সংখ্যা

$= 4 \times {}^5P_3 = 4 \times 5 \times 4 \times 3 = 240$

৭ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এককৰ স্থানটো এটা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (5)। বাকী তিনিটা স্থান ${}^5P_3$ টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি।

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া সংখ্যাৰ সংখ্যা

$= 1 \times {}^5P_3 = 1 \times 5 \times 4 \times 3 = 60$

৮ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ যদি কোনো বাধা আৰোপ কৰা নহয়, তেনেহ'লে 10 খন বহীক ${}^{10}P_{10}$ অর্থাৎ 10! উপায়ে সজাব পাৰি।

আকৌ আমি জানো যে যদি আটাইতকৈ ভালখন আৰু আটাইতকৈ বেয়াখন একেলগে থাকে, তেনেহ'লে মুঠ উপায় = $9! \times 2! = 725760$ (উদাহৰণ8)

$\therefore$ আটাইতকৈ ভালখন আৰু আটাইতকৈ বেয়াখন কেতিয়াও একেলগে নাথাকিলে মুঠ উপায়

$= 10! - 2 \times 9!$

$= 3628809 - 725760$

$= 2903040$

৯ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ মুঠ উপায়

$= 4! \times 3! \times 5!$

$= 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 3 \times 2 \times 1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 17280$

১০ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ প্রতিটো সজ্জা T ৰে আৰম্ভ হ'ব লাগিব আৰু E ৰে শেষ হ'ব লাগিব। গতিকে, T আৰু E ৰ স্থান নির্দিষ্ট।

বাকী থাকিল ছয়টা আখৰ, R. I. A, N, G, L.

এই ছয়টা আখৰ ${}^6P_6$ টা উপায়ে অর্থাৎ 6! টা উপায়ে অর্থাৎ $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ টা উপায়ে অর্থাৎ 720 টা উপায়ে সজাব পাৰি।

$\therefore$ মুঠ উপায় = 720

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ ৩

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ 6 জন মানুহৰ পৰা 3 জন মানুহ ${}^6C_3$ টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

7 গৰাকী মহিলাৰ পৰা 4 গৰাকী মহিলা ${}^7C_4$ উপায়ে বাছিব পাৰি।

$\therefore$ মুঠ উপায়ৰ সংখ্যা

$$= {}^6C_3 \times {}^7C_4 = \frac{6!}{3!\,3!} \times \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} \times \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}$$

$= 20 \times 35 = 700$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ অন্ততঃ এগৰাকী মহিলা বাছিব লাগে। গতিকে মহিলাৰ সংখ্যা 1, বা 2 বা 3 বা 4 হ'ব পাৰে। গতিকে তলৰ সম্ভাৱনাকেইটা পোৱা যাব।

পুৰুষ (6)	মহিলা (7)
3	1
2	2
1	3
0	4

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া মুঠ উপায়

$= {}^6C_3 \times {}^7C_1 + {}^6C_2 \times {}^7C_2 + {}^6C_1 \times {}^7C_3 + {}^6C_0 \times {}^7C_4$

$= 20 \times 7 + 15 \times 21 + 6 \times 35 + 1 \times 35$

$= 140 + 315 + 210 + 35$

$= 700$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ অতি বেছি এজন মানুহ বাছিব লাগে। গতিকে পুৰুষৰ সংখ্যা 0, বা 1 হ'ব পাৰে। গতিকে তলৰ সম্ভাৱনাকেইটা পোৱা যাব।

পুৰুষ (6)	মহিলা (7)
0	4
1	3

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া মুঠ উপায়

$= {}^6C_0 \times {}^7C_4 + {}^6C_1 \times {}^7C_3 = 1 \times 35 + 6 \times 35 = 35 + 210 = 245$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক। উত্তৰ 736

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ তলৰ সম্ভাৱনাকেইটা পোৱা যাব।

মানুহজন		ঘৈনীয়েক	
পুৰুষ (3)	ভদ্ৰমহিলা (4)	পুৰুষ (4)	ভদ্ৰমহিলা (3)
3	0	0	3
2	1	1	2
1	2	2	1
0	3	3	0

∴ উলিয়াবলগীয়া মুঠ উপায়

$= ({}^3C_3 \times {}^4C_0 \times {}^4C_0 \times {}^3C_3) + ({}^3C_2 \times {}^4C_1 \times {}^4C_1 \times {}^3C_2) + ({}^3C_1 \times {}^4C_2 \times {}^4C_2 \times {}^3C_1)$

$+ ({}^3C_0 \times {}^4C_3 \times {}^4C_3 \times {}^3C_0)$

= 485, সৰল কৰাৰ পাছত।



১২.৯ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

1) Discrete Mathematical Structures with Application to Computer Science, J.P. Tremblay & R. Manohar.

2) Discrete Structures and Graph Theory, G.S.S. Bhishma Rao.



১২.১০ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ গণনাৰ যোগৰ নিয়মটো লিখক।

প্ৰশ্ন ২ঃ গণনাৰ পূৰণৰ নিয়মটো লিখক।

প্ৰশ্ন ৩ঃ মিশ্রিত যুক্তিৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰক যে

$C(2n, 2) = 2\,C(n, 2) + n^2$

প্ৰশ্ন ৪ঃ মিশ্রিত যুক্তিৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰক যে

$C(n+m,r)=\sum_{i=0}^{r} C(m,r-i)C(n,i)$ য'ত m, n, r অখণ্ড সংখ্যা আৰু

$n \geq r \geq 0$, আৰু $m \geq r \geq 0$.

প্ৰশ্ন ৫ঃ দুটা পৃথক লুডুগুটি দলিয়াই দিয়া হ'ল। কিমানটা উপায়ে 7 বা 9 যোগফল পাব পাৰি?

প্ৰশ্ন ৬ঃ এবাহ তাচৰ পৰা এপাত চাহেব বা এপাত বিবি কিমান উপায়ে পাব পাৰি?

প্ৰশ্ন ৭ঃ এখন অনুজ্ঞা ফলকত দুটা ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ আখৰ আছে, তাৰ পাছত দুটা অংক, তাৰ পাছত দুটা ইংৰাজী আখৰ, তাৰ পাছত চাৰিটা অংক আছে। যদি এটা আখৰ বা এটা অংক একাধিকবাৰ ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি, তেনেহ'লে কিমান অনুজ্ঞাফলক প্ৰস্তুত কৰিব পৰা যাব?

প্ৰশ্ন ৮ঃ 10 যোৰ পতি-পত্নী আছে। এগৰাকী মহিলা আৰু এজন পুৰুষ (মহিলাগৰাকীৰ স্বামী নহয়) কিমান উপায়ে বাছিব পৰা যাব?

প্রশ্ন ৯ঃ 8 জন ল'ৰা আৰু 6 জনী ছোৱালীৰ পৰা এটা 8 জনীয়া খেলুৰৈ দল গঠন কৰিব লাগে। কিমান প্রকাৰে দলটো গঠন কৰিব পৰা যাব যদিহে এজনী নির্দিষ্ট ছোৱালীক বাদ দি আৰু এটা নির্দিষ্ট ল'ৰাক অন্তর্ভুক্ত কৰি দলটোত 3 জনী ছোৱালী থাকিবই লাগে?

প্রশ্ন ১০ঃ n টা মৌলবিশিষ্ট এটা সংহতিৰ পৰা সেই একেটা সংহতি লৈ একৈকী ফলনৰ সংখ্যা নির্ণয় কৰা।

*** ***** ***

অধ্যায় ১৩ ঃ গাণিতিক যুক্তি (MATHEMATICAL LOGIC)

অধ্যায় গাঁথনি

১৩.১ উদ্দেশ্য

১৩.২ পৰিচয়

১৩.৩ উক্তিৰ সংজ্ঞা (Definition of Statements)

১৩.৩.১ উক্তিৰ উদাহৰণ (Examples of Statements)

১৩.৪ যৌক্তিক সংযোজক (Logical Connectives)

১৩.৪.১ নেতি পদ (Negation)

১৩.৪.২ সংযোজক পদ (Conjunction)

১৩.৪.৩ বিযুক্তি পদ (Disjunction)

১৩.৪.৪ সপ্রতিবন্ধ পদ (Conditional)

১৩.৪.৫ দ্বি-সপ্রতিবন্ধ পদ (Biconditional)

১৩.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১৩.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১৩.৭ অধিক জানিবলৈ

১৩.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

১৩.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- উক্তিৰ সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ দিব পাৰিব
- বিভিন্ন উক্তিৰ বিষয়ে থকা 'স্বীকৃত সত্য নীতি' তালিকাৰ (Truth Tables) সংজ্ঞা দিব পাৰিব
- উক্তিৰ নেতিপদৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- দুটা উক্তিৰ সংযোজক পদ, বিযুক্তি পদ, সপ্রতিবন্ধ পদ আৰু দ্বি-সপ্রতিবন্ধ পদৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।

১৩.৩ পৰিচয়

গাণিতিক যুক্তি হ'ল গণিত শাস্ত্ৰৰ এনে এক শাখা যিটো অধ্যয়ন কৰি গাণিতিক যুক্তি প্ৰদৰ্শনৰ বিভিন্ন পদ্ধতি জানিব পাৰি। এই কথা আমি সকলোৱে জানো যে যুক্তিৰে কথাবোৰ ফঁহিয়াই চোৱাৰ সামৰ্থ থকা বাবেই মানুহ অন্য জীৱতকৈ শ্ৰেষ্ঠতৰ। যিকোনো বিজ্ঞানসন্মত তত্বৰ প্ৰদত্ত তৰ্কবোৰ অথবা গাণিতিক প্ৰমাণবোৰ অথবা সমাধানবোৰ বৈধ হয়নে নহয় সেয়া

নির্ধাৰণ কৰাৰ নীতি আৰু কৌশল যুক্তিয়ে আগবঢ়ায়। তর্ক আৰু সমাধানৰ অধ্যয়নৰ সৈতে যুক্তি জড়িত। গণিতত সূত্রবোৰ প্রমাণ কৰিবলৈ যুক্তি ব্যৱহাৰ কৰা হয়। আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনৰ নানা ধৰণৰ সমস্যাৰ বাবে ভৌতিক বিজ্ঞানৰ বিভিন্ন পৰীক্ষা-নিৰীক্ষাৰ পৰা সমাধান বাহিৰ কৰিবলৈকো যুক্তিৰ ব্যৱহাৰ কৰা হয়। কম্পিউটাৰ বিজ্ঞানত প্র'গ্রেমবোৰৰ নির্ভুলতা প্রমাণ কৰিবলৈ যুক্তি প্রয়োগ কৰা হয়। যুক্তিৰ নীতি অথবা কৌশলবোৰক 'অনুমিতিৰ নিয়ম' (rules of inference) বোলা হয়। কাৰণ, যুক্তিৰ প্রধান লক্ষ্য হ'ল প্রদত্ত অপ্রমাণিত যুক্তিসংগত ধাৰণাৰ (hypothesis) ৰাশি (set) এটাৰ পৰা অনুমিতি সমাধান (conclusions inferences) বাহিৰ কৰা। এই অধ্যায়টিত আপোনালোকক উক্তিৰ সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ আৰু বিভিন্ন উক্তিৰ স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকাৰ সৈতে পৰিচয় কৰাই দিয়া হ'ব। অধ্যায়টিৰ অন্য আলোচ্য বিষয়বোৰ হ'ল যৌক্তিক সংযোজক তথা উক্তিৰ বিলোম (converse), প্রতিলোম (opposite) আৰু প্রতি-অনুলোম (contrapositive)।



উক্তবোৰৰ চিহ্নিত কৰিবলৈ আমি ইংৰাজীৰ বৰফলা আখৰবোৰ P, Q, R, . . . ব্যৱহাৰ কৰো।

১৩.৩ উক্তিৰ সংজ্ঞা (DEFINITION OF STATEMENTS)

যুক্তি প্রদর্শনৰ সময়ত আমি এক বিশেষ শৈলীত গঠিত বাক্যৰ সহায়ত আমাৰ ধাৰণা অথবা চিন্তাবোৰ প্রকাশ কৰোঁ। দৈনন্দিন সংযোগ স্থাপনৰ সময়ত আমি সাধাৰণতে তলত উল্লেখ কৰা ধৰণৰ বাক্য প্রয়োগ কৰোঁ।

দৃঢ়তাসূচক/ঘোষণামূলক বাক্য (Assertive sentence) ঃ কোনো বস্তুত নাইবা কথা দৃঢ়তাৰে কোৱা বাক্যবোৰকে দৃঢ়তাসূচক/ঘোষণামূলক বাক্য বোলে। যেনে— 'মংগল গ্রহ জীৱৰ বাবে অনুকুল।'

আদেশ/অনুৰোধ ইত্যাদি বুজোৱা বাক্য (Imperative sentence) ঃ যিবোৰ বাক্যই কোনো আদেশ নাইবা অনুৰোধ বুজায় সেইবোৰক বাক্যৰ এইটো ভাগত ধৰা হয়। যেনে— 'অনুগ্রহ কৰি মোক একাপ চাহ দিয়কচোন।'

ভাৱবোধক বাক্য (Exclamatory sentence) ঃ মনৰ কোনো তীব্র অনুভৱ/অনুভূতি প্রকাশ কৰা বাক্যবোৰকে ভাৱবোধক বাক্য বোলে। যেনে— 'তিমি মাছটো ইমান ডাঙৰ !'

প্রশ্নবোধক বাক্য (Interrogative sentence) ঃ প্রশ্ন সুধিবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা বাক্যবোৰকে প্রশ্নবোধক বাক্য বোলে। যেনে— 'আপোনাৰ বয়স কিমান?'

উক্তি *(STATEMENT)* ঃ উক্তি হ'ল দৃঢ়তাসূচক/ঘোষণামূলক বাক্য অথবা বাক্যাংশ। এনে বাক্য অথবা বাক্যাংশ সঁচা অথবা মিছা হ'ব পাৰে। কিন্তু একে সময়তে সঁচা আৰু মিছা দুয়োটা হ'ব নোৱাৰে।

১৩.৩.১ উক্তিৰ উদাহৰণ (Examples of Statements)

উদাহৰণ ১ ঃ তলৰ বাক্যবোৰলৈ মন কৰক—

i) ৱাশ্বিংটন ডি চি আমেৰিকাত নাই।

ii) প্ৰতিটো বৰ্গক্ষেত্ৰই একোটা আয়তক্ষেত্ৰ।

iii) পৃথিৱী এটা গ্ৰহ।

iv) তিনি আৰু ছয় যোগ কৰিলে যোগফল ন হয়।

v) সূৰ্যটো এটা নক্ষত্ৰ।

ওপৰৰ (iii), (iv) আৰু (v) নম্বৰ বাক্য তিনিটাৰ প্ৰত্যেকটোৱেই একোটা সঁচা দৃঢ়তাসূচক/ঘোষণামূলক বাক্য। গতিকে ইয়াৰে প্ৰতিটো বাক্যই একোটা উক্তি। ওপৰৰ (i) আৰু (ii) নম্বৰ বাক্য দুটাৰ প্ৰত্যেকটোৱেই একোটা মিছা দৃঢ়তাসূচক/ঘোষণামূলক বাক্য। গতিকে এই দুয়োটা বাক্যই একোটা উক্তি।

উদাহৰণ ২ ঃ তলৰ বাক্যবোৰলৈ মন কৰক—

i) গৃহকাৰ্য কৰা।

ii) মোক এগিলাচ পানী দিয়া।

iii) কেনে আছা?

iv) তুমি কেতিয়াবা তাজমহল দেখিছানে?

v) ঈশ্বৰে তোমাৰ মংগল কৰক ? !

vi) দীৰ্ঘায়ূ হোৱা !

ওপৰৰ (i) আৰু (ii) হ'ল আদেশ/অনুৰোধ বুজোৱা বাক্য। গতিকে এই বাক্য দুটা উক্তি নহয়। (iii) আৰু (iv) হ'ল প্ৰশ্নবোধক বাক্য। সেয়েহে এই দুটা বাক্যক সঁচা অথবা মিছা বুলি ক'ব নোৱাৰি। অৰ্থাৎ এই দুয়োটা বাক্যই উক্তি হ'ব নোৱাৰে। (v) আৰু (vi) হ'ল ইচ্ছা বুজোৱা বাক্য। এই বাক্য দুটাক সঁচাও বুলিব নোৱাৰি মিছাও বুলিব নোৱাৰে। সেয়েহে এই দুটা বাক্যও উক্তি হ'ব নোৱাৰে।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১ঃ তলৰ বাক্যবোৰৰ কোনটো উক্তি আৰু কোনটো উক্তি নহয় বাছি উলিয়াওক। আপোনাৰ উত্তৰৰ সপক্ষে যুক্তি দৰ্শাওক।

i) পেৰিছ চহৰ ইংলেণ্ডত।

ii) ঈশ্বৰে তোমাৰ মংগল কৰক !

iii) ৬ ৰ তিনিটা মৌলিক উৎপাদক আছে।

iv) ১৮ সংখ্যাটো ১৬ তকৈ সৰু।

v) চেন্নাই ইয়াৰ পৰা কিমান দূৰত?

vi) প্ৰতিটো ৰম্বাচেই একোটা বৰ্গ।

vii) এটা মাহত ৩৫ দিন থাকে।

viii) দুই যোগ তিনি পাঁচৰ সমান।

ix) $x + 2 = 9$

x) চন্দ্রটো সেউজীয়া ছানাৰে গঠিত।

১৩.৪ যৌক্তিক সংযোজক (LOGICAL CONNECTIVES)

ওপৰৰ শিতানত আমি প্রাথমিক উক্তিৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিলোঁ। আমি প্রায়েই সৰল (প্রাথমিক) উক্তি লগ লগাই যৌগিক উক্তি গঠন কৰো। দুটা উক্তিৰ মাজত বহুওৱা সংযোজক শব্দবোৰকে যৌক্তিক সংযোজক বোলে। প্রাথমিক উক্তি লগ লগোৱা সংযোজক দুটামান হ'ল ঃ আৰু (And), অথবা (Or), যদি— তেন্তে (If – then), যদি আৰু যদিহে (If and Qnly if), নহয় (Not)

তলত যৌক্তিক সংযোজক আৰু সেইবোৰৰ স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকাবোৰৰ বিষয়ে বহলাই আলোচনা কৰা হ'ল।

১৩.৪.১ নেতিপদ (Negation)

কোনো এটা যুক্তি 'P' ক অস্বীকাৰ কৰাকে যুক্তিটোৰ/বিবৃতিটোৰ নেতিপদ বোলে। ইয়াক ~ চিহ্নৰে বুজোৱা হয় আৰু 'P নহয়' বুলি পঢ়া হয়। যিকোনো P উক্তিৰ নেতিপদটো P ৰ আগত **'~'** চিহ্ন দি অথবা '~P' ৰ পিছত 'It is not the case that .....' (কথাটো এনে নহয় যে....) অথবা 'It is false that .....' (এয়া মিছা যে ....) ইত্যাদি বুলি লিখা বাক্যাংশ যোগ দি গঠন কৰা হয়।

তলৰ উদাহৰণটোলৈ মন কৰক ঃ

P : সকলোবোৰ পূর্ণ/অখণ্ড সংখ্যাই পৰিমেয় সংখ্যা।

এই উক্তিৰ/বিবৃতিৰ নেতিপদ হ'ব ঃ

~ P : কথাটো এনে নহয় যে সকলোবোৰ পূর্ণ সংখ্যাই পৰিমেয় সংখ্যা।

অথবা

~ P : এয়া মিছা যে সকলোবোৰ পূর্ণ সংখ্যাই পৰিমেয় সংখ্যা।

অথবা

~ P : অতি কমেও এটা পূর্ণ সংখ্যা পৰিমেয় সংখ্যা নহয়।

অথবা

~ P : এতিয়া তলৰ উক্তিটোলৈ চাওক—

P : $7 > 9$

এই উক্তিৰ নেতিপদ হ'ল—

~ P : 7 < 9

অথবা

~ P : 7 = 9

নেতি পদৰ স্বীকৃতি সত্য নীতি তালিকা (Truth Table of Negation)

যদি "P" ৰ সত্য নাম (truth value) 'T' বুলি ধৰা হয়, তেন্তে '~P' is 'F'। যদি "P" ৰ সত্য মান 'F', হয়, তেন্তে '~P' ৰ সত্য মান হ'ব F ।

নেতি পদৰ এই সংজ্ঞাটোক তলৰ তালিকাখনত দিয়াৰ দৰে দেখুওৱাব পাৰি।

'~P' ৰ স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকা হ'ল ঃ

P	~P
T	F
F	T

চিত্র ২.১

উদাহৰণ ঃ

তলৰ উক্তি/বিবৃতিবোৰৰ নেতিপদ লিখক—

(i) $\sqrt{7}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা।

(ii) $\sqrt{2}$ এটা যৌগিক সংখ্যা নহয়।

(iii) প্রতিটো স্বাভাৰিক সংখ্যা শূন্যতকৈ ডাঙৰ।

(iv) সকলো মৌলিক সংখ্যাই অযুগ্ম।

(v) সকলো গণিতজ্ঞই মানুহ।

সমাধান ঃ (i) ধৰা হ'ল, প্রদত্ত উক্তিটো *r* ।

অর্থাৎ r : $\sqrt{7}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা।

এই উক্তিটোৰ নেতিপদ ~ r হ'ব।

~ r : কথাটো এনে নহয় যে $\sqrt{7}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা।

অথবা

~ r : $\sqrt{7}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা নহয়।

অথবা

~ r : এয়া মিছা যে $\sqrt{7}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা।

(ii) ধৰা হ'ল প্রদত্ত উক্তিটো *u*

অর্থাৎ, u : $\sqrt{2}$ এটা যৌগিক সংখ্যা নহয়।

উক্তিটোৰ নেতিপদ ~ u হ'ব

~u : $\sqrt{2}$ এটা যৌগিক সংখ্যা।

অথবা

~u : এয়া মিছা যে $\sqrt{2}$ এটা যৌগিক সংখ্যা নহয়।

(iii) উক্তিটোৰ নেতিপদ হ'ব—

এয়া মিছা যে প্রতিটো স্বাভাৱিক সংখ্যা শূন্যতকৈ ডাঙৰ।

অথবা

এনেকুৱা এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা আছে যিটো শূন্যতকৈ ডাঙৰ নহয়।

(iv) উক্তিটোৰ নেতিপদ হ'ব—

এনেকুৱা এটা মৌলিক সংখ্যা আছে যিটো অযুগ্ম নহয়।

অথবা

কিছুমান মৌলিক সংখ্যা অযুগ্ম নহয়।

অথবা

অতি কমেও এটা মৌলিক সংখ্যা অযুগ্ম নহয়।

(v) উক্তিটোৰ নেতিপদ হ'ল—

কিছুমান গণিতজ্ঞ মানুহ নহয়।

অথবা

এনে এক গণিতজ্ঞ আছে যি মানুহ নহয়।

অথবা

অতি কমেও এগৰাকী গণিতজ্ঞ মানুহ নহয়।

অথবা

এয়া মিছা যে সকলো গণিতজ্ঞ মানুহ।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ২ঃ তলৰ উক্তিবোৰৰ নেতিপদবোৰ লিখক-

i) বাংগালুৰু কর্ণাটকৰ ৰাজধানী।

ii) পৃথিৱীখন ঘূৰণীয়া।

iii) সূর্যটো শীতল।

iv) কিছুমান যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা মৌলিক।

v) এটা আয়তক্ষেত্রৰ দুয়োডাল কর্ণৰ দৈর্ঘ্য সমান।

১৩.৪.২ সংযোজক পদ (Conjunction)

দুটা উক্তি P আৰু Q ক লগ লগোৱা পদকে সংযোজক পদ বোলে। ইয়াক উক্তি $P \wedge Q$ বুলি লিখা আৰু "*P* আৰু *Q*" বুলি পঢ়া হয়।

উদাহৰণ ঃ

(i) দুটা উক্তিৰ সংযোজন হ'ব ঃ

P : বৰষুণ দি আছে।

Q : 2 + 2 = 4

P ∧ Q : বৰষুণ দি আছে আৰু 2 + 2 = 4

(ii) তলৰ উক্তিটোলৈ ভালদৰে মন কৰক—

P : পৃথিৱীখন ঘূৰণীয়া আৰু সূর্যটো শীতল।

ইয়াৰ উপাদানবোৰ হ'ল—

Q : পৃথিৱীখন ঘূৰণীয়া।

R : সূর্যটো শীতল।

স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকা ঃ P ∧ Q উক্তিৰ সত্য মান হ'ল T য'ত P আৰু Q দুয়োটাৰে সত্য মান হ'ল T ; অন্যথা ইয়াৰ সত্য মান হ'ব F ।

সংযোজক পদৰ স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকাখন হ'ল—

P	Q	P ∧ Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

চিত্র ২.২

উদাহৰণ ঃ

তলৰ উক্তিটো প্রতীকী ৰূপত উপস্থাপন কৰক—

ৰামু আৰু ৰঘু স্কুললৈ গৈছিল।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বাক্যটো দুটা উক্তিৰ সংযোজক হিচাপে লিখাৰ আগতে উক্তিটোক খণ্ডিত কৰি লোৱাটো দৰকাৰ। ইয়াত খণ্ডিত বাক্য দুটা হ'ব 'ৰামু' স্কুললৈ গৈছিল আৰু ৰঘূ স্কুললৈ গৈছিল।

এতিয়া লিখক P : ৰামু স্কুললৈ গৈছিল।

Q : ৰঘূ স্কুললৈ গৈছিল।

অর্থাৎ, প্রদত্ত বাক্যটো P ∧ Q প্রতীকী ৰূপত উপস্থাপন কৰিব পাৰি।

১৩.৪.৩ বিযুক্তি পদ (Disjunction)

দুটা উক্তি P আৰু Q ৰ বিযুক্তি পদটোক P $\vee$ Q বুলি লিখা আৰু "*P* অথবা *Q*" বুলি পঢ়া হয়।

উদাহৰণ ৩ ঃ

(i) তলৰ যৌগিক উক্তিটোলৈ লৈ মন কৰক—

P : কোনো এক বিন্দুত দুডাল ৰেখাৰ ছেদন হৈছে অথবা দুডাল ৰেখা সমান্তৰাল।

প্রদত্ত উক্তিটোৰ উপাদানবোৰ হ'ল—

Q : কোনো এক বিন্দুত দুডাল ৰেখাৰ ছেদন হৈছে।

R : দুডাল ৰেখা সমান্তৰাল।

(ii) আন এটা উক্তিলৈ মন কৰক—

P : ৪৫ হ'ল ৪ আৰু ৬ৰ এটা গুণিতক।

ইয়াৰ উপাদান উক্তিবোৰ হ'ল—

Q : ৪৫ হ'ল ৪ৰ এটা গুণিতক।

R : ৪৫ হ'ল ৬ৰ এটা গুণিতক।

স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকা ঃ P $\vee$ Q উক্তিটোৰ সত্যমান F হয়। P $\vee$ Q সত্য হ'ব যদিহে P সত্য অথবা Q সত্য (অথবা P আৰু Q দুয়োটাই সত্য হয়)। বিযুক্তিৰ স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকা হ'ল—

P	Q	P $\vee$ Q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

চিত্র ২.৩



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৩ঃ তলৰ উক্তিকেইটা প্রতীকী ৰূপত লিখক—

(i) পৱন ধনী আৰু ৰাঘৱ সুখী নহয়।

(ii) পৱন ধনী নহয় আৰু ৰাঘৱ সুখী।

(iii) নবীন দুখীয়া কিন্তু সুখী।

(iv) নবীন ধনী অথবা অসুখী।

(v) নবীন আৰু অমল দুয়োজনেই সপ্রতিভ।

(vi) এয়া সঁচা নহয় যে নবীন আৰু অমল দুয়োজনেই সপ্রতিভ।

(vii) নবীন দুখীয়া অথবা তেওঁ ধনী আৰু অসুখী দুয়োটাই।

(vii) নবীন ধনীও নহয় সুখীও নহয়।

উদাহৰণ ঃ

তলৰ যৌগিক বাক্যকেইটাৰ উপাদানবোৰ পৃথক কৰক আৰু যৌগিক বাক্যটো সঁচানে মিছা পৰীক্ষা কৰক।

(i) ৫০ হ'ল ২ আৰু ৫ উভয়ৰে গুণিতক।

(ii) সকলো জীৱিত বস্তুৰে দুখন ঠেং আৰু দুটা চকু থাকে।

(iii) মুম্বাই গুজৰাট অথবা মহাৰাষ্ট্ৰৰ ৰাজধানী।

(iv) $\sqrt{2}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা অথবা এটা অপৰিমেয় সংখ্যা।

(v) এটা আয়তক্ষেত্ৰ হ'ল এটা চতুৰ্ভূজ অথবা এটা পাঁচডাল বাহুবিশিষ্ট বহুভূজ।

সমাধান ঃ (i) প্ৰদত্ত উক্তিটোৰ উপাদানবোৰ হ'ল—

P : ৫০ হ'ল ২ৰ গুণিতক।

Q : ৫০ হ'ল ৫ৰ গুণিতক।

আমি পৰীক্ষা কৰি পাম যে P আৰু Q দুয়োটা উক্তিয়েই সত্য। এতেকে যৌগিক উক্তিটো সত্য।

(ii) প্ৰদত্ত উক্তিটোৰ উপাদানবোৰ হ'ল—

P : সকলো জীৱিত বস্তুৰে দুখন ঠেং থাকে।

Q : সকলো জীৱিত বস্তুৰে দুটা চকু থাকে।

আমি পৰীক্ষা কৰি পাম যে P আৰু Q দুয়োটা উক্তিয়েই মিছা। এতেকে যৌগিক উক্তিটো মিছা।

(iii) প্ৰদত্ত উক্তিটোৰ উপাদানবোৰ হ'ল—

P : মুম্বাই গুজৰাটৰ ৰাজধানী।

Q : মুম্বাই মহাৰাষ্ট্ৰৰ ৰাজধানী।

আমি পৰীক্ষা কৰি পাম যে P উক্তিটো মিছা আৰু Q উক্তিটো সঁচা। এতেকে যৌগিক উক্তিটো সঁচা।

(iv) প্ৰদত্ত উক্তিটোৰ উপাদানবোৰ হ'ল—

P : এটা আয়তক্ষেত্ৰ হ'ল এটা চতুৰ্ভুজ।

Q : এটা আয়তক্ষেত্ৰ হ'ল এটা পাঁচডাল বাহুবিশিষ্ট বহুভূজ।



সংযোজকে সদায়েই *"or"* (অথবা) শব্দটোৰ দৰে একে অৰ্থ প্ৰকাশ নকৰিবও পাৰে। কাৰণ ইংৰাজী ভাষাত *"or"* শব্দটো দুই ধৰণে ব্যৱহৃত হয়— *i)* সমন্বিতে 'অথবা' /*Inclusive OR* (ইটো অথবা সিটো অথবা দুয়োটা) আৰু *ii)* বাহিৰে 'অথবা/*Exclusive OR* (ইটো অথবা সিটো কিন্তু দুয়োটাই নহয়।

(v) প্রদত্ত উক্তিটোৰ উপাদানবোৰ হ'ল—

P : $\sqrt{2}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা।

Q : $\sqrt{2}$ এটা অপৰিমেয় সংখ্যা।

আমি পৰীক্ষা কৰি পাম যে P আৰু Q দুয়োটা উক্তিয়েই মিছা। এতেকে যৌগিক উক্তিটো মিছা।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৪ঃ তলৰ যৌগিক উক্তিবোৰৰ উপাদানবোৰ পৃথক কৰক আৰু যৌগিক উক্তিটো সঁচানে মিছা পৰীক্ষা কৰক।

(i) দিল্লী ভাৰতত আৰু ২+২=৪।

(ii) দিল্লী ইংলেণ্ডত আৰু ২+২=৪।

(iii) দিল্লী ভাৰতত আৰু ২+২=৫।

(iv) দিল্লী ইংলেণ্ডত আৰু ২+২=৫।

(v) এটা অখণ্ড সংখ্যাৰ বর্গ ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক।

(vi) আকাশ নীলা আৰু ঘাঁহ সেউজীয়া।

(vii) পৃথিৱীখন ঘূৰণীয়া অথবা সূর্যটো শীতল।

(viii) সকলো পৰিমেয় সংখ্যা বাস্তৱ আৰু সকলো বাস্তৱ সংখ্যাই জটিল সংখ্যা।

(ix) ২৫ হ'ল ৫ আৰু ৮ৰ গুণিতক।

(x) ১২৫ হ'ল ৭ আৰু ৮ৰ গুণিতক।

১৩.৪.৫ সপ্রতিবন্ধ পদ (Conditional)

ধৰা হ'ল, যদি P আৰু Q যিকোনো দুটা উক্তি হয়, তেন্তে উক্তি $P \rightarrow Q$ হ'ল সপ্রতিবন্ধ পদ। ইয়াক 'যদি *P* হয়, তেন্তে *Q* হ'ব' (যদি *P*, তেন্তে *Q*) বুলি কোৱা হয়। ইয়াক সপ্রতিবন্ধ উক্তি বোলে।

উদাহৰণ ঃ ধৰা হ'ল P : অমূল্যই কঠোৰ পৰিশ্রম কৰে।

Q : অমূল্য পৰীক্ষাত উত্তীর্ণ হ'ব।

তেন্তে, $P \rightarrow Q$ হ'ব ঃ যদি অমূল্যই কঠোৰ পৰিশ্রম কৰে, তেন্তে সি পৰীক্ষাত উত্তীর্ণ হ'ব।

ইয়াত P উক্তিটোক পূর্বপদ *(antecedent)* আৰু Q ক সিদ্ধান্ত *(consequent)* বোলে। '$\rightarrow$' চিহ্নটোক 'প্রয়োগ চিহ্ন' (sign of implication) বোলা হয়। 'যদিহে Q হয় তেতিয়াহে P' (P only if Q) বুজাবলৈকো $P \rightarrow Q$ লিখা হয়। $P \rightarrow Q$ সপ্রতিবন্ধ উক্তিৰ ক্ষেত্রত থকা স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকাখন হ'ল—

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$P \rightarrow Q$ লিখিব পৰা অন্য চর্তসাপেক্ষ পৰিস্থিতিবোৰ হ'ল ঃ

(i) যদিহে Q হয় তেতিয়াহে P (P only if Q)

(ii) Q যদি P (Q if P)

(iii) P হ'লেহে Q (Q provided that P)

(iv) Q হ'বৰ বাবে P য়েই যথেষ্ট (P is sufficient for Q)

(v) P ৰ বাবে Q প্রয়োজনীয় চর্ত (Q is necessary conditions for P)

(vi) P য়ে Q সূচায় (P implies Q),

(vii) P ৰ দ্বাৰা Q সূচোৱা হৈছে (Q is implied by P)

উদাহৰণ ঃ

১। তলৰ প্রতিটো উক্তি 'যদি -তেন্তে' ৰূপত (If--then) লিখক।

(i) তোমাৰ চাকৰি পোৱা কথাটোৱে ইয়াকে সূচায় যে তোমাৰ অর্হতাৰ প্রমাণপত্রবোৰ ভাল।

(ii) এটা চতুর্ভুজ সামান্তৰিক হ'ব যদিহে ইয়াৰ কর্ণবোৰে পৰস্পৰক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে।

(iii) শ্রেণীত A+ গ্রেড পাবলৈ তুমি এই কিতাপখনৰ সকলোবোৰ অনুশীলন কৰাটো প্রয়োজনীয়।

সমাধান ঃ

(i) আমি জানো যে 'যদি P হয়, তেন্তে Q হ'ব' ক আমি 'P $\rightarrow$ Q' বুলিও লিখিব পাৰোঁ। সেয়েহে প্রদত্ত উক্তিটোক 'যদি তুমি চাকৰি পোৱা, তেন্তে তোমাৰ অর্হতাৰ প্রমাণপত্রবোৰ ভাল' বুলিও লিখিব পাৰোঁ।

(ii) প্রদত্ত উক্তিটোৰ বিকল্প ৰূপ হ'ব—
'যদি এটা চতুর্ভুজৰ কর্ণবোৰে পৰস্পৰে পৰস্পৰক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে, তেন্তে ই এটা সামান্তৰিক হ'ব।'

(iii) প্রদত্ত উক্তিটোৰ বিকল্প ৰূপ হ'ব—
'যদি তুমি শ্রেণীত A+ গ্রেড পোৱা, তেন্তে তুমি এই কিতাপখনৰ

সকলোবোৰ অনুশীলন কৰিছা।'

২। তলৰ উক্তিবোৰৰ উপাদানবোৰ পৃথক কৰক। লগতে উক্তিবোৰ সঁচানে মিছা পৰীক্ষা কৰক।

(i) যদি ABC ত্রিভুজটো সমবাহু হয়, তেন্তে ই এটা সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

(ii) যদি a আৰু b দুটা অখণ্ড সংখ্যা, তেন্তে ab এটা পৰিমেয় সংখ্যা।

সমাধান ঃ

(i) প্রদত্ত উক্তিটোৰ উপাদানবোৰ হ'ল—

P : ABC ত্রিভুজটো সমবাহু।

Q : ABC ত্রিভুজটো সমদ্বিবাহু।

যিহেতু এটা সমবাহু ত্রিভুজৰ দুডাল বাহুৰ জোখ সমান, সেয়েহে প্রদত্ত উক্তিটো সঁচা।

(ii) প্রদত্ত উক্তিটোৰ উপাদানবোৰ হ'ল—

P : a আৰু b অখণ্ড সংখ্যা।

Q : ab এটা পৰিমেয় সংখ্যা।

যিহেতু দুটা অখণ্ড সংখ্যাৰ পূৰণফল এটা অখণ্ড সংখ্যাই হ'ব, সেয়েহে ই এটা পৰিমেয় সংখ্যা হ'ব। অর্থাৎ, প্রদত্ত যৌগিক উক্তিটো সঁচা।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৫ঃ তলৰ প্রতিটো প্রয়োগৰ সত্য মানবোৰ উলিয়াওক।

(i) যদি ৩+২=৭, তেন্তে পেৰিছ ভাৰতৰ ৰাজধানী।

(ii) যদি ৩+৪=৭, তেন্তে ৩ $\rangle$ ৭

(iii) যদি ৪ $\rangle$ ৫, তেন্তে ৫ $\langle$ ৬

(iv) যদি ৭ $\rangle$ ৩, তেন্তে ৬ $\langle$ ১৪

(v) যদি দুটা অখণ্ড সংখ্যা a আৰু b ৰ মান a>b হয়, তেন্তে a-b সদায় এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হ'ব।

১৩.৪.৬ দ্বি-সপ্রতিবন্ধ পদ (যদি প্রদত্ত পৰিস্থিতিত 'যদি' আৰু 'কেৱল মাত্র প্রয়োগ হয়) (Biconditional (If and only if implication)

ধৰা হ'ল P আৰু Q যিকোনো দুটা উক্তি। তেন্তে $P \leftrightarrow Q$ উক্তিটোক (চমুকৈ "Piff Q" বুলি লিখা হয় আৰু 'যদি আৰু কেৱল যদি Q হয় তেতিয়াহে P হ'ব' (P if and only if Q) বুলি পঢ়া হয়) দ্বি-সপ্রতিবন্ধ পদ বোলে।

তলৰ তালিকাখনত দ্বি-সপ্রতিবন্ধ পদৰ সংজ্ঞা পোৱা যাব। $P \leftrightarrow Q$ উক্তিৰ/বিবৃতিৰ সত্য মান হ'ল T য'ত P আৰু Q দুয়োটাৰে সত্যমান সদৃশ হ'ব।

দ্বি-সপ্রতিবন্ধ পদৰ ($P \leftrightarrow Q$) স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকাখন হ'ল—

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$P \leftrightarrow Q$ দ্বি-সপ্রতিবন্ধ হ'ল $P \rightarrow Q$ আৰু $Q \rightarrow P$ সপ্রতিবন্ধ দুটাৰ সংযোজন।

$P \leftrightarrow Q$ ৰ বিকল্প সাংকেতিক চিহ্ন হ'ল $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (Q \rightarrow P)$ৰ স্বীকৃত সত্যমান তালিকাখন হ'ল—

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

মন কৰিব দুয়োখন স্বীকৃত সত্যমান তালিকা একেই।

উদাহৰণ ঃ

১। তলৰ উক্তিবোৰলৈ মন কৰক ঃ

এটা ত্রিভুজ সমবাহু হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি ত্রিভুজটো সমকোণী হয়।

এইটো এটা 'যদি আৰু কেৱল যদি, প্রয়োগৰ উদাহৰণ। ইয়াৰ উপাদান উক্তিবোৰ হ'ল ঃ

P : এটা ত্রিভুজ সমবাহু।

Q : এটা ত্রিভুজ সমকোণী।

২। ৮ 〉 ৪ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি ৮–৪ৰ বিয়োগফল ধনাত্মক হয়।

৩। ২+২=৪ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি বৰযুণ দি থাকে।

৪। দুডাল ৰেখাক তেতিয়াহে সমান্তৰাল হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি দুয়োডাল ৰেখাৰে নতি (slope) একে হয়।

উক্তিটোৰ দ্বি-সপ্রতিবন্ধ পদবোৰ $P \leftrightarrow Q$ তলত দিয়া ধৰণে পঢ়িব পাৰি ঃ

(ক) P 'যদি আৰু কেৱল যদি' Q হয়।

(খ) P 'Q' ৰ সমতুল্য হয়।

(গ) P 'Q' ৰ বাবে প্ৰয়োজনীয় আৰু পৰ্যাপ্ত চৰ্ত হয়।

(ঘ) Q 'P' ৰ বাবে প্ৰয়োজনীয় আৰু পৰ্যাপ্ত চৰ্ত হয়।

উদাহৰণ ঃ

তলৰ প্ৰতিটো দ্বি-সপ্ৰতিবন্ধ উক্তিৰ সত্যমান নিৰ্ণয় কৰক।

(i) $৪ > ২$ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি $০ < ৪-২$।

(ii) $৩ < ২$ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি $২ < ১$।

(iii) $৩+৫ > ৭$ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি $৪+৬ < ১০$।

সমাধান ঃ

(i) ধৰা হ'ল P : $৪ > ২$

Q : $0 < ৪-২$

এতিয়া, প্ৰদত্ত উক্তিটো হ'ল $P \leftrightarrow Q$।

এইটো স্পষ্ট যে, P ও সঁচা আৰু Q ও সঁচা। সেয়েহে, $P \leftrightarrow Q$ সঁচা।

অৰ্থাৎ, প্ৰদত্ত উক্তিটো সঁচা আৰু ইয়াৰ সত্যমান হ'ল T।

(ii) ধৰা হ'ল P : $3 < 2$

Q : $2<1$

এতিয়া, প্ৰদত্ত উক্তিটো হ'ল $P \leftrightarrow Q$ ।

এইটো স্পষ্ট যে, P ও মিছা আৰু Q ও মিছা।

সেয়েহে, $P \leftrightarrow Q$ সঁচা।

অৰ্থাৎ, প্ৰদত্ত উক্তিটো সঁচা আৰু ইয়াৰ সত্য মান হ'ল T।

(iii) ধৰা হ'ল P : $3+5 > 7$

Q : $4+6<10$

এতিয়া, প্ৰদত্ত উক্তিটো হ'ল $P \leftrightarrow Q$

এইটো স্পষ্ট যে, P সঁচা আৰু Q মিছা।

সেয়েহে, $P \leftrightarrow Q$ মিছা।

অৰ্থাৎ, প্ৰদত্ত উক্তিটো মিছা আৰু ইয়াৰ সত্য মান হ'ল F ।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ তলৰ উক্তিবোৰৰ সত্যমান নিৰ্ণয় কৰক—

(i) $৩+৫=৮$ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি $৪+৩=৭$ হয়।

(ii) ৪ এটা যুগ্ম সংখ্যা হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি ১ এটা মৌলিক সংখ্যা হয়।

(iii) ৬ এটা অযুগ্ম সংখ্যা হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি ২ এটা অযুগ্ম সংখ্যা হয়।

(iv) ২+৩=৫ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি ৩>৫ হয়।

(v) ৪+৩=৮ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি ৫+৪=১০ হয়।

(vi) ২<৩ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি ৩<৪ হয়।



১৩.৫ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- গাণিতিক যুক্তি সকলো ধৰণৰ তর্ক প্রতিষ্ঠা কৰাৰ সৈতে জড়িত। এনে তর্ক কোনো বৈধ যুক্তিও হ'ব পাৰে নাইবা গাণিতিক প্রমাণো হ'ব পাৰে নাইবা কোনো অপ্রমাণিত যুক্তিসংগত ধাৰণাৰ সমষ্টিৰ ভিত্তিত নির্ণিত কোনো বৈজ্ঞানিক তত্ত্বও হ'ব পাৰে।
- বাক্যক সাধাৰণতে দৃঢ়তাসূচক/ঘোষণামূলক, ভাৱবোধক, প্রশ্নবোধক আৰু আদেশ/অনুৰোধ বুজোৱা বাক্যত ভগোৱা হয়। আমি যুক্তি অধ্যয়ন কৰাৰ সময়ত কেৱল দৃঢ়তাসূচক/ঘোষণামূলক বাক্যহে ব্যৱহাৰ কৰো। আমি ধৰি লওঁ যে প্রদত্ত সমস্যাটো বুজাবলৈ ব্যৱহৃত ভাষাত দৃঢ়তাসূচক/ঘোষণামূলক বাক্যৰ সমষ্টি এটা লুকাই থাকে। প্রাথমিক উক্তি এটা হ'ল এনে এক দৃঢ়তাসূচক/ঘোষণামূলক বাক্য যিটো খণ্ডিত কৰিব নোৱাৰি অথবা সৰল বাক্যলৈ ভাঙি বিশ্লেষণ কৰিব নোৱাৰি।
- প্রাথমিক উক্তিৰ লগত সংযোজক পদ লগ লগাই নতুন উক্তি গঠন কৰিব পাৰি। এনেদৰে সৃষ্ট নতুন উক্তিক যৌগিক উক্তি বোলে।
- বাক্য সংযোজক পদবোৰক যৌক্তিক সংযোজক বোলা হয়। কেইটামান ভিন্ন প্রকাৰৰ যৌক্তিক সংযোজক হ'ল— নেতি পদ *(~)*, আৰু (সংযোজক), অথবা (বিযুক্তি পদ), যদি- তেন্তে (সপ্রতিবন্ধ পদ), যদি আৰু কেৱল যদি (দ্বি-সপ্রতিবন্ধ পদ) ইত্যাদি।
- সংযোজকৰ সংজ্ঞাৰ সৈতে স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকাৰ বিষয়েও আলোচনা কৰা হৈছে। এই নীতি তালিকাৰ আধাৰত কোনো এটা উক্তিৰ সৈতে জড়িত উপাদানবোৰৰ সম্ভাব্য যুটীবোৰৰ বাবে সত্য মান নির্ণয় কৰা হয়। এখন তালিকাতকোনো এক নির্দিষ্ট সূত্রৰ সৈতে জড়িত সকলোবোৰ সত্য মান অন্তর্ভুক্ত থাকিলে সেই তালিকাখনক সূত্রটোৰ স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকা (Truth tables) বোলে। এই অধ্যায়টিত ~P, $P \vee Q$, $P \wedge Q$, $P \rightarrow Q$ আৰু $P \leftrightarrow Q$ সূত্রৰ স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকা দিয়া হৈছে। মন কৰিবলগীয়া কথাটো হ'ল কোনো প্রদত্ত উক্তিৰ উপাদানবোৰৰ সত্য মান জনাৰ পাছত এনে তালিকা চাই উক্তিটোৰ সত্যমান সহজে নির্ণয় কৰিব পাৰি।
- $P \rightarrow Q$ সূত্রত P উক্তিটোক 'পূর্বপদ' আৰু Q উক্তিটোক সিদ্ধান্ত বোলে।



১৩.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ উক্তি (i), (iii), (iv), (vi), (vii), (viii) আৰু (x)।

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) বাংগালুৰু কর্ণাটকৰ ৰাজধানী নহয়।

(ii) পৃথিৱীখন ঘূৰণীয়া নহয়।

(iii) সূর্যটো শীতল নহয়।

(iv) কোনো যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা মৌলিক নহয়।

(v) অতি কমেও এনে এটা আয়তক্ষেত্র আছে যিটোৰ দুয়োডাল কর্ণৰ দৈর্ঘ্য একে নহয়।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ(i) $P \wedge \sim Q$ য'ত P : পৱন ধনী।
Q : ৰাঘৰ সুখী।

(ii) $\sim P \wedge Q$

(iii) $\sim R \wedge H$ য'ত R : নবীন ধনী।
H : নবীন সুখী।

(iv) $R \vee \sim H$

(v) $P \wedge Q$ য'ত P : নবীন সপ্রতিভ।
Q : অমল সপ্রতিভ।

(vi) $\sim(P \wedge Q)$

(vii) $\sim R \vee (R \wedge \sim H)$ য'ত R : নবীন ধনী।
R : নবীন সুখী।

(viii) $\sim R \wedge \sim H$

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) P : দিল্লী ভাৰতত।
Q : 2+2=4.
এই যৌগিক উক্তিটো সঁচা।

(ii) P : দিল্লী ইংলেণ্ডত।
Q : 2+2=4.
এই যৌগিক উক্তিটো মিছা।

(iii) P : দিল্লী ভাৰতত।
Q : 2+2=5.
এই যৌগিক উক্তিটো মিছা।

(iv) P : দিল্লী ইংলেণ্ডত।

Q : 2+2=5.

এই যৌগিক উক্তিটো মিছা।

(v) P : এটা অখণ্ড সংখ্যাৰ বর্গ ধনাত্মক।

Q : এটা অখণ্ড সংখ্যাৰ বর্গ ঋণাত্মক।

এই যৌগিক উক্তিটো মিছা।

(vi) P : আকাশ নীলা।

Q : ঘাঁহ সেউজীয়া।

এই যৌগিক উক্তিটো সঁচা।

(vii) P : পৃথিৱীখন ঘূৰণীয়া।

Q : সূর্যটো শীতল।

এই যৌগিক উক্তিটো সঁচা।

(viii) P : সকলো পৰিমেয় সংখ্যা বাস্তৱ।

Q : সকলো বাস্তৱ সংখ্যাই জটিল সংখ্যা।

এই যৌগিক উক্তিটো মিছা।

(ix) P : ২৫ হ'ল ৫ৰ গুণিতক।

Q : ২৫ হ'ল ৮ৰ গুণিতক।

এই যৌগিক উক্তিটো মিছা।

(x) P : ১২৫ হ'ল ৭ৰ গুণিতক।

Q : ১২৫ হ'ল ৮ৰ গুণিতক।

এই যৌগিক উক্তিটো মিছা।

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) সঁচা (ii) মিছা (iii) সঁচা (iv) মিছা (v) সঁচা।

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) মিছা (ii) মিছা (iii) সঁচা (iv) মিছা (v) সঁচা (vi) সঁচা।



১৩.৭ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

1) C.L. Liu, Elements of Discrete Mathematics, Tata McGraw-Hill Edition.

2) Seymour Lipschutz Marc Lars Lipson Discrete Mathematics, Tata McGraw-Hill Edition.



১৩.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ তলৰ বাক্যবোৰৰ কোনটো উক্তি নিৰ্ণয় কৰক। আপোনাৰ উত্তৰৰ সপক্ষে যুক্তি দিয়ক।

(i) x বাস্তৱ সংখ্যাটো ২তকৈ সৰু।

(ii) সকলো বাস্তৱ সংখ্যাই জটিল সংখ্যা।

(iii) ৰবি, মোৰ কথা শুনা।

প্ৰশ্ন ২ঃ তলৰ উক্তিবোৰৰ উপাদানবোৰ সঁচানে মিছা পৰীক্ষা কৰক।

(i) ৰেখা পোন আৰু দুয়ো দিশে অসীমলৈ বিস্তৃত।

(ii) আকাশ নীলা আৰু ঘাঁহ সেউজীয়া।

(iii) পৃথিৱীখন ঘূৰণীয়া আৰু সূৰ্যটো শীতল।

(iv) সকলো পৰিমেয় সংখ্যা বাস্তৱ আৰু সকলো বাস্তৱ সংখ্যাই জটিল।

(v) ২৫ হ'ল ৫ আৰু ৮ ৰ গুণিতক।

প্ৰশ্ন ৩ঃ তলৰ উক্তিবোৰৰ উপাদানবোৰ পৃথক কৰক। লগতে উপাদানবোৰ সঁচানে মিছা কওক।

(i) A আৰু B সংহতি দুটা সমান হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি ($A \subseteq B$ আৰু $B \subseteq A$).

(ii) $|a|<2$ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি ($a>-2$ আৰু $a<2$) হয়।

(iii) ΔABC এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি $\angle B = \angle C$ হয়।

(iv) $7<5$ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি 7 এটা মৌলিক সংখ্যা নহয়।

(v) ΔABC এটা ত্ৰিভুজ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি $AB+BC>AC$ হয়।

*** ***** ***

অধ্যায় ১৪ ঃ বুলীয় বীজগণিত (BOOLEAN ALGEBRA)

অধ্যায় গাঁথনি

১৪.১ উদ্দেশ্য
১৪.২ পৰিচয়
১৪.৩ সংজ্ঞা, ধর্ম আৰু উদাহৰণ
১৪.৪ বুলীয় বীজগণিতৰ মূল বিধি
১৪.৫ বুলীয় ৰাশি
১৪.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১৪.৭ অধিক জানিবলৈ
১৪.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
১৪.৯ আৰ্হি প্রশ্ন

১৪.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- বুলীয় বীজগণিত, ইয়াৰ ধর্ম, উদাহৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- বুলীয় বীজগণিতৰ মূল বিধিসমূহ জানিব পাৰিব
- বুলীয় ৰাশি সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

১৪.২ পৰিচয়

ব্রিটিছ ন্যায়তত্বজ্ঞ জর্জ বলৰ (George Boole 1813-1864) নাম অনুসৰি জনাজাত বুলীয় বীজগণিত (Boolean Algebra) এটা বীজগণিতীয় গাঁথনি (algebraic structure)। এটা বা ততোধিক প্রক্রিয়াযুক্ত আৰু নির্দিষ্ট স্বীকার্য সিদ্ধ কৰা এটা অৰিক্ত সংহতিক বীজগণিতীয় গাঁথনি বুলি কোৱা হয়। যদিও ই এটা বিমূর্ত বীজগণিতীয় গাঁথনি, বৈদ্যুতিক বর্তনী বিশ্লেষণ কৰিবলৈ ইয়াক ব্যৱহাৰ কৰা হয়। ইলেকট্রনিক কম্পিউটাৰৰ বিশ্লেষণ আৰু অভিযোজনৰ বাবে সম্প্রতি ইয়াক বিপুলভাৱে ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

১৪.৩ সংজ্ঞা, ধর্ম আৰু উদাহৰণ (DEFINITION, PROPERTIES AND EXAMPLES)

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল দুটা দ্বৈত প্রক্রিয়া + আৰু, . , আৰু এটা একক (unary) প্রক্রিয়া / যুক্ত, আৰু দুটা পৃথক মৌল 0 আৰু 1 থকা B এটা অৰিক্ত সংহতি। তেনেহ'লে B এটা বুলীয় বীজগণিত (Boolean Algebra) বুলি কোৱা হয় যদি তলৰ চর্তসমূহ সিদ্ধ হয়।

1. ক্রমবিনিময়ে বিধি (Commutative laws)

   (i) a + b = b + a, (ii) a.b = b.a, $\forall a, b \in B$

2. বিতৰণ বিধি (Distributive laws)

   (i) a + (b.c) = (a + b).(a + c)

   (ii) a. (b + c) = (a.b) + (a.c), $\forall a, b, c \in B$

3. একক বিধি (Identity laws)

   (i) a + 0 = a, (ii) a.1 = a

4. পূৰক বিধি (Complement laws)

   (i) $a + a' = 1$, (ii) $a.a' = 0$

টোকা ঃ 1. সংজ্ঞাৰ পৰা এইটো স্পষ্ট যে এটা মৌলবিশিষ্ট বুলীয় বীজগণিত থাকিব নোৱাৰে।

2. 1 অক একক মৌল (unit element) আৰু 0 ক শূন্য মৌল (zero element) বুলি কোৱা হয়।

3. a' অক a ৰ পূৰক (complement) বুলি কোৱা হয়।

4. এটা বুলীয় বীজগণিতক সাধাৰণতে (B, + , . , $'$, 0, 1) বা (B, +, . ,$'$) বা B ৰে বুজোৱা হয়।

5. 0 আৰু 1 প্রতীক দুটা সদায়ে বাস্তৱ সংখ্যা 0 আৰু 1 নহয়।

উদাহৰণ 1 ঃ তলৰ সাৰণীৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ +, . , $'$ প্রক্রিয়াৰ অধীনত B = {0, 1} এটা বুলীয় বীজগণিত।

+	1	0
1	1	1
0	1	0

.	1	0
1	1	0
0	0	0

	/
1	0
0	1

সমাধান ঃ +, . , $'$, প্রক্রিয়াৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে

1. (i) a + b = b + a

   (ii) a.b = b.a, $\forall a, b \in B$

2. (i) a + (b.c) = (a+b).(a + c)

   (ii) a.(b+c) = (a.b) + (a.c), $\forall a, b, c \in B$

3. (i) a + 0 = a, (ii) a.1 = a, $\forall a \in B$

4. (i) $a + a' = 1$ $(1 + 1' = 1 + 0 = 1)$,

   $0 + 0' = 0 + 1 = 1)$

   (ii) $a. a' = 0$ $(1. 1' = 1.0 = 0,$

   $0.0' = 0.1 = 0)$

   $\therefore$ (B, + , . , $'$) এটা বুলীয় বীজগণিত।

ধর্ম

1. এটা বুলীয় বীজগণিত B ত শূন্য মৌল অদ্বিতীয়।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল (B, + , . , $'$) এটা বুলীয় বীজগণিত।

যদি সম্ভৱ, দুটা শূন্য মৌল 0 আৰু 0_1 আছে।

$\therefore$ a + 0 = a, $\forall a \in B$

a + 0_1 = a, $\forall a \in B$

$\therefore$ 0_1 + 0 = 0 (Θ 0 শূন্য মৌল)

আকৌ 0_1+0 = 0 + 0_1 (ক্ৰমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা)

= 0 (Θ 0_1 শূন্য মৌল)

$\therefore$ 0_1 = 0

অর্থাৎ শূন্য মৌল অদ্বিতীয়।

2. এটা বুলীয় বীজগণিত B ত একক মৌল অদ্বিতীয়।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল (B, +, . , $'$) এটা বুলীয় বীজগণিত।

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল দুটা একক মৌল 1 আৰু 1_u আছে।

$\therefore$ $a.1 = a, \forall a \in B$

$a.1_u = a, \forall a \in B$

$\therefore$ $1_u.1 = 1_u$ (Θ 1 একক মৌল)

$\therefore$ $1_u = 1$

অর্থাৎ, একক মৌল অদ্বিতীয়।

3. এটা বুলীয় বীজগণিত B ত, প্ৰত্যেক মৌলৰ পূৰক অদ্বিতীয়।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল (B, + , . , $'$) এটা বুলীয় বীজগণিত।

ধৰা হ'ল শূন্য মৌলটো 0, আৰু একক মৌলটো 1.

ধৰা হ'ল $a \in B$

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল a ৰ দুটা পূৰক a$'$ আৰু a_1 .

$\therefore$ a + a$'$ = 1, a . a$'$ = 0 (Θ a ৰ পূৰক a$'$)

a + a_1 = 1,a . a_1 = 0 (Θ a ৰ পূৰক a_1)

এতিয়া a$'$ = a$'$.1

= a$'$. (a + a_1)

= (a$'$.a) + (a$'$.a_1)

= (a.a$'$) + (a$'$.a_1)

= 0 + (a$'$.a_1)

= (a$'$.a_1) + 0

= a$'$.a_1 (1)

আকৌ $a_1 = a_1.1$

$= a_1.(a + a')$

$= (a_1.a) + (a_1.a')$

$= (a.a_1) + (a_1.a')$

$= 0 + (a_1.a^1)$

$= (a'.a_1) + 0$

$= a'.a_1$ (2)

(1) আৰু (2) ৰ পৰা আমি পালোঁ যে

$a' = a_1$

4. এটা বুলীয় বীজগণিত B ত

(i) $1' = 0$, (ii) $0' = 1$, য'ত 0 হ'ল শূন্য মৌল, 1 হ'ল একক মৌল।

প্ৰমাণ ঃ (i) ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত।

এতিয়া একক বিধিৰ পৰা আমি পালোঁ $a + 0 = 1$ আৰু $a.1 = a, \ \forall a \in B$

$a + 0 = a$ ত a ৰ ঠাইত 1 বহুৱাই আমি পাওঁ $1 + 0 = 1$.

$a.1 = 1$ ত a ৰ ঠাইত 0 বহুৱাই আমি পাওঁ $0.1 = 0$

অৰ্থাৎ $1.0 = 0$ ($0.1 = 1.0$, ক্ৰমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা)

গতিকে, $1 + 0 = 1$ (1)

$1.0 = 0$ (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে $0 = 1'$ অৰ্থাৎ $1' = 0$

(ii) ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত।

এতিয়া একক বিধিৰ পৰা আমি পালোঁ $a.1 = 1$ আৰু $a + 0 = a, \ \forall a \in B$

$a.1 = a$ ত a ৰ ঠাইত 0 বহুৱাই আমি পাওঁ $0.1 = 0$.

$a + 0 = a$ ত a ৰ ঠাইত 1 বহুৱাই আমি পাওঁ $1 + 0 = 1$.

অৰ্থাৎ $0 + 1 = 1$, ($1 + 0 = 0 + 1$, ক্ৰমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা)

গতিকে, $0.1 = 0$ (1)

$0 + 1 = 1$ (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে $0' = 1$

টোকা ঃ (i) নম্বৰ ধৰ্ম অৰ্থাৎ $1' = 0$ ত দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া + আৰু . সালসলনি কৰি, আৰু 0 আৰু 1 সালসলনি কৰি (ii) নম্বৰ ধৰ্ম অৰ্থাৎ $0' = 1$ পাব পাৰি। (ii) ক (i) অৰ দ্বৈধ (dual) বুলি কোৱা হয়। বিপৰীতক্ৰমে (i) অক (ii)ৰ দ্বৈধ বুলি কোৱা হয়। এই বিধিটোক দ্বৈধতা বিধি (principle of duality) বুলি কোৱা হয়। বুলীয় বীজগণিতৰ প্ৰতিটো উক্তি আৰু প্ৰতিটো উপপাদ্যৰ ক্ষেত্ৰত এই বিধি প্ৰযোজ্য।

উদাহৰণ 2 ঃ ধৰা হ'ল X এটা অৰিক্ত সংহতি। ধৰা হ'ল

ধৰা হ'ল X অৰ ঘাত সংহতি P(x), অৰ্থাৎ P(x) হ'ল X অৰ উপসংহতিবোৰৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল $A,B\in P(X)$, অৰ্থাৎ $A\subseteq X,\ B\subseteq X$

তলৰ সংজ্ঞাবোৰ দিয়া হ'ল

$A+B=A\cup B,$

$A.B=A\cap B$

$A^{/}$ = A ৰ পূৰক সংহতি

স্পষ্টতঃ, P(x)অত মিলন এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া,

P(x) অত ছেদন এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া,

P(x) অত পূৰক এটা একক প্ৰক্ৰিয়া।

এতিয়া 1. (i) $A+B=A\cup B=B\cup A=B+A$

(ii) $A.B=A\cap B=B\cap A=B.A,\ \forall A,B\in P(x)$

2. (i) $A+(B.C)=A\cup(B\cap C)$

$=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$=(A+B).(A+C),\ \forall A,B,C\in P(x)$

(ii) $A.(B+C)=A\cap(B\cup C)$

$=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$=(A.B)+(A.C)$

3. (i) $A+\phi=A\cup\phi=A,\ \ \phi\in P(x)$

(ii) $A.X=A\cap X=A$

4. (i) $A+A^{/}=A\cup A^{/}=x$

(ii) $A.A^{/}=A\cap A^{/}=\phi$

$\therefore (P(X),\cup,\cap,^{/})$ এটা বুলীয় বীজগণিত। ইয়াত ϕ হ'ল শূন্য মৌল আৰু X হ'ল একক মৌল।

উদাহৰণ 3 ঃ ধৰা হ'ল 110 অৰ ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতিটো B = {1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110} তলৰ সংজ্ঞাবোৰ দিয়া হ'ল।

a + b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ

a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$a^{/}=\frac{110}{a},\ \ a,b\in B$

+, . , $^{/}$ প্ৰক্ৰিয়াৰ বাবে প্ৰক্ৰিয়া সাৰণীকেইখন গঠন কৰা হ'ল—

+	1	2	5	10	11	22	55	110
1	1	2	5	10	11	22	55	110
2	2	2	10	10	22	22	110	110
5	5	10	5	10	55	110	55	110
10	10	10	110	10	110	110	110	110
11	11	22	110	110	11	22	55	110
22	22	22	110	110	22	22	110	110
55	55	55	110	110	55	110	55	110
110	110	110	110	110	110	110	110	110

.	1	2	5	10	11	22	55	110
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2
5	1	1	5	5	1	1	5	5
10	1	2	5	10	1	2	5	10
11	1	1	1	1	11	11	11	11
22	1	2	1	2	11	22	11	22
55	1	1	5	5	11	11	55	55
110	1	2	5	10	11	22	55	110

/	1	2	5	10	11	22	55	110
	110	55	22	11	10	5	2	1

ওপৰৰ সাৰণীকেইখনৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে B ত + এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, B ত এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া আৰু B ত $'$ এটা একক প্ৰক্ৰিয়া।

আকৌ, 1 (i) a+b = a, b লঃ সাঃ গুঃ

= b, a ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= b+a, $\forall a, b \in B$

(ii) a . b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= b, a ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= b.a, $\forall a, b \in B$

2. সাৰণীৰ পৰা আমি পালোঁ যে

(i) a + (b.c) = (a+b).(a+c)

(ii) a.(b+c) = (a.b) + (a.c), $\forall a, b, c \in B$

3. (i) a+1 = a, 1ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= a, $\forall a \in B$

(ii) a.110 = 110 ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= a, $\forall a \in B$

4. (i) a+a$'$ = a, a$'$ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= $a, \frac{110}{a}$ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= 110, $\forall a \in B$

(ii) a.a$'$ = a, a$'$ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= $a, \frac{110}{a}$ ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= 1, $\forall a \in B$

∴ (B, + , . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত। ইয়াক 1 হ'ল শূন্য মৌল আৰু 110 হ'ল একক মৌল।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল X ={1}. প্রমাণ কৰক যে মিলন, ছেদন আৰু পূৰক প্রক্রিয়াৰ অধীনত P(x) = {{1}, ϕ} এটা বুলীয় বীজগণিত।

প্রশ্ন নং ২ঃ ধৰা হ'ল X = {1, 2, 3}, ধৰা হ'ল X অৰ ঘাত সংহতিটো হ'ল P(X)। প্রমাণ কৰক যে মিলন, ছেদন আৰু পূৰক প্রক্রিয়াৰ অধীনত P(X) এটা বুলীয় বীজগণিত।

প্রশ্ন নং ৩ঃ ধৰা হ'ল 30 ৰ সকলো ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতিটো B = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 30} তলৰ সংজ্ঞাবোৰ দিয়া হ'ল।

a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ, $a, b \in B$

a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$a' = \frac{30}{a}$

প্রমাণ কৰক যে (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত।

প্রশ্ন নং ৪ঃ ধৰা হ'ল 70 ৰ সকলো ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতিটো B = {1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70}। তলৰ সংজ্ঞাবোৰ দিয়া হ'ল।

a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ, $a, b \in B$

a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$a' = \frac{70}{a}$

প্রমাণ কৰক যে (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত।

প্রশ্ন নং ৫ঃ এটা 16 টা মৌলবিশিষ্ট বুলীয় বীজগণিতৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ ধৰা হ'ল B = {0, a, b, 1}. B ত +, . , / প্রক্রিয়াৰ সংজ্ঞা তলত দেখুওৱাৰ দৰে দিয়া হ'ল।

+	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

.	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

/	0	a	b	1
	1	b	a	0

প্রমাণ কৰক যে (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত।

প্রশ্ন নং ৭ঃ ধৰা হ'ল 20 ৰ সকলো ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতিটো B = { 1, 2, 4, 5, 10, 20}। তলৰ সংজ্ঞাবোৰ দিয়া হ'ল।

a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ

a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$a' = \frac{20}{a}, \ \forall a \in B$

(B, +, . , /) বুলীয় বীজগণিত হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

১৪.৪ বুলীয় বীজগণিতৰ মূল বিধি (BASIC LAWS OF BOOLEAN ALGEBRA)

ধৰা হ'ল (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত। ধৰা হ'ল B ৰ শূন্য মৌলটো 0, একক মৌলটো 1.

1. বৰ্গসম বিধি (Idempotent Laws)

(i) a+a = a, (ii) a.a = a, $\forall a \in B$

প্রমাণ ঃ (i) a = a+0

= a + (a.a′)

= (a+a).(a+a′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= (a+a).1

= a+a

অর্থাৎ a+a = a

(ii) a = a.1

= a.(a + a′)

= (a.a) + (a.a′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= (a.a) + 0

= a.a

টোকা ঃ (ii) নম্বৰ উক্তিটো (i) নম্বৰ উক্তিৰ দ্বৈধ। বিপৰীতক্ৰমে (i) নম্বৰ উক্তিটো (ii) নম্বৰ উক্তিৰ দ্বৈধ। (i) নম্বৰত + অৰ ঠাইত • বহুৱাই, • ঠাইত + বহুৱাই, 0 ৰ ঠাইত 1 বহুৱাই, 1 অৰ ঠাইত 0 বহুৱাই (ii) পাব পাৰি।

2. পৰিৱদ্ধতা বিধি (Boundedness Laws)

(i) a+1 = 1, (ii) a.0 = 0, $\forall\ a \in B$

প্ৰমাণ ঃ (i) a+1 = (a+1) . 1

= (a+1).(a+a′)

= a+(1.a′), (বিতৰণ বিধিৰ পৰা)

= a+a′, (1.a′ = a′.1 = 1)

= 1

(ii) a.0 = (a.0) + 0

= (a.0) + (a.a′)

= a.(0+a′), (বিতৰণ বিধিৰ পৰা)

= a.a′, (0+a′ = a′+0 = a′)

= 0

3. বিশোষণ বিধি (Absorption Laws)

(i) a+(a.b) = a, (ii) a.(a+b) = a, $\forall a,b \in B$

প্ৰমাণ ঃ (i) a+(a.b) = (a.1) + (a.b)

= a.(1 + b)

= a.1, (1+b = b+1 = 1, পৰিৱদ্ধতা বিধিৰ পৰা)

= a

(ii) a.(a+b) = (a+0).(a+b)

= a+(0.b)

= a+0, (0.b = b.0 = 0, পৰিৱদ্ধতা বিধিৰ পৰা)

= a

4. সাহচৰ্য্য বিধি (Associative Laws)

(i) (a+b)+c = a + (b+c)

(ii) (a.b).c = a.(b.c)

প্ৰমাণ ঃ (i) ধৰা হ'ল L = (a+b) + c

R = a + (b+c)

এতিয়া a.L = a.((a+b)+c)

= a.(a+b) + a.c, বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= a + (a.c), বিশোষণ বিধিৰ পৰা

= a, বিশোষণ বিধিৰ পৰা

a . R = a.(a+(b+c))

= (a.a)+(a.(b+c)), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= a+(a.(b+c)), বৰ্গসম বিধিৰ পৰা

= a, বিশোষণ বিধিৰ পৰা

$\therefore$ a.L = a.R

আকৌ a'.L a'.((a+b) + c)

= a'.(a+b) + (a'.c), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= (a'.a) + (a'.b) + (a'.c), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= 0 + (a'.b) + (a'.c)

= (a'.b) + (a'.c)

= a'.(b+c)

a'.R = a'.(a + (b+c))

= (a'.a) + a'.(b+c), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= 0 + a'.(b+c)

= a'.(b+c)

$\therefore$ a'.L = a'.R

এতিয়া L = 1.L

= (a+a').L

= (a.L) + (a'.L)

= (a.R) + (a'.R)

= (a+a').R

= 1.R

= R

$\therefore$ L = R

অৰ্থাৎ (a+b) + c = a+(b+c)

(ii) ধৰা হ'ল L = (a.b).c

R = a. (b.c)

এতিয়া a + L = a + ((a.b).c)

= (a + (a.b)).(a+c), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= a.(a+c), বিশোষণ বিধিৰ পৰা

= a, বিশোষণ বিধিৰ পৰা

a + R = a +(a.(b.c))

= (a+a).(a+(b.c)), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= a.(a+(b.c)), বৰ্গসম বিধিৰ পৰা

= a, বিশোষণ বিধিৰ পৰা

∴ a + L = a+R

আকৌ a'+L = a' + (a.b).c)

= (a' + (a.b)).(a'+c), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= ((a'+a).(a'+b)).(a'+c), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= 1.(a'+b).(a'+c)

= (a'+b).(a'+c)

= a' + (b.c)

a' + R = a' +(a.(b.c))

= (a'+a).(a' + (b.c)), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= 1.(a' + (b.c))

= a' + (b.c)

∴ a' + L = a' + R

এতিয়া L = 0 + L

= (a.a') + L

= (a+L).(a'+L)

= (a+R).(a'+R)

= (a.a') + R

= 0 + R

= R

∴ L = R

অর্থাৎ (a.b).c = a.(b.c)

5. ঘাতক্রিয়া বিধি (Involution Law) : $\left(a'\right)' = a$

প্ৰমাণ ঃ পূৰকৰ সংজ্ঞাৰ পৰা আমি পালোঁ

a+a' =1, আৰু a.a' = 0

অর্থাৎ a'+a = 1, আৰু a'.a = 0, ক্ৰমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা

∴ পূৰক অদ্বিতীয়, a' অৰ পূৰক হ'ল a, অর্থাৎ (a')$'$ = a.

6. দ্য মৰ্গানৰ বিধি (De Morgan's Laws)

(i) $(a+b)' = a'.b'$, (ii) $(a.b)' = a'+b'$

প্ৰমাণ ঃ (i) $(a+b) + (a'.b') = b+a + (a'.b')$, ক্ৰমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা

$= b +(a+a').(a+b')$, বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= b+1.(a+b')$

$= b + (a+b')$

$= b + (b'+a)$, ক্ৰমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা

$= (b+b') +a$, সাহচৰ্য্য বিধিৰ পৰা

$= 1+a$

$= 1$, পৰিৱৰ্দ্ধতা বিধিৰ পৰা

$(a + b).(a'.b') = ((a+b).a').b'$, সাহচৰ্য্য বিধিৰ পৰা

$= ((a.a') + (b.a')).b'$, বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= (0 + (b.a')).b'$

$= (0 + (b.a')).b'$

$= (b.a').b'$

$= b.(a'.b')$, সাহচৰ্য্য বিধিৰ পৰা

$= b.(b'.a')$, ক্ৰমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা

$= (b.b').a'$, সাহাচৰ্য্য বিধিৰ পৰা

$= 0.a'$

$= 0$

গতিকে আমি দেখিলোঁ যে a+b ৰ পূৰক $a'.b'$

অৰ্থাৎ $(a+b)' = a'.b'$

[আগষ্টাছ দ্য মৰ্গান (Augustus De Morgan 1806 – 1871) এজন বিখ্যাত গণিতজ্ঞ আছিল। ভাৰতবৰ্ষৰ মাদুৰাই চহৰত তেওঁৰ জন্ম হয়।]

অনুসিদ্ধান্ত (i) $a+b = (a'.b')'$, (ii) $a.b = (a'+b')'$

প্ৰমাণ ঃ (i) $(a'.b')' = (a')'+(b')'$, দ্য মৰ্গানৰ বিধিৰ পৰা

$= a+b$, ঘাতক্ৰিয়া বিধিৰ পৰা

(ii) $(a'+b') = (a')'.(b')'$, দ্য মৰ্গানৰ বিধিৰ পৰা

$= a.b$, ঘাতক্ৰিয়া বিধিৰ পৰা

7. (i) যদি $b+a = c+a$, আৰু $b+a' = c+a'$, তেনেহ'লে $b = c$.

(ii) যদি $b.a = c.a$, আৰু $b.a' = c.a'$, তেনেহ'লে $b = c$.

প্ৰমাণ ঃ (i) $b = b+0$

$= b + (a.a')$

= (b+a).(b+a′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= (c+a).(c+a′), (দিয়া আছে)

= c+(a.a′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= c+0

= c.

(ii) b = b.1

= b.(a+a′)

= (b.a) + (b.a′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= (c.a) + (c.a′), দিয়া আছে

= c.1

= c

8. (i) a+b′ = 1 যদি আৰু যদিহে a+b = a

(ii) a.b′ = 0 যদি আৰু যদিহে a.b = a

প্ৰমাণ ঃ (i) ধৰা হ'ল a+b′ = 1

এতিয়া a + b = (a+b) . 1

= (a+b).(a+b′), দিয়া আছে

= (a+(b.b′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= a+0

= a

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল a+b = a

এতিয়া a+b′ = 1.(a+b′)

= (a+a′).(a+b′)

= a+(a′.b′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= a+a+b)′, দ্য মৰ্গানৰ বিধিৰ পৰা

= a+a′, দিয়া আছে

= 1.

(ii) ধৰা হ'ল a.b′ = 0

এতিয়া a.b = a.b + 0

= a.b+a.b′, দিয়া আছে

= a.(b+b′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= a . 1

= a

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল a.b = a

এতিয়া a.b′ = 0 + a.b′

$= (a.a') + (a.b')$

$= a.(a'+b')$, বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= a.(a.b)'$, দ্য মৰ্গানৰ বিধিৰ পৰা

$= a.a'$, দিয়া আছে

$= 0$.

9. (i) $a+(a'.b) = a+b$

(ii) $a.(a'+b) = a.b$

প্ৰমাণ ঃ (i) $a+(a'.b) = (a+a').(a+b)$, বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= 1.(a+b)$

$= a+b$

(ii) $a.(a'+b) = (a.a') + (a.b)$

$= 0 + (a.b)$

$= a.b$

উদাহৰণ 4ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত।

ধৰা হ'ল $a, b \in B$. প্ৰমাণ কৰক যে

$a.(a.b)' = a.b'$

সমাধান ঃ $a.(a.b)'$

$= a.(a'+b')$, দ্য মৰ্গানৰ বিধিৰ পৰা

$= (a.a') + (a.b')$

$= 0 + (a.b')$

$= a.b'$

উদাহৰণ 5ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত, আৰু $a, b, c \in B$. প্ৰমাণ কৰক যে

$(a+b).(b+c).(c+a) = a.b + b.c + c.a$

সমাধান ঃ $(a+b).(b+c).(c+a)$

$= (a+b).(b.c + b.a + c.c + c.a)$

$= (a+b).(b.c + b.a + c + c.a)$

$= a.(b.c) + a.(b.a) + a.c + a.(c.a) + b.(b.c) + b.(b.a) + b.c + b.(c.a)$

$= (a.b.c + a.(a.b) + a.c + a.(a.c) + (b.b).c + (b.b).a + b.c + a.b.c$

$= (a.b.c + a.b.c) + (a.a).b + a.c + (a.a).c + b.c + b.a + b.c)$

$= a.b.c + a.b + a.c + a.c + b.c + b.a + b.c$

$= a.b.c + (a.b + a.b) + (a.c + a.c) + (b.c + b.c)$

$= a.b.c + a.b + a.c + b.c$

$= a.b.(c+1) + a.c + b.c$

= a.b.1 + c.a + b.c

= a.b + b.c + c.a

উদাহৰণ 6ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত আৰু a, b∈B। প্ৰমাণ কৰক যে a+b = 0, a = 0, আৰু b = 0 । এই ফলটোৰ লিখক আৰু প্ৰমাণ কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল a = 0, আৰু b = 0

∴ a+b = 0+0

= 0

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল a+b = 0

এতিয়া a = a+0

= a+(b.b′)

= (a+b).(a+b′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= 0.(a+b′), দিয়া আছে

b = b+0

= b + (a.a′)

= (b+a).(b+a′)

= (a+b).(b+a′)

= 0.(b+a′)

= 0

দ্বিতীয় অংশ

ওপৰৰ ফলটোৰ দ্বৈধটো হ'ল a.b = 1 ⇔ a = 1 আৰু b = 1.

যদি a = 1, b = 1,

a.b = 1.1 = 1

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল a.b = 1

এতিয়া a = a.1

= a.(b+b′)

= (a.b) + (a.b′)

= 1 + (a.b′)

= 1

b = b.1

= b.(a+a′)

= (b.a) + (b.a′)

= (a.b) + (b.a′)

= a + (b.a′)

= 1

উদাহৰণ 7ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত আৰু a, b, c∈B. প্ৰমাণ কৰক যে তলৰ ৰাশিবোৰ সমান।

(i) $(a+b).(a'+c).(b+c)$

(ii) $a.c + a'.b + b.c$

(iii) $(a+b).(a'+c)$

(iv) $a.c + a'.b$

সমাধান ঃ $(a+b).(a'+c).(b+c)$

$= (a+b).(a'.b + a'.c + c.b + c.c)$

$= (a+b).(a'.b + a'.c + c.b + c)$

$= a.a'.b + a.a'.c + a.c.b + a.c + b.a'.b + b.a'.c + b.c.b + b.c$

$= 0.b + 0.c + a.c.b + a.c + b.a' + b.a'.c + b.c + b.c$

$= b.c.(a + a') + a.c + b.c + b.a'$

$= b.c.1 + a.c + b.c + a'.b$

$= b.c + a.c + b.c + a'.b$

$= a.c + a'.b + b.c$ (1)

আকৌ, $(a+b).(a'+c)$

$= a.a' + a.c + b.a' + b.c$

$= 0 + a.c + a'.b + b.c$

$= a.c + a'.b + b.c$ (2)

আকৌ, $a.c + a'.b + b.c$

$= a.c + a'.b + 1.b.c$

$= a.c + a'.b + (a+a').b.c$

$= a.c + a'.b + a.b.c + a'.b.c$

$= (a.c) + (a.c).b) + ((a'.b) + (a'.b).c)$

$= a.c + a'.b$, বিধিৰ পৰা (3)

(1), (2) আৰু (3)ৰ পৰা আমি পালোঁ যে

$(a+b).((a'+c).(b+c)$

$= a.c + a'.b + b.c$

$= (a+b).(a'+c)$

$= a.c + a'.b$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৮ঃ প্রমাণ কৰক যে তিনিটা মৌলবিশিষ্ট বুলীয় বীজগণিত নাই।

প্রশ্ন নং ৯ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত আৰু ধৰা হ'ল a, b, c∈B. যদি a+c=a, b+c=b, প্রমাণ কৰক যে (a.b) + c = a.b

প্রশ্ন নং ১০ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত। ধৰা হ'ল a, b ∈ B. প্রমাণ কৰক যে $a+(a+b)' = a+b'$.

প্রশ্ন নং ১১ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত, আৰু ধৰা হ'ল a, b∈B. প্রমাণ কৰক যে তলৰ ধর্মবোৰ সমতুল্য।

(i) a+b=a, (ii) $a+b'=1$, (iii) a.b=b

ওপৰৰ ফলটোৰ দ্বৈধটো লিখক আৰু প্রমাণ কৰক।

প্রশ্ন নং ১২ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত, আৰু ধৰা হ'ল a, b, c∈B. প্রমাণ কৰক যে

$[(abc+a'b')' + bc]' = a'b'$

[ইয়াত abc ৰ অর্থ a.b.c]

১৪.৫ বুলীয় ৰাশি (BOOLEAN EXPRESSION)

B={0, 1} বুলীয় বীজগণিতটো লোৱা হ'ল। ইয়াত +, . , আৰু $'$ প্রক্রিয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে।

+	0	1
0	0	1
1	1	1

•	0	1
0	0	0
1	0	1

/	0	0
	1	0

B ৰ কোনো মৌল বুজাবলৈ যি আঞ্চলিক প্রতীক ব্যৱহাৰ কৰা হয়, তাক বুলীয় চলক (Boolean variable) বোলে। গতিকে যদি x এ এটা বুলীয় চলক বুজায়, তেনেহ'লে x অৰ মান 0 বা 1 হ'ব। যদি x এটা বুলীয় চলক, x' ও এটা বুলীয় চলক।

ধৰা হ'ল x, y দুটা বুলীয় চলক। তলৰ সাৰণীখনত x, y ৰ মান দিয়া আছে।

x	y
1	1
1	0
0	1
0	0

ধৰা হ'ল x, y, z তিনিটা বুলীয় চলক। x, y, z অৰ মান তলৰ সাৰণীখনত দিয়া আছে।

x	y	z
1	1	1
1	1	0
1	0	1
0	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1
0	0	0

সসীম সংখ্যক বুলীয় চলকত দ্বৈত প্রক্রিয়া + আৰু . , আৰু একক প্রক্রিয়া $'$ প্রয়োগ কৰি যি ৰাশি পোৱা যায় তাক **বুলীয় ৰাশি** (Boolean expression) বোলে। উদাহৰণস্বৰূপে $x.y + x'$ এটা দুটা চলকৰ বুলীয় ৰাশি। সেইদৰে $x.y+y.z+z.x$ এটা তিনিটা চলকৰ বুলীয় ৰাশি।

মন কৰিব লগীয়া যে 0, আৰু 1 দুটা বুলীয় ৰাশি। যিকোনো চলকেই এটা বুলীয় ৰাশি।

প্রতিটো বুলীয় ৰাশিৰ অনুৰূপে আমি এখন সাৰণী গঠন কৰিব পাৰোঁ। ইয়াক সত্যতা সাৰণী বা সাৰণী বা মান সাৰণী (truth table or the assignment table or the value table) বোলে।

$xy+x'$ বুলীয় ৰাশিটোৰ বাবে আমি এখন সত্যতা সাৰণী গঠন কৰোঁ। (ইয়াত xy এ x.y বুজাইছে।)।

x	y	xy	x'	$xy+x'$
1	1	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ চলকৰ দুটা বুলীয় ৰাশিক **সমান** বুলি কোৱা হয় যদি $x_1, x_2, \ldots, x_n$ চলকৰ প্রত্যেক মান 0, 1 অৰ বাবে একে মান পোৱা যায়।

দুটা বুলীয় ৰাশিৰ সমতাক " = " প্রতীকেৰে বুজোৱা হয়।

উদাহৰণ 8 ঃ x, y, z চলকৰ বুলীয় ৰাশি xy + xz অৰ বাবে সত্যতা সাৰণী গঠন কৰক।

সমাধান ঃ

x	y	z	xy	xz	xy+xz
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

উদাহৰণ 9 ঃ x, y চলকৰ বুলীয় ৰাশি $xy+x'y+xy'+x'y'$ অৰ বাবে সত্যতা সাৰণী গঠন কৰক।

সমাধান ঃ

x	y	x'	y'	xy	$x'y$	xy'	$x'y'$	$xy+x'y+xy'+x'y'$
1	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1

উদাহৰণ 10 ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $(xy+x)'$ আৰু $(x'+y')x'$ বুলীয় ৰাশি দুটা সমান।

সমাধান ঃ

x	y	xy	xy+x	$(xy+x)'$
1	1	1	1	0
1	0	0	1	0
0	1	0	0	1
0	0	0	0	1

আকৌ,

x	y	x'	y'	$x'+y'$	$(x'+y')x'$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

ওপৰৰ সাৰণী দুখনৰ শেষৰ স্তম্ভ দুটা নিৰীক্ষণ কৰি আমি দেখিলোঁ যে $(xy+x)' = (x'+y')x'$.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১৩ঃ ধৰা হ'ল x, y, z চলকৰ f(x, y, z) = xy + z′ এটা বুলীয় ৰাশি। f(1, 1, 0), f(0, 1, 1), f(0, 1, 0), f(1, 1, 1), f(0, 0, 0) ৰ মান নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ১৪ঃ তলৰ বুলীয় ৰাশিবোৰৰ বাবে সত্যতা সাৰণী গঠন কৰক।

(i) $x + yx'$ (ii) $x(x+y')$

(iii) $xy + yz + zx$ (iv) $xy' + x(y'+z)$

প্রশ্ন নং ১৫ঃ তলৰ বুলীয় ৰাশিবোৰ সমান হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

(i) $(x+y)'$, $x'y'$

(ii) $(xy)'$, $x' + y'$

(iii) $x(y+z)$, $xy+xz$

(iv) $xz + (x'+y')'$, $x(y+z)$



১৪.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- ধৰা হ'ল দুটা দ্বৈত প্রক্রিয়া + আৰু . , আৰু এটা একক প্রক্রিয়া $'$ যুক্ত, আৰু দুটা পৃথক মৌল 0 আৰু 1 থকা B এটা অৰিক্ত সংহতি। তেনেহ'লে B ক এটা বুলীয় বীজগণিত বুলি কোৱা হয় যদি তলৰ চর্তসমূহ সিদ্ধ হয়।

  1. (i) $a+b = b+a$, (ii) $a.b = b.a$, $\forall\ a,b \in B$

  2. (i) $a+ (b.c) = (a+b).(a+c)$

     (ii) $a.(b+c) = (a.b)+(a.c)$, $\forall\ a, b, c \in B$

  3. (i) $a+0 = a$, (ii) $a.1 = 1$, $\forall\ a \in B$

     (ii) $a+a' = 1$, (ii) $a.a' = 0$, $\forall\ a \in B$

     0 ক শূন্য মৌল বুলি কোৱা হয়।

     1 অক একক মৌল বুলি কোৱা হয়।

  a' অক প্রত্যেক মৌলৰ a বুলি কোৱা হয়।
- এটা বুলীয় বীজগণিতত শূন্য মৌল অদ্বিতীয়।
- এটা বুলীয় বীজগণিতত একক মৌল অদ্বিতীয়।
- এটা বুলীয় বীজগণিতত প্রত্যেক মৌলৰ পূৰক অদ্বিতীয়।
- এটা বুলীয় বীজগণিত B ত $1' = 0$, $0' = 1$.

- বুলীয় বীজগণিতৰ প্ৰতিটো উক্তি আৰু প্ৰতিটো উপপাদ্য বৈধ হয় যদি দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া + আৰু . , আৰু শূন্য মৌল 0 আৰু একক মৌল। সালসলনি কৰা হয়। এই বিধিটোক দ্বৈধতা বিধি বুলি কোৱা হয়।
- এটা বুলীয় বীজগণিত B ত

  1. (i) a+a = a, (ii) a.a = a, $\forall\ a \in B$
  2. (i) a+1 = 1, (ii) a.0 = 0
  3. (i) a+(a.b) = a, (ii) a, (a+b) = a
  4. (i) (a+b)+c = a+(b+c)

     (ii) (a.b).c = a.(b.c), ()
  5. $(a')' = a$
  6. (i) $(a+b)' = a'.b'$, (ii) $(a.b)' = a'+b'$
  7. (i) যদি b+a=c+a, আৰু $b+a' = c+a'$, তেনেহ'লে b=c

     (ii) যদি b.a. = c.a, আৰু $b.a' = c.a'$, তেনেহ'লে b=c
  8. (i) $a+b'=1$ যদি আৰু যদিহে a+b = a

     (ii) $a.b' = 0$ যদি আৰু যদিহে a.b = a
  9. (i) $a+(a'.b) = a+b$

     (ii) $a.(a'+b) = a.b$
- B = {0, 1} বুলীয় বীজগণিতৰ কোনো মৌল বুজাবলৈ যি আক্ষৰিক প্ৰতীক ব্যৱহাৰ কৰা হয়, তাক বুলীয় চলক বোলা হয়। B ত +, . , / প্ৰক্ৰিয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

+	0	1
0	0	1
1	1	1

1	0	1
0	0	0
1	0	1

/	0	
	1	0

- সসীম সংখ্যক বুলীয় চলকত দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া + আৰু . , আৰু একক প্ৰক্ৰিয়া / প্ৰয়োগ কৰি যি ৰাশ পোৱা যায় তাক বুলীয় ৰাশি বোলে।
- 0 আৰু 1 দুটা বুলীয় ৰাশি।
- যিকোনো চলকেই এটা বুলীয় ৰাশি।
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ চলকৰ দুটা বুলীয় ৰাশিক **সমান** বুলি কোৱা হয় যদি $x_1, x_2, \ldots,$ x_n চলকৰ প্ৰত্যেক মান 0, 1 অৰ বাবে একে মান পোৱা যায়।
  দুটা বুলীয় ৰাশিৰ সমতাক " = " প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হয়।



১৪.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত x = {1}

P(x) = {{1}, (ϕ)}

$\cup$	{1}	ϕ
{1}	{1}	{1}
ϕ	{1}	ϕ

$\cap$	{1}	ϕ
{1}	{1}	ϕ
ϕ	ϕ	ϕ

$\cap$	/	
{1}	ϕ	
ϕ	{1}	

সাৰণীৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে P(x) সংহতিত $\cup$ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, $\cap$ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, $'$ এটা একক প্ৰক্ৰিয়া।

এতিয়া 1. (i) $A \cup B = B \cup A$

(ii) $A \cap B = B \cap A, \ \forall \ A, B \in P(x)$

2. (i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \ \forall \ A, B, C \in P(x)$

3. (i) $A \cup \phi = A$

(ii) $A \cap \{1\} = \{1\}, \forall \ A \in P(x)$

4. (i) $A \cup A' = \{1\}$

(ii) $A \cap A' = \phi, \ \forall \ A \in P(x)$

$\therefore (P(X), \cup, \cap, /)$ এটা বুলীয় বীজগণিত। ইয়াত ϕ হ'ল শূন্য মৌল আৰু {1} হ'ল একক মৌল।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ +, . , / প্ৰক্ৰিয়াৰ বাবে প্ৰক্ৰিয়া সাৰণী গঠন কৰা হ'ল।

+	1	2	3	5	6	10	15	30
1	1	2	3	5	6	10	15	30
2	2	2	6	10	6	10	30	30
3	3	6	3	15	6	30	15	30
5	5	10	15	5	30	10	15	30
6	6	6	6	30	6	30	30	30
10	10	10	30	10	30	10	30	30
15	15	30	15	15	30	30	15	30
30	30	30	30	30	30	30	30	30

.	1	2	3	5	6	10	15	30
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	1	2	2	1	2
3	1	1	3	1	3	1	3	3
5	1	1	1	5	1	5	5	5
6	1	2	3	1	6	2	3	6
10	1	2	1	5	3	5	15	15
15	1	1	3	5	3	5	15	15
30	1	2	3	5	3	10	15	30

/	1	2	3	5	6	10	15	30
	30	15	10	6	5	3	2	1

ওপৰৰ সাৰণীৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে B ত + এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, আৰু $'$ এটা একক প্ৰক্ৰিয়া।

আকৌ, 1. (i) a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= b, a ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= b+a, $\forall\ a, b \in B$

(ii) a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= b, a ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= b.a, $\forall\ a, b \in B$

2. সাৰণীৰ পৰা আমি পালোঁ

(i) a+(b.c) = (a+b).(a+c)

(ii) a.(b+c) = (a.b)+(a.c), $\forall\ a, b, c \in B$

3. (i) a+1 = a, 1 অৰ লঃ সাঃ গুঃ = a, $\forall\ a \in B$

(ii) a. 30 = a, 30 ৰ গঃ সাঃ গুঃ = a, $\forall\ a \in B$

4. (i) $a+a' = a$, a' ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= a, $\frac{30}{a}$ ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= 30

(ii) $a.a' = a$, a' ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= a, $\frac{30}{a}$ ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$\therefore$ (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত। ইয়াত 1 হ'ল শূন্য মৌল আৰু 30 একক মৌল।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল X = {1, 2, 3, 4}

গতিকে x অৰ ঘাত সংহতি P(x) অত 2^4 টা অর্থাৎ 16 টা মৌল আছে।

মিলন, ছেদন আৰু পূৰক প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত P(x) এটা বুলীয় বীজগণিত।

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত B = {0, a, b, 1}

B ত +, . , / প্ৰক্ৰিয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

+	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

.	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

/	0	a	b	1
	1	b	a	0

সাৰণীৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে B ত + এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, . এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া আৰু / এটা একক প্ৰক্ৰিয়া।

এতিয়া

1. (i) B ত + প্ৰক্ৰিয়া ক্ৰমবিনিময়ে।

   (ii) B ত . প্ৰক্ৰিয়া ক্ৰমবিনিময়

2. (i) B ত . প্ৰক্ৰিয়াৰ ওপৰত + প্ৰক্ৰিয়াই বিতৰণ বিধি মানি চলে।

   (ii) B ত + প্ৰক্ৰিয়াৰ ওপৰত . প্ৰক্ৰিয়াই বিতৰণ বিধি মানি চলে।

3. (i) a+0 = a

   (ii) a.1 = 1, $\forall\ a \in B$

4. (i) $a+a' = 1$

   (ii) $a.a' = 0$, $\forall\ a \in B$

$\therefore$ (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত। ইয়াত 0 হ'ল শূন্য মৌল আৰু 1 হ'ল একক মৌল।

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ 20 ৰ সকলো ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতি B = {1, 2, 4, 5, 10, 20}

প্ৰক্ৰিয়া সাৰণী কেইখন গঠন কৰা হ'ল।

+	1	2	4	5	10	20
1	1	2	4	5	10	20
2	2	2	4	10	10	20
4	4	4	4	20	20	20
5	5	10	20	5	10	20
10	10	10	20	10	10	20
20	20	20	20	20	20	20

.	1	2	4	5	10	20
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	1	2	2
4	1	2	4	1	2	4
5	1	1	1	5	5	5
10	1	2	2	5	10	10
20	1	2	4	5	10	20

/	1	2	4	5	10	20
	20	10	5	4	2	1

সাৰণীৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে B ত + এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, . এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, / এটা একক প্ৰক্ৰিয়া।

এতিয়া 1 (i) a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= b, a ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= b+a

(ii) a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= b, a ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= b.a

2. সাৰণীৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে

(i) a+(b.c) = (a+b), (a+c)

(ii) a.(b+c) = (a.b) + (a.c), $\forall\ a, b, c \in B$

3. (i) a+1 = a, 1 ৰ লঃ সাঃ গুঃ

(ii) a.20 = a, 20 ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= a, $\forall\ a \in B$

4 (i) আৰু 4 (ii) চৰ্ত দুটা সিদ্ধ নহয়। কিয়নো

$10+10' = 10$, $10'$ ৰ লঃ সাঃ গুঃ

$= 10, \frac{20}{10}$ ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= 10, 2 ৰ লঃ সাঃ গুঃ

$= 10 \neq 20$

$\therefore$ B এটা বুলীয় বীজগণিত নহয়।

টোকা ঃ প্ৰমাণ ব্যতিৰেকে তলৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি দিয়া হ'ল।

ধৰা হ'ল n > 1 এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা। ধৰা হ'ল n অৰ সকলো যোগাত্মক ভাজকৰ সংহতিটো B. B ত +, . , / প্ৰক্ৰিয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হ'ল

a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ

a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$a' = \frac{n}{a}$

তেনেহ'লে B এটা বুলীয় বীজগণিত হ'ব যদি আৰু যদিহে কোনো বৰ্গ অখণ্ড সংখ্যাৰে n বিভাজ্য নহয়।

ওপৰৰ উদাহৰণটোত, n = 20 আৰু 4 অৰ দ্বাৰা 20 বিভাজ্য। 4 এটা বর্গ সংখ্যা।

৮ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল B এটা তিনিটা মৌলবিশিষ্ট বুলীয় বীজগণিত।

ধৰা হ'ল B ={0, 1, a}, য'ত $a \neq 0,\ a \neq 1$

আমি জানো যে $0' = 1,\ 1' = 0$

$\therefore a' = a$

এতিয়া $a = a.a$

$= a.a'$

= 0, এইটো স্ববিৰোধী কথা।

$\therefore$ তিনিটা মৌলবিশিষ্ট বুলীয় বীজগণিত থাকিব নোৱাৰে।

৯ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $(a.b) + c = c+(a.b)$, ক্রমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা

$= (c+a).(c+b)$, বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= (a+c).(b+c)$, ক্রমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা

$= a.b$, (দিয়া আছে)

১০ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $a+(a+b)' = a+(a'.b')$

$= (a+a').(a+b')$

$= 1.(a+b')$

$= a+b'$

১১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ প্রথমতে আমি প্রমাণ কৰোঁ যে (i) $\Rightarrow$ (ii)

আমি জানো $a+b = a$

$\therefore a+b' = 1.(a+b')$

$= (a+a').(a+b')$

$= a+(a'.b')$

$= a+(a+b)'$

$= a+a'$

$= 1$

দ্বিতীয়তে আমি প্রমাণ কৰোঁ যে (ii) $\Rightarrow$ (iii)

আমি জানো যে $a+b' = 1$

$\therefore a+b = (a+b).1$

$= (a+b).(a+b')$

$= a+(b.b')$

$= a+0$

$= a$

এতিয়া $a.b = (a+b).b$

= b.(a+b)

= b. (b+a)

= b, বিশোষণ বিধিৰ পৰা

তৃতীয়তে আমি প্ৰমাণ কৰোঁ যে (iii) $\Rightarrow$ (i)

আমি জানো a.b = b

এতিয়া a+b = a+ (a.b)

= a, বিশোষণ বিধিৰ পৰা

গতিকে আমি দেখিলোঁ যে (i), (ii), আৰু (iii) ধৰ্মকেইটা সমতুল্য।

দ্বিতীয় অংশ ঃ ওপৰৰ উপপাদ্যটোৰ দ্বৈধটো হ'ল

(i) a.b = a, (ii) a.b′ = 0, (iii) a+b = b

প্ৰথম অংশত • প্ৰক্ৰিয়াৰ ঠাইত + , + প্ৰক্ৰিয়াৰ ঠাইত • , 0 ৰ ঠাইত 1, 1 অৰ ঠাইত 0

বহুৰাই এইটো প্ৰমাণ কৰিব পাৰি।

১২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ [(abc+a′b′)′ + bc]′

= (abc+a′b′) (b′+c′), দ্য মৰ্গানৰ বিধিৰ পৰা

= abc b′ + abc c′ + a′b′b′+a′b′c′

= ac 0 + ab 0 + a′b′ + a′b′c′, [bb′=0, cc′ = 0, b′b′=b′]

= a′b′ + a′b′c′

= a′b′ I + a′b′c′

= a′b′ (1+c′)

= a′b′, 1+c′=1

১৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ f(x, y, z) = xy+z′

∴ f(1, 1, 0) = 1.1 + 0′

= 1+1 = 1

f(0, 1, 1) = 0.1 + 1′

= 0 + 0

= 0

f(0, 1, 0) = 0.1 + 0′

= 0+1

= 1

f(1, 1, 1) = 1.1.+1′

= 1+0

= 1

f(0, 0, 0) = 0.0 + 0′

= 0+1

= 1

১৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ

(i)

x	y	x'	yx'	$x+yx'$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

(ii)

x	y	y'	$x+y'$	$x(x+y')'$
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0

(iii)

x	y	z	xy	yz	zx	xy+yz+zx
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

(iv) নিজে চেষ্টা কৰক।

১৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ

(i)

x	y	x+y	$(x+y)'$	x'	y'	$x'y'$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

স্তম্ভ 4 আৰু স্তম্ভ 7 অৰ পৰা আমি পালো যে $(x+y)' = x'y'$

(ii) নিজে চেষ্টা কৰক।

(iii) নিজে চেষ্টা কৰক।

(iv)

x	y	z	xz	x'	y'	$x'+y'$	$(x'+y')'$	$xz+(x'+y')$	y+z	x(y+z)
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0

স্তম্ভ 9 আৰু স্তম্ভ 11 অৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে

$xz + (x'+y')' = x(y+z)$



১৪.৮ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

১) Sen, M. K, Chakraborty B. C. : *Introduction to Discrete Mathematies* (2010), Books and Allied (P) Ltd, Kolkata 700010.

২) Dasgupta Asok : *Abstract and Linean Algebra* (2014), Asoke Prakasan, Kolkata 700007.



১৪.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ ধৰা হ'ল X = {1, 2}. ধৰা হ'ল X অৰ ঘাত সংহতি P (x)। প্ৰমাণ কৰক যে মিলন, ছেদন আৰু পূৰক প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত P(x) এটা বুলীয় বীজগণিত।

প্ৰশ্ন ২ঃ ধৰা হ'ল 170 ৰ সকলো ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতিটো B = {1, 2, 5, 10, 17, 34, 85, 170}। B ত +, . , / প্ৰক্ৰিয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ

a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$a' = \frac{170}{a}$

(B, +, . , /) বুলীয় বীজগণিত হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন ৩ঃ ধৰা হ'ল 24 অৰ সকলো ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতিটো B = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}। B ত +, . , / প্রক্রিয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ

a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$a' = \frac{24}{a}$

(B, +, . , /) বুলীয় বীজগণিত হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন ৪ঃ ধৰা হ'ল (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত আৰু ধৰা হ'ল a, b $\in$ B তলৰ ৰাশিকেইটা সংক্ষিপ্ত ৰূপত প্রকাশ কৰক।

(i) $(a+b).(a'+b').(a'+b).(a+b')$

(ii) $(a.b)+(a'.b)+(a.b')+(a'.b')$

প্রশ্ন ৫ঃ ধৰা হ'ল (b, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত, আৰু a, b, c, d $\in$ B. প্রমাণ কৰক যে $a.c + b.d = (a+b).(b+c).(c+d).(d+a)$

প্রশ্ন ৬ঃ অসীম মৌলবিশিষ্ট বুলীয় বীজগণিত এটাৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন ৭ঃ ধৰা হ'ল (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত, আৰু a, b, c $\in$ B. প্রমাণ কৰক যে $(a+b').(b+c').(c+a')=(a'+b).(b'+c).(c'+a)$

প্রশ্ন ৮ঃ ধৰা হ'ল x, y, z চলক তিনিটাৰ $f(x, y, z) = x.y.z + x.y'.z + x'.y.x + x'.y'.z'$ এটা বুলীয় ৰাশি। f(1, 1, 1), f(1, 1, 0), f(1, 0, 1), f(0, 1, 1), f(0, 0, 0) ৰ মান নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৯ঃ তলৰ বুলীয় ৰাশিৰ বাবে প্রক্রিয়া সাৰণী গঠন কৰক।

(i) $xy+x(x+y)$ (ii) $x'y+xy'+x(x+y')$ (iii) $xyz+xy'z+x'yz+xyz'$

প্রশ্ন ১০ঃ তলৰ বুলীয় ৰাশিকেইটা সমান হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

(i) $(x+y+z)'$, $x'y'z'$

(ii) $(xyz)'$, $x'+y'+z'$

(iii) $x.(x+y)$, x

(iv) $(x+y)z'$, $xz'+yz'$

*** ***** ***



প্রসঙ্গ পুথি

- Fraleigh, John B : A First in Abstract Algebra (First Indian Reprit, 2003, Person Education (Singapore) Pvt. Ltd., Indian Delhi 110, 092.
- Mapa, S. K. : Higher Algebra (Abstract and Linear) (1994), Ashok Prakashan, Calcutta 700 007.
- Khanna, V. K. and Bhambri, S. K. : A Course in Abstract Algebra (2006), Vikas Publishing House Pvt. Ltd, New Delhi 110 014.
- Singh, Surajeet and Zameeruddin, Qazi Modern Algebra (2006, Vikas Publishing House Pvt. Ltd, New Delhi 110 014.
- Tamuli B. K. : Contemporary Algebra (1977), New Book Stall, Guwahati- 781 001.
- Pundir S . K. : Advance Abstract Algebra, Krishna Prakashan Media (P) Ltd, Meerut 250 001
- Sharma, J. K. : Discrete Mathematics, Macmillian Publishing India Ltd., New Delhi- 110002