GEC S3 02 (M)

অৰ্থবিজ্ঞানৰ বিশ্লেষণত সংখ্যাগত তত্ত্ব - ১

তৃতীয় ষাণ্মাসিক

অৰ্থবিজ্ঞান

খণ্ড ঃ ১

কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

বিষয় বিশেষজ্ঞ মণ্ডলী

অধ্যাপক মাধুর্য প্রসাদ বেজবৰুৱা, অর্থনীতি বিভাগ, গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়
অধ্যাপক নিচাৰ আহমেদ বৰুৱা, অর্থনীতি বিভাগ, গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়
ড° গৌতম মজুমদাৰ, অর্থনীতি বিভাগ, কটন বিশ্ববিদ্যালয়, গুৱাহাটী

সমন্বয়ৰক্ষী ঃ ভাস্কৰ শর্মা, উৎপল ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

প্রস্তুতি গোটৰ সদস্য

অধ্যায়	*অৱিহণা যোগাইছে*	*ভাষান্তৰকাৰী*
১, ৫ আৰু ৬	**ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা**	**শ্রীপঞ্চানন বর্মণ,** অৱসৰপ্রাপ্ত শিক্ষক
	প্রাক্তন মুৰব্বী অধ্যাপক, কটন মহাবিদ্যালয়	আম্ৰিখোৱা উচ্চতৰ মাঃ বিদ্যালয়, সর্থেবাৰী
২	**অধ্যাপক বিশ্বজিৎ ভাগৱতী**	(অধ্যায় ১, ২, ৫ আৰু ৬)
	প্রাক্তন মুৰব্বী অধ্যাপক, কটন মহাবিদ্যালয়	**কৰিশ্মা শর্মা,** ডিমাকুছি কলেজ (অধ্যায় ৩)
৩	**ড° ভাস্কৰ শর্মা, ড° উৎপল ডেকা**	**আজিমুল হক,** ৰাজীৱ গান্ধী বিশ্ববিদ্যালয় (অধ্যায় ৪)
	কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়	
৪	**ড° উৎপল ডেকা,** কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়	
	সুদর্শন নার্জাৰী, গুৱাহাটী কলেজ	

সম্পাদনা ঃ

বিষয়বস্তু সম্পাদনা	ঃ **অধ্যাপক এন. আৰ. দাস,** গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়, **ড° সঞ্জয় দত্ত,** গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়, **ড° চন্দ্রমা গোস্বামী,** কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়
ভাষা সম্পাদনা (অসমীয়া)	ঃ **হৰেকৃষ্ণ ডেকা, ভাস্কৰ শর্মা,** কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়
গাঁথনিক সম্পাদনা	ঃ **হৰেকৃষ্ণ ডেকা, ভাস্কৰ শর্মা,** কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

প্রথম প্রকাশ ঃ মার্চ, ২০২৩

This Self Learning Material (SLM) of the Krishna Kanta Handiqui State University is made available under a Creative Commons Attribution-Non Commercial-ShareAlike4.0 License (International): http.//creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0.

কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ৰ হৈ পঞ্জীয়কৰ দ্বাৰা মুদ্রিত আৰু প্রকাশিত।

এই শিক্ষণ সামগ্রী প্রস্তুতিৰ বাবে আর্থিক অনুদান আগবঢ়োৱা
দূৰ শিক্ষা ব্যুৰো, বিশ্ববিদ্যালয় অনুদান আয়োগৰ ওচৰত বিশ্ববিদ্যালয় কৃতজ্ঞ।

মুখ্য কার্যালয় ঃ পাটগাঁও, ৰাণী গেট, গুৱাহাটী-৭৮১ ০১৭
মহানগৰ কার্যালয় ঃ হাউচ্‌ফেড কমপ্লেক্স, দিচপুৰ, গুৱাহাটী-৭৮১ ০০৬; Web : www.kkhsou.in

বিষয় সূচী

পৃষ্ঠা নং

অধ্যায় ১ ঃ সংখ্যা প্রণালী, সম্বন্ধ আৰু ফলন ০৫ - ২২

স্বাভাৱিক সংখ্যা; পূর্ণ সংখ্যা; অখণ্ড সংখ্যা; পৰিমেয় সংখ্যা অথবা ভগ্নাংশ; অপৰিমেয় সংখ্যা; বাস্তৱ সংখ্যা; কাল্পনিক সংখ্যা; জটিল সংখ্যা; মৌলিক সংখ্যা; ধ্রুৱকৰ ধাৰণা আৰু ইয়াৰ বিভিন্ন প্রকাৰ; চলকৰ ধাৰণা আৰু ইয়াৰ বিভিন্ন প্রকাৰ; সম্বন্ধৰ ধাৰণা ঃ একক সম্বন্ধ, বিপৰীত সম্বন্ধ; ফলনৰ ধাৰণা; ফলনৰ বিভিন্ন প্রকাৰ ঃ বহুপদ ফলন, ৰৈখিক ফলন, দ্বিঘাত ফলন, ঘনক ফলন, ঘাত ফলন, পৰিমেয় ফলন, ধ্রুৱক ফলন, সুচকীয় ফলন, ঘাতংকীয় ফলন

অধ্যায় ২ ঃ সংহতি ২৩ - ৩৯

সংহতি আৰু সংহতিৰ উপস্থাপন; ৰিক্ত সংহতি; সসীম আৰু অসীম সংহতি; সমান সংহতি; উপ-সংহতি, অধি-সংহতি, প্রকৃত উপ-সংহতি; ঘাত সংহতি; নিত্য সংহতি; ভেন চিত্র; সংহতি সংক্রিয়া ঃ সংহতিৰ মিলন, সংহতিৰ ছেদন, সংহতিৰ অন্তৰ, পূৰক সংহতি

অধ্যায় ৩ ঃ অর্থনীতিৰ ফলনসমূহ ৪০ - ৪৭

অর্থনীতিৰ কেতবোৰ মৌলিক ফলন ঃ চাহিদা ফলন, যোগান ফলন, উপযোগিতা ফলন, উৎপাদন ফলন, আয় ফলন, ব্যয় ফলন, লাভ ফলন, উপভোগ ফলন, সঞ্চয় ফলন, বিনিয়োগ ফলন

অধ্যায় ৪ ঃ অর্থনীতিত সমীকৰণ ৪৮ - ৭০

সমীকৰণৰ ধাৰণা ঃ সমীকৰণৰ মান/ ডিগ্রী, বহুৰাশি সমীকৰণ, সহ সমীকৰণ; সমীকৰণৰ পুনৰলিখন; সমীকৰণৰ সমাধান ঃ বহুৰাশি সমীকৰমৰ সমাধান, সহ সমীকৰণৰ সমাধান; চাহিদা ফলন; যোগান ফলন; ভাৰসাম্য দৰ আৰু পৰিমাণ নির্দ্ধাৰণ ; ব্যয় ফলন; আয় ফলন; লাভ ফলন; বাজেট ফলন

অধ্যায় ৫ ঃ নিশ্চায়ক ৭১ - ৯২

দ্বিতীয় ক্রমৰ নিশ্চায়ক; তৃতীয় ক্রমৰ নিশ্চায়ক ; নিশ্চায়কৰ ধর্ম ; ক্রেমাৰৰ নীতি অনুসৰি তম অসুষম ৰৈখিক সমীকৰণৰ (nতম অজ্ঞাত) সমাধান কৰাৰ নিয়ম

অধ্যায় ৬ ঃ মৌলকক্ষ ৯৩ - ১১৮

মৌলকক্ষৰ সংজ্ঞা; মৌলকক্ষৰ প্রকাৰ; মৌলকক্ষৰ সমতা; মৌলকক্ষৰ যোগ আৰু বিয়োগ; মৌলকক্ষৰ অদিশ পূৰণ; মৌলকক্ষৰ পূৰণ; মৌলকক্ষৰ পক্ষান্তৰ ; সমমিতি

পাঠ্যবিষয়ৰ পৰিচয় ঃ

'অর্থবিজ্ঞানৰ বিশ্লেষণত সংখ্যাগত তত্ত্ব - ১' শীর্ষক এই পাঠ্যবিষয়টি বিশ্ববিদ্যালয়ে আগবঢ়োৱা অর্থ বিজ্ঞান প্রধান (Major) পাঠ্যক্রমৰ প্রথম পাঠ্যবিষয়। আগৰ দুটা যান্মাসিক ইতিমধ্যে আপোনালোকে অর্থবিজ্ঞান বিষয়টিৰ বিশেষকৈ ব্যষ্টিবাদী অর্থবিজ্ঞান আৰু সমষ্টিবাদী অর্থবিজ্ঞানৰ সৈতে জড়িত কিছুমান মৌলিক তত্ত্বৰ বিষয়ে জানিব পাৰিছে। অর্থবিজ্ঞানত সংখ্যাগত কৌশলৰ প্রয়োগ প্রায়ে দেখা যায়, বিশেষকৈ গণিত আৰু পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানৰ বিভিন্ন কৌশল অর্থবিজ্ঞানত প্রায়ে প্রয়োগ কৰা হয়। এই কথাটোৱে সমাজ বিজ্ঞানৰ আন আন অধ্যয়নৰ বিষয়ৰ ভিতৰত অর্থবিজ্ঞানক বিশেষকৈ গৱেষণাৰ ভিত্তিত প্রতিষ্ঠিত এক বিষয় হিচাপে প্রতিস্থা লাভ কৰিছে। অর্থবিজ্ঞানত প্রয়োগ হোৱা বিভিন্ন সংখ্যাগত কৌশলসমূহ আন আন বিষয়, যথা- বাণিজ্য, মেনেজমেণ্ট, বীমা বিজ্ঞান, প্রাথমিক স্বাস্থ্য আদি ক্ষেত্রতো বহলভাৱে প্রয়োগ হোৱা দেখা যায়। অর্থবিজ্ঞান বিষয়টিৰ পাছৰ অধ্যয়নসমূহত আপোনালোকে দেখিবলৈ পাব যে, অর্থবিজ্ঞান, পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান আৰু গণিত এই বিষয় কেইটাৰ সংমিশ্রণে অর্থবিজ্ঞানত এক নতুন অধ্যয়নৰ শাখা প্রতিস্থা কৰিছে যাক আমি Econometrics বুলি কওঁ। অর্থবিজ্ঞানত সংখ্যাগত গৱেষণা হাতত লোৱাসকলৰ বাবে Econometrics ৰ অধ্যয়ন অত্যন্ত মনোগ্রাহী বিষয়।

তৃতীয় যান্মাসিকৰ এই পাঠ্যবিষয়টি বিশ্ববিদ্যালয়ে আগবঢ়োৱা অর্থবিজ্ঞান (প্রধান) পাঠ্যক্রমৰ সৈতে জড়িত সংখ্যাগত বিশ্লেষণৰ সৈতে জড়িত দুখন পাঠ্যবিষয়ৰ অন্যতম। ইয়াৰ পৰৱর্তী যান্মাসিকত পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান (Statistics) ৰ লগত জড়িত কিছু ধাৰণাৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। তৃতীয় যান্মাসিকৰ এই পাঠ্যবিষটিত প্রধানতঃ গণিতৰ কিছুমান ধাৰণাৰ কথা আলোচনা কৰা হৈছে, যিবোৰ অর্থবিজ্ঞানত প্রায়ে ব্যৱহৃত হয়।

প্রথম অধ্যায়টিত গণিতৰ কিছুমান মৌলিক ধাৰণা, যথা- সংখ্যা প্রণালী, সম্বন্ধ আৰু ফলনৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হৈছে। এই অধ্যয়টি অন্তত সংখ্যা প্রণালী আৰু লগতে বিভিন্ন প্রকাৰৰ সম্বন্ধ আৰু ফলন সম্পর্কে জ্ঞান লাভ কৰিব। পৰৱর্তী অধ্যায়টিত সংহতিৰ প্রাথমিক ধাৰণা কিছুমান আলোচনা কৰা হৈছে। ৰিক্ত সংহতি, সমীম সংহিত, অসীম সংহতি, সমান সংহতি, উপ সংহতি, ঘাত সংহতি, নিত্য সংহতি, ভেন চিত্র, সংহতিৰ পূৰক আদি ধাৰণা সম্বন্ধে অধ্যায়টিত, আলোচনা কৰা হৈছে। তৃতীয় অধ্যায়টিত অর্থবিজ্ঞানৰ ফলন সম্পর্কে আলোচনা কৰা হৈছে। অধ্যায়টিত প্রধানঃ অর্থবিজ্ঞানত সঘনে ব্যৱহৃত হোৱা মৌলিক ফলন সমূহৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হৈছে। 'নিশ্চায়ক' শীর্ষক পঞ্চম অধ্যায়টিত গণিতৰ এক গুৰুত্বপূর্ণ ক্ষেত্র মৌলকক্ষৰ পদ্ধতিৰ কিছু প্রাথমিক ধাৰণা সম্পর্কে আলোচনা কৰা হৈছে। অধ্যায়টিত নিশ্চায়কৰ ধাৰণাৰ লগতে ২ ক্রমৰ নিশ্চায়কৰ সমাধান সম্পর্কে আলোচনা কৰা হৈছে। শেহৰ ফালে ক্রেমাৰৰ নীতি সম্বন্ধেও আলোচনা কৰা হৈছে। ষষ্ঠ অধ্যায়টিত মৌলকক্ষ পদ্ধতি সম্বন্ধে আলোচনা কৰা হৈছে। অধ্যায়টিত মৌলকক্ষ পদ্ধতিৰ কিছুমান মৌলিক ধাৰণা, যথা- মৌলকক্ষৰ সমতা, পূৰণ, যোগ আৰু পক্ষান্তৰ সম্বন্ধে আলোচনা কৰা হৈছে।

অধ্যায় ১ ঃ সংখ্যা প্রণালী, সম্বন্ধ আৰু ফলন

অধ্যায় গাঁথনি

১.১ উদ্দেশ্য

১.২ পৰিচয়

১.৩ স্বাভাৱিক সংখ্যা (Natural Number)

১.৪ পূর্ণ সংখ্যা (Whole Number)

১.৫ অখণ্ড সংখ্যা (Integers)

১.৬ পৰিমেয় সংখ্যা অথবা ভগ্নাংশ (Rational Number or Fraction)

১.৭ অপৰিমেয় সংখ্যা (Irrational Numbers)

১.৮ বাস্তৱ সংখ্যা (Real Numbers)

১.৯ কাল্পনিক সংখ্যা (Imaginary Numbers)

১.১০ জটিল সংখ্যা (Complex Number)

১.১১ মৌলিক সংখ্যা (Prime Numbers)

১.১২ ধ্ৰুৱকৰ ধাৰণা আৰু ইয়াৰ বিভিন্ন প্ৰকাৰ (Concepts of Constants and its Different Types)

১.১৩ চলকৰ ধাৰণা আৰু ইয়াৰ বিভিন্ন প্ৰকাৰ (Concept of Variables and its Different Types)

১.১৪ সম্বন্ধৰ ধাৰণা

- ১.১৪.১ একক সম্বন্ধ
- ১.১৪.২ বিপৰীত সম্বন্ধ

১.১৫ ফলনৰ ধাৰণা

১.১৬ ফলনৰ বিভিন্ন প্ৰকাৰ

- ১.১৬.১ বহুপদ ফলন
- ১.১৬.২ ৰৈখিক ফলন
- ১.১৬.৩ দ্বিঘাত ফলন
- ১.১৬.৪ ঘনক ফলন
- ১.১৬.৫ ঘাত ফলন
- ১.১৬.৬ পৰিমেয় ফলন
- ১.১৬.৭ ধ্ৰুৱক ফলন
- ১.১৬.৮ সুচকীয় ফলন
- ১.১৬.৯ ঘাতংকীয় ফলন

১.১৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১.১৮ অধিক জানিবলৈ

১.১৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
১.২০ আৰ্হি প্রশ্ন

১.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- বিভিন্ন প্রকাৰৰ সংখ্যা চিনাক্ত কৰিব পাৰিব
- পৰিমেয় সংখ্যা এটা অন্তকাৰী (terminating) অথবা অনা-অন্তকাৰী পুনৰাবৃত্তিশীল দশমিক (non-terminating repeating) অংক সেয়া প্রকাশ কৰিব পাৰিব
- কাল্পনিক আৰু জটিল সংখ্যা কোনবোৰ জানিব পাৰিব
- ধ্রুৱক আৰু চলক কাক বোলে তথা ইহঁত কেইপ্রকাৰ সেয়া জানিব পাৰিব
- সম্বন্ধ সম্পর্কে ধাৰণা লাভ কৰিব
- ফলন সম্পর্কে ধাৰণা লাভ কৰিব
- বিভিন্ন ফলন সম্পর্কে আলোচনা কৰিব পাৰিব।

১.২ পৰিচয়

মানৱ জাতিৰ ইতিহাসত সংখ্যাৰ সৃষ্টি আৰু প্রয়োগ এক যুগান্তকাৰী ঘটনা। গণিতৰ প্রধান অংশ এই সংখ্যাবোৰে আমাক বীজগণিত বুজি পোৱাত, জাম্যিতীয় বস্তুবোৰ/চিত্রবোৰ জোখ-মাখ কৰাত, সম্ভাৱিতা আৰু পৰিসংখ্যা প্রণালীৰ সহায়ত বিভিন্ন বিষয়ত ভৱিষ্যৎবাণী কৰাত সহায় কৰে। এই অধ্যায়টিত আমি বিভিন্ন প্রকাৰৰ সংখ্যাৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। অধ্যায়টিত স্বাভাৱিক সংখ্যা, পূৰ্ণ প্রকাৰৰ সংখ্যাৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। অধ্যায়টিত স্বাভাৱিক সংখ্যা, পূৰ্ণ সংখ্যা, সমাকল, পৰিমেয় সংখ্যা, অপৰিমেয় সংখ্যা, বাস্তৱ সংখ্যা, কাল্পনিক সংখ্যা আৰু জটিল সংখ্যাৰ লগতে ধ্রুৱক তথা চলকৰ ধাৰণা দুটাও আলোচনা কৰা হ'ব।

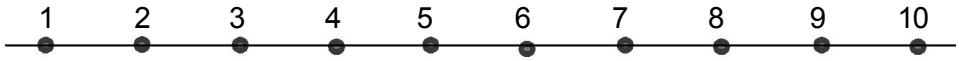
তদুপৰি, এই অধ্যায়টিত আমি সম্বন্ধ আৰু ফলনৰ ধাৰণা সম্পর্কে আলোচনা কৰিম। পোনতে আমি সম্বন্ধ আৰু ফলনৰ সংজ্ঞা আলোচনা কৰিম। তদুপৰি, অধ্যায়টিত আমি গণিতত ব্যৱহৃত কেইবিধমান মৌলিক ফলনৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। পাছলৈ তৃতীয় অধ্যায়ত অর্থবিজ্ঞানত ব্যৱহৃত কেইটিমান ফলনৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

১.৩ স্বাভাৱিক সংখ্যা (NATURAL NUMBER OR COUNTING NUMBER)

আমাৰ বাবে বস্তু গণনা কৰা কামটো সহজ। আমি যথেষ্ট সংখ্যক বস্তু গণনা কৰিব পাৰো। উদাহৰণস্বৰূপে কোনো এখন মহাবিদ্যালয়ত পঢ়ি থকা ছাত্র-ছাত্রীৰ সংখ্যা আমি গণি উলিয়াব পাৰোঁ। তাৰ পাছত সেই গণনা সংখ্যাত লিখি উলিয়াব পাৰোঁ। গণনা কৰিবৰ সময়ত আমি 1, 2, 3, 4, ... সংখ্যাবোৰ ব্যৱহাৰ কৰোঁ। এই সংখ্যাবোৰ স্বাভাৱিকভাৱেই আমাৰ

মনলৈ আহে। দৈনন্দিন জীৱনৰ সৈতে জড়িত বিভিন্ন বস্তু-বিষয় গণনাৰ সময়ত স্বাভাৱিকভাৱে আমাৰ মনলৈ অহা 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... আদি সংখ্যাবোৰকে স্বাভাৱিক সংখ্যা অথবা গণনা সংখ্যা বোলে।

স্বাভাৱিক সংখ্যা জ্যামিতিৰ উপস্থাপন (Gemetrical representation of Natural numbers)



১.৪ পূৰ্ণ সংখ্যা (WHOLE NUMBER)

স্বাভাৱিক সংখ্যাবোৰৰ সৈতে 0 (শূন্য) যোগ কৰিলে যিটো ৰাশি পোৱা যায় তাকে পূৰ্ণ সংখ্যা বোলে। স্বাভাৱিক সংখ্যা প্রণালীত শূন্য (0) যোগ কৰি পূৰ্ণ সংখ্যা প্রণালী গঠন কৰা হয়। অর্থাৎ, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... ইত্যাদিক একেলগে পূৰ্ণ সংখ্যা বোলে। পূৰ্ণ সংখ্যাৰ সংহতিক W এককেৰে সূচিত কৰা হয়।

১.৫ অখণ্ড সংখ্যা (INTEGERS)

সময় সাপেক্ষে আমি সংখ্যাৰ আগত ঋণাত্মক চিহ্ন বহুৱাবলগীয়া হয়। যেনে— ব্যৱসায়ত হোৱা লাব-লোকচানৰ বিপৰীত পৰিমাণ বুজাবলৈ, তাপমানৰ উঠা-নমা বুজাবলৈ, কোনো স্থানৰ সাগৰপৃষ্ঠৰ পৰা উচ্চতা অথবা নিম্নতা বুজাবলৈ, হ্রদ অথবা নদীৰ পানীৰ স্তৰ বুজাবলৈ, টেংকত থকা তেলৰ স্তৰ বুজাবলৈ ইত্যাদি। এনে বিভিন্ন কামত আমি কেতিয়াবা সংখ্যাৰাশিৰ ঋণাত্মক দিশলৈ (শূন্যৰ পৰা তললৈ) যাবলগীয়া হয়। আগত বিয়োগ চিহ্ন বহুৱাই যি সংখ্যা লিখা হয় সেইবোৰক ঋণাত্মক সংখ্যা (negative number) বোলে।

অর্থাৎ, শূন্যক সামৰি আটাইবোৰ স্বাভাৱিক সংখ্যা আৰু সিহঁতৰ ঋণাত্মক ৰূপবোৰক একেলগে সমাকল (integers) বোলে।

-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ... হ'ল সমাকলৰ উদাহৰণ। ইয়াত -1, -2, -3, -4, ... হ'ল **ঋণাত্মক সমাকল** (negative integers) আৰু 1, 2, 3, 4, হ'ল **ধনাত্মক সমাকল** (positive integers).

১.৬ পৰিমেয় সংখ্যা অথবা ভগ্নাংশ (RATIONAL NUMBER OR FRACTIONS)

কোনো এক পূৰ্ণ সংখ্যাক আংশিকভাৱে উপস্থাপন কৰাটো বুজাবলৈ যি সংখ্যা ব্যৱহাৰ কৰা হয় তাকে ভগ্নাংশ বোলে। পূৰ্ণ সংখ্যাটো কোনো এবিধ উপাদান অথবা একাধিক উপাদানৰ সমষ্টি বুজোৱা সংখ্যা হ'ব পাৰে। যদি x আৰু y -ক দুটা স্বাভাৱিক সংখ্যা বুলি ধৰা হয়, তেন্তে $\frac{x}{y}(y \neq 0)$ হ'ব এটা ভগ্নাংশ। x আৰু y হ'ল ভগ্নাংশটোৰ ক্রমে লব (numerator) আৰু

(denominator)।

উদাহৰণ ঃ $\frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{123}{23}$ ইত্যাদি।

ভগ্নাংশৰ বৈশিষ্ট্য (Properties of fractions)

(ক) ভগ্নাংশৰ ক্ষেত্ৰত যোগ, বিয়োগ, পূৰণ আৰু হৰণ— এই চাৰিওটা গাণিত্যিক পদ্ধতি প্ৰযোজ্য।

(খ) দুটা ভগ্নাংশৰ যোগফল সদায় এটা ভগ্নাংশই হ'ব। কিন্তু দুটা ভগ্নাংশৰ বিয়োগফল সদায় আন এটা ভগ্নাংশ নোলাব পাৰে।

ভগ্নাংশৰ প্ৰকাৰ (Types of fractions)

(১) **প্ৰকৃত ভগ্নাংশ** (Proper fraction) ঃ যিবোৰ ভগ্নাংশৰ লব হৰতকৈ সৰু হয়, তেনেবোৰ ভগ্নাংশক প্ৰকৃত ভগ্নাংশ বোলে। যেনে— $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{9}{10}, \frac{5}{8}$ ইত্যাদি।

(২) **অপ্ৰকৃত ভগ্নাংশ** (Improper fraction) ঃ যিবোৰ ভগ্নাংশৰ লব হৰতকৈ ডাঙৰ তেনেবোৰ ভগ্নাংশক অপ্ৰকৃত ভগ্নাংশ বোলে। যেনে— $\frac{3}{12}, \frac{12}{7}, \frac{18}{5}$ ইত্যাদি।

(৩) **মিশ্ৰ ভগ্নাংশ** (Mixed fraction) : ঃ এটা মিশ্ৰ ভগ্নাংশত একোটা পূৰ্ণ সংখ্যা আৰু একোটা ভগ্নাংশ লগ হৈ থাকে। আমি অপ্ৰকৃত ভগ্নাংশবোৰক মিশ্ৰ ভগ্নাংশৰ ৰূপ দিব পাৰোঁ। হৰেৰে লবক হৰণ কৰাৰ পাছত আমি অপ্ৰকৃত ভগ্নাংশৰ একোটা ভাগফল আৰু ভাগশেষ পাম। দুয়োটাকে একেলগে লিখিলে আমি একোটা মিশ্ৰ ভগ্নাংশ পাম, যেনে—

ভাগফল $\frac{\text{ভাগশেষ}}{\text{হৰ}}$

উদাহৰণ ঃ $2\frac{3}{4}, 7\frac{1}{9}, 5\frac{3}{7}$ ইত্যাদি। এতিয়া মিশ্ৰ ভগ্নাংশ এটাক অপ্ৰকৃত ভগ্নাশলৈ সলনি কৰি চাওঁ...। ধৰা হ'ল, মিশ্ৰ ভগ্নাংশটো হ'ল $2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{2\times4}{4} + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$ (অপ্ৰকৃত ভগ্নাংশ)

১.৭ অপৰিমেয় সংখ্যা (IRRATIONAL NUMBERS)

যিবোৰ অখণ্ড সংখ্যাক কোনো ভগ্নাংশৰে উপস্থাপন কৰিব পৰা নাযায় তেনে সংখ্যাবোৰক অপৰিমেয় সংখ্যা বোলে। অন্তকাৰী দশমিক নাইবা সংখ্যা পুনৰাবৃত্তিশীল দশমিকেৰে প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰা সংখ্যাবোৰক অপৰিমেয় সংখ্যা বোলে। অৰ্থাৎ, অনা-অন্তকাৰী, অনা-পুনৰাবৃত্তিশীল দশমিক সংখ্যাবোৰেই হ'ল অপৰিমেয় সংখ্যা।

অৰ্থাৎ, আমি স্পষ্ট ৰূপত গম পালোঁ যে 10.01001000100001..... হ'ল টো অনা-অন্তকাৰী, অনা-পুনৰাবৃত্তিশীল দশমিক সংখ্যা। সেয়েহে ই এটা অপৰিমেয় সংখ্যা।

অপৰিমেয় সংখ্যাক দুটা সমাকলৰ ভাগফল হিচাপে (ভগ্নাংশ) পাব নোৱাৰি। এনে ভগ্নাংশৰ হৰ শূন্য (০) হ'ব নোৱাৰিব।

অপৰিমেয় সংখ্যাৰ দশমিক উপস্থাপন অন্তকাৰী অথবা পুনৰাবৃত্তিশীল নহয়। অর্থাৎ, পৰিমেয় বুলি ধৰিব নোৱাৰা সকলো সংখ্যাকে অপৰিমেয় বুলি গণ্য কৰা হয়। অপৰিমেয় সংখ্যাক দশমিকত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি কিন্তু ভগ্নাংশত প্ৰকাশ কৰিব পৰা নাযায়। এটা অপৰিমেয় সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত দশমিক বিন্দুৰ সোঁফালে অসীম সংখক অপুনৰাবৃত্তিশীল ভিন ভিন সংখ্যা পোৱা যাব।

Pi (π) হ'ল এটা বিখ্যাত অপৰিমেয় সংখ্যা।

Pi-ৰ (π) মান হ'ল 3. 14159265358979323846264338327 95 (ই হ'ল এটা অনা-অন্তকাৰী অ-পুনৰাবৃত্তিশীল দশমিক সংখ্যা)

১.৮ বাস্তৱ সংখ্যা (REAL NUMBERS)

যিবোৰ সংখ্যাৰ বর্গ অ-ঋণাত্মক (non-negative) তেনেবোৰ সংখ্যাক বাস্তৱ সংখ্যা বোলে। সকলোবোৰ পৰিমেয় আৰু অপৰিমেয় সংখ্যাই একেলগে বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি গঠন কৰে। প্ৰতিটো বাস্তৱ সংখ্যাই পৰিমেয় অথবা অপৰিমেয়।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১ঃ তলৰ ভগ্নাংশকেইটা দশমিক অংকলৈ সলনি কৰক—

(a) 1/4 (b) 2/3 (c) 4/5 (d) 3/7

প্ৰশ্ন নং ২ঃ তলৰ সংখ্যাকেইটা পৰিমেয় নে অপৰিমেয়

কওক— (a) $\sqrt{100}$ (b) $\frac{1}{\pi}$ (c) $\frac{4}{5}$ (d) 0.75 (e) $\frac{13}{99}$

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ 2 আৰু 7-ৰ মাজত কিমানটা পৰিমেয় আৰু অপৰিমেয় সংখ্যা আছে।

১.৯ কাল্পনিক সংখ্যা (IMAGINARY NUMBERS)

কাল্পনিক সংখ্যা হ'ল এনে এটা সংখ্যা যিটো সংখ্যাৰ বর্গমূল উলিয়ালে শূন্যতকৈ সৰু বাস্তৱ সংখ্যা এটা পোৱা যায়। প্ৰকৃত বাস্তৱ সংখ্যা এটাৰ বর্গমূল কেতিয়াও ঋণাত্মক নহয়। কিন্তু কাল্পনিক সংখ্যাৰ বর্গমূল সদায় ঋণাত্মক হয়।

কাল্পনিক সংখ্যা বুজাবলৈ i চলক (variable) ব্যৱহাৰ কৰা হয়। কাল্পনিক সংখ্যাই সদায় bi ৰূপ গঠন কৰে। ইয়াত b হ'ল অ-শূন্য (non-zero) বাস্তৱ সংখ্যা আৰু i হ'ল কাল্পনিক সংখ্যাৰ একক। কাল্পনিক সংখ্যাক $i = \sqrt{-1}$ ৰূপে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হৈছে।

১.১০ জটিল সংখ্যা (COMPLEX NUMBER)

যদি x+iy-ৰ ক্ষেত্রত x আৰু y দুটা বাস্তৱ সংখ্যা আৰু i = $\sqrt{-1}$ হয়, তেন্তে এই সংখ্যাটোক জটিল সংখ্যা বোলে। জটিল সংখ্যা বুজাবলৈ Z প্রতীক ব্যৱহাৰ কৰা হয়। অর্থাৎ, Z=x+iy হ'ল এটা যৌগিক/জটিল সংখ্যা।

x-ক সংখ্যাটোৰবাস্তৱ অংশ বোলা হয়। ইয়াৰ প্রতীক হ'ল Re(z)। অর্থাৎ, Re(z)= x

একেদৰে, y-ক সংখ্যাটোৰ কাল্পনিক অংশ বোলা হয়। ইয়াৰ প্রতীক হ'ল Im (z)। অর্থাৎ, Im(z) = y.

যদি, x = 0, তেন্তে z = 0 + iy, তেন্তে ই এটা বিশুদ্ধ (অথবা পূর্ণ) কাল্পনিক সংখ্যা

যদি y = 0, তেন্তে z = x + i.0 তেন্তে ই এটা পূর্ণ বাস্তৱ সংখ্যা।

১.১১ মৌলিক সংখ্যা (PRIME NUMBER)

1-ৰ বাহিৰে আন সকলোবোৰ সংখ্যাক, যিবোৰৰ উৎপাদক 1 আৰু সেই সংখ্যাটোৱেই হয় মৌলিক সংখ্যা বোলে। যেনে, 2, 3, 5, 7, 11 ইত্যাদি।

টোকা ঃ (ক) 1 মৌলিক সংখ্যা নহয়।

(খ) 2 হ'ল সবাতোকৈ সৰু মৌলিক সংখ্যা।

১.১২ ধ্রুৱকৰ ধাৰণা আৰু ইয়াৰ বিভিন্ন প্রকাৰ (CONCEPT OF CONSTANTS AND ITS DIFFERENT TYPES)

যিকোনো গাণিতিক হিচাপ-নিকাচত কোনো এটা নির্দিষ্ট সংখ্যাৰ উপস্থিতি বুজাবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা প্রতীককে ধ্রুৱক(constant) বোলে। কোনো এক গাণিতিক কার্য সমষ্টিত ধ্রুৱকৰ মান আৰম্ভণিৰ পৰা শেষলৈ সুস্থিৰ হৈ থাকে। ধ্রুৱক সূচাবলৈ a, b, c আদি আখৰ/চিহ্ন ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

উদাহৰণ ঃ 7, 13 , 1/12, -6 , π , e, m , c, d ইত্যাদিক ধ্রুৱক বোলা হয়। এই সংখ্যাবোৰৰ মান কোনো এক গাণিত্যিক কার্য সমষ্টিত সকলো সময়তে অপৰিৱর্তনীয় হৈ ৰয়।

ধ্রুৱকৰ প্রকাৰ (Types of Constants)

ধ্রুৱক মূলতঃ দুই প্রকাৰৰ

(ক) পৰম ধ্রুৱক (Absolute constant) ঃ কোনো এক গাণিতিক কার্য সমষ্টিত আদিৰ পৰা অন্তলৈকে একেটা মানতে সুস্থিৰ হৈ থকা ধ্রুৱকক পৰম/নিৰপেক্ষ ধ্রুৱক বোলে। কোনো কাৰণতে পৰম/নিৰপেক্ষ ধ্রুৱকৰ মান সলনি নহয়। সকলো সাংখ্যিক চিহ্নই পৰম/নিৰপেক্ষ ধ্রুৱক। যেনে— 3, 6, 7/16, $\sqrt{3}$, π ইত্যাদি।

(খ) **যাদৃচ্ছিক ধ্ৰুৱক** (Arbitrary constant) ঃ যিবোৰ ধ্ৰুৱকৰ মান কোনো এক নির্দিষ্ট গাণিতিক কার্য-কলাপৰ সময়ত একে থাকে। কিন্তু প্রসংগ সলনি হোৱাৰ লগে লগে সেই মান সলনি হয়, তেনে ধ্ৰুৱকক যাদৃচ্ছিক ধ্ৰুৱক বোলে

উদাহৰণ ঃ দুটা জ্যামিতীয় সমন্বয় সাধন কৰাৰ সমীকৰণ যদি $y = mx + c$ হয়, তেন্তে আমি বুজি পাওঁ যে ইয়াৰ দ্বাৰা সৰল ৰেখা এডালৰ কথা কোৱা হৈছে। ইয়াত m আৰু c হ'ল ধ্ৰুৱক। কিন্তু ভিন ভিন সৰল ৰেখাৰ ক্ষেত্রত m আৰু c-ৰ মান ভিন ভিন হ'ব। সেয়েহে আমি ক'ব পাৰোঁ যে m আৰু c হ'ল যাদৃচ্ছিক ধ্ৰুৱক।

১.১৩ চলকৰ ধাৰণা আৰু ইয়াৰ বিভিন্ন প্রকাৰ (CONCEPT OF VARIABLES AND ITS DIFERENT TYPES)

চলক হ'ল এনে এটা চিহ্ন যিটোৱে কোনো এক প্রদত্ত মান সমষ্টিৰ যিকোনো মান সূচাব পাৰে। উচ্চতা, ওজন, সময়, তাপমান, লাভ, বিক্রীৰ পৰিমাণ আদি যিকোনো পৰিমাণসূচক প্রতীকেই হ'ল চলকৰ উদাহৰণ। সাধাৰণতে চলক বুজাবলৈ x, y, z, u, v, w আদি চিহ্ন ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

চলকৰ প্রকাৰ *(Types of Variable)*

চলক প্রধানতঃ দুই প্রকাৰৰ

(ক) **স্বতন্ত্র চলক** (Independent Variable) ঃ যি চলকে যিকোনো যাদৃচ্ছিক মান উপস্থাপন কৰিব পাৰে তেনে চলকক স্বতন্ত্র চলক বোলে।

(খ) **নির্ভৰশীল চলক** (Dependent Variable) ঃ যি চলকৰ মান কোনো স্বতন্ত্র চলকৰ ওপৰত নির্ভৰশীল তেনে চলকক নির্ভৰশীল চলক বোলে।

উদাহৰণ ঃ

(i) $y = x^2$ যদি x=2, তেন্তে y=4, অর্থাৎ y ৰ মান x-ৰ ওপৰত নির্ভৰশীল। ইয়াত y নির্ভৰশীল আৰু x স্বতন্ত্র চলক।

(ii) এটা বৃত্তৰ A হ'ল কালি আৰু r হ'ল ব্যাসার্ধ। এতিয়া $A = \pi r^2$, ইয়াত A r-ৰ ওপৰত নির্ভৰশীল। অর্থাৎ, বৃত্তৰ কালি বৃত্তৰ ব্যাসার্ধৰ ওপৰত নির্ভৰশীল। গতিকে ইয়াত A নির্ভৰশীল আৰু r স্বতন্ত্র চলক।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৪ঃ সবাতোকৈ সৰু মৌলিক সংখ্যাটো কি?

প্রশ্ন নং ৫ঃ i^{65} -ৰ মান নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ উদাহৰণৰ সৈতে ধ্ৰুৱকৰ সংজ্ঞা লিখক।

.....

.....

প্রশ্ন নং ৭ঃ উদাহৰণৰ সৈতে চলকৰ সংজ্ঞা লিখক।

.....

১.১৪ সম্বন্ধৰ ধাৰণা (CONCEPT OF RELATION)

তলৰ বাক্যবোৰলৈ মন কৰক।

(1) 10 অতকৈ 11 ডাঙৰ।

(2) 7 এৰে 35 বিভাজ্য।

(3) ভাৰতবৰ্ষৰ ৰাজধানী নতুন দিল্লী।



সংহতি তত্ত্ব সম্পর্কে দ্বিতীয় অধ্যায়ত সবিশেষ আলোচনা কৰা হৈছে।

প্রতিটো বাক্যত এযোৰ 'বস্তুৰ' মাজত এটা সম্বন্ধ আছে।

সংহতি-তত্ত্বত সম্বন্ধই কি বুজায়, সেয়া এতিয়া চোৱা যাওক।

সংজ্ঞা ধৰা হ'ল A আৰু B দুটা অৰিক্ত সংহতি। A x B ৰ যিকোনো উপসংহতিক A ৰ পৰা B লৈ এটা **সম্বন্ধ** (relation) বুলি কোৱা হয়।

যদি A=B, তেনেহ'লে A x A ৰ যিকোনো উপসংহতিক Aত এটা সম্বন্ধ বুলি কোৱা হয়।

যদি $R \subseteq A \times B$, আৰু $(a, b) \in R$; $a \in A$, $b \in B$, তেনেহ'লে ইয়াক aRbৰেও বুজোৱা হয় আৰু ইয়াক এনেদৰে পঢ়া হয় ঃ b ৰ লগত a ৰ R সম্বন্ধ আছে।

টোকা ঃ (1) R অৰ ক্রমিত যোৰবোৰৰ প্রথম উপাদানৰ সংহতিটোক **আদিক্ষেত্র** (domain) আৰু দ্বিতীয় উপাদানৰ সংহতিটোক পৰিসৰ (range) বুলি কোৱা হয়।

(2) যদি A, B সসীম সংহতি আৰু n(A)=x, n(B)=y; তেনেহ'লে n(AxB)=xy. গতিকে AxBৰ উপসংহতিৰ সংখ্যা 2^{xy}. গতিকে Aৰ পৰা B লৈ সম্বন্ধৰ সংখ্যা 2^{xy}.

উদাহৰণ 1.1 ঃ ধৰা হ'ল A ={1, 2, 3}, B={8, 9}

$\therefore$ A x B ={(1, 8), (1, 9), (2, 8), (2, 9), (3, 8), (3, 9)}

ধৰা হ'ল R = {(1, 8), (2, 9), (3, 9)}

স্পষ্টত ঃ $R \subseteq$ AxB

$\therefore$ R হ'ল Aৰ পৰা Bলৈ এটা সম্বন্ধ।

আকৌ 1R8, 2R9, 3R9

R অৰ আদিক্ষেত্র = {1, 2, 3}

R অৰ পৰিসৰ = {8, 9}

উদাহৰণ 1.2 ঃ ধৰা হ'ল X অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল R = {(x, y) : x, y $\in$ X আৰু x+y অযুগ্ম}

আমি জানো যে দুটা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগফল এটা যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।

$\therefore$ যদি x, y অযুগ্ম হয়, তেনেহ'লে x+y অযুগ্ম হ'ব নোৱাৰে।

$\therefore R = \phi \subseteq X \times X$

এই ক্ষেত্ৰত R অক X অত **ৰিক্ত সম্বন্ধ** (empty relation) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ 1.3 ঃ ধৰা হ'ল E যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল R = {(x, y) : x, y $\in$ E আৰু x+y যুগ্ম}

আমি জানো যে দুটা যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগফল এটা যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।

$\therefore$ যদি x, y যুগ্ম হয়, তেনেহ'লে x+y সদায় যুগ্ম।

$\therefore R = E \times E \in E \times E$

এই ক্ষেত্ৰত R অক Eঅত **সৰ্বজনীন সম্বন্ধ** (Universal relation) বুলি কোৱা হয়।

১.১৪.১ একক সম্বন্ধ (Identity Relation)

ধৰা হ'ল A অৰিক্ত সংহতি।

$I_A = \{(a, a) : a \in A\} \subseteq A \times A$

I_A ক Aত **একক সম্বন্ধ** (identity relation) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ 1.4 ঃ ধৰা হ'ল A = {1, 2, 3, 4}

তেনেহ'লে I_A ={(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)} $\subseteq$ A x A.

স্পষ্টত ঃ A ত I_A একক সম্বন্ধ।

১.১৪.২ বিপৰীত সম্বন্ধ (Inverse Relation)

A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি। Aৰ পৰা B লৈ R এটা সম্বন্ধ। অৰ্থাৎ $R \subseteq A \times B$।

R অৰ বিপৰীত সম্বন্ধক (inverse relation) R^{-1}ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা হ'ল এনেধৰণৰ–

$R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\} \subseteq B \times A$

স্পষ্টত ঃ R^{-1} অৰ আদিক্ষেত্ৰ = R অৰ পৰিসৰ

R^{-1} অৰ পৰিসৰ = R অৰ আদিক্ষেত্ৰ

উদাহৰণ 1.5 ঃ ধৰা হ'ল A = {1, 2, 3}

B = {5, 6}

R = {(1, 5), (2, 6), (3, 5)} $\subseteq$ A x B

R^{-1} = {(5, 1), (6, 2), (5, 3)} $\subseteq$ B x A.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৮ঃ ধৰা হ'ল A, B দুটা সসীম সংহতি আৰু n(A)=4, n(B)=3. A ৰ পৰা B লৈ কিমানটা সম্বন্ধ আছে?

প্রশ্ন নং ৯ঃ ধৰা হ'ল A ত সসীম সংহতি আৰু n(A) =5 ত কিমানটা সম্বন্ধ আছে?

১.১৫ ফলনৰ ধাৰণা (CONCEPT OF FUNCTION)

ধৰা হ'ল A আৰু B দুটা অৰিক্ত সংহতি আৰু $f \subseteq A \times B$ যাতে

(i) $(x, y) \in f$, $\forall x \in A$ আৰু যিকোনো $y \in B$

(ii) $(x, y) \in f$ আৰু $(x, y') \in f \Rightarrow y = y'$.

এই ক্ষেত্রত f অক A ৰ পৰা B লৈ **ফলন** বা **মানচিত্রণ** (function or mapping) বুলি কোৱা হয় আৰু ইয়াক $f : A \to B$ প্রতীকেৰে বুজোৱা হয়।

A ক f অৰ **আদিক্ষেত্র** (domain) আৰু B ক f অৰ **সহক্ষেত্র** (codomain) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ 1.6 ঃ ধৰা হ'ল A = {1, 2}, B = {7, 8, 9}

f = {(1, 8), 2, 7)} $\subseteq$ A x B.

A ৰ প্রতিটো মৌলই f অৰ ক্রমিতযোৰৰ প্রথম মৌল। তদুপৰি প্রতিটো ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌলৰ বিপৰীতে পৃথক দ্বিতীয় মৌল নাই।

∴A ৰ পৰা B লৈ f এটা ফলন।

উদাহৰণ 1.7 ঃ ধৰা হ'ল A = {1, 2}, B = {7, 8, 9}

g = {(1, 7), (1, 9)} $\subseteq$ A x B

g ত এনে ক্রমিত যোৰ নাই যাৰ প্রথম মৌল 2 অর্থাৎ A ৰ প্রতিটো মৌলই g ৰ ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌল নহয়। তদুপৰি ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌল 1 অৰ বিপৰীতে দুটা পৃথক দ্বিতীয় মৌল 7, 9 আছে।

∴সেয়ে, A ৰ পৰা B লৈ g ফলন নহয়।

উদাহৰণ 1.8 ঃ ধৰা হ'ল A = {1, 2, 3, 4}, B = {x, y, z, w}

অধোলিখিত সম্বন্ধবোৰ A ৰ পৰা B লৈ ফলন হয়নে?

(i) f_1 = {(1, x), (1, w), (2, x), (2, z), (4, w)}

(ii) f_2 = {(1, y), (2, z), (3, x), (4, w)}

সমাধান ঃ (i) নহয়। (1, x), (1, w) ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌল একে। কিন্তু দ্বিতীয় মৌল বেলেগ বেলেগ। তদুপৰি f_1 অত এনে ক্রমিত যোৰ নাই যাৰ প্রথম মৌল 3।

∴ f_1 ফলন নহয়।

(ii) হয়। A ৰ প্রতিটো মৌলই f_2 ৰ ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌল। তদুপৰি প্রতিটো ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌলৰ বিপৰীতে পৃথক দ্বিতীয় মৌল নাই।

আমি দেখিলোঁ যে

প্রত্যেক ফলনেই এটা সম্বন্ধ, কিন্তু প্রত্যেক সম্বন্ধই ফলন নহয়।

ফলনৰ এই ধাৰণাটোক এনেদৰেও সংজ্ঞাকৃত কৰিব পাৰি। যদি দুটা অৰিক্ত সংহতি A আৰু B ৰ মৌলবোৰৰ মাজত এনে এটা যোগাযোগ থাকে যে A ৰ প্রতিটো মৌলৰ সৈতে B ৰ এটা অদ্বিতীয় মৌল সংযুক্ত হয়, তেনেহ'লে যি নিয়মটোৰে এই সংযোগ স্থাপন কৰে, তাক A ৰ পৰা B লৈ এটা ফলন বোলা হয়। ইয়াক f, g ইত্যাদি আখৰেৰে বুজোৱা হয়। A, B সংহতি দুটা একে হ'ব পাৰে।

ধৰা হ'ল A সংহতিৰ পৰা B সংহতিলৈ f এটা ফলন অর্থাৎ $f : A \to B$ এটা ফলন। ফলন f এ Bৰ যিটো অদ্বিতীয় মৌল y ক Aৰ মৌল x অৰ লগত সংযোগ কৰে, তাক f -অৰ অধীনত x অৰ **প্রতিচ্ছায়া** (image) বোলা হয় আৰু x অক y ৰ **পূর্বচ্ছায়া** (pre-image) বোলা হয়। Bৰ যিবোৰ মৌল A ৰ মৌলবোৰৰ প্রতিচ্ছায়া, সেই সকলোবোৰ মৌল লৈ গঠিত সংহতিটোক **পৰিসৰ** (range) বোলে।

উদাহৰণ 1.9 ঃ IN স্বাভাৰিক সংখ্যাৰ সংহতি আৰু Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

$f : IN - Z, f(x) = (-1)^x; x \in IN$

স্পষ্টত ঃ f অৰ আদিক্ষেত্র = IN

f অৰ সহক্ষেত্র = Z

এতিয়া $f(1) = (-1)^1 = -1$, $f(2) = (-1)^2 = 1$, $f(3) = (-1)^3 = -1$ ইত্যাদি।

$\therefore$ f অৰ পৰিসৰ = {–1, 1}.

১.১৬ বিভিন্ন প্রকাৰৰ ফলন (DIFFERENT TYPES OF FUNCTION)

A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি আৰু $f : A \to B$ এটা ফলন।

1. যদি B ত অন্ততঃ এটা মৌল থাকে যিটো A ৰ কোনো মৌলৰ প্রতিচ্ছায়া নহয়, তেনেহ'লে f ফলনটোক **অনাচ্ছাদক ফলন** (into function) বুলি কোৱা হয়।
2. যদি B ৰ প্রতিটো মৌল A ৰ অন্ততঃ এটা মৌলৰ প্রতিচ্ছায়া হয়, তেনেহ'লে f **আচ্ছাদক ফলন** (onto function or surjective function or surjection) বুলি কোৱা হয়।

টোকা ঃ আচ্ছাদক ফলনৰ ক্ষেত্রত, f অৰ পৰিসৰ = f অৰ আদিক্ষেত্র।

1. A ৰ ভিন্ন ভিন্ন মৌলৰ প্রতিচ্ছায়াত B ত ভিন্ন ভিন্ন হ'লে, f ফলনটোক **একৈকী ফলন** (one-one fuction or injective function or injection) বোলে।
2. যদি A ৰ দুটা (বা ততোধিক) মৌলৰ B ত একেটা প্রতিচ্ছায়া থাকে, তেনেহ'লে f অক **বহু-এক** ফলন (many-one function) বোলে।

১.১৬.১ বহুপদ (Polynomial Function)

ফলনৰ কল্প $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ ক মত n এটা অঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা আৰু $a_0, a_1, a_2, ... a_n$ বোৰ বাস্তৱ সংখ্যা n ঘাতৰ বহুপদ ফলন (polynomial function) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ স্বৰূপে, $f(x) = x^4 – 5x^3 + 2x^2 + 6x + 7$ এটা বহুপদ ফলন, কিন্তু $f(x) = 5x + 9\sqrt{x} + 7$ এটা বহুপদ ফলন নহয়।

টোকা ঃ বহুপদ ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ হয় IR আৰু পৰিসৰও IR হয়।

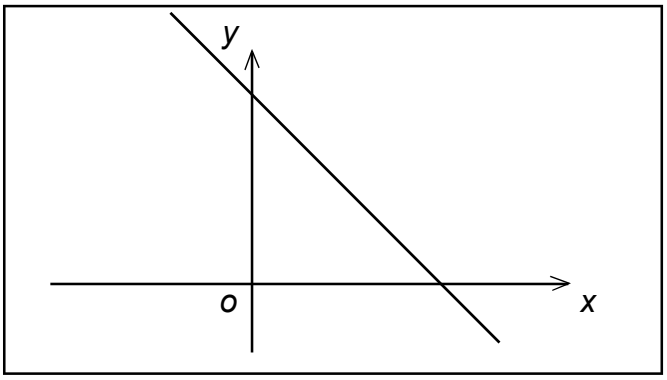
১.১৬.২ ৰৈখিক ফলন (Linear Function)

যদি $n=1$, তেন্তে বহুপদ ফলন (cubic function)ৰ ঘাত 1 হয় আৰু ফলনটোক ৰৈখিক ফঢ়ন বুলি কোৱা হয়। $n=1$ৰ বাবে ফলনটো লিখাৰ হয় $f(x)=a+bx$ য'ত a আৰু b ধ্ৰুৱক।

উদাহৰণস্বৰূপে, $f(x) = 3x + 5$ এটা ৰৈখিক ফলন।

ৰৈখিক ফলনৰ লেখচিত্ৰ ঃ

চিত্ৰ ১.১ঃ ৰৈখিক ফলনৰ লেখচিত্ৰ



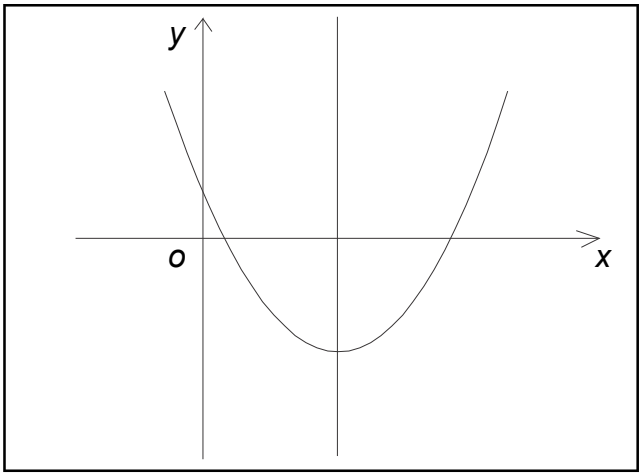
১.১৬.৩ দ্বিঘাত ফলন (Quadratic Function)

যদি $n=2$, তেন্তে বহুপদ ফলনৰ ঘাত 2 হয় আৰু ফলনটোক দ্বিঘাত ফলন বুলি কোৱা হয়।

দ্বিঘাত ফলনৰ ৰূপটো হ'ব $f(x) = ax^2 + b x +c$, য'ত a, b, c বোৰ ধ্ৰুৱক।

দ্বিঘাত ফলনটোৰ $f(x) = ax^2 + b x +c$ লেখচিত্ৰটোৱে $a>0$ বা $a<0$ অনুসৰি ঊৰ্ধমুখী বা অৰ্ধমুখী অধিবৃত্ত বুজায়।

চিত্র ১.২ঃ দ্বিঘাত ফলনৰ লেখচিত্র

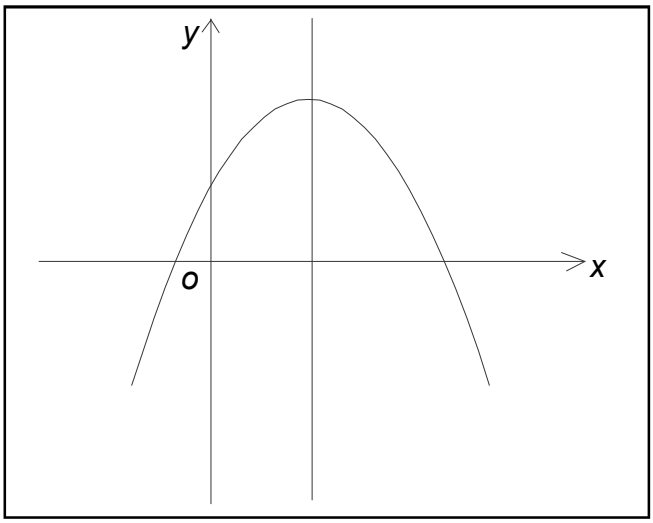


১.১৬.৪ ঘনক ফলন (Cubic Function)

যদি $n = 3$, তেন্তে বহুপদ ফলনটোৰ ঘাত 3 হয় আৰু ফলনটোক ঘনক ফলন (quadratic function) বুলি কোৱা হয়।

ঘনক ফলনটোৰ ৰূপ হয় $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ য'ত a,b,c,d বোৰ ধ্ৰুৱক।

চিত্র ১.৩ঃ ঘনক ফলনৰ লেখচিত্র



১.১৬.৫ ঘাত ফলন (Power Function)

$f(x) = ax^n$ ফলনটোক ঘাত ফলন (power function) বুলি কোৱা হয় য'ত n এটা অঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা আৰু a এটা ধ্ৰুৱক।

১.১৬.৬ পৰিমেয় ফলন (Rational Function)

$y=\frac{f(x)}{g(x)}$ আকাৰৰ ফলনক পৰিমেয় ফলন (rational function) বুলি কোৱা হয়, য'ত f(x) আৰু g(x) বহুপদ ফলন আৰু $g(x) \neq 0$.

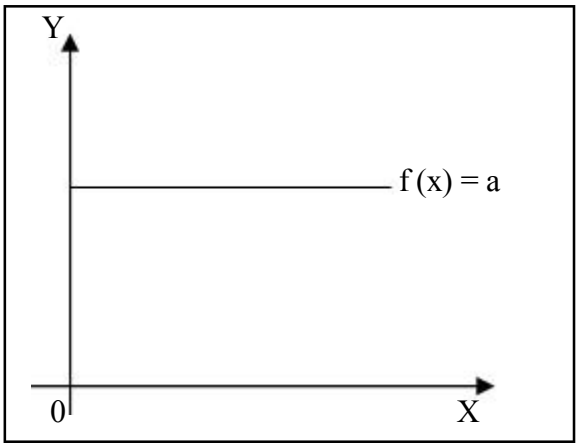
উদাহৰণস্বৰূপে, $\frac{x+2}{x^2-5x+6}$ এটা পৰিমেয় ফলন। ইয়াত $x \neq 2, x \neq 3$, গতিকে পৰিমেয় ফলনটোৰ $\frac{x+2}{x^2-5x+6}$ ৰ আদিক্ষেত্ৰ হ'ব IR – {2, 3}.

১.১৬.৭ ধ্ৰুৱক ফলন (Constant Function)

f(x) = k আকাৰৰ ফলনটোক ধ্ৰুৱক ফলন (constant function) বুলি কোৱা হয়। য'ত k এটা ধ্ৰুৱক।

টোকা ঃ ধ্ৰুৱক ফলনৰ পৰিসৰ এটা এক মৌল সংহতি (singleton set). ধ্ৰুৱক ফলনৰ লেখ হ'ল x-অক্ষৰ সমান্তৰাল ৰেখা।

চিত্ৰ ১.৪ঃ ধ্ৰুৱক ফলনৰ লেখচিত্ৰ

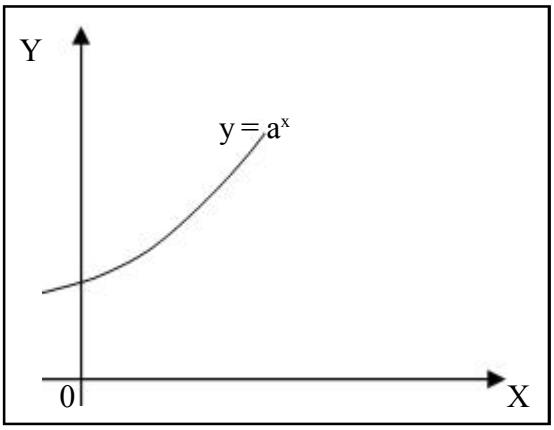


১.১৬.৮ সূচকীয় ফলন (Exponential Function)

ধৰা হ'ল a এটা ধনাত্মক সংখ্যা (এক নহয়), তেন্তে $f(x) = a^x$ ফলনটোক সূচকীয় ফলন (exponential function) বোলা হয়।

সূচকীয় ফলনৰ লেখচিত্ৰ ঃ

চিত্র ১.৫ঃ সূচকীয় ফলনৰ লেখচিত্র

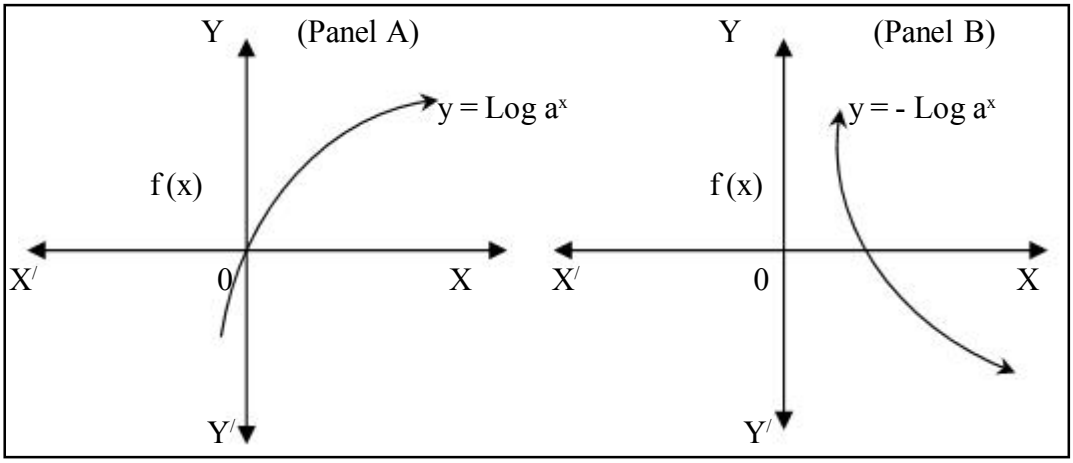


১.১৬.৯ ঘাতাংকীয় ফলন (Logarithmic Function)

ধৰা হ'ল x এটা ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা (এক নহয়) তেন্তে $f(x) = \log_e x$ ফলনটোক ঘাতাংকীয় ফলন (logarithmic function) বুলি কোৱা হয়। ঘাতাংকীয় ফলন আৰু সূচকীয় ফলন পৰস্পৰৰ বিপৰীত ফলন হয়।

বি.দ্ৰ. $\log_e x$ ক lnx হিচাপেও লিখা হয়। $y = \log_a x$ আৰু $y = -\log_a x$ ঘাতাংকীয় ফলনৰ চিত্র। চিত্র নং ১.৬ ৰ ক্রমে (A) আৰু (b) অংশত দেখুওৱা হৈছে।

চিত্র ১.৬ঃ ঘাতাংকীয় ফলনৰ লেখচিত্র





১.১৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- শূন্যক (০) সামৰি আটাইবোৰ স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সমষ্টিকে পূর্ণ সংখ্যা বোলে।
- ধনাত্মক স্বাভাৱিক সংখ্যা, শূন্য আৰু ঋণাত্মক স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সমষ্টিটোক সমাকল বোলে।

- পৰিমেয় সংখ্যা হ'ল এনে এটা সংখ্যা যিটোক p/q ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। ইয়াত p আৰু q উভয়েই সমাকল আৰু $q \neq 0$.
- কোনো পৰিমেয় সংখ্যা এটাৰ দশমিক উপস্থাপন অন্তকাৰী অথবা সংখ্যা পুনৰাবৃত্তিশীল ৰূপৰ হ'ব পাৰে।
- যিকোনো দুটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ মাজত অসীম সংখ্যক পৰিমেয় সংখ্যা থাকে।
- অপৰিমেয় সংখ্যাবোৰ দশমিক ৰূপত প্ৰকাশ কৰিলে কোনো অন্তকাৰী অথবা সংখ্যা পুনৰাবৃত্তিশীল ৰূপ পোৱা নাযায়। কেলকুলেটৰৰ সহায় ল'লে অথবা বিভিন্ন গাণিতিক সমস্যাৰ সমাধানৰ সময়ত পৰিমেয় সংখ্যাবোৰৰ যি মান পোৱা যায় সেয়া অপৰিমেয় সংখ্যাবোৰৰ নিকটতম মানহে, সমান মান নহয়।
- পৰিমেয় সংখ্যা প্ৰণালীটোৰ বাস্তৱ সংখ্যা প্ৰণালীটোৰ সৈতে মিল আছে।
- পৰিমেয় আৰু অপৰিমেয় সংখ্যাবোৰেৰে বাস্তৱ সংখ্যা প্ৰণালীটো গঠিত।
- 1-ৰ বাহিৰে আন সকলোবোৰ সংখ্যাক, যিবোৰৰ উৎপাদক 1 আৰু সেই সংখ্যাটোৱেই হয়, মৌলিক সংখ্যা বোলে।
- কোনো গাণিতিক কাৰ্যত উপস্থিত কোনো নিৰ্দিষ্ট সংখ্যা সূচাবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা চিহ্নবোৰক ধ্ৰুৱক বোলে।
- কোনো প্ৰদত্ত মান সমষ্টি এটাৰ যিকোনো মান সূচাব পৰা চিহ্নবোৰক চলক বোলে।
- A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি হ'লে, A x B ৰ এটা উপ সংহতিক A ৰ পৰা B লৈ এটা সম্বন্ধ বুলি কোৱা হয়।
- যদি A, B দুটা সসীম সংহতি হয় আৰু n(A) = x, n(B) = y, A ৰ পৰা B লৈ সম্বন্ধৰ সংখ্যা 2^{xy}.
- A এটা অৰিক্ত সংহতি হ'লে, $I_A = \{(a, a) : a \in A\}$ ক A ত একক ফলন বুলি কোৱা হয়।
- অৰিক্ত সংহতি Aত এটা সম্বন্ধ R অক সমতুল্যতা সম্বন্ধ বুলি কোৱা হয় যদি ই প্ৰতিফলনীয়, সমমিত আৰু সংক্ৰামক হয়।
- এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধৰ বিপৰীতো এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।
- দুটা সমতুল্যতা সম্বন্ধৰ ছেদনো এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।
- যদি দুটা অৰিক্ত সংহতি A আৰু B ৰ মৌলবোৰৰ মাজত এনে এটা যোগাযোগ থাকে যে A ৰ প্ৰতিটো মৌলৰ সৈতে B ৰ এটা অদ্বিতীয় মৌল সংযুক্ত হয়, তেনেহ'লে যি নিয়মটোৱে এই সংযোগ স্থাপন কৰে, তাক A ৰ পৰা B লৈ এটা ফলন বোলা হয়।
- প্ৰত্যেক ফলনেই এটা সম্বন্ধ, কিন্তু প্ৰত্যেক সম্বন্ধই ফলন নহয়।
- আদিক্ষেত্ৰৰ ভিন্ন ভিন্ন মৌলৰ প্ৰতিচ্ছায়াও সহক্ষেত্ৰত ভিন্ন ভিন্ন হ'লে ফলনটো একৈকী।
- যদি সহ ক্ষেত্ৰৰ প্ৰতিটো মৌল আদি ক্ষেত্ৰৰ অন্ততঃ এটা মৌলৰ প্ৰতিচ্ছায়া হয়, তেনেহ'লে ফলনটো আচ্ছাদক



১.১৮ অধিক জানিবলৈ

1) Agarwal, D.K. (). Business Mathematics, New Delhi: Vrindra Publication (p) Ltd.
2) Baruah, S. (2011). Basic Mathematics and Its Application in Economics, New Delhi: Trinity Press Pvt. Ltd.
3) Bose, D. (2004). *Mathematical Economics;* New Delhi: Himalaya Publishing House.
4) Garg,S.( ) *Introductory Micro Economics*; Dhanpat Rai Publications.
5) Kandoi, Balwant (2011). *Mathematics for Business and Economics with Application;* New Delhi: Himalaya Publishing House.



১.১৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (ক) 1/4=0.25 (খ) 2/3=0.6666.. (গ) 4/5=0.8 (ঘ) 3/7=0.4286..

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (ক) পৰিমেয় (খ) অপৰিমেয় (গ) অপৰিমেয় (ঘ) পৰিমেয় (ঙ) অপৰিমেয়

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ অসীম সংখ্যক।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ 2

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $i^{65} = i^{4\times16+1} = i$

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৭ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।



১.২০ আৰ্হি প্রশ্ন

প্রশ্ন নং ১ঃ 6 আৰু 7-ৰ মাজত থকা যিকোনো এটা অপৰিমেয় সংখ্যা লিখক।

প্রশ্ন নং ২ঃ তলৰ সংখ্যাকেইটা অপৰিমেয় বুলি প্রমাণ কৰক—

$$\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$$

প্রশ্ন নং৩ঃ 1/5 আৰু 3/5-ৰ মাজৰ 3 টা পৰিমেয় সংখ্যা বাছি উলিয়াওক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ যিকোনো 5 টা পৰিমেয় আৰু 5 টা অপৰিমেয় সংখ্যা দশমিকত প্ৰকাশ কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা নহয় বুলি প্ৰমাণ কৰক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ $\frac{7}{9}$ আৰু $\frac{8}{11}$-ৰ ভিতৰত ডাঙৰ সংখ্যা কোনটো?

প্রশ্ন নং ৭ঃ 19.9 আৰু 20-ৰ মাজত থকা এটা পৰিমেয় সংখ্যা বাছি উলিয়াওক।

প্রশ্ন নং ৮ঃ ধৰা হ'ল, A = {1, 2, 3}, B = {3, 4, 5}.

A ৰ পৰা B লৈ কিমানটা সম্বন্ধ আছে? A ৰ পৰা B লৈ যিকোনো চাৰিটা সম্বন্ধ লিখক।

*** ***** ***

অধ্যায় ২ ঃ সংহতি (SETS)

অধ্যায় গাঁথনি

২.১ উদ্দেশ্য

২.২ পৰিচয়

২.৩ সংহতি আৰু সংহতিৰ উপস্থাপন

২.৪ ৰিক্ত সংহতি

২.৫ সসীম আৰু অসীম সংহতি

২.৬ সমান সংহতি

২.৭ উপ-সংহতি, অধি-সংহতি, প্ৰকৃত উপ-সংহতি

২.৮ ঘাত সংহতি

২.৯ নিত্য সংহতি

২.১০ ভেন চিত্ৰ

২.১১ সংহতি সংক্ৰিয়া

২.১১.১ সংহতিৰ মিলন

২.১১.২ সংহতিৰ ছেদন

২.১১.৩ সংহতিৰ অন্তৰ

২.১১.৪ পূৰক সংহতি

২.১২ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

২.১৩ অধিক জানিবলৈ

২.১৪ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

২.১৫ আৰ্হি প্ৰশ্ন

২.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- সংহতি আৰু সংহতিৰ উপস্থাপন বৰ্ণনা কৰিব পাৰিব
- ৰিক্ত সংহতি, সসীম আৰু অসীম সংহতি চিনাক্ত কৰিব পাৰিব
- উপ-সংহতি, অধি-সংহতি, ঘাত সংহতি আৰু নিত্য সংহতিৰ সংজ্ঞা দিব পাৰিব
- মিলন, ছেদন, অন্তৰ আৰু পূৰক সংহতি সংক্ৰিয়াকেই ব্যাখ্যা কৰিব পাৰিব।

২.২ পৰিচয়

বৰ্তমন সময়ৰ গণিতত বহুলভাৱে ব্যৱহৃত ধাৰণা এটা হ'ল সংহতি। ইয়াক আধুনিক

গণিতৰ ভাষা বুলি গণ্য কৰা হয়। অফলিত/শুদ্ধ গণিত (Pure Mathematics) নাইবা অবাস্তৱ গণিত (Abstract Mathematics)ৰ সমগ্ৰ গাঁথনিটোৱেই সংহৰি ধাৰণাটোৰওপৰত ভিত্তি কৰি বিকশিত হৈছে। জার্মান গণিতজ্ঞ জ'র্জ কেণ্ট'ৰ (Georg Cantor 1845-1918) -এ সংহতিৰ সূত্ৰ বিকশিত কৰিছিল। পৰৱর্তী সময়ত এই সূত্রটোৰ আলমত আধুনিক গণিতৰ আন বহুো শাখাৰ বিকাশ ঘটিছিল। এই অধ্যায়টিত সংহতিৰ প্রাথমিক ধাৰণা, সংহতি সংক্রিয়া আৰু সংহতিৰ ব্যৱহাৰক উপযোগিতা বিষয়ক কিছুমান ধাৰণাৰ সৈতে আপোনালোকক পৰিচয় কৰাই দিয়া হ'ব।

২.৩ সংহতি আৰু সংহতিৰ উপস্থাপন (SETS AND THEIR REPRESENTATION)

সু-সংজ্ঞাৱদ্ধ বস্তুৰ সংগ্রহ/সমষ্টিকে সংহতি বোলে। বস্তুৰ এক নির্দিষ্ট সংগ্রহ অথবা সমষ্টি আৰু সেই সংগ্রহ অথবা সমষ্টিৰ অংশ কোনো এটা বস্তু সেই নির্দিষ্ট সংগ্রহ/সমষ্টিটোৰ সদস্য হয়নে নহয় সেয়া পৰীক্ষা কৰি চোৱাটো যদি সম্ভৱ, তেন্তে তেনে সংহতিক 'সু-সংজ্ঞাৱদ্ধ' বুলি কোৱা হয়।

সংহতি এটাত অন্তর্ভুক্ত কৰা বস্তুবোৰ কোনো নির্দিষ্ট ধৰণৰ হ'বও পাৰে নহ'বও পাৰে— বস্তুবোৰৰ কোনো উমৈহতীয়া গুণ/বৈশিষ্ট্য নাথাকিবও পাৰে। তলৰ সংগ্রহ/সমষ্টিকেইটালৈ মন কৰক ঃ

i) 15 তকৈ সৰু মৌলিক সংখ্যাৰ সংগ্রহ। যেনে— 2, 3, 5, 7, 11, 13
ii) 0, a, শচীন তেণ্ডুলকাৰ, ব্রহ্মপুত্র
iii) ভাৰতৰ ধুনীয়া চহৰবোৰৰ সমষ্টি
iv) মহান গণিতজ্ঞসকলৰ সমষ্টি

(i) আৰু (ii)ৰ সদস্য উপাদানবোৰ সু-সংজ্ঞাৱদ্ধ বুলি কোৱা হয়। কাৰণ, আমি পৰীক্ষা কৰি চাই ক'ব পাৰো যে 7 সংখ্যাটো (i)ৰ সদস্য হ'ব পাৰে, কিন্তু 20 সংখ্যাটো (i)ৰ সদস্য হ'ব নোৱাৰে। একেদৰে, 'ক' হ'ল (ii) নম্বৰ সংহতিৰ এক সদস্য, কিন্তু এম-এছ ধোনী (ii) নম্বৰ সংহতিৰ সদস্য নহয়। অর্থাৎ, (i) আৰু (ii) নম্বৰ সংগ্রহ দুটা সংহতি হ'ব। কিন্তু (iii) আৰু (iv) সংহতি নহয়। কাৰণ এই সংগ্রহ দুটাত থকা উপাদানবোৰৰ সু-সংজ্ঞাৱদ্ধ নহয়।

সংহতি গঠন কৰা বস্তুবোৰক সংহতিটোৰ উপাদান (elements) অথবা সদস্য (members) বোলে। সংহতি বুজাবলৈ সাধাৰণতে বৰফলাৰ আখৰ ব্যৱহাৰ কৰা হয়। যেনে— A, B, C, ...; X, Y, Z ইত্যাদি। সংহতিৰ উপাদানবোৰ সৰুফলাৰ আখৰেৰে বুজোৱা হয়। যেনে— a, b, c, ...; x, y, z, ..., ইত্যাদি।

যদি 'a' সংহতি A ৰ এটা উপাদান তেন্তে আমি প্রতীক ব্যৱহাৰ কৰি ইয়াক $a \in A$ বুলি লিখিব পাৰিম। ইয়াক 'a সংহতি Aৰ অংশ' ('a belongs to the set A') বুলি অথবা চমুকৈ 'a'

Aৰ অংশ' ('a belongs to A') বুলি পঢ়া হয়। কিন্তু, যদি 'a' সংহতি Aৰ উপাদান নহয় তেন্তে ইয়াক $a \notin A$ বুলি লিখা হয় আৰু 'a সংহতি A'ৰ অংশ নহয়' (a does not belong to A) বুলি পঢ়া হয়।

উদাহৰণ 2.1 ঃ ধৰা হ'ল, A হ'ল 15 তকৈ সৰু মৌলিক সংখ্যাৰ এটা সংহতি।

তেন্তে, $2 \in A, 3 \in A, 5 \in A, 7 \in A, 11 \in A, 14 \in A$

$1 \notin A, 4 \notin A, 17 \notin A.$

সংহতিৰ উপস্থাপন ঃ সংহতিবোৰক দুটা পদ্ধতিত উপস্থাপন কৰা হয়।

১) তালিকা অথবা সাৰণী পদ্ধতি (Roster or tabular method)

২) সংহতি নির্মাণকাৰী অথবা দণ্ড পদ্ধতি (Set-builder or Rule method)

তালিকা পদ্ধতিত সংহতি এটাৰ উপাদানবোৰ যিকোনো ক্রমত লিখা হয়, ক'মা ব্যৱহাৰ কৰি উপাদানবোৰ পৃথক কৰা হয় আৰু বন্ধনীৰ ভিতৰত ৰখা হয়। যেনে—

A = {2, 3, 5, 7, 11, 13}

B = {0, a শচীন তেণ্ডুলকাৰ, ব্রহ্মপুত্র}

C = {1, 3, 5, 7, ...}

C হ'ল অযুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি। আমি আটাইকেইটা সংখ্যা লিখিব নোৱাৰো। সেয়েহে দুটামান সংখ্যা লিখাৰ পাছত বিন্দু দিয়া হয়। বিন্দুবোৰে তালিকাখন অসীমলৈ বিস্তৃত বুলি বুজায়।

দণ্ড পদ্ধতিত কোনো এটা সংহতিৰ উপাদানবোৰ উপস্থাপন কৰিবলৈ এটা x চলক ব্যৱহাৰ কৰা হয়। য'ত সংহতিটোৰ উপাদানবোৰে এটা নির্দিষ্ট বৈশিষ্ট্য পূৰণ কৰে, যেনে— P(x)। প্রতীক ৰূপত সংহতিটো {x : P(x)} অথবা {x | p(x)} বুলি লিখা হয়। উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 2.2 ঃ A = {x : x হ'ল এটা অযুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যা}

$B = \{x : x^2 - 3x + 2 = 0\}$ ইত্যাদি।

যদি আমি ওপৰৰ উদাহৰণ দুটা তালিকা পদ্ধতিত লিখোঁ, তেন্তে পাম,

A = {1, 3, 5, ...}

B = {1, 2}

সংহতি আৰু সংখ্যাৰ বাবে কেইটামান স্বীকৃত প্রতীক ঃ সংখ্যাৰ বিভিন্ন সংহতি উপস্থাপন কৰিবলৈ তলত দিয়া স্বীকৃত প্রতীকবোৰ ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}, স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি

Z = {..., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...}, অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি

$Q = \{x : x = p/q; p, q \in Z, q \neq 0\}$, পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি

R = {x : x হ'ল এটা বাস্তৱ সংখ্যা}, বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি

Z^+, Q^+, R^+ সংহতিয়ে ক্রমে ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি, ধনাত্মক পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি আৰু ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি উপস্থাপন কৰে। একেদৰে, Z^-, Q^-, R^- সংহতিয়ে



১) মনত ৰাখিব, '|' ৰ ':' প্রতীকটোৱে 'তেনে' (such that) বুজায়।

২) তালিকা পদ্ধতিৰে সংহতি লিখাৰ সময়ত কেৱল স্বতন্ত্র উপাদানবোৰহে লিখা হয়। যেনে— যদি A 'MATHEMATICS' শব্দটোৰ এটা সংহতি, তেন্তে আমি লিখিম, A = {A, E, C, M, H, T, S, I} ইয়াত, উপাদানবোৰ যিকোনো ক্রমতে লিখিব পাৰি।

ক্রমে ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি, ঋণাত্মক পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি আৰু ঋণাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি উপস্থাপন কৰে। Z^0, Q^0, R^0 সংহতিয়ে ক্রমে অ-শূন্য (non-zero) অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি। অ-শূন্য পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি আৰু অ-শূন্য বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি উপস্থাপন কৰে।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 2.3 ঃ ১) তলৰ কোনকেইটা সংহতি আৰু কোনকেইটা সংহতি নহয় পৰীক্ষা কৰি চাওক ঃ

i) ইংৰাজী বর্ণমালাৰ স্বৰবর্ণকেইটা

ii) 56 ৰ ভাজকবোৰ

iii) গুৱাহাটীৰ স্নাতক পাঠ্যক্রমৰ মেধাবী ছাত্র-ছাত্রীবোৰ

iv) অসমৰ নামজ্বলা ক্রিকেটাৰসকল

সমাধান ঃ

i) সংহতি, V = {a, e, i, o, u}

ii) সংহতি, D = {1, 2, 4, 7, 8, 14, 28, 56}

iii) সংহতি নহয়, উপাদানবোৰ সু-সংজ্ঞাৱদ্ধ নহয়।

iv) সংহতি নহয়, উপাদানবোৰ সু-সংজ্ঞাৱদ্ধ নহয়।

উদাহৰণ 2.4 ঃ তলৰ সংহতিবোৰ তালিকা পদ্ধতিত (Roster method) লিখক ঃ

i) 10 তকৈ সৰু যুগ্ম স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি

ii) $x^2-5x+6 = 0$ সমীকৰণৰ বর্গমূলবোৰৰ সংহতি

iii) EXAMINATION শব্দটোত থকা আখৰবোৰৰ সংহতি

সমাধান ঃ

i) {2, 4, 6, 8}

ii) {2, 3}

iii) {E, X, A, M, I, N, T, O}

উদাহৰণ 2.5 ঃ তলৰ সংহতিবোৰ দণ্ড পদ্ধতিত (Rule method) লিখক ঃ

i) E = {2, 4, 6, ...}

ii) A = {2, 4, 8, 16, 32}

iii) B = {1, 8, 27, 64, 125, 216}

সমাধান ঃ

i) $E = \{x : x = 2n, n \in N\}$

ii) $A = \{x : x = 2^n, n \in N, n < 6\}$

iii) $B = \{x : x = n^3, n \in N, n \leq 6\}$

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ



প্রশ্ন নং ১ঃ তলৰ সংহতিবোৰ তালিকা পদ্ধতিত উপস্থাপন কৰক ঃ

i) A = {x : x সপ্তাহৰ এটা দিন}

ii) B = {x : x বছৰৰ এটা মাহ}

iii) C = {x : x^3–1 = 0}

iv) D = {x : x হ'ল 100 ৰ এটা ধনাত্মক ভাজক}

v) E = {x : x হ'ল ALGEBRA শব্দটোত থকা এটা আখৰ}

প্রশ্ন নং ২ঃ তলৰ সংহতিবোৰ সংহতি-নির্মাণকাৰী (Set-builder) পদ্ধতিত উপস্থাপন কৰক ঃ

i) A = {জানুৱাৰী, মার্চ, মে', জুলাই, আগষ্ট, অক্টোবৰ, ডিচেম্বৰ}

ii) B = {0, 3, 8, 15, 24, ...}

iii) C = {0, ±5, ±10, ±15, ...}

iv) D = {a, b, c, ..., x, y, z}

প্রশ্ন নং ৩ঃ শুদ্ধ নে অশুদ্ধ লিখক ঃ

i) $5 \in N$ ii) $½ \in Z$ iii) $-1 \in Q$

iv) $\sqrt{2} \in R$ v) $\sqrt{-1} \in R$ vi) $-3 \notin N$

২.৪ ৰিক্ত সংহতি (THE EMPTY SET)

সংজ্ঞা ঃ কোনো উপাদান নথকা সংহতি এটাকে **ৰিক্ত সংহতি** (empty set) **অথবা অসিদ্ধ সংহতি** (null set) **অথবা শূন্য সংহতি** (void set) বোলে। ইয়াক ϕ প্রতীকেৰে বুজোৱাহয়।

তলত কেইটামান ৰিক্ত সংহতিৰ উদাহৰণ দিয়া হ'ল

i) সংহতি {x : $x^2 = 3$ আৰু $x \in Q$}

ii) অসমৰ 500 বছৰতকৈ অধিক বয়স হোৱা লোকৰ সংহতি।

iii) $x^2 + 4 = 0$ সমীকৰণৰ বাস্তৱ বর্গমূলৰ সংহতি।

iv) অসমত জন্মা ভাৰতীয় মহিলা ৰাষ্ট্রপতিসকলৰ সংহতি।

২.৫ সসীম আৰু অসীম সংহতি (FINITE AND INFINITE SETS)

তলৰ সংহতি দুটালৈ মন কৰক—

A = {1, 2, 3, 4, 5}

আৰু B = {1, 4, 7, 10, 13, ...}

এতিয়া, আমি যদি দুয়োটা সংহতিৰে উপাদানবোৰ (আটাইবোৰ সুস্পষ্ট উপাদান) গণনা কৰোঁ, তেন্তে সংহতি A ৰ উপাদানবোৰ গণি শেষ কৰিব পাৰিম। কিন্তু সংহতি B ৰ উপাদানবোৰৰ কোনো সীমা নাই। অর্থাৎ, সংহতি A হ'ল এটা সসীম অথবা সীমাৱদ্ধ সংহতি। আনহাতে, সংহতি B হ'ল এটা অসীম সংহতি। সংহতি A ৰ উপাদানবোৰৰ সংখ্যা সীমিত কিন্তু সংহতি B ৰ উপাদানবোৰ অসীমলৈ বিস্তৃত।



সসীম সংহতি এটাক সদায় তালিকা পদ্ধতিৰে উপস্থাপন কৰিব পাৰি। কিন্তু, *অসীম সংহতি* এটাক সদায়েই তালিকা পদ্ধতিৰে উপস্থাপন কৰিব পৰা নাযায়। কাৰণ, ইয়াৰ উপাদানবোৰে সদায় এক নির্দিষ্ট বিন্যাস অনুসৰণ নকৰে। যেনে— বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি। R ক কেতিয়াও তালিকা পদ্ধতিৰে উপস্থাপন কৰিব নোৱাৰি।

সংজ্ঞা ঃ যিটো সংহতিত সুস্পষ্ট উপাদানৰ সংখ্যা সসীম আৰু এটা নির্দিষ্ট পর্যায়ত উপাদানবোৰৰ গণনা প্রক্রিয়া শেষ হয় তেনে সংহতিক ***সসীম সংহতি*** বোলে। ইয়াৰ বিপৰীত সংহতিবোৰকে ***অসীম সংহতি*** বোলা হয়।

উদাহৰণ 2.6 ঃ তলৰ কোনটো সংহতি সসীম আৰু কোনটো সংহতি অসীম বাছি উলিয়াওক।

i) N সংখ্যক স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি।

ii) 2009 চনৰ এক জানুৱাৰীত অসমৰ পুৰুষ বাসিন্দাৰ সংখ্যাৰ সংহতি।

iii) 20 তকৈ সৰু মৌলিক সংখ্যাৰ সংহতি।

iv) এখন সমতল ক্ষেত্রৰ এককেন্দ্রিক বৃত্তবোৰৰ সংহতি।

v) পৃথিৱীৰ নদীবোৰৰ সংহতি।

সমাধান ঃ

i) N = {1, 2, 3, ...} অসীম সংহতি।

ii) সসীম সংহতি।

iii) {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19} সসীম সংহতি।

iv) অসীম সংহতি।

v) সসীম সংহতি।

২.৬ সমান সংহতি (EQUAL SETS)

সংজ্ঞা ঃ দুটা সংহতি A আৰু B ক তেতিয়া সমান বুলি কোৱা হ'ব যেতিয়া A সংহতিৰ সকলো উপাদান B সংহতিত পোৱা যাব আৰু B সংহতিৰ সকলো উপাদান A সংহতিত পোৱা যাব। অর্থাৎ, A সংহতি B ৰ সমান, ইয়াক A = B বুলি লিখা হয়, য'ত A আৰু B ত সম্পূর্ণ একে উপাদান থাকে। যদি A আৰু B সমান নহয়, তেন্তে $A \neq B$ লিখা হয়।

তলৰ সংহতিকেইটালৈ চোৱা যাওক—

$A = \{1, 2\}$

$B = \{x : (x-1)(x-2) = 0\}$

$C = \{x : (x-1)(x-2)(x-3) = 0\}$

স্পষ্ট যে, $B = \{1, 2\}$, $C = \{1, 2, 3\}$ and hence $A = B$, $A \neq C$, $B \neq C$.

উদাহৰণ 2.7 ঃ সমান নে অসমান সংহতি নির্ণয় কৰক।

i) A = {1, 4, 9}

ii) B = {1^2, 2^2, 3^3}

iii) C = {x : x হ'ল TEAM শব্দটোৰ এটা আখৰ}

iv) D = {x : x হ'ল MEAT শব্দটোৰ এটা আখৰ}

v) E = {1, {4}, 9}

সমাধান ঃ A = B, C = D, $A \neq C$, $A \neq D$, $A \neq E$, $B \neq C$, $B \neq D$, $B \neq E$, $C \neq E$, $D \neq E$

২.৭ উপ-সংহতি, অধি-সংহতি, প্রকৃত উপ-সংহতি (SUBSETS, SUPERSETS, PROPER SUBSETS)



সংহতিৰ সমানতা অনুসৰি সংহতি A = {1, 2, 3} আৰু সংহতি B = {1, 2, 2, 2, 3, 1, 3} সমান। কাৰণ, A সংহতিৰ সকলো উপাদান B সংহতিৰ সদস্য আৰু B সংহতিৰ সকলো উপাদান A সংহতিতো আছে। তালিকা পদ্ধতিৰে সংহতি দুটা উপস্থাপন কৰিলে একে উপাদানবোৰ মাত্ৰ এবাৰহে লিখা/গণনা কৰা হ'ব।

A = {1, 2, 3}, B = {1, 2, 3, 4} আৰু C = {3, 2, 1} স্পষ্ট যে A সংহৰি সকলো উপাদান B সংহতিত আছে। কিন্তু A আৰু B সংহতি সমান নহয়। আকৌ, A সংহতিৰ সকলো উপাদান C সংহতিত আছে। লগতে, A আৰু C হ'ল সমান সংহতি। দুয়ো ক্ষেত্ৰত আমি A সংহতিক B আৰু C সংহতিৰ উপ-সংহতি বুলি ক'ব পাৰোঁ। অধিক নির্দিষ্টকৈ ক'বলৈ গ'লে সংহতি A হ'ল সংহতি Bৰ প্ৰকৃত উপ-সংহতি। কিন্তু সংহতি A সংহতি B ৰ প্ৰকৃত উপ-সংহতি নহয়।

সংজ্ঞা ঃ যদি কোনো এক সংহতি A ৰ সকলো উপাদান আন এক সংহতি B ৰ **উপ-সংহতি** (subset) বোলা হয় অথবা A সংহতিক B সংহতিৰ অন্তর্ভুক্ত বোলা হয় আৰু ইয়াক $A \subseteq B$ ৰে বুজোৱা হয়। সমতুল্যভাৱে, আমি ক'ব পাৰোঁ যে সংহতি B ত সংহতি A অন্তর্ভুক্ত হৈ আছে অথবা B হ'ল A ৰ **অধি-সংহতি** (superset)। ইয়াক $B \supseteq A$ বুলি লিখা হয়। প্ৰতীকিভাৱে, $A \subseteq B$ মানে হ'ল সকলো x ৰ বাবে যদি $x \in A$ তেন্তে $x \in B$ হ'ব।

আকৌ, যদি সংহতি A সংহতি B ৰ এটা উপ-সংহতি হয়, কিন্তু সংহতি B ত অতি কমেও এটা এনে উপাদান আছে যিটো সংহতি A ত নাই, তেন্তে সংহতি A ক সংহতি B ৰ **প্ৰকৃত উপ-সংহতি** (proper subset) বোলা হয়। ইয়াক $A \subset B$ বুলি লিখা হয়। আন অর্থত $A \subset B \Leftrightarrow (A \subseteq B$ আৰু $A \neq B)$.

'$\Leftrightarrow$' প্ৰতীকটোৱে 'logically implies and is implied by' বুজায়।

প্ৰকৃত উপ-সংহতিৰ কেইটামান উদাহৰণ হ'ল—

$N \subset Z$, $N \subset Q$, $N \subset R$,

$Z \subset Q$, $Z \subset R$, $Q \subset R$.

এটা কথা মনত ৰাখি থোৱাটো ভাল যে যিকোনো সংহতি A হ'ল নিজৰেই এটা উপ-সংহতি, অর্থাৎ $A \subseteq A$। একেদৰে ৰিক্ত সংহতি ϕ ও হ'ল সকলো সংহতিৰে উপ-সংহতি। অর্থাৎ, যিকোনো সংহতি A ৰ বাবে $\phi \subseteq A$। কাৰণ, যদি $\phi \subseteq A$, তেন্তে তাত নিশ্চয় আন এক উপাদান আছে যিটোৰ মান $x \in \phi$, অর্থাৎ $x \notin A$. কিন্তু $x \notin \phi$। সেয়েহে আমি মানি ল'ব লাগিব যে $\phi \subseteq A$.

সমান সংহতি আৰু উপ-সংহতিৰ সংজ্ঞা দুটা মিলালে আমি পাম $A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B$ আৰু $B \subseteq A)$

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 2.8 ঃ শুদ্ধ নে অশুদ্ধ লিখক ঃ

i) $1 \subset \{1, 2, 3\}$

ii) $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$

iii) $\phi \subseteq \{\{\phi\}\}$

iv) $\phi \subseteq \{\phi, \{1\}, \{a\}\}$

v) $\{a, \{b\}, c, d\} \subset \{a, b, \{c\}, d\}$

সমাধান ঃ

i) অশুদ্ধ, যিহেতু $1 \in \{1, 2, 3\}$.

ii) শুদ্ধ, কাৰণ $\{1, 2\}$ ৰ প্ৰতিটো উপাদান $\{1, 2, 3\}$ ৰ একোটা উপাদান।

iii) অশুদ্ধ, যিহেতু $\{\{\phi\}\}$ সংহতিৰ ϕ এটা উপাদান নহয়।

iv) শুদ্ধ, কাৰণ ϕ সকলো সংহতিৰে এটা উপ-সংহতি।

v) অশুদ্ধ, কাৰণ $\{b\} \notin \{a, b, \{c\}, d\}$ আৰু $c \notin \{a, b, \{c\}, d\}$.

২.৮ ঘাত সংহতি (POWER SET)

এটা সংহতি লোৱা যাওক, $A = \{a, b\}$। এটা প্ৰশ্ন আপোনা-আপুনি মনলৈ আহিব— A সংহতিৰ উপ-সংতিবোৰ কি হ'ব? A সংহতিৰ উপ-সংহতিবোৰ হ'ব ϕ, $\{a\}$, $\{b\}$ আৰু A নিজেই।

এই উপ-সংহতিবোৰক উপাদান হিচাপে লৈ আমি পুনৰ এটা সংহতি গঠন কৰিব পাৰোঁ। এই সংহতিটোক প্ৰদত্ত সংহতি A ৰ ঘাত সংহতি বুলি কোৱা হয়।

সংজ্ঞাঃ কোনো এক প্ৰদত্ত সংহতি A ৰ সকলোবোৰ উপ-সংহতিকে উপাদান হিচাপে গঠিত হোৱা সংহতিটোকে A সংহতিৰ **ঘাত সংহতি** (power set) বোলে। ইয়াক P(A) অথবা 2^A বুলি লিখা হয়।

অৰ্থাৎ, P(A) অথবা $2^A = \{X : X \subseteq A\}$

এই কথা স্পষ্ট যে,

i) $P(\phi) = \{\phi\}$

ii) যদি $A = \{1\}$, তেন্তে $P^A = \{\phi, \{1\}\}$

iii) যদি $A = \{1, 2\}$, তেন্তে $P^A = \{\phi, \{1\}, \{2\}, A\}$

iv) যদি $A = \{1, 2, 3\}$, তেন্তে $P^A = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, A\}$

ওপৰৰ নিয়মবোৰৰ পৰা আমি গম পালোঁ যে যদি সংহতি A ৰ n সংখ্যক উপাদান থাকে, তেন্তে ইয়াৰ P(A) তো 2^n সংখ্যক উপাদান থাকিব।

২.৯ নিত্য সংহতি (UNIVERSAL SET)

যদি কোনো এক নির্দিষ্ট আলোচনাৰ বাবে লোৱা সকলোবোৰ সংহতি আন এক সংহতিৰ উপাদান হয়, তেন্তে সেই বিস্তৃত সংহতিটোক **নিত্য সংহতি** (Universal Set) অথবা (Universal discourse) বোলা হয়। নিত্য সংহতি বুজাবলৈ U প্ৰতীক ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

উদাহৰণ 2.9 ঃ

i) N={1, 2, 3}, Z={3, 7, 8}, Q={4, 5, 6, 9} সংহতিকেইটাৰ নিত্য-সংহতি হ'ব U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

ii) N সংহতি, Z সংহতি আৰু Q সংহতিৰ ক্ষেত্ৰত আমি U সংহতিক নিত্য সংহতি বুলি ধৰিব পাৰোঁ।

iii) ভাৰতৰ লোকপিয়লৰ ক্ষেত্ৰত আমি ভাৰতৰ মুঠ জনসংখ্যাক নিত্য সংহতি বুলি ধৰিব পাৰোঁ, ইত্যাদি।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ ৰিক্ত সংহতি, সসীম আৰু অসীম সংহতি বাছি উলিয়াওক ঃ

i) শূন্যৰে হৰণ কৰিব পৰা সংখ্যাৰ সংহতি।

ii) 15 তকৈ সৰু আৰু 17 ৰে হৰণ কৰিব পৰা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি

iii) সৌৰজগতৰ গ্ৰহবোৰৰ সংহতি

iv) 4 ৰে হৰণ কৰিব পৰা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

v) 2008 চনৰ বেইজিং অলিম্পিকত ভাগ লোৱা অসমৰ অলিম্পিয়ানসকলৰ সংহতি।

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ তলৰ সংহতিবোৰ সমান হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক ঃ

i) A = {2, 3}, B = $\{x : x^2-5x+6 = 0\}$

ii) A = {x : x হ'ল WOLF শব্দৰ এটা আখৰ}
B = {x : x হ'ল FLOW শব্দৰ এটা আখৰ}

iii) A = {a, b, c}, B = {a, {b, c}}

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ শুদ্ধ নে অশুদ্ধ উল্লেখ কৰক ঃ

i) $\{1, 3, 5\} \subseteq \{5, 1, 3\}$ ii) $\{a\} \subset \{\{a\}, b\}$

iii) $\{x : (x-1)(x-2) = 0\} \not\subset \{x : (x^2-3x+2)(x-3) = 0\}$

প্ৰশ্ন নং ৭ঃ তলৰ সংহতিকেইটাৰ ঘাত সংহতি লিখক ঃ

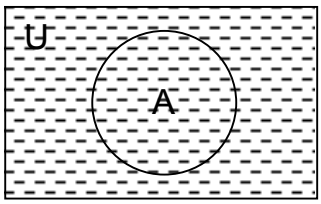
i) A = {1, 2, 3, 4} ii) B = {1, {2, 3}}

প্ৰশ্ন নং ৮ঃ $(A \subseteq B$ আৰু $B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$ বুলি প্ৰমাণ কৰা উদাহৰণ কেইটামান লিখক।

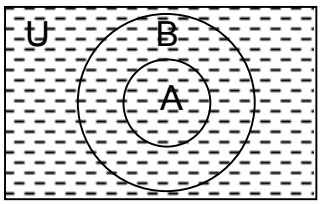
২.১০ ভেন চিত্র (VENN DIAGRAM)

সাধাৰণ সমতলৰ জ্যামিতিক ক্ষেত্ৰবোৰক অৰ্থপূৰ্ণ আৰু ব্যাখ্যাকাৰীভাৱে সংহতিৰ মাজৰ সম্পৰ্ক উপস্থাপন কৰাত ব্যৱহাৰ কৰা হয়। এনে চিত্ৰবোক **ভেন-ইউলাৰ** (Venn-Euler) চিত্ অথবা সহজকৈ **ভেন চিত্ৰ** (Venn-diagrams) বোলে।

ভেনচিত্ৰত নিত্য সংহতি U ক সাধাৰণতে এক আয়তক্ষেত্ৰত বিন্দুৰ সংহতিৰে বুজোৱাহয়। উপ-সংহতিবোৰৰ বাবে আয়তক্ষেত্ৰৰ ভিতৰতে বৃত্ত আঁকা হয় অথবা যিকোনো বন্ধ ৰেখা (closed curve) টনা হয়। $A \subset U$, $A \subset B \subset U$ বুজোৱা ভেন চিত্ৰ এখন তলত দিয়া হৈছে।



$A \subset U$



$A \subset B \subset U$

পৰৱৰ্তী শিতানবোৰত আলোচনাৰ বাবে ভেন চিত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰা হ'ব। ইয়াৰ সহায়ত সংহতিবোৰত হোৱা বিভিন্ন বীজগণিতীয় সংক্ৰিয়া ব্যাখ্যা কৰা হ'ব।

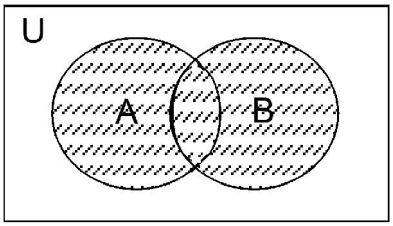
২.১১ সংহতি সংক্ৰিয়া (SET OPERATIONS)

আমি জানো যে, x আৰু y প্ৰদত্ত সংখ্যা দুটাৰ পৰা আমি যোগ, বিয়োগ, পূ�ৰণ আৰু হৰণ সংক্ৰিয়াৰে $x + y$, $x - y$, xy, x/y (য'ত $y \neq 0$) এই নতুন সংখ্যাকেইটা পাব পাৰো। একেদৰে, প্ৰদত্ত সংহতি A আৰু B ৰ পৰা আমি **মিলন** (Union), **ছেদন** (intersection), **অন্তৰ** (difference), আৰু **পূৰক** (complements) সংক্ৰিয়াৰে নতুন সংহতি গঠন কৰিব পাৰোঁ। তলত এই সংহতি সংক্ৰিয়াবোৰ ব্যাখ্যা কৰা হ'ল। সংক্ৰিয়াবোৰৰ দ্বাৰা লব্ধ নতুন সংহতিবোৰ ভেনচিত্ৰৰ সহায়ত উপস্থাপন কৰা হৈছে।

২.১১.১ সংহতিৰ মিলন (Union of Sets)

সংজ্ঞা ঃ সংহতি A আৰু B ৰ মিলন মানে হ'ল সংহতি A অথবা সংহতি B অথবা দুয়োটাৰে সকলোবোৰ উপাদানেৰে গঠিত এটা সংহতি। ইয়াক $A \cup B$ বুলি লিখা আৰু 'A union B' বুলি পঢ়া হয়। ইয়াত '$\cup$' প্ৰতীকটো হ'ল মিলন সংক্ৰিয়াৰ প্ৰতীক। প্ৰতীকভাৱে $A \cup B$ ক আমি তলত দিয়া ধৰণে বণনা কৰিব পাৰোঁ।

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ অথবা } x \in B\}$$



$A \cup B$ (ছাঁ অঁকা অংশ)

এইটো স্পষ্ট যে $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$

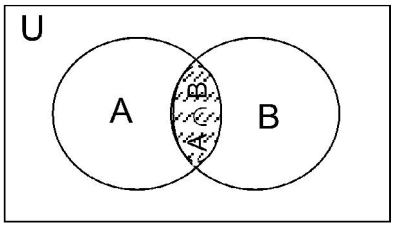
উদাহৰণ 2.10 ঃধৰা হ'ল $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 4, 5, 6\}$

তেন্তে $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

২.১১.২ সংহতিৰ ছেদন (Intersection of Sets)

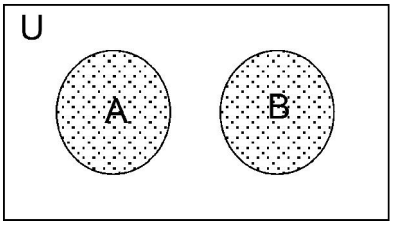
সংজ্ঞা ঃ দুটা সংহতি ক্রমে A আৰু B ৰ ছেদন হ'ব সেইটো নতুন সংহতি য'ত A আৰু B দুয়োটাতে থকা সকলোবোৰ উপাদান থাকিব। ইয়াক প্রতীকত $A \cap B$ বুলি লিখা হয় আৰু 'A intersections B' বুলি পঢ়া হয়। '$\cap$' হ'ল ছেদন সংক্রিয়াৰ প্রতীক। প্রতীকি ৰূপত সংহতিৰ ছেদন তলত দিয়া ধৰণে বর্ণনা কৰিব পাৰি ঃ

$A \cap B = \{x : x \in A$ আৰু $x \in B\}$



$A \cap B$ (ছাঁ অঁকা অংশ)

ওপৰৰ সংজ্ঞাটোৰ পৰা এই কথা স্পষ্ট যে যদি A আৰু B সংহতিত কোনো উমৈহতীয়া উপাদান নাথাকে, তেন্তে $A \cap B = \phi$ হ'ব। এই ব্যতিক্রমৰ ক্ষেত্রত A আৰু B দুয়োটা সংহতিকে **অসংযুক্ত সংহতি** (disjoint sets) বোলে।



$A \cap B = \phi$

ওপৰৰ চিত্রৰ পৰা এই কথা স্পষ্টকৈ বুজায় যায় যে $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$.

উদাহৰণ 2.11 ঃ ধৰা হ'ল A = {a, b, c, d}, B = {b, d, 4, 5}

তেন্তে $A \cap B = \{b, d\}$

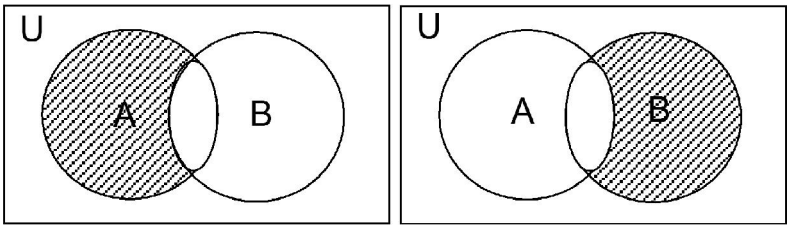
উদাহৰণ 2.12 ঃ ধৰা হ'ল A = {1, 2, 3}, B = {4, 5, 6}

তেন্তে $A \cap B = \phi$.

২.১১.৩ সংহতিৰ অন্তৰ (Difference of Sets)

সংজ্ঞা ঃ দুটা সংহতি ক্ৰমে A আৰু B ৰ অন্তৰ হ'ব সেই নতুন সংহতিটো যিটো সংহতিৰ সকলো উপাদান A সংহতিত থাকিব। কিন্তু B সংহতিৰ কোনো উপাদান নতুন সংহতিটোত পোৱা নাযাব। ইয়াক A–B বুলি উপস্থাপন কৰাহয়। প্ৰতীক ৰূপত $A - B = \{x : x \in A$ আৰু $x \notin B\}$

একেদৰে, $B - A = \{x : x \in B$ আৰু $x \notin A\}$



A – B (ছাঁ অঁকা অংশ) B – A (ছাঁ অঁকা অংশ)

উদাহৰণ 2.13 ঃ ধৰা হ'ল, A = {1, 2, 3, 4, 5}, B = {1, 4, 5}, C = {6, 7, 8}

তেন্তে, $A - B = \{2, 3\}$

$A - C = A$

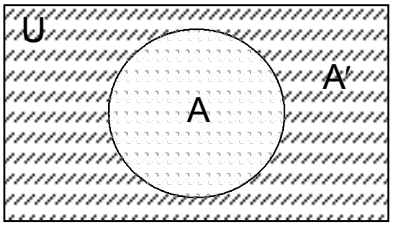
$B - C = B$

$B - A = \phi$

২.১১.৪ পূৰক সংহতি (Complement of a Set)

সংজ্ঞা ঃ যদি সংহতি A ৰ নিত্য সংহতি U হয়, তেন্তে A ত নথকা কিন্তু U ত থকা সকলোবোৰ উপাদানৰ সংহতিটোক A সংহতিৰ **পূৰক সংহতি** বোলা হয়। পূৰক সংহতি বুজাবলৈ A^C অথবা A' প্ৰতীক ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

ইয়াৰ প্ৰতীকি উপস্থাপন হ'ল, $A' = \{x : x \in U$ আৰু $x \notin A\}$.



A' (ছাঁ অঁকা অংশ)

চিত্রৰ পৰা স্পষ্টকৈ বুজা যায় যে, $A' = U - A$.

উদাহৰণ 2.14 ঃ ধৰা হ'ল, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ আৰু $A = \{2, 4, 6, 8\}$

তেন্তে, $A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 2.15 ঃ যদি $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

$B = \{3, 6, 9\}$

আৰু $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, তেন্তে উলিয়াওক—

(i) $A \cup B$, (ii) $A \cap C$, (iii) $B \cap C$, (iv) A', (v) $A \cup B'$, (vi) $C' \cap B$,

(vii) $A' \cup C'$, (viii) $A - C$, (ix) $A - (B \cup C)'$, (x) $A' \cap B'$.

সমাধান ঃ i) $A \cup B = (2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$

ii) $A \cap C = \{2, 4\}$

iii) $B \cap C = \{3\}$

iv) $A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

v) $B' = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$

এতেকে, $A \cup B' = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$

vi) $C' = \{6, 7, 8, 9, 10\}$

এতেকে, $C' \cap B = \{6, 9\}$

vii) ওপৰৰ (iv) আৰু (vi) নম্বৰ সমাধানৰ পৰা আমি পালোঁ যে,

$A' \cup C' = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

viii) $A - C = \{6, 8, 10\}$

ix) $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\}$

$(B \cup C)' = \{7, 8, 10\}$

এতেকে, $A - (B \cup C)' = \{2, 4, 6\}$

x) ওপৰৰ (iv) আৰু (v) নম্বৰ সমাধানৰ পৰা আমি পালোঁ যে,

$A' \cap B' = \{1, 5, 7\}$.



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ৯ঃ যদি $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d, e\}$, $U = \{a, b, c, d, e, f\}$ হয়, তেন্তে বিচাৰি উলিয়াওক—

i) $A \cup B$ ii) $A \cap B$ iii) $A - B$ iv) $B - A$ v) A'



২.১২ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- সু-সংজ্ঞাৱদ্ধ আৰু সুস্পষ্ট বস্তুৰ সংগ্ৰহ/সমষ্টিকে সংহতি বোলে। সংহতিৰ অন্তৰ্গত বস্তুবোৰক সদস্য অথবা উপাদান বোলে।
- সংহতি বুজাবলৈ ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ বৰফলাৰ আখৰ আৰু উপাদান বুজাবলৈ সৰুফলাৰ আখৰ ব্যৱহাৰ কৰা হয়। যদি 'a' উপাদানটো সংহতি A ৰ অংশ হয়, তেন্তে ইয়াক আমি $a \in A$ বুলি লিখো। নহ'লে $a \notin A$ বুলি লিখা হয়।
- (i) তালিকা অথবা সাৰণী পদ্ধতি আৰু (ii) দণ্ড অথবা সংহতি নিৰ্মাণকাৰী পদ্ধতিৰে সংহতি উপস্থাপন কৰা হয়।
- কোনো উপাদান নথকা সংহতি এটাক ৰিক্ত সংহতি নাইবা অসিদ্ধ সংহতি নাইবা শূন্য সংহতি বোলে। ৰিক্ত সংহতিৰ প্ৰতীক হ'ল ϕ।
- গণি শেষ কৰিব পৰা উপাদানেৰে গঠিত সংহতিক সসীম সংহতি বোলে। নহ'লে সংহতিবোৰক অসীম সংহতি বোলা হয়।
- A আৰু B সংহতি দুটা সমান। অৰ্থাৎ, $A = B$ কিন্তু, তেতিয়াহে যেতিয়া A ৰ সকলো উপাদানেই B ত পোৱা যায় আৰু B ৰ সকলো উপাদানেই A ত পোৱা যায়। নহ'লে $A \neq B$.
- যদি সংহতি A ৰ প্ৰতিটো উপাদানেই সংহতি B ৰো উপাদান হয়, তেন্তে A সংহতি B সংহতিৰ উপ-সংহতি হ'ব। ইয়াক $A \subseteq B$ বুলি লিখা হয়। আকৌ, A সংহতি B সংহতিৰ এটা প্ৰকৃত উপ-সংহতি তেতিয়াহে হ'ব যদি $A \subseteq B$ আৰু $A \neq B$ হ'ব। এই কথা আমি $A \subset B$ প্ৰতীকেৰে উপস্থাপন কৰোঁ।
- $A = B$ হ'ব যদি আৰু কেৱল $A \subseteq B$ আৰু $B \subseteq A$ হয়।
- A সংহতিৰ সকলোবোৰ উপ-সংহতিৰে গঠিত সংহতিটোক A ৰ **ঘাত সংহতি** বোলে। ইয়াক P(A) অথবা 2^A প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হয়। যদি $|A| = n$, তেন্তে $|P(A)| = 2^n$ ।
- সংহতিবোৰৰ মাজত থকা সম্পৰ্ক উপস্থাপন কৰিবলৈ সমতল ক্ষেত্ৰত অংকন কৰা জ্যামিতিক চিত্ৰবোৰেই হ'ল ভেনচিত্ৰ।
- দুটা সংহতি ক্ৰমে A আৰু B ৰ মিলনক $A \cup B$ বুলি উপস্থাপন কৰা হয়। সংহতিৰ মিলনত A আৰু B অথবা উভয়তে থকা সকলোবোৰ উপাদানকে অন্তৰ্ভুক্ত কৰা হয়। $A \cup B = \{x : x \in A$ অথবা $x \in B\}$
- সংহতি A আৰু সংহতি B ত থকা আটাইবোৰ উমৈহতীয়া উপাদানেৰে গঠিত সংহতিটোৱেই হ'ল A আৰু B ৰ ছেদন সংহতি। ইয়াক $A \cap B$ প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হয়।
- যিকোনো দুটা সংহতি A আৰু B ৰ অন্তৰ সংহতিটো হ'ল $A - B$ আৰু ইয়াত A ত থকা কিন্তু B ত নথকা সকলোবোৰ উপাদান অন্তৰ্ভুক্ত কৰা হয়। $A - B = \{x : x \in A$ আৰু $x \notin B\}$।

- কোনো নির্দিষ্ট আলোচনাৰ বাবে লোৱা সকলোবোৰ সংহতি আৰু সকলোবোৰ উপ-সংহতিৰে গঠিত সংহতিটোকে নিত্য সংহতি U বোলে।
- সংহতি A ৰ পৰিপূৰক সংহতিটোক A^c অথবা A' প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হয়। ইয়াত A সংহতিত নথকা কিন্তু ইয়াৰ নিত্য সংহতি U ত থকা সকলোবোৰ উপাদান থাকে।

  $A' = \{x : x \in U$ আৰু $x \notin A\} = U - A$



২.১৩ অধিক জানিবলৈ

1) Agarwal, D.K. (). *Business Mathematics,* New Delhi: Vrindra Publication (p) Ltd.
2) Baruah, S. (2011). *Basic Mathematics and Its Application in Economics*, New Delhi: Trinity Press Pvt. Ltd.
3) Bose, D. (2004). *Mathematical Economics;* New Delhi: Himalaya Publishing House.
4) Garg,S.( ) *Introductory Micro Economics*; Dhanpat Rai Publications.
5) Kandoi, Balwant (2011). *Mathematics for Business and Economics with Application;* New Delhi: Himalaya Publishing House.



২.১৪ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ i) A = {সোমবাৰ, মংগলবাৰ, বুধবাৰ, বৃহস্পতিবাৰ, শুকুৰবাৰ, শনিবাৰ, দেওবাৰ}

ii) B = {জানুৱাৰী, ফেব্ৰুৱাৰী, মাৰ্চ, এপ্ৰিল, মে', জুন, জুলাই, আগষ্ট, ছেপ্টেম্বৰ, অক্টোবৰ, নৱেম্বৰ, ডিচেম্বৰ}

iii) C = $\{1, w, w^2\}$

iv) D = {1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100}

v) E = {A, B, E, G, L, R}

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ i) A = {x : x হ'ল বছৰটোৰ এটা 31 দিনীয়া মাহ}

ii) B = $\{x : x = n^2 - 1, n \in N\}$

iii) C = $\{x : x = 5n, n \in Z\}$

iv) D = {x : x হ'ল ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ এটা আখৰ}

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ i) শুদ্ধ, ii) অশুদ্ধ, iii) শুদ্ধ, iv) শুদ্ধ, v) অশুদ্ধ, vi) শুদ্ধ।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ i) ϕ, ii) ϕ, iii) সসীম, iv) অসীম, v) ϕ.

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ i) B = {2, 3} = A

ii) A = {W, O, L, F}, B = {F, L, O, W} আৰু so, A = B

iii) $A \neq B$; কাৰণ $b \in A$ কিন্তু $b \notin B$.

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ i) শুদ্ধ

ii) অশুদ্ধ, কাৰণ $\{a\} \in \{\{a\}, b\}$

iii) $\{x : (x-1)(x-2) = 0\} = \{1, 2\}$, $\{x : (x^2-3x+2)(x-3) = 0\} = \{1, 2, 3\}$

সেয়েহে, $\{x : (x-1)(x-2) = 0 \subset \{x : (x^2-3x+2)(x-3) = 0\}$ আৰু ইয়াৰ দ্বাৰা প্ৰমাণিত হ'ল যে প্ৰদত্ত ফলাফলটো মিছা।

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ i) P(A) = {ϕ, {1}, {2}, {3}, {4}, {1, 2}, {1, 3}, {1, 4}, {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}, {1, 2, 3}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4}, {2, 3, 4}, A}

ii) P(B) = {ϕ, {1}, {{2, 3}}, B}

৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল A = {1, 2}, B = {0, 1, 2, 3}, C = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 7}

৯ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ i) $A \cap B$ = {a, b, c, d, e}; ii) {C}; iii) A – B = {a, b}, iv) B – A = {d, e}; v) A′ = {d, e, f}



২.১৫ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন নং ১ঃ উদাহৰণ দিয়ক— i) পাঁচটা ৰিক্ত সংহতি ii) পাঁচটা সসীম সংহতি iii) পাঁচটা অসীম সংহতি

প্ৰশ্ন নং ২ঃ দণ্ড পদ্ধতিৰে তলৰ সংহতিকেইটা উপস্থাপন কৰক—

i) $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right\}$

ii) $B = \left\{\frac{1}{1.2}, \frac{1}{1.3}, \frac{1}{3.4}, \frac{1}{4.5}, \ldots\right\}$

iii) C = {2, 5, 10, 17, 26, 37, 50}

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ তলৰ সংহতিকেইটা তালিকা পদ্ধতিত লিখক—

i) $A = \{x : x \in N, 2 < x < 10\}$

ii) $B = \{x : x \in N, 4+x < 15\}$

iii) $C = \{x : x \in Z, -5 \leq x \leq 5\}$

প্রশ্ন নং ৪ঃ যদি $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 9\}$, $C = \{2, 4, 6, 8\}$ আৰু $D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ তেন্তে তলৰ বিন্দুবোৰত $\subseteq$ অথবা $\notin$ বহুৰাই খালি ঠাই পূৰণ কৰক—

i) A ... B, ii) A ... C, iii) C ... D, iv) B ... D

প্রশ্ন নং ৫ঃ সঁচানে মিছা লিখক—

i) $4 \in \{1, 2, \{3, 4\}, 5\}$, (ii) $\phi = \{\phi\}$

iii) $A = \{2, 3\}$ হ'ল $B = \{x : (x-1)(x-2)(x-3) = 0\}$ ৰ এটা প্রকৃত উপ-সংহতি।

iv) $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$

প্রশ্ন নং ৬ঃ যদি $U = \{x : x \in N\}$, $A = \{x : x \in N, x$ যুগ্ম সংখ্যা$\}$, $B = \{x : x \in N, x < 10\}$, $C = \{x : x \in N, x$ ক 3ৰে হৰণ কৰিব পাৰি$\}$, তেন্তে উলিয়াওক -

i) $A \cup B$, ii) $A \cap C$, iii) $B \cap C$, iv) A', (v) B', vi) C'.

প্রশ্ন নং ৭ঃ যদি $A \cup B = B$ আৰু $B \cup C = C$, তেন্তে প্রমাণ কৰক যে $A \subseteq C$.

প্রশ্ন নং ৮ঃ যদি $U = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,

$A = \{-5, -2, 1, 2, 4\}$

$B = \{-2, -3, 0, 2, 4, 5\}$

$C = \{1, 0, 2, 3, 4, 5\}$,

তেন্তে বিচাৰি উলিয়াওক i) $A \cup B$, ii) $A \cap C$, iii) $A \cap (B \cup C)$, iv) $B \cap C'$, v) $A' \cup (B \cap C')$, vi) $A - C'$, vii) $A - (B \cup C)'$, viii) $(B \cup C')$, ix) $A' \cup C'$, x) $(C' \cup B) - A$.

প্রশ্ন নং ৯ঃ তলৰ কথাবোৰ প্রমাণিত কৰক—

i) যদি A, B, C এনে তিনিটা সংহতি, য'ত $A \subseteq B$, তেন্তে $A \cup C \subseteq B \cup C$, $A \cap C \subseteq B \cap C$.

ii) $A \subseteq B$ হ'ব যদি আৰু কেৱল $B' \subseteq A'$ হ'ব।

iii) $A \subseteq B$ যদি আৰু কেৱল $A \cap B = A$.

iv) যদি $A \cap B = \phi$, তেন্তে $A \subseteq B'$.

প্রশ্ন নং ১০ঃ যদি A ৰ i) পাঁচটা আৰু ii) 2^n উপাদান আছে, তেন্তে P(A)ত কিমানটা উপাদান থাকিব?

*** ***** ***

অধ্যায় ৩ ঃ অর্থনীতিৰ ফলনসমূহ

অধ্যায় গাঁথনি

৩.১ উদ্দেশ্য

৩.২ পৰিচয়

৩.৩ অর্থনীতিৰ কেতবোৰ মৌলিক ফলন

- ৩.৩.১ চাহিদা ফলন
- ৩.৩.২ যোগান ফলন
- ৩.৩.৩ উপযোগিতা ফলন
- ৩.৩.৪ উৎপাদন ফলন
- ৩.৩.৫ আয় ফলন
- ৩.৩.৬ ব্যয় ফলন
- ৩.৩.৭ লাভ ফলন
- ৩.৩.৮ উপভোগ ফলন
- ৩.৩.৯ সঞ্চয় ফলন
- ৩.৩.১০ বিনিয়োগ ফলন

৩.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৩.৫ অধিক জানিবলৈ

৩.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৩.৭ আৰ্হি প্রশ্ন

৩.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- অর্থনীতিৰ কেতবোৰ মৌলিক ফলন ব্যাখ্যা কৰিব পাৰিব।

৩.২ পৰিচয়

অর্থনীতিত ফলন সম্পর্কেই এক গুৰুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন কৰে। আমি প্রায়ে কওঁ, দ্রব্য এটাৰ দৰ আৰু যোগানৰ মাজত এক ধনাত্মক সম্পর্ক আছে অথবা দৰ আৰু চাহিদাৰ মাজত এক ঋণাত্মক সম্পর্ক আছে। এই অধ্যায়টিত অর্থনীতিৰ মৌলিক ফলন আলোচনা কৰাত প্রাথমিক গুৰুত্ব প্রদান কৰা হৈছে। এইদৰে, এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি অর্থনীতিৰ মৌলিক ফলনসমূহৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।

৩.৩ অর্থনীতিৰ কেতবোৰ মৌলিক ফলন

এই খণ্ডত আমি অর্থনীতিৰ কেতবোৰ মৌলিক ফলনৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। আহক আমি চাহিদা ফলনেৰে অৱম্ভ কৰোঁ।

৩.৩.১ চাহিদা ফলন (Demand Function)

চাহিদা ফলনে কোনো এটা দ্রব্যৰ চাহিদা পৰিমাণ আৰু ইয়াৰ কাৰকৰ মাজত সম্পৰ্ক প্রতিষ্ঠা কৰে। কোনো এটা দ্রব্যৰ চাহিদা ফলনটো এনেদৰে লিখিব পাৰি—

$$D_X = f[P_X, P_S, P_C, Y, T]$$

য'ত D_X হ'ল x দ্রব্যৰ চাহিদাৰ পৰিমাণ, P_X হ'ল x দ্রব্যৰ দৰ, P_S হ'ল x দ্রব্যৰ বিকল্প দ্রব্যৰ দৰ, P_C হ'ল x দ্রব্যৰ পৰিপূৰক দ্রব্যৰ দৰ, Y হ'ল উপভোক্তাৰ আয়ৰ পৰিমাণ, T হ'ল ৰুচি, পছন্দ, সামাজিক প্রথা ইত্যাদিৰ অন্য কাৰকসমূহ আৰু f হ'ল ফলন সম্পৰ্ক।

ব্যক্তিগত চাহিদা ফলন ঃ ব্যক্তিগত চাহিদা ফলনে ব্যক্তিগত চাহিদা আৰু ইয়াক প্রভাৱান্বিত কৰা কাৰকসমূহৰ মাজৰ সম্পৰ্ক দেখুৱাই।

বজাৰ চাহিদা ফলন ঃ আগৰ অধ্যায়সমূহত আমি ইতিমধ্যে আলোচনা কৰি আহিছোঁ যে বজাৰ চাহিদা হ'ল ব্যক্তিগত চাহিদাৰ সমষ্টি। এইদৰে, বজাৰ চাহিদা ফলনে বজাৰ চাহিদা আৰু বজাৰ চাহিদা প্রভাৱিত কৰা কাৰকসমূহৰ মাজত এক ফলন সম্পৰ্ক প্রতিনিধিত্ব কৰে। ব্যক্তিগত চাহিদা প্রভাৱিত কৰা সকলোবোৰ কাৰকেই বজাৰ চাহিদা প্রভাৱিত কৰে। ইয়াৰ উপৰিও জনসংখ্যাৰ আকাৰ আৰু গঠন, ঋতু, বতৰ, আয়ৰ বিতৰণ ইত্যাদিয়েও বজাৰ চাহিদা প্রভাৱিত কৰে।

সাঙ্কেতিক ৰূপত, বজাৰ চাহিদা ফলন এনেদৰে প্রকাশ কৰিব পাৰি—

$$D_m = f(P_X, P_r, Y, T, F, PD, S, D)$$

য'ত D_m = x সামগ্রীৰ বজাৰ চাহিদা; P_X = x সামগ্রীৰ বজাৰ দৰ; P_r = সম্পৰ্কীত সামগ্রীৰ দৰ; Y = উপভোক্তাৰ আয়ৰ পৰিমাণ; T = ৰুচি আৰু পছন্দ; F = ভৱিষ্যতত দৰ সলনি হোৱাৰ প্রত্যাশা; PD = জনসংখ্যাৰ আকাৰ আৰু গঠন; S = ঋতু আৰু বতৰ; D = আয়ৰ বিতৰণ।

৩.৩.২ যোগান ফলন (Supply Function)

যোগান ফলনে কোনো এটা দ্রব্যৰ যোগানৰ পৰিমাণ আৰু ইয়াৰ কাৰকৰ মাজত সম্পৰ্ক প্রতিষ্ঠা কৰে।

সাঙ্কেতিক ৰূপত, আমি কোনো এটা সামগ্রীৰ যোগান আৰু ইয়াৰ কাৰকৰ সম্পৰ্ক এনেদৰে প্রকাশ কৰিব পৰোঁ—

$$S_X = f[P_X, P_S, P_C, F_J, C, T, G]$$

য'ত S_x হ'ল x দ্রব্যৰ পৰিমাণ, P_x হ'ল x দ্রব্যৰ দৰ, P_s হ'ল বিকল্প দ্রব্যৰ দৰ শৃঙ্খল, P_c হ'ল পৰিপূৰক দ্রব্যৰ দৰ শৃঙ্খল, F_j হ'ল উৎপাদনৰ উপাদানসমূহৰ দৰ, C হ'ল উপভোক্তাৰ মুঠ খৰচ, T হ'ল প্রযুক্তি কৌশলৰ অৱস্থা, G হ'ল উৎপাদনকাৰীৰ লক্ষ্য আৰু f হ'ল ফলন সম্পর্ক।

বজাৰ যোগান ফলন ঃ বজাৰ যোগান ফলনে বজাৰ যোগান আৰু বজাৰ যোগান প্রভাৱিত কৰা কাৰকসমূহৰ মাজত এক ফলন সম্পর্ক প্রতিনিধিত্ব কৰে। ব্যক্তিগত যোগান প্রভাৱিত কৰা সকলোবোৰ কাৰকেই বজাৰযোগান প্রভাৱিত কৰে। ইয়াৰ উপৰিও প্রতিষ্ঠানৰ সংখ্যা, ভৱিষ্যতৰ প্রত্যাশিত দৰ, পৰিবহন আৰু যোগাযোগ ইত্যাদিয়েও বজাৰ যোগান প্রভাৱিত কৰে।

সাঙ্কেতিক ৰূপত, বজাৰ যোগান ফলন এনেদৰে প্রকাশ কৰিব পাৰি—

$$S_m = f(P_x, P_O, P_f, S_t, T, G, T, G, N, F, M)$$

য'ত, S_m = x সামগ্রীৰ বজাৰ যোগান; P_x = x সামগ্রীৰ দৰ; P_O = অন্য সামগ্রীৰ দৰ; P_f = উৎপাদনৰ উপাদানৰ দৰ; S_t = প্রযুক্তি কৌশলৰ অৱস্থা; T = কৰ নীতি; G = বজাৰৰ লক্ষ্য; N = প্রতিষ্ঠানৰ সংখ্যা; F = x দ্রব্যৰ দৰৰ ভৱিষ্যৎ প্রত্যাশা; M = পৰিবহন আৰু যোগাযোগৰ মাধ্যম।

৩.৩.৩ উপযোগিতা ফলন (Utility Function)

এজন উপভোক্তাই বিভিন্ন বস্তুৰ উপভোগ কৰি কেনেকৈ সৰ্বোচ্চ উপযোগিতা আহৰণ কৰিব পাৰে, উপযোগিতা ফলনে তাকে বুজায়। ধৰা হ'ল, এজন উপভোক্তাই দুবিধ সামগ্রী x আৰু y উপভোগ কৰিছে, তেনেহ'লে উপভোক্তাজনৰ উপযোগিতা ফলনটো হ'ব—

$$U = u(x, y)$$

য'ত, U = মুঠ উপযোগিতা, x আৰু y উপভোক্তাজনে ভোগ কৰা দ্রব্য।

যেতিয়া উপভোক্তা এজনে তেওঁ ভোগ কৰা দ্রব্যজোঁটৰ পৰা সৰ্বোচ্চ মুঠ উপযোগিতা আহৰণ কৰিব বিচাৰে, মার্ছালৰ উপভোক্তাৰ আচৰণ তত্ত্ব মতে, উপভোক্তাজনে তেওঁৰ মুঠ বাজেট বিভিন্ন সামগ্রীৰ উপভোগৰ ক্ষেত্রত এনেদৰে ব্যয় কৰিব লাগিব যাতে প্রত্যেক দ্রব্যৰে প্রান্তিক উপযোগিতা আৰু ইয়াৰ দৰৰ অনুপাত সমান সমান হয়। উপভোক্তাৰ আচৰণৰ হিক্সীয় ধাৰণা মতে, উপভোগ্য দ্রব্যৰ জোঁটৰ ক্ষেত্রত, সৰ্বোচ্চ উপযোগিতা আহৰণৰ বাবে দ্রব্যসমূহৰ জোঁট এনে ধৰণে নির্বাচন কৰিব লাগে যাতে বাজেট ৰেখাৰ ঢাল (Slope) আৰু উপযোগিতা ফলনৰ ঢাল একে সমান হয়। আন কথাত, সৰ্বোচ্চ উপযোগিতা আহৰণৰ বাবে বাজেট ৰেখাই নিৰপেক্ষ ৰেখাক স্পর্শ কৰিব লাগিব আৰু নিৰপেক্ষ ৰেখা নিশ্চিতভাৱে মূল বিন্দুৰ পিনে উত্তল হ'ব লাগিব।

৩.৩.৪ **উৎপাদন ফলন** (Production Function)

উৎপাদন ফলন হ'ল এক ধাৰণা, যাক উৎপাদন তত্ত্বৰ প্ৰযুক্তি কৌশলগত দিশসমূহৰ প্ৰাযোগিক দিশ আলোচনাৰ বাবে উদ্ভাৱন কৰা হৈছে। ই হ'ল প্ৰযুক্তি কৌশলৰ এক অৱস্থা, যিয়ে এক প্ৰদত্ত পৰিমাণৰ উপাদান ব্যৱহাৰৰ পৰা উৎপাদিত দ্ৰব্যৰ সৰ্বোচ্চ উৎপাদন কৰে অথবা এক নিৰ্দিষ্ট পৰিমাণৰ উৎপাদনৰ বাবে উপাদানসমূহ একেলগে কি বিশেষ ধৰণে ব্যৱহৃত হ'ব। উৎপাদন ফলনৰ সাধাৰণ ৰূপটো হ'ল—

$$Q = f(L, K, R, S, V, \gamma)$$

য'ত, Q = উৎপাদিত সামগ্ৰী; L = শ্ৰম; K = মূলধন; R = কেঁচা সামগ্ৰী; S = ভূমি; V = উৎপাদনৰ প্ৰতিদান; γ = দক্ষতাৰ মানক।

৩.৩.৫ **আয় ফলন** (Revenue Function)

উৎপাদনকাৰীয়ে এক নিৰ্দিষ্ট সময়ৰ ভিতৰত উৎপাদিত সামগ্ৰী বিক্ৰী কৰি আহৰণ কৰা আৰ্জনকে আয় ফলন বুলি কোৱা হয়। যি কোনো বজাৰ গাঁথনিৰ মুখ্য উদ্দেশ্য হৈছে সৰ্বোচ্চ আয় আহৰণ কৰা। সেয়া হ'লেও প্ৰতিষ্ঠান এটাই লাভৰ পৰিমাণৰ বিষয়টো আওকান কৰি সৰ্বোচ্চ আয় আহৰণৰ কথা ভাবিব নোৱাৰে। আনকি আয় সৰ্বোচ্চ কৰা লক্ষ্য থাকিলেও প্ৰতিষ্ঠান এটাই এক নিম্নতম পৰিমাণৰ লাভ আহৰণ কৰিবই লাগিব, যিয়ে অংশীদাৰসকলক সন্তুষ্ট কৰিবৰ বাবে পৰ্য্যাপ্ত হয়। উৎপাদনকাৰী এজনৰ আয়ৰ পৰিমাণ নিৰ্ভৰ কৰে উৎপাদিত দ্ৰব্যৰ বিক্ৰীৰ পৰিমাণ আৰু দ্ৰব্যটোৰ দৰৰ ওপৰত।

৩.৩.৬ **ব্যয় ফলন** (Cost Function)

ব্যয় ফলনটো গৌণ বা উদ্ভুত ফলন। ইয়াক উৎপাদন ফলনৰ পৰা উলিয়াই লোৱা হয়, যিয়ে কোনো সময়ত উপলব্ধ দক্ষতাপূৰ্ণ উৎপাদনৰ পদ্ধতিৰ কথা ব্যাখ্যা কৰে। অৰ্থনৈতিক তত্ত্বই হ্ৰস্বকালীন ব্যয় আৰু দৈর্ঘ্যকালীন ব্যয়ক পৃথক কৰিছে। হ্ৰস্বকালীন আৰু দৈর্ঘ্যকালীন দুয়োটা ব্যয়তে মুঠ ব্যয় হৈছে বহু চলকীয় ফলন। মুঠ ব্যয় বহুতো কাৰকৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰে। সাঙ্কেতিকভাৱে আমি দৈর্ঘ্যকালীন ব্যয় ফলন এনেদৰে লিখিব পাৰোঁ—

$$C = f(x, T, P_f)$$

য'ত, C = মুঠ ব্যয়; x = উৎপাদিত সামগ্ৰী; T = প্ৰযুক্তি; P_f = উপাদানসমূহৰ দৰ।

আমি হ্ৰস্বকালীন ব্যয় ফলনটো গাণিতিক ৰূপত এনেদৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰোঁ—

$$C = f(x, T, P_f, K)$$

য'ত, K = স্থিৰ উপাদানসমূহ।

এইখিনিতে উল্লেখ কৰা ভাল যে হ্ৰস্বকালীন ব্যয় ফলনৰ ক্ষেত্ৰত কিছুমান উপাদানৰ পৰিমাণ অপৰিৱৰ্তিত থাকে, যিবোৰক স্থিৰ উপাদান বুলি কোৱা হয়।

৩.৩.৭ লাভ ফলন (Profit Function)

কোনো এটা দ্রব্য উৎপাদনৰ লগত জড়িত উৎপাদনকাৰীসকলৰ মুখ্য উদ্দেশ্য হ'ল সৰ্বোচ্চ লাভ আহৰণ কৰা। সাধাৰণ ভাষাত লাভ হ'ল আয় আৰু ব্যয়ৰ মাজৰ পাৰ্থক্য। সাঙ্কেতিক ৰূপত, লাভ ফলন আমি এনেদৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰোঁ—

$$\pi = P.Q - C \quad \text{.....(i)}$$

ইয়াত, π = মুঠ লাভ; P = সামগ্ৰীটোৰ দৰ; Q = উৎপাদনৰ পৰিমাণ; C = মুঠ উৎপাদন ব্যয়।

প্ৰতিষ্ঠান এটাই সৰ্বোচ্চ লাভ আহৰণৰ বাবে কাম্য উৎপাদনৰ পৰিমাণত উপনীত হয় যেতিয়া—

(ক) প্ৰান্তিক আয় প্ৰান্তিক ব্যয়ৰ সমান হয়,

(খ) প্ৰান্তিক ব্যয় ৰেখাই প্ৰান্তিক আয় ৰেখাক তলৰ পৰা ছেদ কৰে।

যি পৰিমাণৰ উৎপাদনৰ পৰ্য্যায়ত লাভ সৰ্বোচ্চ হয়, সেয়া পাবলৈ হ'লে আমি সমীকৰণ (i)ত দিয়া ফলনটোৰ প্ৰথম উদ্ভুত (first derivative) শূন্যৰ সমান হ'ব লাগিব আৰু দ্বিতীয় উদ্ভুত ঋণাত্মক হ'ব লাগিব। এতিয়া, লাভ এনেদৰে প্ৰকাশ কৰা হ'ব—

$$\pi = R - C$$
$$= R(q) - (C)q \quad \text{.....(ii)}$$

সমীকৰণ (i)ৰ ওপৰত দেখুওৱা Q সাপেক্ষে কৰা অৱকলজৰ প্ৰথম অনুক্ৰমণৰ চৰ্তৰ পৰা আমি পাওঁ ঃ MR=MC, ইয়াত MR হ'ল প্ৰান্তিক আয় আৰু MC হ'ল প্ৰান্তিক ব্যয়।

আকৌ, ওপৰত দেখুওৱা সমীকৰণ (ii)টো Q সাপেক্ষে কৰা অৱকলজৰ দ্বিতীয় অনুক্ৰমণৰ চৰ্ত অনুযায়ী পাওঁ ঃ MR ৰ ঢাল <MCৰ ঢাল

৩.৩.৮ উপভোগ ফলন (Consumption Function)

উপভোগ ফলনে সামগ্ৰিক উপভোগ ব্যয় আৰু আয়ৰ মাজৰ সম্পৰ্ক নিৰ্দেশ কৰে। ইয়াক এনেদৰে প্ৰকাশ কৰা হ'ল— C = C(y)। উপভোগ ব্যয় জাতীয় আয় অথবা ব্যৱহাৰযোগ্য আয়ৰ লগত সম্পৰ্কীত হ'ব পাৰে। উপভোগ ফলন হ'ল কেইন্সীয় (Keynesian) বিশ্লেষণৰ এটা মূল খুঁটা। প্ৰায়বোৰ উন্নত দেশতে উপভোগ ব্যয় সামগ্ৰিক ব্যয়ৰ একক বৃহৎ উপাদান হিচাপে চিহ্নিত হৈছে।

৩.৩.৯ সঞ্চয় ফলন (Saving Function)

সঞ্চয় ফলনে সামগ্ৰিক সঞ্চয় আৰু আয়ৰ সম্পৰ্কটোক নিৰ্দেশ কৰে। ইয়াক এনেদৰে প্ৰকাশ কৰা হয়— S = S(Y)। সঞ্চয় জাতীয় আয় অথবা ব্যৱহাৰযোগ্য আয়ৰ লগত জড়িত। সঞ্চয় ফলন হ'ল উপভোগ দুয়োটা মিলি মুঠ আয় গঠন কৰে। এইদৰে, Y = C + S (ইয়াত, Y = আয়; C = উপভোগ; S = সঞ্চয়)।

৩.৩.১০ বিনিয়োগ ফলন (Investment Function)

প্রতিষ্ঠান এখনৰ বিনিয়োগৰ সিদ্ধান্ত বহুতো কথাৰ ওপৰত নির্ভৰ কৰে। বিনিয়োগ নির্ভৰ কৰা প্রায়বোৰ কাৰককে যদি আমি তালিকাভুক্ত কৰোঁ, তেনেহ'লে বিনিয়োগ ফলনটো এনেদৰে প্রকাশ কৰিব পাৰি—

$$I = f(Y, r, w, Q, FMP, F, T, BC, Y_{-1}, K_{-1}, U)$$

য'ত,

I = শুদ্ধ বিনিয়োগ

Y = উৎপাদন বা আয়

r = প্রকৃত সুতৰ হাৰ

w = প্রকৃত মজুৰিৰ হাৰ

Q = (Tobin) টবিনৰ Q

FMP = ফিছকেল তথা মুদ্রা নীতিসমূহ

F = বিত্তীয় বাধা বা সীমাবদ্ধতাসমূহ

T = প্রযুক্তি; BC = ব্যৱসায়ৰ দৃঢ়তা·

Y_{-1} = বিগত বছৰৰ উৎপাদন সামগ্রী

K_{-1} = বিগত বছৰৰ মূলধনৰ মজুত

U = অন্যান্য কাৰকসমূহ।

মন কৰিব, ওপৰত উল্লিখিত বিনিয়োগ ফলনত বিনিয়োগৰ প্রায়বোৰ তত্ত্বকে সামৰি লোৱা হৈছে। তথাপিও মনত ৰখা উচিত হ'ব যে বিভিন্ন তত্ত্বসমূহ স্বতন্ত্র বা পৃথক নহয়। যিহেতু এইবোৰ উমৈহতীয়া উপাদান আছে। উদাহৰণ স্বৰূপে, টবিনৰ Q তত্ত্বত তৰণ তত্ত্ব (Acceleration Theory) আৰু নব্য-প্রতিষ্ঠিত তত্ত্বৰ (Neoclassical Theory) দুয়োটাৰে উপাদান আছে। ব্যৱসায়িক দৃঢ়তা আৰু প্রযুক্তিও আনকি আন্তঃসম্পর্কীত (Interrelated), আকৌ যিহেতু উৎপাদন বছৰৰ পিছত বছৰ ধৰি ক্রমান্বয়ে পৰিৱর্তিত হয় Y আৰু Y_{-1}ৰ প্রভাৱ আংশিকভাৱে নস্যাৎ কৰা হয়। এইদৰে এনেবোৰ আন্তঃসম্পর্কীত চলকে বহু সহ-ৰৈখিক (Multicolinearity) সমস্যাৰ সৃষ্টি কৰে।

এই সমস্যাবোৰৰ পৰা মুক্ত হ'বৰ বাবে অর্থনৈতিক তত্ত্বত আমি প্রায়ে বিনিয়োগ ফলনটো উপস্থাপন কৰিবৰ বাবে মূলধন মজুত আৰু সময় উপাদানক অন্তর্ভুক্ত কৰি সৰল গাণিতিক পৰিভাষা ব্যৱহাৰ কৰোঁ।

মূলধনৰ সৈতে বিনিয়োগৰ প্রত্যক্ষ সম্পর্ক আছে। বিনিয়োগ হ'ল এক প্রবাহ ধাৰণা আৰু মূলধন হ'ল এক মজুত ধাৰণা। আন কথাত মূলধনক শুদ্ধ বিনিয়োগৰ ধাৰাবাহিকতা বুলি অভিহিত কৰিব পাৰি। এইদৰে আমি লিখিব পাৰোঁ যে—

$$K_t = \sum_{i=1}^{t} I_t$$

য'ত, K_t = t সময়ত মূলধন আৰু I_i = i সময়ৰ ভিতৰত হোৱা শুদ্ধ বিনিয়োগৰ পৰিমাণ।

এইটো উল্লেখনীয় যে ব্যৱসায় প্ৰতিষ্ঠান এটাৰ বাবে পৰিকল্পনা কৰা ধৰণে সকলোবোৰ বিনিয়োগ এক নিৰ্দিষ্ট বৰ্ষত কৰাটো সদায়ে সম্ভৱপৰ নহ'বও পাৰে। সেই কাৰণে অৰ্থনীতিৰ প্ৰকৃত আৰু আকাংক্ষিত বিনিয়োগ (বা মূলধন মজুত)ক পৃথক কৰা হৈছে। এইদৰে বিনিয়োগ ফলনটো আমি তলত দিয়া ধৰণে লিখিব পাৰোঁ—

$I_t = f(K_t^*, K_{t-1})$

ইয়াত, K_t^* হ'ল মূলধনৰ আকাংক্ষিত স্তৰ, t হ'ল সময়।

(**বি.দ্ৰঃ** ইচ্ছুক শিক্ষাৰ্থীসকলে অধিক জানিবৰ বাবে G. S. Guptaৰ 'Macroeconomics: Theory and Applications' পুথিখনৰ সহায় ল'ব পাৰে।)



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১ ঃ চাহিদা ফলনটো উল্লেখ কৰক আৰু ইয়াৰ বিভিন্ন পৰিভাষাসমূহ লিখক।

.....

.....

.....

.....

.....

প্ৰশ্ন নং ২ ঃ লাভ ফলনটো উল্লেখ কৰক আৰু ইয়াৰ বিভিন্ন পৰিভাষাসমূহ লিখক।

.....

.....

.....

.....

প্ৰশ্ন নং ৩ ঃ বন্ধনীৰ ভিতৰত থকা শুদ্ধ বিকল্পসমূহ চিনাক্ত কৰক—

দিয়া আছে $Q = f(L, K, R, S, V, \gamma)$। ইয়াত Q হ'ল ফলন সম্পৰ্ক।

(চাহিদা ফলন / লাভ ফলন / বিনিয়োগ ফৰন / উৎপাদন ফলন)

.....



৩.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

এই অধ্যায়টোত আমি—

- ফলন হ'ল এক বিশেষ ধৰণৰ সম্বন্ধ, যিয়ে এটা ৰাশি কেনেকৈ আন এটা ৰাশিৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল তাক প্ৰকাশ কৰে।
- গণিতৰ দৰে অৰ্থনীতিটো আমি ফলন সম্পৰ্কে দেখা পাওঁ; যেনে— চাহিদা ফলন, যোগান ফলন, লাভ ফলন, উপযোগিতা ফলন ইত্যাদি।



৩.৫ অধিক জানিবলৈ

1) Agarwal, D.K. (). Business Mathematics, New Delhi: Vrindra Publication (p) Ltd.
2) Baruah, S. (2011). Basic Mathematics and Its Application in Economics, New Delhi: Trinity Press Pvt. Ltd.
3) Bose, D. (2004). *Mathematical Economics;* New Delhi: Himalaya Publishing House.
4) Garg,S.( ) *Introductory Micro Economics*; Dhanpat Rai Publications.
5) Kandoi, Balwant (2011). *Mathematics for Business and Economics with Application;* New Delhi: Himalaya Publishing House.



৩.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ কোনো এটা দ্রব্যৰ চাহিদা ফলনটো এনেদৰে লিখিব পাৰি—

$$D_X = f[P_X, P_S, P_C, Y, T]$$

য'ত, D_X হ'ল x দ্রব্যৰ চাহিদাৰ পৰিমাণ; P_X হ'ল, x দ্রব্যৰ দৰ; P_S হ'ল x দ্রব্যৰ বিকল্প দ্রব্যৰ দৰ; P_C হ'ল x দ্রব্যৰ পৰিপূৰক দ্রব্যৰ দৰ; Y হ'ল উপভোক্তাৰ আয়ৰ পৰিমাণ; T হ'ল ৰুচি, পছন্দ, সামাজিক প্রথা ইত্যাদিৰ চাহিদাৰ অন্য কাৰকসমূহ আৰু f হ'ল এক ফলন সম্পর্ক।

২নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ লাভ ফলনটো এনেদৰে লিখিব পাৰি—

$$\pi = P.Q - C \qquad \text{.....(i)}$$

ইয়াত, π = মুঠ লাভ; P = সামগ্রীটোৰ দৰ; Q = উৎপাদনৰ পৰিমাণ; C = মুঠ উৎপাদন ব্যয়।

৩নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ উৎপাদন ফলন।



৩.৭ আহিঁ প্রশ্ন

প্রশ্ন নং ১ ঃ চমুটোকা লিখক—

ক) চাহিদা ফলন

খ) যোগান ফলন

গ) উপযোগিতা ফলন

*** ***** ***

অধ্যায় ৪ ঃ অর্থনীতিত সমীকৰণ

অধ্যায় গাঁথনি

৪.১ উদ্দেশ্য

৪.২ পৰিচয়

৪.৩ সমীকৰণৰ ধাৰণা

- ৪.৩.১ সমীকৰণৰ মান/ ডিগ্ৰী
- ৪.৩.২ বহুৰাশি সমীকৰণ
- ৪.৩.৩ সহ সমীকৰণ

৪.৪ সমীকৰণৰ পুনৰলিখন

৪.৫ সমীকৰণৰ সমাধান

- ৪.৫.১ বহুৰাশি সমীকৰমৰ সমাধান
- ৪.৫.২ সহ সমীকৰণৰ সমাধান

৪.৬ চাহিদা ফলন

৪.৭ যোগান ফলন

৪.৮ ভাৰসাম্য দৰ আৰু পৰিমাণ নির্দ্ধাৰণ

৪.৯ ব্যয় ফলন

৪.১০ আয় ফলন

৪.১১ লাভ ফলন

৪.১২ বাজেট ফলন

৪.১৩ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৪.১৪ অধিক জানিবলৈ

৪.১৫ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৪.১৬ আৰ্হি প্ৰশ্ন

৪.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- সমীকৰণৰ প্ৰাথমিক ধাৰণা সম্পৰ্কে জ্ঞান লাভ কৰিব পাৰিব
- সমীকৰণ কেনেকৈ পুনৰ লিখিব আৰু সমাধান কৰিব লাগে তাৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিব পাৰিব
- চাহিদা ফলন আৰু যোগান ফলনৰ ধাৰণাৰ বিষয়ে ব্যাখ্যা কৰিব পাৰিব

- ব্যয়, আয় আৰু লাভ সমীকৰণসমূহ কেনেকৈ বনাব লাগে আৰু সমাধান কৰিব লাগে সেইবোৰ বৰ্ণনা কৰিব পাৰিব
- বাজেট ৰেখাৰ সমীকৰণৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিব পাৰিব।

৪.২ পৰিচয়

এটি সমীকৰণে কোনো কার্যকৰী সম্পর্ক বা তাত্ত্বিক সম্পর্কক বুজায় যাক সমাধান কৰিব পাৰি আৰু তাৰ চলকসমূহৰ মান নির্ণয় কৰিব পাৰি। উদাহৰণ স্বৰূপে, ধৰা হ'ল, বজাৰ যোগান (Q) সমগ্রীৰ দৰ (p)ৰ ওপৰত নির্ভৰ কৰে আৰু যোগান ফলনটো ৰৈখিক হয়। তেতিয়া যোগান সমীকৰণটো এনেদৰে লিখিব পাৰি, $Q = - c+ dp$, য'ত, c আৰু d হ'ল প্রাচল। এই খিনিতে মন কৰিবলগীয়া যে সমীকৰণসমূহ বিচাৰযোগ্য বা পৰীক্ষণযোগ্য। গতিকে অর্থবিজ্ঞানত অর্থনৈতিক প্রতিপাদ্যসমূহৰ আচৰণ সমীকৰণৰ সহায়ত দেখুওৱা হয়।

এই অধ্যায়ত, সমীকৰণৰ ধাৰণা, ইয়াক কেনেকৈ পুনৰ লিখিব লাগে আৰু কেনেকৈ সমাধান কৰিব লাগে সেইবোৰ বিশদভাৱে আলোচনা কৰা হৈছে। এইবোৰৰ বাহিৰে অর্থবিজ্ঞানত সমীকৰণ, যেনে চাহিদা যোগান সমীকৰণ, ব্যয়, আয়, লাভ সমীকৰণ আৰু বাজেট ৰেখাৰ সমীকৰণৰ ওপৰত পৰিচয়সূচক ধাৰণাও দিয়া হৈছে।

৪.৩ সমীকৰণৰ ধাৰণা

গণিতৰ (অর্থবিজ্ঞানতো) এটি সমীকৰণ (equation) হ'ল এক বা ততোধিক চলকযুক্ত সমতাৰ বিবৃতি। এটা সমীকৰণৰ প্রতিটো পক্ষ বা দিশক সমীকৰণটোৰ সদস্য বোলা হয়। যদি সমীকৰণ এটাৰ দুয়োটা পক্ষ ইয়াৰ চলকসমূহৰ প্রতিটো মানৰ সত্য হয়, তেনে সমীকৰণক 'অভেদ' বা অভেদ সমীকৰণ বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ স্বৰূপে,

(a) $y = ax^2 + bx + c$ এটা দ্বি-চলক (variable)যুক্ত (x আৰু y), তিনি প্রাচল (parameter)যুক্ত (a, b আৰু c), তথা দুই সদস্যযুক্ত (y আৰু $ax^2 + bx + c$) সমীকৰণ।

(b) $x^2 – 16 \equiv (x + 4) (x – 4)$ এটা অভেদ (identity), কিয়নো x ৰ যিকোনো মানৰ বাবে সমীকৰণটোৰ দুয়ো পক্ষ সমান হয়।

ফলন (function) আৰু সমীকৰণ(equation)ৰ মাজত পার্থক্যঃ ১ নং অধ্যায়ত আমি ইতিমধ্যে ফলনৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিছো। কিন্তু সমীকৰণ আৰু ফলনৰ মাজত কিছুমান পার্থক্য আছে, যদিও দুয়োটাকে গাণিতিকভাৱে প্রকাশ কৰা হয়। সমীকৰণৰ চলকৰ মানসমূহ সমাধান কৰা হয় সমতাৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি, য'ত ফলনৰ চলকসমূহৰ মান দিয়া থাকে। তদুপৰি সমীকৰণসমূহৰ সদায়ে লেখ থাকে, কিন্তু কিছুমান ফলন লেখত প্রকাশ কৰিব নোৱাৰি। আটাইতকৈ গুৰুত্বপূর্ণ কথাটো হ'ল ফলনসমূহ হ'ল সমীকৰণৰ উপসংহতি।

৪.৩.১ সমীকৰণৰ মান/ডিগ্ৰী (Degree of Equation)

সমীকৰণৰ ডিগ্ৰীয়ে সমীকৰণটোক বিভাজ্য অনুকলনীয় ৰূপত সৰলীকৰণ কৰাৰ পিছত ইয়াত থকা অজ্ঞাত ৰাশিৰ একস্প'নেণ্ট বা ঘাতক বুজায় (অর্থাৎ সমীকৰণটোত থকা বর্গমূল, ঋণাত্মক ঘাত, আদি নির্মূল কৰি সৰলীকৰণ কৰাৰ পিছত)। উদাহৰণ স্বৰূপে,

(a) $x - 5 = {}^{1}/_{x}$, ইয়াক সৰলীকৰণ কৰাৰ পিছত ই এনেকুৱা হয় ঃ $x^2 - 5x - 1 = 0$, গতিকে ইয়াৰ ডিগ্ৰী হ'ল 2।

(b) $\sqrt{x^4 - 81} = 0$, উভয় পক্ষক বর্গ কৰাৰ পিছত ই হয় $x^4 - 81 = 0$, গতিকে ইয়াৰ ডিগ্ৰী হ'ল 4।

৪.৩.২ বহুৰাশি সমীকৰণ (Polynomial Equation)

x ৰ nতম ডিগ্ৰী বা ঘাতৰ সাধাৰণ সমীকৰণক এনেদৰে লিখা হয় ঃ

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n = 0.$

যিহেতু x ৰ সর্বোচ্চ ঘাত n, ইয়াক n ডিগ্ৰী ঘাতৰ বহুৰাশি সমীকৰণ বুলিও কোৱা হয়।

যদি সমীকৰণটোত x ৰ সর্বোচ্চ ঘাত ১ হয়, ইয়াক একঘাত বা সাধাৰণ ৰৈখিক সমীকৰণ বুলি কোৱা হয় আৰু ইয়াক এনেদৰে লিখা হয় ঃ $ax + b = 0$, $(a \neq 0)$.

উদাহৰণ স্বৰূপে, $2x - 5 = 0$.

যদি সমীকৰণ এটাত x ৰ সর্বোচ্চ ঘাত 2 হয়, ইয়াক দ্বিতীয় ডিগ্ৰীৰ বা সাধাৰণ দ্বিঘাত সমীকৰণ বুলি কোৱা হয় আৰু ইয়াক এনেদৰে লিখা হয় ঃ উদাহৰণ স্বৰূপে $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$

উদাহৰণ স্বৰূপে, $2 + 5x + 3x^2 = 0$.

যদি সমীকৰণটোত x ৰ সর্বোচ্চ ঘাত 3 হয়, ইয়াক তৃতীয় ডিগ্ৰীৰ বা সাধাৰণ ত্ৰিঘাত সমীকৰণ বুলি কোৱা হয় আৰু ইয়াক এনেদৰে লিখা হয় ঃ

$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $(a \neq 0)$.

৪.৩.৩ সহ সমীকৰণ (Simultaneous Equation)

সহ সমীকৰণৰ এটা সংহতিত কমেও দুটা বা ততোধিক সমীকৰণ থাকে আৰু প্ৰতিটো সমীকৰণত দুটা বা ততোধিক চলক থাকে, যাৰ মান একেলগে আটাইকেইটা সমীকৰণক সন্তুষ্ট কৰিব পৰাকে নির্ণয় কৰিব পাৰি। সহ সমীকৰণৰ এটা সংহতিত, চলকৰ সংখ্যা মুঠ সমীকৰণৰ সংখ্যাৰ সমান নাইবা তাতকৈ কম হ'ব লাগে।

(a) দুটা চলক আৰু দুটা সমীকৰণঃ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1$$

$$a_{21}x_2 + a_{22}x_2 = c_2$$

উদাহৰণ স্বৰূপে,

$$3x_1 + 5x_2 = 10$$

$$5x_1 + 2x_2 = 4$$

(b) তিনিটা চলক আৰু তিনিটা সমীকৰণঃ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = c_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = c_3$$

উদাহৰণ স্বৰূপে,

$$5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15$$

$$5x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 10$$

$$2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 12$$

(c) n টা চলক আৰু m সংখ্যক সমীকৰণঃ

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2$$

. . . . . .

. . . . . .

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = c_m$$

৪.৪ সমীকৰণৰ পুনৰলিখন (REWRITING OF EQUATION)

প্ৰাকৃতিক ভাৱে সমীকৰণসমূহ স্থিৰ প্ৰকৃতিৰ নহয়। সহজ আৰু সমাধানযোগ্য কৰি তুলিবৰ বাবে সমীকৰণসমূহক পুনৰলিখন বা পুনৰ সজাই ল'ব পাৰি যাতে দুইফালৰ সমতা বজাই ৰাখিব পাৰি।

(a) $x - 4 = {}^{2}/_{x}$

সমাধান কৰিবলৈ অথবা ইয়াক সৰল কৰিবলৈ উক্ত সমীকৰণটো তলত দিয়া ধৰণে লিখিব পাৰিঃ

$$x^2 - 4x = 2$$

বা, $x^2 - 4x - 2 = 0$

এতিয়া সমীকৰণটো সহজে সমাধানযোগ্য হৈ পৰিছে।

(b) $\sqrt{x^2+5}=3$

সমাধান কৰিবলৈ উক্ত সমীকৰণটো তলত দিয়া ধৰণে লিখা হৈছে

$x^2 + 5 = 9$ (উভয় পক্ষক বর্গ কৰি)

$\Rightarrow x^2+5=9$

এতিয়া সমীকৰণটো সমাধানযোগ্য হৈছে।

৪.৫ সমীকৰণৰ সমাধান (SOLVING OF EQUATION)

সমীকৰণৰ সমাধান বুলিলে আমি সৰল ভাৱে চলকসমূহৰ মান নির্ণয় কৰা বুজোঁ যিয়ে সমীকৰণটোক সত্য প্রতিপন্ন কৰে।

উদাহৰণ স্বৰূপে, তলত দিয়া সমীকৰণসমূহৰ সমাধান হ'লঃ

(a) $3x - 6 = 0$

$\Rightarrow 3x = 6$ (সমীকৰণটো পুনৰ সজাই)

$\Rightarrow x = 6/3$

$\therefore x = 2$

(b) $x^2 - 25 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 25$ (সমীকৰণটো পুনৰ সজাই)

$\Rightarrow x^2 - 25 = 0$

$\Rightarrow x=\sqrt{25}$ (সমীকৰণটোৰ দুয়ো পক্ষৰ $\sqrt{\ }$ লৈ)

$\therefore x=\pm 5$

৪.৫.১ বহুৰাশি যুক্ত সমীকৰণৰ সমাধান (Solution of Polynomial Equation)

(a) প্রথম ডিগ্রী বা সাধাৰণ ৰৈখিক সমীকৰণ সমীকৰণৰ সমাধানঃ

$ax + b = 0 \qquad (a \neq 0)$

$\Rightarrow ax = -b$ (সমীকৰণটো পুনৰ সজাই)

$\therefore x = -\left(b/a\right)$

(b) দ্বিতীয় ডিগ্রীৰ বা সাধাৰণ দ্বিঘাত সমীকৰণৰ সমাধানঃ

$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (a \neq 0)$

উক্ত সমীকৰণটোৰ সমাধান হ'ল, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

উদাহৰণ স্বৰূপে,

$3x^2 - 4x + 1 = 0$

ইয়াত, $a = 3, b = -4, c = 1$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4.3.1}}{2.3}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6}$$

$$\therefore x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{6}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4+2}{6} \qquad \text{বা,} \qquad \Rightarrow x = \frac{4-2}{6}$$

$$\therefore x = 1 \qquad \Rightarrow x = \frac{2}{6}$$

$$\therefore x = 1/3$$

৪.৫.২ সহ সমীকৰণৰ সমাধান (Solution of Simultaneous Equation)

এক গোট সহ সমীকৰণ তলত দিয়া দুটা পদ্ধতিৰে সমাধান কৰিব পাৰিঃ

(১) **নিৰসন পদ্ধতি** (Elimination Method)

এই পদ্ধতিত যিকোনো এটা চলক নিৰসন কৰি ল'ব লাগে যাতে সংহতিটো এটা চলকৰ কৰি ল'ব পাৰি। তলত এটা উদাহৰণ লৈ লোৱা যাওক,

$2x + 3y = 13$ – (I)

$x + 7y = 23$ – (II)

সহ সমীকৰণ (I) আৰু (II) ৰ পৰা x আৰু y ৰ মান উলিয়াবলৈ আমি হয় x অথবা y ক নিৰসন কৰিব লাগিব। ধৰা হওঁক আমি x ক নিৰসন কৰিম। ইয়াৰ বাবে সমীকৰণ (II)ৰ দুয়ো পক্ষক 2 ৰে পুৰণ কৰি আমি পাওঁ ঃ

$2x + 14 = 46$ (III)

এতিয়া সমীকৰণ (I) আৰু (III) সমাধান কৰি আমি পাওঁ,

$2x + 3y = 13$

$2x + 14y = 46$

(–) (–) (–)

$-11y = -33$

$\Rightarrow y = \frac{33}{11}$

$\therefore y = 3$

এতিয়া সমাকৰণ (I) ত y ৰ মান বহুৰাই আমি পাওঁ,

$\Rightarrow 2x + 3.3 = 13$

$\Rightarrow 2x + 9 = 13$

$\Rightarrow 2x = 13-9$

$\Rightarrow 2x = 4$

$\therefore x = 2$

গতিকে সমাধানসমূহ হ'ল, x = 2 আৰু y = 3.

প্ৰমাণঃ $2x + 3y = 2.2 + 3.3 = 13$

বা, $x + 7y = 2 + 7.3 = 23$

(২) **প্ৰতিকল্পন পদ্ধতি** (Substitution Method)

এই পদ্ধতিত এটা চলকৰ মান এটা সমীকৰণৰ পৰা উলিয়াই লোৱা হয় আৰু সেই মান আনটো সমীকৰণত বহুৰাই এক চলকেৰে এক সমীকৰণ কৰি লোৱা হয় আৰু এনেদৰে আমি ইয়াক সমাধান কৰিব পাৰো।

উদাহৰণ স্বৰূপে,

$3x + 2y = 13$ – (I)

$9x - 3y = 21$ – (II)

সমীকৰণ (I) ক পুনৰ সজাই আমি পাওঁ ঃ

$3x = 13 - 2y$

$\therefore x = \frac{13-2y}{3}$ – (III)

এতিয়া সমীকৰণ (III) ৰ পৰা x ৰ মান সমীকৰণ (II)ত বহুৰাই আমি পাওঁ ঃ

$$9\left(\frac{13-2y}{3}\right) - 3y = 21$$

$\Rightarrow 3(13-2y) - 3y = 21$

$\Rightarrow 39 - 6y - 3y = 21$

$\Rightarrow -9y = 21 - 39$

$\Rightarrow -9y = -18$

$\therefore y = {}^{18}\!/_{9} = 2$

y ৰ মান সমীকৰণ (I) ত বহুৱাই আমি পাওঁ ঃ

3x + 2.2. = 13

$\Rightarrow$ 3x + 4 = 13

$\Rightarrow$ 3x = 9

$\therefore$ x = 3

$\therefore$ সমাধান সমূহ হ'ল, x = 3 আৰু y = 2.

প্ৰমাণ ঃ 3x + 2y = 3.3 + 2.2 = 13

বা, 9x – 3y = 9.3 – 3.2 = 21 .

(৩) ক্ৰেমাৰৰ পদ্ধতিঃ

এই পদ্ধতিৰ বিষয়ে আমি পিছৰ অধ্যায়ত আলোচনা কৰিম।

(৪) মৌলকক্ষ বা মেট্ৰিক্স পদ্ধতি ঃ

এই পদ্ধতিৰ বিষয়েও আমি পিছৰ অধ্যায়ত আলোচনা কৰিম।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১ ঃ সমীকৰণ আৰু অভেদৰ মাজত পাৰ্থক্য কি? (৪০ টা শব্দত লিখক)

.....

.....

.....

.....

প্ৰশ্ন নং ২ ঃ দ্বিঘাত সমীকৰণ কি? (৪০ টা মান শব্দত লিখক)

.....

.....

.....

.....

৪.৬ চাহিদা ফলন (DEMAND FUNCTION)

চাহিদা ফলণৰ ধাৰণাটি ইয়াৰ আগৰ অধ্যায়টিৰ ৩.৩.১ অনুচ্ছেদত ইতিমধ্যে আলোচনা কৰি আহিঁছো। এই অধ্যায়টিত আমি কেইটিমান সাংখ্যিক উদাহৰণ দাঙি ধৰিম।

উদাহৰণ 4.1 ঃ এবিধ সামগ্ৰী x ৰ চাহিদা ফলনটো দিয়া আছে এনেদৰে ঃ $Q_x = 15 - 3P_x$।

চাহিদা সূচী প্ৰস্তুত কৰা যদি সামগ্ৰীবিধৰ দৰ 5 টকাৰ পাৰ 1 টকালৈ উঠা নমা কৰে।

সমাধানঃ দিয়া আছে,

$Q_x = 15 - 3P_x$

দৰ (P_x)ৰ মান চাহিদা ফলন $Q_x = 15 - 3P_x$ত বহুৰাই চাহিদা সূচী প্ৰস্তুত কৰিব পাৰি এনেদৰে,

দৰ (P_x) (টকাৰ হিচাপত) ঃ	5	4	3	2	1
চাহিদাৰ পৰিমাণ (Q_x) (একক হিচাপত) ঃ	0	3	6	9	12

উদাহৰণ 4.2 ঃ ধৰা হ'ল এবিধ সামগ্ৰীৰ বজাৰত উপভোক্তা আছে আৰু সিঁহতৰ চাহিদা ফলন তলত দিয়া ধৰণৰঃ

$d_1(p) = 20 - p$ ঃ 15 ত কৈ কম বা সমান যিকোনো দৰৰ কাৰণে

$d_1(p) = 0$ ঃ 15 ত কৈ অধিক যিকোনো দৰত

আৰু,

$d_2(p) = 30 - 2p$ ঃ 15ত কৈ কম বা সমান যিকোনো দৰৰ কাৰণে

$d_2(p) = 0$ ঃ 15 ত কৈ অধিক যিকোনো দৰত

বজাৰ চাহিদা ফলনটো উলিয়াওক -

সমাধান ঃ দিয়া আছে,

$d_1(p) = 20 - p$ (যেতিয়া $P \leq 15$)

$d_1(p) = 0$ (যেতিয়া P>15)

আৰু,

$d_2(p) = 30 - 2p$ (যেতিয়া $P \leq 15$)

$d_2(p) = 0$ (যেতিয়া P>15)

গতিকে, বজাৰ চাহিদা ফলনটো হ'ব,

d বজাৰ $(P) = d_1(p) + d_2(p)$ (যেতিয়া $P \leq 15$)

$= 20 - p + 30 - 2p$

$= 50 - 3p$

d বজাৰ (P) = 0 (যেতিয়া P>15)

যিহেতু p > 15,হ'লে দুজনৰ কোনো এজন উপভোক্তাৰে সামগ্ৰীবিধৰ চাহিদা নাথাকিব।

উদাহৰণ 4.3 ঃ ধৰা হ'ল এবিধ সামগ্ৰীৰ বজাৰত দুগৰাকী উপভোক্তা আছে আৰু সিহঁতৰ তলত দিয়া ধৰণৰ একেই চাহিদা ফলন আছে।

$d(p) = 40 - 4p, \; p \leq 10$

$d(p) = 0, \quad$ when $p > 10$ (যেতিয়া p>10)

বজাৰ চাহিদা ফলন উলিয়াওক -

সমাধানঃ দিয়া আছে,

$d(p) = 40 - 4p, \; p \leq 10$

$d(p) = 0, \quad$ when $p > 10$ (যেতিয়া p>10)

উপভোক্তাই সামগ্ৰীৰ চাহিদা ব্যক্ত কৰিব তেতিয়া, যেতিয়া দৰ 10 টকা বা তাতকৈ কম হয়।

যিহেতু বজাৰত দুগৰাকী উপভোক্তা আছে আৰু সিহঁতৰ চাহিদা ফলন একেই, বজাৰ চাহিদা ফলনটো হ'ব ঃ

d বজাৰ (p) = 2{d(p)}, যেতিয়া $p \leq 10$

= 2 {40 – 4p}

= 80 – 8p, যেতিয়া $p \leq 10$

গতিকে, d market(p) = 0, যেতিয়া $p \leq 10$

৪.৭ **যোগান ফলন** (SUPPLY FUNCTION)

যোগান ফলন সম্পর্কে ইতিমধ্যে আমি আগৰ অধ্যায়টিৰ ৩.৩.২ নং অনুচ্ছেদত আলোচনা কৰি আহিছোঁ। এই অধ্যায়টিত আমি কেইটামান সাংখ্যিক উদাহৰণৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

উদাহৰণ 4.4 ঃ ধৰা হ'ল, যোগান ফলনটো $Q_s = -10 + 2p$ । 10 টকা দৰত যোগানৰ পৰিমাণ নির্ণয় কৰক।

সমাধানঃ দিয়া আছে,

$Q_s = -10 + 2p$

যেতিয়া P = 10, তেতিয়া

$Q_s = -10 + 2.10$

$= -10 + 20$

$= 10$

গতিকে, যেতিয়া P = 10, Q_s = 10 একক ।

উদাহৰণ 4.5 ঃ ধৰা হ'ল, এবিধ সামগ্রীৰ বজাৰত দুগৰাকী উপভোক্তা আছে আৰু সিহঁতৰ যোগান ফলন দুটা এনেধৰণৰ

$Q_1 = -10 + P$ (যেতিয়া $P \geq 0$)

$Q_1 = 0$ (যেতিয়া $P < 0$)

$Q_2 = -30 + 3P$ (যেতিয়া $P \geq 0$)

$Q_2 = 0$ (যেতিয়া $P < 0$)

বজাৰ যোগান ফলনটো উলিয়াওক -

সমাধানঃ দিয়া আছে,

$Q_1 = -10 + P$ (যেতিয়া $P \geq 0$)

$Q_1 = 0$ (যেতিয়া $P < 0$)

$Q_2 = -30 + 3P$ (যেতিয়া $P \geq 0$)

$Q_2 = 0$ (যেতিয়া $P < 0$)

গতিকে, যোগান ফলনটো হ'ব,

Q market = $Q_1 + Q_2$ (যেতিয়া $P \geq 0$)

$= (-10+P) + (-30 + 3P)$

$= -40 + 4P$

আৰু, Q market = 0 (যেতিয়া $P < 0$)

৪.৮ ভাৰসাম্য দৰ আৰু পৰিমাণ নির্দ্ধৰণ (DETERMINATION OF EQUILIBRIUM PRICE QUANTITY)

আটাইতকৈ বহুল ব্যৱহাৰিক বজাৰ আৰ্হিৰ গঠন হ'ল,

$Q_d = a - bP$ (চাহিদা ফলন)

$Q_s = -c + dP$ (যোগান ফলন)

$Q_d = Q_s$ (বজাৰ ভাৰসাম্যতাৰ চর্ত)

য'ত,

Q_d = চাহিদাৰ পৰিমাণ (quantity demanded)

Q_s = যোগানৰ পৰিমাণ (quantity suplied)

a = চাহিদা ৰেখাৰ ছেদক (intercept of demand curve)

b = চাহিদা ৰেখাৰ ঢাল (slope of the demand curve)

c = যোগান ৰেখাৰ ছেদক (intercept of supply curve)

d = যোগান ৰেখাৰ ঢাল (slope of supply curve)

আমি জানো,

ভাৰসাম্য অৱস্থাত,

$Q_d = Q_s$

$\Rightarrow a - bP = -c + dP$

$\Rightarrow bP + dP = a + c$

$\Rightarrow P(b + d) = a + c$

$$\therefore \bar{P} = \frac{a+c}{b+d}$$

ভাৰসাম্য পৰিমাণ $\bar{Q}$ এনেদৰে পাব পাৰি ঃ

$$\bar{Q} = a - b\bar{P}$$

$$= a - b\frac{a+c}{b+d}$$

$$= a - \frac{b(a+c)}{b+d}$$

$$= \frac{a(b+c) - b(a+c)}{b+d}$$

$$\therefore \bar{Q} = \frac{ad - bc}{b+d}$$

উদাহৰণ 4.6 ঃ তলৰ ৰৈখিক আংশিক বজাৰ আৰ্হিৰ পৰা ভাৰসাম্য দৰ $(\overline{P})$ আৰু ভাৰসাম্য পৰিমাণ $(\overline{Q})$ উলিয়াওক ।

$Q_d = 20 - 7P$

$Q_s = -4 + 5P$

$Q_d = Q_s$

সমাধানঃ দিয়া আছে,

$Q_d = 20 - 7P$

$Q_s = -4 + 5P$

$Q_d = Q_s$

ভাৰসাম্য অৱস্থাত, আমি পাওঁ,

$Q_d = Q_s$

$\Rightarrow 20 - 7P = -4 + 5P$

$\Rightarrow 12P = 24$

$\Rightarrow \overline{P} = \frac{24}{12} = 2$

এতিয়া চাহিদা ফলন বা যোগান ফলনত $\overline{P}$ = 2 বহুৱাই পাওঁ,

$\overline{Q}$ = 20 – 7P

= 20 – 7.2

= 20 – 14

$\therefore \overline{Q} = 6$

৪.৯ ব্যয় ফলন (COST FUNCTION)

ব্যয় ফলনে উৎপাদনৰ পৰিমাণ আৰু উৎপাদন ব্যয়ৰ মাজৰ কার্যকৰি সম্পর্ক দেখুৱায়। ইয়াক এনেদৰে দেখুওৱা হয় ঃ c = f(Q)

য'ত, C = উৎপাদন ব্যয়, Q = উৎপাদনৰ পৰিমাণ আৰু f = কার্যকৰি সম্পর্ক (functional relationship)

- **মুঠ ব্যয় ফলন** (Total Cost Function) ঃ মুঠ ব্যয় ফলন হ'ল নির্দ্দিষ্ট পৰিমাণৰ সামগ্রী উৎপাদনত ব্যয় হোৱা সকলো ধৰণৰ খৰচ। গণিতিকভাৱে মুঠ ব্যয় ফলনক এনেদৰে দেখুৱাব পাৰি ঃ TC - f(Q)

  য'ত Q হ'ল উৎপাদিত সামগ্রীৰ পৰিমাণ (output)।

  চমুকৈ,

  মুঠ ব্যয় (Total Cost) = *মুঠ পৰিৱর্তনশীল ব্যয়* (Total Variable Cost) + *মুঠ স্থিৰ ব্যয়* (Total Fixed Cost)



মুঠ পৰিৱৰ্তনশীল ব্যয়ঃ মুঠ পৰিৱৰ্তনশীল ব্যয় হ'ল সেইবোৰ ব্যয়, যি পোনে পোনে উৎপাদনৰ পৰিমাণৰ লগত পৰিৱৰ্তন হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, সাধাৰণ শ্ৰমিকৰ দৈনিক মজুৰি, কেঁচা সামগ্ৰীৰ দাম, বিজুলী শক্তি, ইন্ধন খৰচ, ইত্যাদি।

মুঠ স্থিৰ ব্যয়ঃ মুঠ স্থিৰ ব্যয় হ'ল সেইবোৰ ব্যয়, যোবোৰ উৎপাদনৰ পৰিমাণৰ লগত পৰিৱৰ্তন নহয়। যেনে, ভুমিৰ খাজনা, স্থায়ী কৰ্মচাৰীৰ দৰমহা, বীমাৰ প্ৰিমিয়াম, ইত্যাদি। যিকোনো পৰিমাণৰ উৎপাদনত স্থিৰ ব্যয় ধ্ৰুৱক হৈ থাকে।

TC = TVC + TFC

- **গড় ব্যয় ফলন** (Average Cost Function)ঃ ই হ'ল উৎপাদিত প্ৰতি একক ব্যয়।

$$AC = \frac{TC}{Q}$$

য'ত, AC গড় ব্যয় (Average Cost), TC = মুঠ ব্যয় আৰু Q = উৎপাদনৰ পৰিমাণ

- **গড় স্থিৰ ব্যয়** (Average Fixed Cost) ঃ ই হ'ল প্ৰতি একক উৎপাদনত হোৱা স্থিৰ ব্যয়।

$$AFC = \frac{TFC}{Q}$$

য'ত, AFC = গড় স্থিৰ ব্যয়, TFC = মুঠ স্থিৰ ব্যয়, আৰু Q = উৎপাদিত সামগ্ৰীৰ পৰিমাণ।

- **গড় পৰিৱৰ্তনশীল ব্যয়** (Average Variable Cost) ঃ ই হ'ল প্ৰতি একক উৎপাদনত পৰিৱৰ্তনশীল ব্যয়।

$$AVC = \frac{TVC}{Q}$$

য'ত, AVC = গড় পৰিৱৰ্তনশীল ব্যয়, TVC = মুঠ পৰিৱৰ্তনশীল ব্যয়, Q =উৎপাদিত সামগ্ৰীৰ পৰিমাণ।

- **প্ৰান্তিক ব্যয় ফলন** ঃ প্ৰান্তিক ব্যয় হ'ল এক অতিৰিক্ত গোট উৎপাদন কৰিবলৈ প্ৰয়োজন হোৱা অতিৰিক্ত ব্যয়।

সাংকেতিকভাৱে,

$MC_n = TC_n - TC_{n-1}$

য'ত, N = উৎপাদনৰ পৰিমাণ/ সংখ্যা (Number of units produced)

MC_n = n তম একক উৎপাদনৰ প্ৰান্তিক ব্যয় (Marginal cost of the n^{th} unit)

TC_n = n সংখ্যক উৎপাদনৰ মুঠ ব্যয় (Total cost of n units)

TC_{n-1} = n -1 সংখ্যক সামগ্ৰী উৎপাদনৰ মুঠ ব্যয় (Total cost of (n–1) units).

গাণিতিকভাৱে,TC ফলনক. Q ৰ বাবে অৱকলন কৰি ও ইয়াক আহৰণ কৰিব পাৰি এনেদৰে,

$$MC = \frac{dTC}{DQ}$$

উদাহৰণ 4.7 ঃ এটা উৎপাদন প্ৰতিষ্ঠানৰ মুঠ ব্যয় ফলনটো এনেদৰে দিয়া আছে ঃ

$TC = Q^3 - 6Q^2 + 2Q + 50$

য'ত,Q হ'ল উৎপাদিত সামগ্ৰীৰ পৰিমাণ ।

উলিয়াব লাগে, (i) মুঠ স্থিৰ ব্যয়

(ii) মুঠ পৰিৱৰ্তনশীল ব্যয়

(iiii) গড় ব্যয়

(iv) গড় স্থিৰ ব্যয়

(v) গড় পৰিৱৰ্তনশীল ব্যয়

(vi) প্ৰান্তিক ব্যয়

সমাধানঃ দিয়া আছে,

$TC = Q^3 - 6Q^2 + 2Q + 50$

আমি জানোঁ,

$TC = TVC + TFC$

আৰু $TC = TFC$, [Θ যেতিয়া $Q = 0$, তেতিয়া $TVC = 0$]

এনেদৰে, $Q = 0$ ত

$TC = Q^3 - 6Q^2 + 2Q + 50$

$= 0^3 - 6(0)^2 + 2(0) + 50$

$\therefore TFC = 50$

(i) মুঠ স্থিৰ ব্যয় হ'ল ৫০

(ii) মুঠ পৰিৱৰ্তনশীল ব্যয় (TVC) = TC – TFC [Θ TC = TVC + TFC]

$= Q^3 - 6Q^2 + 2Q - 50 - 50$

$\therefore TVC = Q^3 - 6Q^2 + 2Q$

(iiii) আমি জানোঁ,

$$AC = \frac{TC}{Q}$$

$$= \frac{Q^3 - 6Q^2 + 2Q + 5}{Q}$$

$$\therefore AC = Q^2 - 6Q + 2 + \frac{5}{Q}$$

(i v) আমি জানোঁ,

$$AFC = \frac{TFC}{Q}$$

$$= \frac{50}{Q}$$

(v) আমি জানোঁ,

$$AVC = \frac{TVC}{Q}$$

$$= \frac{Q^3 - 6Q^2 + 2Q}{Q}$$

$$\therefore AVC = Q^2 - 6Q + 2$$

(vi)আমি জানোঁ,

$$MC = \frac{d}{dQ}TC$$

$$= \frac{d}{dQ}\left(Q^3 - 6Q^2 + 2Q + 50\right)$$

$$= \frac{d}{dQ}Q^3 - \frac{d}{dQ}6Q^2 + \frac{d}{dQ}2Q + \frac{d}{dQ}50$$

$$\therefore MC = 3Q^2 - 12Q + 2$$

(অৱকলনৰ বিষয়ে বিশদভাৱে পিছৰ অধ্যায়ত আলোচনা কৰা হ'ব)

উদাহৰণ 4.8 ঃ এটা উৎপাদন গোটৰ মুঠ ব্যয় 70 টকা আৰু উৎপাদনৰ পৰিমাণ হ'ল 5 একক। গড় আৰু গড় পৰিৱর্তনশীল ব্যয় উলিয়াওক যদিহে গড় স্থিৰ ব্যয় 4 টকা হয়।

সমাধানঃ দিয়া আছে,

TC = Rs 70 টকা

Q = 5 একক

AFC = 4 টকা

আমি জানো, $AC = \frac{TC}{Q} = \frac{70}{5}$ [Θ TC = 70, Q = 5]

$\therefore$ AC = 14

আকৌ, AC = AVC + AFC

$\Rightarrow$ AVC = AC – AFC

= 14 – 4 [Θ AFC = 4]

$\therefore$ AVC = 10.

৪.১০ আয় ফলন (REVENUE FUNCTION)

আয় ফলনে এক নির্দ্দিষ্ট দৰত এটাৰ বাবে থকা চাহিদাৰ পৰিমান আৰু আয়ৰ মাজৰ সম্পর্কক দেখুৱায়।

- **মুঠ আয় ফলন** (Total Revenue Function) ঃ মুঠ আয়ে সামগ্রী এটাৰ এক নির্দ্দিষ্ট পৰিমাণ বিক্রি কৰি পোৱা প্রাপ্তিক বুজায়। ই সামগ্রীটোৰ বজাৰ দৰ (P) আৰু বিক্রিৰ পৰিমাণ (Q) ৰ পুৰণফলৰ সমান।

  অর্থাৎ,

  TR = P X Q

অথবা, TR = AR X Q, য'ত AR = গড় আয় (Average revenue)

মুঠ আয় ফলনক এনেদৰে প্ৰকাশ কৰা হয়,

TR = R (Q), য'ত Q হ'ল বিক্ৰি হোৱা সামগ্ৰীৰ পৰিমাণ

- **গড় আয় ফলন** (Average Revenue Function) ঃ ই প্ৰতি একক মুঠ আয়ক বুজায়।

  সাংকেতিকভাৱে, $AR = \frac{TR}{Q}$

  য'ত, AR = গড় আয়, TR = মুঠ আয়, Q = বিক্ৰি হোৱা সামগ্ৰীৰ পৰিমাণ

- **প্ৰান্তিক ব্যয় ফলন** (Marginal Revenue Function)ঃ ই হ'ল এক অতিৰিক্ত গোট সামগ্ৰী বিক্ৰি কৰাৰ ফলত মুঠ আয়ত হোৱা পৰিৱৰ্তন।

  সাংকেতিকভাৱে, $MR_n = TR_n - TR_{n-1}$

  য'ত, MR_n = n তম গোট বিক্ৰি কৰি পোৱা প্ৰান্তিক আয় (Marginal revenue of the n^{th} unit)

  TR_n = n সংখ্যক উৎপাদন বিক্ৰি কৰি পোৱা মুঠ আয় (Total revenue of n units)

  TR_{n-1} = n -1 সংখ্যক সামগ্ৰী বিক্ৰি কৰি পোৱা মুঠ আয়

  গাণিতিকভাৱে TR ফলনক Q ৰ বাবে অৱকলন কৰিও ইয়াক কৰিব পাৰি এনেদৰে,

$$MR = \frac{dTR}{dQ}$$

উদাহৰণ 4.9 ঃ মুঠ আয় ফলনটো দিয়া আছে এনেদৰে ঃ $TR = 30 + 14Q - 17Q^2$। গড় আয় আৰু প্ৰান্তিক আয় ফলন উলিয়াওক -

সমাধানঃ দিয়া আছে,

$$TR = 30 + 15Q - 17Q^2$$

আমি জানো,

$$AR = \frac{TR}{Q}$$

$$= \frac{30 + 15Q - 17Q^2}{Q}$$

$$= \frac{30}{Q} + 15 - 17Q$$

আকৌ,

$$MR = \frac{dTR}{dQ}$$

$$= \frac{d}{dQ}\left(30 + 15Q - 17Q^2\right)$$

$= 15 - 34Q$

(অৱকলনৰ বিষয়ে বিশদভাৱে পিছৰ অধ্যায়ত আলোচনা কৰা হ'ব) ।

৪.১১ লাভ ফলন (PROFIT FUNCTION)

লাভ (π চিনেৰে বুজোৱা হয়) হ'ল মুঠ আয় (TR) আৰু মুঠ ব্যয় (TC) ৰ মাজৰ পার্থক্য। অর্থাৎ π = TR – TC, য'ত, π = লাভ ফলন ।

উদাহৰণ 4.10 ঃ এক পুর্ণ প্রতিযোগীতামূলক বজাৰত এটা প্রতিষ্ঠানৰ মুঠ আয় আৰু মুঠ ব্যয় ফলন দুটা এনেদৰে দিয়া আছে,

$TR = 20Q$

$TC = Q^2 + 4Q + 20$

সর্বাধিক লাভ উলিয়াওক যেতিয়া Q = 8 ।

সমাধানঃ দিয়া আছে,

$TR = 20Q$

$TC = Q^2 + 4Q + 20$

আমি জানো,

$\pi = TR - TC$

$= 20Q - (Q^2 + 4Q + 20)$

$= 20Q - Q^2 - 4Q - 20$

যেতিয়া $Q = 8$,

$\pi = 20.8 - 8^2 - 4.8 - 20$

$= 160 - 64 - 32 - 20$

$= 160 - 116$

$\therefore \pi = 44$

উদাহৰণ 4.11 ঃ এগৰাকী একচেটীয়া ব্যৱসায়ীৰ গড় আয় (AR) আৰু মুঠ ব্যয় (TC) ফলন দুটা এনেধৰণৰ,

$AR = 30 - Q$

$TC = Q^3 - 15Q^2 + 10Q + 100$

সর্বাধিক লাভ উলিয়াওক যেতিয়া Q = 10 ।

সমাধানঃ দিয়া আছে,

$AR = 30 - Q$

$\therefore TR = AR.Q = (30-Q)Q = 30Q - Q^2$

আৰু $TC = Q^3 - 15Q^2 + 10Q + 100$

আমি জানো,

$\pi = TR \ \ TC$

$= (30Q - Q^2) - (Q^3 - 15Q^2 + 10Q + 100)$

$= 30Q - Q^2 - Q^3 + 15Q^2 - 10Q - 100$

$= 30.10 - (10)^2 - (10)^3 + 15.(10)^2 - 10.10 - 100$

$= 300 - 100 - 1000 + 1500 - 100 - 100$

$= 1800 - 1300$

$\therefore \pi = 500$.

৪.১২ বাজেট ফলন (BUDGET FUNCTION)

বাজেট ৰেখা (Budget line) হ'ল নির্দ্দিষ্ট পৰিমাণৰ আয় আৰু দামত কিনিব পৰা দুবিধ সামগ্রীৰ সকলোবোৰ সাম্ভাব্য সংযোজনৰ লেখ উপস্থাপন, যাতে এই প্রতিটো সংযোজনৰ ব্যয় উপভোক্তা গৰাকীৰ মুদ্রা আয়ৰ সমান হয়। অন্য ধৰণে ক'বলৈ গ'লে, বাজেট ৰেখাটে এগৰাকী উপভোক্তাই নির্দ্দিষ্ট আয় আৰু সামগ্রীটোৰ বজাৰ দৰত উপনীত হ'ব পৰা দুবিধ সামগ্রীৰ সংযোজনবোৰ দেখুৱায়।

বাজেট ৰেখাক এটা সমীকৰণৰ সহায়ত দেখুৱাব পাৰিঃ

$$M = P_xQ_x + P_yQ_y$$

য'ত M = মুদ্রা ব্যয়

P_x = x সামগ্রীৰ দৰ

P_y = y সামগ্রীৰ দৰ

Q_x = x সামগ্রীৰ পৰিমাণ

Q_y = y সামগ্রীৰ পৰিমাণ

উদাহৰণ 4.12 ঃ এজন উপভোক্তৰ মুঠ মুদ্রা আয় হ'ল M আৰু তেওঁ তেওঁৰ সমগ্র মুদ্রা আয় X আৰু Y দুবিধ সামগ্রীত ব্যয় কৰে। X আৰু Y ৰ দৰ ক্রমে P_x আৰু P_y । বাজটে সমীকৰণটো ব্যাখ্যা কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে,

উপভোক্তা গৰাকীৰ মুদ্রা আয় = M

X সামগ্রীৰ দাম = Px

Y সামগ্রীৰ দাম = P_y

X সামগ্রীৰ পৰিমাণ = Q_x

Y সামগ্রীৰ পৰিমাণ = Q_y

গতিকে উপভোক্তাজনৰ বাজেট সমীকৰণ হ'ল,

$$M = P_xQ_x + P_yQ_y$$

উদাহৰণ 4.13 ঃ এজন উপভোক্তাই তেওঁৰ নির্দ্দিষ্ট মুদ্রা আয়েৰে X সামগ্রীৰ 10 একক আৰু Y সামগ্রীৰ 15 একক কিনিব পাৰে আৰু X আৰু Y সামগ্রীৰ দাম হ'ল ক্রমে 12 টকা আৰু

10 টকা। উপভোক্তা গৰাকীৰ আয় নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে।

Q_x = 10 একক

Q_y = 15 একক

P_x = 12 টকা

P_y = 10 টকা

গতিকে উপভোক্তাজনৰ আয়ৰ পৰিমাণ হ'ব,

$$M = P_xQ_x + P_yQ_y$$
$$= 12.10 + 10.15$$
$$= 120 + 150$$
$$= 270$$
$$\therefore M = Rs.\ 270$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৩ ঃ ধৰা হ'ল চাহিদা ফলনটো দিয়া আছে, Q_d=40 – 5P.

নিম্নলিখিতবোৰ উলিয়াওক ঃ

(i) 2 টকা দৰত চাহিদা । (ii) দৰ, যেতিয়া চাহিদা 0 ।

(iiii) চাহিদা, যেতিয়া দৰ 0 ।

প্রশ্ন নং ৪ ঃ বজাৰ আৰ্হিটো দিয়া আছে এনেদৰে,

$Q_d = 18 – 2P$

$Q_3 = –7 + 3P$

$Q_d = Q_s$

ভাৰসাম্য দৰ আৰু পৰিমাণ উলিয়াওক -

প্রশ্ন নং ৫ ঃ এটা প্রতিষ্ঠানৰ মুঠ আয় আৰু মুঠ ফলন দুটা দিয়া আছে,

$TR = 100Q–4Q^2$

TC = 50 + 20Q ।

লাভ ফলনটো উলিয়াওক -



৪.১৩ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- চাহিদা ফলনে এবিধ সামগ্রীৰ চাহিদা আৰু ইয়াৰ বিভিন্ন নির্দ্ধাৰকসমূহৰ মাজত সম্পর্ক দেখুৱায়।

- যোগান ফলনে এবিধ সামগ্ৰীৰ যোগান আৰু ইয়াৰ বিভিন্ন নির্দ্ধাৰকসমূহৰ মাজত কার্যকৰি সম্পর্কে দেখুৱায়।
- বিভিন্ন ধৰণৰ ব্যয়ৰ হিচাপঃ

  TVC = TC – TFC বা, AVCXQ

  TFC = TC – TVC বা, AFCXQ

  $AC = \frac{TC}{Q}$ বা, AFC + AVC

  $AVC = \frac{TVC}{Q}$ বা, AC – AFC

  $AFC = \frac{TFC}{Q}$ বা, AC – AVC

  $MC_n = TC_n – TC_{n–1}$, বা, $\frac{d}{dQ}TC$

- বিভিন্ন ধৰণৰ আয়ৰ হিচাপঃ

  TR = PXQ বা, ARXQ

  $AR = \frac{TR}{Q}$

  $MR_n = TR_n – TRn\text{-}1$ বা, $\frac{d}{dQ}TR$

- লাভ হ'ল আয় আৰু ব্যয়ৰ ব্যৱধানঃ

  π = TR – TC ।

- বাজেট ৰেখাই এগৰাকী উপভোক্তাই নির্দ্দিষ্ট আয় আৰু সামগ্ৰীটোৰ বজাৰ দৰত উপনীত হ'ব পৰা দুবিধ সামগ্ৰীৰ সংযোজনবোৰ দেখুওৱা লেখ।



৪.১৪ অধিক জানিবলৈ

1) Agarwal, D.K. (2012). Business Mathematics, New Delhi: Vrindra Publication (p) Ltd.

2) Baruah, S. (2011). Basic Mathematics and Its Application in Economics, New Delhi: Trinity Press Pvt. Ltd.

3) Bose, D. (2004). *Mathematical Economics;* New Delhi: Himalaya Publishing House.

4) Chiang, A.C. (2006) *Fundamental Methods of Economics Analysis*; New Delhi: MC Graw Hill Education India.

5) Kandoi, Balwant (2011). *Mathematics for Business and Economics with Application;* New Delhi: Himalaya Publishing House.



৪.১৫ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ যদি সমীকৰণ এটাৰ দুয়োটা পক্ষ ইয়াৰ চলকসমূহৰ প্ৰতিটো মানৰ বাবেই সত্য হয়, তেনে সমীকৰণক 'অভেদ' বুলি কোৱা হয়।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ যদি বহুৰাশিযুক্ত সমীকৰণ এটাত স্বতন্ত্ৰ চলকৰ সৰ্বোচ্চ ঘাত ২ হয়, ইয়াক দ্বিতীয় ডিগ্ৰীৰ বা সাধাৰণ দ্বিঘাত সমীকৰণ বুলি কোৱা হয় আৰু ই এনেকুৱা ৰূপ লয়, $ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0)$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে, $Q_d = 40 - 5p$

(i) $Q_d = 40 - 5.2$ [Θ P = 2]

$= 40 - 10$

$= 30$

$\therefore Q_d = 30$ একক যেতিয়া P = 2 টকা

(ii) $Q_d = 40 - 5P$

$\Rightarrow 0 = 40 = 5P$ [$\Theta Q_d = 0$]

$\Rightarrow 5P = 40$

$\Rightarrow P = 8$

$\therefore$ P = Rs. 8, যেতিয়া $Q_d = 0$

(iii) $Q_d = 40 - 5P$

$\Rightarrow Q_d = 40 - 5.0$ [Θ P =0]

$\Rightarrow$ Qd = 40

$\therefore Q_d = 40$ একক, যেতিয়া P = 0.

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে,

$Q_d = 18 - 2P$

$Q_s = -7 + 3P$

$Q_d = Q_s$

ভাৰসাম্য অৱস্থাত, আমি জানো,

$Q_d = Q_s$

$\Rightarrow$ 18 – 2P = –7 + 3P

$\Rightarrow$ 5P = 25

$\Rightarrow \overline{P}$ = 5

এতিয়া চাহিদা ফলন অথবা যোগান ফলনত $\overline{P}$ = 5 বহুৰাই আমি পাওঁ,

$\overline{Q}$ = 18 – 2P

= 18 – 2 x 5

$\therefore \overline{Q}$ = 8

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে,

TR = 100Q – 4Q^2

TC = 50 + 20Q

প্রতিষ্ঠানটোৰ লাভ ফলনটো হ'ব,

π = TR – TC

= (100Q – 4Q^2) – (50 + 20Q)

= 100Q – 4Q^2 – 50 – 20Q

π = 80Q – 4Q^2 – 50.



৪.১৬ আৰ্হি প্রশ্ন

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল এখন বজাৰত দুগৰাকী উপভোক্তা আছে। চাহিদা ফলন দুটা এনেধৰণৰ

d_1(P) = 25 – P (যেতিয়া $P \leq 25$)

d_1(P) = 0 (যেতিয়া p>25)

আৰু d_2(P) = 20 – 2P (যেতিয়া $P \leq 25$)

d_2(P) = 0 (যেতিয়া p>25)

বজাৰ চাহিদা ফলনটো উলিয়াওক ।

প্রশ্ন নং ২ঃ যোগান ফলনটো দিয়া আছে,

Q_s = –14 + 2P

(a) ১০ টকা দৰত যোগান নির্ণয় কৰক

(b) কিমান দৰত যোগান 0 হ'ব?

(c) কিমান দৰত প্রতিষ্ঠানটোই 15 একক যোগান ধৰিবলৈ ইচ্ছুক হ'ব?

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ তলৰ বজাৰ আৰ্হিৰ পৰা ভাৰসাম্য দৰ আৰু পৰিমাণ আহৰণ কৰক -

$Q_d = 20 - 2.5\ P$

$Q_3 = -4 + 1.5P$

$Q_d = Q_3$

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ হ্ৰস্বকালীন গড় ব্যয় ফলন দিয়া আছে,

$$AC = 2q^2 - 15Q + 30 + \frac{16}{Q}$$

উলিয়াওক -

(a) TC (b) AVC (c) AFC (d) MC

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ তলৰ সমীকৰণসমূহ সমাধান কৰক

(a) $2x + 3y = 9$
$3x + 5y = 12$

(b) $5x_1 + 7x_2 = 85$
$3x_1 + 9x_2 = 75$

(c) $7x_2 - 2x_2 = 8$
$3x_1 + 6x_2 = 24$

(d) $4x - 3y = 11$
$2x + 2y = 16$

*** ***** ***

অধ্যায় ৫ ঃ নিশ্চায়ক (DETERMINANTS)

অধ্যায় গাঁথনি

৫.১ উদ্দেশ্য

৫.২ পৰিচয়

৫.৩ দ্বিতীয় ক্ৰমৰ নিশ্চায়ক

৫.৪ তৃতীয় ক্ৰমৰ নিশ্চায়ক

৫.৫ নিশ্চায়কৰ ধৰ্ম

৫.৬ ক্ৰেমাৰৰ নীতি অনুসৰি ৰৈখিক সমীকৰণৰ সমাধান কৰাৰ নিয়ম

৫.৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৫.৮ অধিক জানিবলৈ

৫.৯ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

৫.১০ আৰ্হি প্ৰশ্ন

৫.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- নিশ্চায়কৰ সংজ্ঞা দিব পাৰিব
- ২ আৰু ৩ ক্ৰমৰ নিশ্চায়কবোৰৰ মূল্যাংকন কৰিব পাৰিব
- নিশ্চায়কৰ মূল্যাংকনৰ বাবে নিশ্চায়কৰ ধৰ্মবোৰ ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰিব
- ক্ৰেমাৰ নীতি ব্যৱহাৰ কৰি নিশ্চায়কৰ সমস্যা সমাধান কৰিব পাৰিব ।

৫.২ পৰিচয়

দুটা অথবা তিনিটা চলকৰ ৰৈখিক সমীকৰণৰ প্ৰণালী সমাধান কৰাৰ এটা উপযোগী আহিলা হ'ল নিশ্চায়কৰ ধাৰণা। এই অধ্যায়টিত নিশ্চায়কৰ ধাৰণাটি আলোচনা কৰা হ'ব। নিশ্চায়কৰ মূল্যাংকনত সহায় কৰা নিশ্চায়কৰ ধৰ্মবোৰৰ অধ্যয়ন হ'ল আন এক আলোচ্য বিষয়। আমি ৰৈখিক সমীকৰণৰ প্ৰণালী এটা সমাধান কৰিবলৈ 'ক্ৰেমাৰৰ নীতি' নামৰ পদ্ধতিটোৰে নিশ্চায়ক ব্যৱহাৰ কৰি চাম।

৫.৩ দ্বিতীয় ক্ৰমৰ নিশ্চায়ক (DETERMINANT OF ORDER 2)

ধৰা হ'ল, $a_1x + b_1y = 0$ আৰু $a_2x + b_2y = 0$ দুটা সমীকৰণ

যদি x আৰু y ক সমীকৰণ দুটাৰ পৰা বাদ দিয়া হয়,

তেন্তে আমি পাম $-\frac{y}{x}=\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$

$$\Rightarrow a_1b_2-a_2b_1=0$$

ইয়াক সংক্ষেপে লিখিলে হ'ব $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$

আন অর্থত, আমি পালোঁ $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1=0$.

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ এই ৰূপটোক **দ্বিতীয় ক্রমৰ নিশ্চায়ক** (second order determinants) বোলে। এই অভিব্যক্তিটোত দুটা আনুভূমিক শাৰী আছে, $a_1 \;\; b_1$ আৰু $a_2 \;\; b_2$। অভিব্যক্তিটোৰ উলম্ব শাৰী দুটা হ'ল $\begin{matrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{matrix}$। আনুভূমিক শাৰী দুটাক 'শাৰী' (rows) আৰু উলম্ব শাৰী দুটাক স্তম্ভ (columns) বোলা হয়। দ্বিতীয় ক্রমৰ নিশ্চায়ক এটাত ২টা শাৰী আৰু ২টা স্তম্ভ থাকে। a_1, b_1, a_2, b_2 সংখ্যাকেইটাক **নিশ্চায়কৰ উপাদান** (elements of the determinant) বোলে। $a_1b_2-a_2b_1$ ক নিশ্চায়কটোৰ সম্প্রসাৰণ (expansion) অথবা মান (value) বোলে।

উদাহৰণ 5.1 ঃ মূল্যায়ন কৰক ঃ (i) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x & x-1 \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$

সমাধান ঃ (i) আমি পালোঁ, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}=1.(-4)-(-2).3=-4+6=2$.

(ii) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x & x-1 \end{vmatrix}=(x+1).(x-1)-x.x=x^2-1-x^2=-1$.

(iii) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}=(x-1)(x^2+x+1)-x^3$

$$=x^3-1-x^3$$
$$=-1\cdot$$

(iv) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}=a^2b^2-(ab)^2=0$.

উদাহৰণ 5.2 ঃ x ৰ মান নিৰ্ণয় কৰক, যদি—

(i) $\begin{vmatrix} x-3 & x \\ x+1 & x+3 \end{vmatrix} = 6$ (ii) $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2x+1 \\ x+1 & 4x+2 \end{vmatrix} = 0$

সমাধান ঃ (i) আমি পালোঁ, $\begin{vmatrix} x-3 & x \\ x+1 & x+3 \end{vmatrix} = (x-3)(x+3) - x(x+1)$

$$= (x^2 - 9) - x^2 - x$$
$$= -x - 9$$

$\therefore -x - 9 = 6$

$\Rightarrow -x = 15$

$\Rightarrow x = -15$

(ii) আমি পালোঁ $\begin{vmatrix} 2x-1 & 2x+1 \\ x+1 & 4x+2 \end{vmatrix} = (2x-1)(4x+2) - (x+1)(2x+1)$

$$= 8x^2 + 4x - 4x - 2 - 2x^2 - x - 2x - 1$$
$$= 6x^2 - 3x - 3$$
$$= 3(2x^2 - x - 1)$$

$\therefore 3(2x^2 - x - 1) = 0$

$\Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4}$

$= \dfrac{1 \pm 3}{4}$

$= 1, -\dfrac{1}{2}$

উদাহৰণ 5.3 ঃ x ৰ মান নিৰ্ণয় কৰক, যদি $\begin{vmatrix} x & 5 \\ 7 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

সমাধান ঃ দিয়া হৈছে, $\begin{vmatrix} x & 5 \\ 7 & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x^2 - 35) + (1 - 2) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 35 - 1 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 36 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 36$

$\Rightarrow x = \pm 6$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ মূল্যায়ন কৰক ঃ

(i) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 11 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} 2+\sqrt{3} & 3+\sqrt{11} \\ 3-\sqrt{11} & 2-\sqrt{3} \end{vmatrix}$

প্রশ্ন নং ২ঃ x ৰ মান নির্ণয় কৰক ঃ

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -1 \\ 5 & x \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$

প্রশ্ন নং ৩ঃ যদি $\begin{vmatrix} 3 & p \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6$, তেন্তে p ৰ মান কিমান হ'ব?

প্রশ্ন নং ৪ঃ প্রমাণ কৰক যে, $\begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ c-id & a-ib \end{vmatrix} = a^2+b^2-c^2-d^2$

৫.৪ তৃতীয় ক্রমৰ নিশ্চায়ক (DETERMINANT OF ORDER 3)

ওপৰৰ ৫.৩ নম্বৰ শিতানত আমি দ্বিতীয় ক্রমৰ নিশ্চায়ক বিষয়ে আলোচনা কৰিলো। এইবাৰ আমি ৩টা শাৰী আৰু ৩টা স্তম্ভ থকা নিশ্চায়কৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

তলৰ সমীকৰণ কেইটালৈ মন কৰক—

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0 \quad \ldots (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = 0 \quad \ldots (2)$$

আৰু $a_3x + b_3y + c_3z = 0 \quad \ldots (3)$

(2) আৰু (3) সমাধান কৰি আমি পাম, $\frac{x}{b_2c_3 - b_3c_2} = \frac{y}{c_2a_3 - c_3a_2} = \frac{z}{a_2b_3 - a_3b_2}$

এতিয়া (1)ৰ x, y আৰু z ৰ সমানুপাতিক মানৰ সলনি এই মানকেইটা বহুৰাই আমিপাম

$$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(c_2a_3 - c_3a_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2) = 0$$

ইয়াক সংক্ষেপে লিখিলে হ'ব

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

আন অর্থত, আমি পালো

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(a_3c_2 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - a_3c_2)$$

$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ এই ৰূপটোক **তৃতীয় ক্ৰমৰ নিশ্চায়ক** (third order determinants) বোলে।

যিহেতু ইয়াত ৩টা শাৰী আৰু ৩টা স্তম্ভ আছে, সেয়েহে ইয়াক ৩ ক্ৰমৰ নিশ্চায়ক বোলা হয়।

$a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(a_3c_2 - a_2c_3) + c_1(a_2b_3 - a_3c_2)$ ক নিশ্চায়কটোৰ সম্প্ৰসাৰণ অথবা মান বোলে।

টোকা ঃ ৩ ক্ৰমৰ নিশ্চায়ক এটাত ৯টা (নটা) উপাদান থাকে।

নিশ্চায়কৰ মান ঃ

২ ক্ৰমৰ নিশ্চায়কৰ (দ্বিতীয় ক্ৰমৰ নিশ্চায়ক) ৰূপত ৩ ক্ৰমৰ নিশ্চায়কৰ মান নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি। ইয়াক 'এটা শাৰীৰ (অথবা এটা স্তম্ভৰ) নিশ্চায়কৰ প্ৰসাৰণ' (expansion of a determinant along a row/or a column) বুলি কোৱা হয়। ৩ ক্ৰমৰ তিনিটা স্তম্ভৰ (ধৰা হ'ল R_1, R_2 আৰু R_3) আৰু তিনিটা স্তম্ভৰ (ধৰা হ'ল C_1, C_2 আৰু C_3) মান একে দিয়া থাকিলে প্ৰতিটো শাৰী আৰু স্তম্ভৰ ৬ ধৰণে নিশ্চায়কৰ প্ৰসাৰণ নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।

তলৰ ৩ ক্ৰমৰ নিশ্চায়কৰ মান নিৰ্ণয় কৰক—

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

প্ৰথমে আমি ১ম শাৰীৰ (R_1) প্ৰদত্ত নিশ্চায়কৰ প্ৰসাৰণ নিৰ্ণয় কৰিম ঃ

প্ৰথম পদক্ষেপ ঃ R_1ৰ a_1 উপাদানক $(-1)^{1+1}$ [$(-1)^{a_1}$ৰ অৱস্থান] ৰে পূৰণ কৰিম।

প্ৰথম শাৰী (R_1) আৰু প্ৰথম স্তম্ভৰ (C_1) উপাদানবোৰ আঁতৰোৱাৰ পাছত ২ ক্ৰমৰ নিশ্চায়কেৰে পূৰণ কৰা হয় (যিহেতু R_1 আৰু C_1 ত a_1 পোৱা যায়)।

অৰ্থাৎ, $(-1)^{1+1} a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

দ্বিতীয় পদক্ষেপ ঃ R_1ৰ দ্বিতীয় উপাদান b_1ক $(-1)^{1+2}$ [$(-1)^{b_1}$ৰ অৱস্থান] ৰে পূৰণ কৰিম।

দ্বিতীয় স্তম্ভৰ R_1 আৰু C_2 ত পোৱা b_1 প্ৰথম শাৰীৰ (R_1) আৰু (C_2) উপাদানবোৰ আঁতৰাই পোৱা ২ ক্ৰমৰ নিশ্চায়কেৰে সংখ্যাটোক পূৰণ কৰা হয়।

অৰ্থাৎ, $(-1)^{1+2} b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$

তৃতীয় পদক্ষেপ ঃ R_1ৰ তৃতীয় উপাদান C_1 ক$(-1)^{1+3}$ [$(-1)^{c_1}$ৰ অৱস্থান]ৰে পূৰণ কৰিম। প্রথম শাৰী (R_1) আৰু তৃতীয় স্তম্ভৰ (C_3) R_1 আৰু C_3 ত থকা c_1ৰ উপাদানবোৰ আঁতৰাই পোৱা ২ ক্রমৰ নিশ্চায়কেৰে সংখ্যাটোক পূৰণ কৰা হয়।

অর্থাৎ, $(-1)^{1+3} c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

চতুর্থ পদক্ষেপ ঃ ওপৰৰ প্রথম, দ্বিতীয় আৰু তৃতীয় কার্যৰ দ্বাৰা পোৱা মানবোৰৰ মুঠ যোগফলেই হ'ব নিশ্চায়কৰ প্রসাৰণ।

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1 .$$

দ্বিতীয় শাৰীৰ (R_2) প্রসাৰণ ঃ

নিশ্চায়ক বিচাৰক $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

R_2 প্রসাৰণ কৰি আমি পালোঁ,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} b_2 \begin{vmatrix} a_2 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= -a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + b_2(a_2c_3 - a_3c_1) - c_2(a_1b_3 - a_3b_1)$$

$$= -a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_2b_2c_3 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 + a_3b_1c_2 .$$

C_2 প্রসাৰণ কৰি আমি পালোঁ,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_3 - b_3c_1)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_3 - a_3b_3c_1$$

একেদৰে R_3, C_2 আৰু C_3ৰ নিশ্চায়কৰ প্রসাৰণ ঘটাব পৰা যায়।

টোকা ঃ যিকোনো শাৰী অথবা স্তম্ভৰে নিশ্চায়কৰ প্রসাৰণৰ মান সমান হ'ব।

উদাহৰণ 5.4 ঃ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ ৰ নিশ্চায়কৰ মান নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ R_1 প্রসাৰণ কৰিলে আমি পাম,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(0-0) - 2(0-0) + 4(-1-12)$$
$$= -52 .$$

উদাহৰণ 5.5 ঃ $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ ৰ

(i) যিকোনো শাৰী প্রসাৰণ কৰি নিশ্চায়কৰ মান নির্ণয় কৰক।

(ii) যিকোনো স্তম্ভ প্রসাৰণ কৰি নিশ্চায়কৰ মান নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ (i) (a) প্রথম শাৰী প্রসাৰণ কৰি আমি পাওঁ

$$\Delta = 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 1[3(-2) - (-1)4] + 2[(-2)(-2) - (1)(4)] + 3[(-2)(-1) - (3)(1)]$$
$$= -6 + 4 + 2(4-4) + 3(2-3)$$
$$= -2 - 3$$
$$= -5$$

(b) দ্বিতীয় শাৰী প্রসাৰণ কৰি আমি পাওঁ

$$\Delta = (-1)(-2)\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(4+3) + 3(-2-3) - 4(-1+2)$$
$$= 14 - 15 - 4$$
$$= -5$$

(c) তৃতীয় শাৰী প্রসাৰণ কৰি আমি পাওঁ

$$\Delta = 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -8 - 9 + 4 + 6 - 2(3-4)$$

$$= -17 + 10 + 2$$
$$= -5$$

(ii) (a) প্ৰথম স্তম্ভ প্ৰসাৰণ কৰি আমি পাওঁ

$$\Delta = 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= -6 + 4 + 2(4+3) + 1(-8-9)$$
$$= -2 + 14 - 17$$
$$= -5$$

(b) দ্বিতীয় স্তম্ভ প্ৰসাৰণ কৰি আমি পাওঁ

$$\Delta = (-1)(-2)\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= 2(4-4) + 3(-2-3) + (4+6)$$
$$= -15 + 10$$
$$= -5$$

(c) তৃতীয় স্তম্ভ প্ৰসাৰণ কৰি আমি পাওঁ

$$\Delta = 3\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 3(2-3) - 4(-1+2) - 2(3-4)$$
$$= -3 - 4 + 2$$
$$= -5$$

৫.৫ নিশ্চায়কৰ ধৰ্ম (PROPERTIES OF DETERMINANTS)

প্ৰতিটো নিশ্চায়কৰে কেইটামান ধৰ্ম অথবা বৈশিষ্ট্য থাকে। সমস্যা সমাধান কৰাত এই ধৰ্মকেইটা অতি উপযোগী। তলত ৩ ক্ৰমৰ নিশ্চায়কৰ ধৰ্মবোৰ আলোচনা কৰা হ'ল।

ধৰ্ম ১ঃ যদি দুটা শাৰীৰ (অথবা স্তম্ভৰ) আন্তঃবিনিময় ঘটে, তেন্তে নিশ্চায়কৰ মান অপৰিৱৰ্তিত হৈ ৰয়।

যেনে, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

টোকা ঃ যদি $R_i = i$ তম শাৰী আৰু $C_i = i$ তম স্তম্ভ আৰু শাৰী স্তম্ভৰ আন্তঃ বিনিময় ঘটে, তেন্তে আমি ইয়াক $C_i \leftrightarrow R_i$ প্ৰতীকেৰে প্ৰকাশ কৰোঁ।

ধৰ্ম ২ঃ যদি কোনো নিশ্চায়কৰ যিকোনো দুটা শাৰীৰ (অথবা দুটা স্তম্ভৰ) আন্তঃ বিনিময় ঘটে, তেন্তে নিশ্চায়ক চিহ্ন সলনি হয়।

যেনে, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

টোকা ঃ এই ক্ষেত্রত, শাৰীৰ আন্তঃ বিনিময় বুজাবলৈ $R_i \leftrightarrow R_j$ চিহ্ন আৰু স্তম্ভৰ আন্তঃ বিনিময় বুজাবলৈ $C_i \leftrightarrow C_j$ চিহ্ন ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

ধর্ম ৩ঃ যদি কোনো নিশ্চায়কৰ যিকোনো দুটা শাৰী (অথবা দুটা স্তম্ভ) সদৃশ হয় (সকলো ক্রমিক উপাদান একে), তেনে নিশ্চায়কৰ মান শূন্য (০) হয়।

যেনে, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

ধর্ম ৪ঃ যদি কোনো নিশ্চায়কৰ এটা শাৰীৰ (অথবা এটা স্তম্ভৰ) প্রতিটো উপাদানকে ধ্রুৱক সংখ্যা *k* ৰে পূৰণ কৰিব লাগিব।

যেনে, $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

টোকা ঃ যদি এই ক্ষেত্রত আমি $R_i \leftrightarrow R_i + kR_i$ অথবা $C_i \leftrightarrow C_i + kC_i$ কার্যবিধি প্রয়োগ কৰোঁ তেন্তে নিশ্চায়কৰ মান একেই থাকিব।

ধর্ম ৫ঃ যদি কোনো এটা শাৰীত (অথবা স্তম্ভত) একে শাৰীৰ (অথবা স্তম্বৰ) উপাদান k বাৰ যোগ কৰা হয়, তেন্তে নিশ্চায়কটোৰ মান সলনি নহয়।

যেনে, $\begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

টোকা ঃ যদি আমি $R_i \leftrightarrow R_i kR_j$ অথবা $C_i \leftrightarrow C_i kC_j$ বিধি প্রয়োগ কৰোঁ, তেন্তে নিশ্চায়কৰ মান সলনি নহয়।

ধর্ম ৬ঃ যদি কোনো শাৰী (অথবা স্তম্ভ) দুই অথবা ততোধিক উপাদানৰ যোগফল হয়, তেন্তে ইয়াৰ নিশ্চায়কক দুই অথবা ততোধিক নিশ্চায়কৰ যোগফল হিচাপে প্রকাশ কৰিব পাৰি।

যেনে, $\begin{vmatrix} a_1+d_1 & b_1+d_2 & c_1+d_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

ব্যাখ্যামূলক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 5.6 ঃ প্ৰমাণ কৰক যে

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

সমাধান ঃ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix}$

($C_2 \to C_2 - C_1$ আৰু $C_3 \to C_3 - C_1$ প্ৰয়োগ কৰক)

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c+a-b-a)$$
$$= (b-a)(c-a)(c-b)$$
$$= (a-b)(b-c)(c-a).$$

উদাহৰণ 5.7 ঃ প্ৰমাণ কৰক যে

$$\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix} = 0$$

সমাধান ঃ $\begin{vmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & c+a \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$

($C_3 \to C_3 + C_2$ প্ৰয়োগ কৰক)

$$= \begin{vmatrix} 1 & a & a+b+c \\ 1 & b & b+c+a \\ 1 & c & c+a+b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & 1 \end{vmatrix}$$

$= (a+b+c)\,0$ (C_1 আৰু C_3 সদৃশ)

$= 0$ ·

উদাহৰণ 5.8 ঃ যদি $\begin{vmatrix} 1 & x & -4 \\ 5 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 0$ হয়, তেন্তে x ৰ মান নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ প্রথম শাৰীৰ প্রসাৰণ কৰি আমি পাম—

$$\begin{vmatrix} 1 & x & -4 \\ 5 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & 8 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 8 \end{vmatrix} - x\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= 1(24) - x(40) - 4(-20+6)$$
$$= 24 - 40x + 56$$
$$= -40x + 80$$

$\Rightarrow -40x + 80 = 0$

$\Rightarrow x = 2$ ·

উদাহৰণ 5.9 ঃযদি $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 2 & x \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$ হয়, তেন্তে x ৰ মান নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ x & 2 & x \\ 1 & 3 & x \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow 0\begin{vmatrix} 2 & x \\ 3 & x \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} x & x \\ 1 & x \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 0 - 1(x^2 - x) + 0 = 0$

$\Rightarrow -x^2 + x = 0$

$\Rightarrow x(1-x) = 0$

$\Rightarrow x = 0,1$.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৫ঃ নিশ্চায়ক মান নির্ণয় কৰক

(a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 5 & 7 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 8 \end{vmatrix}$

(i) যিকোনো এটা শাৰীৰ প্রসাৰণ কৰি

(ii) যিকোনো এটা স্তম্ভৰ প্রসাৰণ কৰি

প্রশ্ন নং ৬ঃ নিশ্চায়কবোৰ উৎপাদকলৈ ভাঙি সমীকৰণকেইটা সমাধান কৰক—

(a) $\begin{vmatrix} x & x^2 & x^2 \\ 3 & 9 & 27 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & x^3 & 2 \\ 1 & x^2 & 3 \\ 1 & x & 4 \end{vmatrix} = 0$

৫.৬ ক্রেমাৰৰ নীতি অনুসৰি ৰৈখিক সমীকৰণৰ সমাধান কৰাৰ নিয়ম

এটা n অজ্ঞাত n অসুষম ৰৈখিক সমীকৰণ প্রণালী হ'ল—

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \rightarrow (1)$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \rightarrow (2)$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \rightarrow (n)$

পদ্ধতিটো তলত দিয়া ধৰণে লিখিব পাৰি—

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

অর্থাৎ, AX = B

A সহগ (co-efficient) মৌলকক্ষটোৰ নির্ণায়ক হ'ল—

=|A| = D (ধৰা হ'ল)

(1), (2), ……., (n) সমীকৰণকেইটাক $a_{11}, a_{21}, \ldots$ ৰ সহঃ উৎপাদক অর্থাৎ A_{11}, A_{12} .....

এই [ ] ৰ মাজত সমীকৰণ লিখা পদ্ধতিটোক মৌলকক্ষ (Matrix) বোলা হয়। মৌলকক্ষৰ বিষয়ে আমি পৰৱর্তী অধ্যায়টিত আলোচনা কৰিম।

A_{n1} আদিৰে ক্ৰমে পূৰণ কৰি আৰু যোগ কৰি আমি পাম

$$A_{11}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n) + A_{21}(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n) + \cdots$$
$$+ A_{n1}(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n) = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}$$
$$\Rightarrow (a_{11}A_1 + a_{21}A_{21} + \cdots + a_{n1}A_{n1})x_1 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1}$$
$$\Rightarrow Dx_1 = D_1$$

ইয়াত

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ and } D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} \ldots\ldots\ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ b_n & a_{n2} \ldots\ldots\ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

অনুৰূপ b বোৰেৰে 1-ম স্তম্ভৰ মৌলবোৰ সলনি কৰি D-ৰ পৰা আমি D_1 নির্ণায়কটো পাম।

$$\Rightarrow \frac{x_1}{D_1} = \frac{1}{D} \text{ যদিহে } D \neq 0$$

|A| ৰ 2য় স্তম্ভৰ মৌলবোৰৰ সহঃ উৎপাদকেৰে (1), (2), …… (n) সমীকৰণকেইটা পূৰণ আৰু যোগ কৰি আমি পাম—

$$Dx_2 = D_2, \text{ ইয়াত } D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & b_2 \ldots\ldots a_{2n} \\ a_{n1} & b_n \ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{x_2}{D_2} = \frac{1}{D}, D \neq 0$$

ওপৰৰ দৰে আমি পাম

$$\frac{x_1}{D_1} = \frac{x_2}{D_2} = \ldots\ldots\ldots = \frac{x_n}{D_n} = \frac{1}{D}, D \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{x_2}{D_2} = \frac{1}{D}, D \neq 0$$

প্ৰদত্ত সমীকৰণ পদ্ধতিৰ একক সমাধানটো তেতিয়াহে পোৱা যাব যদিহে $D \neq 0$ হয়। ইয়াৰ সহগ মৌলকক্ষটো অক্ষীয়মান (অর্থাৎ, সহগ মৌলকক্ষটোত এটাতকৈ বেছি মৌল আছে)। অর্থাৎ, সহগ মৌলকক্ষৰ মান (rank) হ'ল n = চলকৰ সংখ্যা

টোকা ঃ n অজ্ঞাত এটা n তম অসুষম ৰৈখিক সমীকৰণ প্ৰণালীৰ বাবে—

$$\frac{x_1}{D_1} = \frac{x_2}{D_2} = \ldots\ldots\ldots = \frac{x_n}{D_n} = \frac{1}{D}, D \neq 0$$

উদাহৰণ 5.10 ঃ তলৰ সমীকৰণটো ক্ৰেমাৰৰ নীতি (Cramer's rule) প্ৰয়োগ কৰি সমাধান কৰক—

$$3x + y + 2z = 3$$
$$2x - 3y - z = -3$$
$$x + 2y + z = 4$$

সমাধান ঃ

$$D = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-3 + 2) - 1(2+1) + 2(4+3)$$
$$= -3 - 3 + 14$$
$$= 8 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -3 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-3+2) - 1(-3+4) + 2(-6+12)$$
$$= -3 - 1 + 12$$
$$= 8$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & -1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-3+4) - 3(2+1) + 2(8+3)$$
$$= 3 - 9 + 22 = 16$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & -3 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-12+6) - 1(8+3) + 3(4+3)$$
$$= -18 - 11 + 21$$
$$= -8$$

$$\therefore x = \frac{D_1}{D} = \frac{8}{8} = 1$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{16}{8} = 2$$

$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{-8}{8} = -1$$

উদাহৰণ 5.11 ঃ ক্ৰেমাৰৰ নীতিৰ সহায়ত সমাধান কৰক—

$x+2y+3z = 6, \quad 3x-2y+z=2, \quad 4x+2y+z=7$

সমাধান ঃ

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1(-2-2)-2(3-4)+3(6+8)$$
$$= -4+2+42 = 40 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 7 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6(-2-2)-2(2-7)+3(4+14)$$
$$= -24+10+54 = 40$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 1(2-7)-6(3-4)+3(21-8)$

$= -5+6+39$

$= 40$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & -2 & 2 \\ 4 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

$= 1(-14-4)-2(21-8)+6(6+8)$

$= -18-26+84$

$= 84 - 44$

$= 40$

$$\therefore x = \frac{D_1}{D} = \frac{40}{40} = 1$$
$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{40}{40} = 1$$
$$z = \frac{D_3}{D} = \frac{40}{40} = 1$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

ক্ৰেমাৰৰ নীতি প্ৰয়োগ কৰি তলৰ সমীকৰণ প্ৰণালীবোৰ সমাধান কৰক ঃ

প্ৰশ্ন নং ৭ঃ $3x + 5y = 8$

$-x+2y-z = 0$

$3x-6y+4z=1$

প্ৰশ্ন নং ৮ঃ $x_1+x_2+x_3=7$,

$x_1 - x_2 + x_3 = 2$,

$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9$



৫.৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- যদি দুটা শাৰীৰ (অথবা স্তম্ভৰ) আন্তঃ বিনিময় ঘটে, তেন্তে নিশ্চায়কৰ মান অপৰিৱৰ্তিত হৈ ৰয়।
- যদি কোনো নিশ্চায়কৰ যিকোনো দুটা শাৰীৰ (অথবা দুটা স্তম্ভৰ) আন্তঃ বিনিময় ঘটে, তেন্তে নিশ্চায়ক চিহ্ন সলনি হয়।
- যদি কোনো নিশ্চায়কৰ যিকোনো দুটা শাৰী (অথবা দুটা স্তম্ভ) সদৃশ হয় (সকলো ক্ৰমিক উপাদান একে), তেন্তে নিশ্চায়কৰ মান শূন্য (০) হয়।
- যদি কোনো নিশ্চায়কৰ এটা শাৰীৰ (অথবা এটা স্তম্ভৰ) প্ৰতিটো উপাদানকে ধ্ৰুৱক সংখ্যা k ৰে ($k > 0$) পূৰণ কৰা হয়, তেন্তে নিশ্চায়কটোৰ মানকো k ৰে পূৰণ কৰিব লাগিব।
- যদি কোনো এটা শাৰীত (অথবা স্তম্ভত) একে শাৰীৰ (অথবা স্তম্ভৰ) উপাদান k বাৰ যোগ কৰা হয়, তেন্তে নিশ্চায়কটোৰ মান সলনি নহয়।
- যদি কোনো শাৰী (অথবা স্তম্ভ) দুই অথবা ততোধিক উপাদানৰ যোগফল হয়, তেন্তে ইয়াৰ নিশ্চায়কক দুই অথবা ততোধিক নিশ্চায়কৰ যোগফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।



৫.৮ অধিক জানিবলৈ

1) Agarwal, D.K. (2012). Business Mathematics, New Delhi: Vrindra Publication (p) Ltd.

2) Baruah, S. (2011). Basic Mathematics and Its Application in Economics,

New Delhi: Trinity Press Pvt. Ltd.

3) Bose, D. (2004). *Mathematical Economics;* New Delhi: Himalaya Publishing House.

4) Chiang, A.C. (2006) *Fundamental Methods of Economics Analysis*; New Delhi: MC Graw Hill Education India.

5) Kandoi, Balwant (2011). *Mathematics for Business and Economics with Application;* New Delhi: Himalaya Publishing House.

৫.৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 11 \end{vmatrix} = 22 + 21$

$= 43.$

(ii) $\begin{vmatrix} 2+\sqrt{3} & 3+\sqrt{11} \\ 3-\sqrt{11} & 2-\sqrt{3} \end{vmatrix} = \left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) - \left(3+\sqrt{11}\right)\left(3-\sqrt{11}\right)$

$= (4-3) - (9-11)$

$= 3.$

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) দিয়া আছে, $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -1 \\ 5 & x \end{vmatrix}$

$\Rightarrow 8x - 3 = 2x^2 + 5$

$\Rightarrow 2x^2 - 8x + 8 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0$

$\Rightarrow (x-2)^2 = 0$

$\Rightarrow x = 2,2.$

(ii) দিয়া আছে, $\begin{vmatrix} x & 3 \\ 4 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow x^2 - 12 = 0 + 4x$

$\Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 6x + 2x - 12 = 0$

$\Rightarrow x(x-6) + 2(x-6) = 0$

$\Rightarrow (x-6)(x+2) = 0$

$\Rightarrow x = -2,6.$

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে, $\begin{vmatrix} 3 & p \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6$

$\Rightarrow 18 - 4p = 6$

$\Rightarrow -4p = -12$

$\Rightarrow p = 3$.

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ বাওঁফাল $= \begin{vmatrix} a+ib & c+id \\ c-id & a-ib \end{vmatrix}$

$= (a+ib)(a-ib) - (c+id)(c-id)$

$= \{a^2 - (ib)^2\} - \{c^2 - (id)^2\}$

$= a^2 + b^2 - c^2 - d^2$

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (a) (i) প্ৰথম শাৰীৰ প্ৰসাৰণ কৰি আমি পাম,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 2(2-1) - 1(-1-2) - 3(1+4)$

$= 2 + 3 - 15$

$= -10$

(ii) দ্বিতীয় শাৰীৰ প্ৰসাৰণ কৰি আমি পাম,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 2(2-1) - 1(-1+3) + 2(1-6)$

$= 2 - 2 - 10$

$= -10$.

(b) নিজে চেষ্টা কৰক।

(c) নিজে চেষ্টা কৰক।

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (a) দিয়া আছে $\begin{vmatrix} x & x^2 & x^2 \\ 3 & 9 & 27 \\ -1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow 3x\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ 1 & 3 & 9\\ -1 & -2 & -3\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow 3x\begin{vmatrix}3 & 9\\ -2 & -3\end{vmatrix}-3x\begin{vmatrix}x & x2\\ -2 & -3\end{vmatrix}-3x\begin{vmatrix}x & x^2\\ 3 & 9\end{vmatrix}=0$$

$$\Rightarrow 3x(-9+18)-3x(-3x+2x^2)-3x(9x-3x^2)=0$$

$$\Rightarrow 3x(9+3x-2x^2-9x+3x^2)=0$$

$$\Rightarrow 3x(x^2-6x+9)=0$$

$$\Rightarrow 3x(x-3)^2=0$$

$$\Rightarrow x=0,3$$

(b) নিজে চেষ্টা কৰক।

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ

$$3x + 5y + 0z = 8$$
$$-x + 2y - z = 0$$
$$3x - 6y + 4z = 1$$

$$D=\begin{vmatrix}3 & 5 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 3 & -6 & 4\end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix}2 & -1\\ -6 & 4\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}$$

$= 3\ (8-6) - 5(-4+3)$

$= 6+5 = 11 \neq 0$

$$D_1=\begin{vmatrix}8 & 5 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & -6 & 4\end{vmatrix}=8\begin{vmatrix}2 & -1\\ -6 & 4\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}$$

$= 8(8-6) -5x1=16-5=11$

$$D_2=\begin{vmatrix}3 & 8 & 0\\ -1 & 0 & -1\\ 3 & 1 & 4\end{vmatrix}$$

$$=3\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 4\end{vmatrix}-8\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}$$

$= 3(0+1)-8(-4+3)$

$= 3+8 \quad = 11$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 8\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{vmatrix}$$

$= 3(2–0) –5(–1–0) +8(6–6)$

$= 6+5 \quad =11$

$$\therefore x = \frac{D_1}{D} = \frac{11}{11} = 1$$

$$y = \frac{D_2}{D} = \frac{11}{11} = 1$$

$$y = \frac{D_3}{D} = \frac{11}{11} = 1$$

অর্থাৎ, $x = 1, \quad y = 1, \quad z = 1.$

৮ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ

$x_1 + x_2 + x_3 = 6$

$x_1 – x_2 + x_3 = 2$

$2x_1 – x_2 + 3x_3 = 9$

$$\therefore D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1.\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$= (–3+1)–(3–2)+(–1+2)$

$= –2–1+1= -2 \neq 0$

$$\therefore D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 9 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 9 & -1 \end{vmatrix}$$

$= 6(–3+1)–(6–9)+(–2+9)$

$= –12+3+7= – 2$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}$$

= (6–9) –6(3–2) +(9–4)
= –3 –6 +5
= –9 + 5
= – 4

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} + 6 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

= (–9+2) –(9–4) + 6 x(–1+2)
= –7–5+6
= –12+6
= –6

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-6}{-2} = 3$$



৫.১০ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন নং ১ঃ মূল্যায়ন কৰক (i) $\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -6 \end{vmatrix}$

প্ৰশ্ন নং ২ঃ মূল্যায়ন কৰক (i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ প্ৰমাণ কৰক যে,

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

প্রশ্ন নং ৪ঃ প্রমাণ কৰক যে,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(a-b)(a+b+c)$$

প্রশ্ন নং ৫ঃ প্রমাণ কৰক যে, $\begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+a \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix} = 0$.

প্রশ্ন নং ৬ঃ প্রমাণ কৰক যে, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-c & b-c & c-a \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = a^3+b^3+c^3-3abc$

প্রশ্ন নং ৭ঃ প্রমাণ কৰক যে, $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = x^2(x+a+b+c)$

প্রশ্ন নং ৮ঃ প্রমাণ কৰক যে, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+y \end{vmatrix} = xy$

প্রশ্ন নং ৯ঃ নিশ্চায়কৰ প্রসাৰণ নঘটোৱাকৈ প্রমাণ কৰক যে

$$\begin{vmatrix} a-b & b-c & c-a \\ b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \end{vmatrix} = 0$$

প্রশ্ন নং ১০ঃ ক্রেমাৰৰ নীতি প্রয়োগ কৰি সমাধান কৰক।

(a) 2x + 3y + z = 9, x+2y + 3z = 6, 3x + y + 2x = 8

*** ***** ***

অধ্যায় ৬ ঃ মৌলকক্ষ (MATRICES)

অধ্যায় গাঁথনি

৬.১ উদ্দেশ্য

৬.২ পৰিচয়

৬.৩ মৌলকক্ষৰ সংজ্ঞা

৬.৪ মৌলকক্ষৰ প্ৰকাৰ

৬.৫ মৌলকক্ষৰ সমতা

৬.৬ মৌলকক্ষৰ যোগ আৰু বিয়োগ

৬.৭ মৌলকক্ষৰ অদিশ পূৰণ

৬.৮ মৌলকক্ষৰ পূৰণ

৬.৯ মৌলকক্ষৰ পক্ষান্তৰ (Transpose of Matrix)

৬.১০ সমমিতি (Symmetric Matrix)

৬.১১ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৬.১২ অধিক জানিবলৈ

৬.১৩ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

৬.১৪ আৰ্হি প্ৰশ্ন

৬.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি —

- মৌলকক্ষৰ সংজ্ঞা বুজিব পাৰিব
- বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ মৌলকক্ষৰ বৰ্ণনা কৰিব পাৰিব
- মৌলকক্ষৰ বিভিন্ন প্ৰয়োগ, যেনে— যোগ, বিয়োগ আৰু পূৰণৰ বিষয়ে শিকিব পাৰিব
- মৌলকক্ষৰ সহখণ্ডজ (Adjoint), বিপৰীত (Inverse) আৰু মৌলকক্ষৰ কোটিৰ (Rank) বিষয়ে জানিব পাৰিব।

৬.২ পৰিচয়

মৌলকক্ষ হ'ল আধুনিক গণিতৰ এটা অতি প্ৰয়োজনীয় ব্যৱহাৰিক পদ্ধতি। ১৮৫৮ চনত ইংৰাজ গণিতজ্ঞ আৰ্থাৰ কে'লীয়ে মৌলকক্ষ পদ্ধতিটো উদ্ভাৱন কৰিছিল। প্ৰথমে পদ্ধতিটো কেৱল ৰৈখিক ৰূপান্তৰ প্ৰক্ৰিয়াৰ সৈতে জড়িত হৈ আছিল যদিও বৰ্তমান পদাৰ্থ বিজ্ঞান, অৰ্থনীতি, পৰিসংখ্যা, অভিযান্ত্ৰিক বিদ্যা আদি বিষয়ৰ সৈতেও ইয়াৰ এৰাব নোৱাৰা সম্পৰ্ক স্থাপন হৈছে।

৬.৩ মৌলকক্ষৰ সংজ্ঞা

mn সংখ্যাৰ (বাস্তৱ অথবা জটিল) সমষ্টি এটাক m শাৰী (m rows) আৰু n স্তম্ভত (n columns) ভগাই এটা আয়তাকৃতিৰ অনুবিন্যাসত উপস্থাপন কৰা পদ্ধতিটোকে m x n মৌলকক্ষ বোলা হয়। ইয়াক 'm বাই n মৌলকক্ষ ' বুলি পঢ়া হয়।
এটা m x n মৌলকক্ষক তলত দিয়া ধৰণে লিখা হয়।

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ওপৰৰ মৌলকক্ষটোৰ সংক্ষিপ্ত উপস্থাপন হ'ব এনেধৰণৰ—
$A = [a_{ij}]$, i = 1, 2, ... m, j = 1, 2, ... n.
অথবা, ইয়াতকৈও সহজ উপস্থাপন হ'ব $A = [a_{ij}]_{mxn}$.
মৌলকক্ষৰ উপস্থাপনত কেতিয়াবা [ ] বন্ধনীৰ সলনি ( ) বন্ধনী ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

মৌলকক্ষ A -ৰ সাধাৰণ মৌলটো হ'ল a_{ij} । এই মৌলটো i-তম শাৰী আৰু j-তম স্তম্ভত থাকে। a_{ij} -ক কেতিয়াবা মৌলকক্ষৰ (i,j)-তম মৌলৰে প্ৰকাশ কৰা হয়। ইয়াত i হ'ল শাৰীৰ সংখ্যা আৰু j হ'ল স্তম্ভৰ সংখ্যা।

টোকা ঃ

1. m-টা শাৰী আৰু n-টা স্তম্ভ থকা মৌলকক্ষ এটাক 'm by n' মৌলকক্ষ অথবা m x n মৌলকক্ষ বোলা হয়।

2. এটা মৌলকক্ষৰ শাৰী আৰু স্তম্ভৰ সংখ্যা সমান নহ'বও পাৰে।

3. মৌলকক্ষ বুজাবলৈ ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ বৰফলা A, B, C আদি আখৰ ব্যৱহাৰ কৰা হয়। মৌলকক্ষৰ মৌল বুজাবলৈ ইংৰাজী সৰুফলাৰ আখৰবোৰ ব্যৱহাৰ কৰা হয়। যেনে— $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \dots\dots$ ইত্যাদি।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}_{2\times3}$ অথবা $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}_{2\times3}$

ওপৰৰ উদাহৰণটো হ'ল এটা 2 x3 মৌলকক্ষ। অর্থাৎ, ইয়াত দুটা শাৰী আৰু তিনিটা স্তম্ভ আছে। A-ৰ বাবে

a_{12} = (1,2)-তম মৌল = 2

a_{23} = (2,3)-তম মৌল = 5

a_{13} = (1,3)-তম মৌল = 0

$$B = \begin{bmatrix} 1+i & 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & 0 & 1 \\ \sqrt{3} & 2-i & \sqrt{2} \end{bmatrix}_{3\times3}$$

is a 3x3 matrix. B-ৰ বাবে

b_{11} = 1+ i, $b_{31} = \sqrt{3}$, b_{22} =0 ইত্যাদি।

৬.৪ মৌলকক্ষৰ প্ৰকাৰ

মৌলকক্ষ কেইবা প্ৰকাৰৰ। তলত সেইবোৰ এটা এটাকৈ আলোচনা কৰা হ'ল।

(i) শাৰী মৌলকক্ষ (Row Matrix) **:** কেৱল এটা শাৰী আৰু n টা স্তম্ভ থকা যিকোনো 1x n মৌলকক্ষক শাৰী মৌলকক্ষ বোলে।

যেনে— A = [2, 5,- 3, 0, $\sqrt{3}$] হ'ল 1 × 5 ক্ৰমৰ এটা শাৰী মৌলকক্ষ।

সাধাৰণতে B = $[\ a_{ij}\ ]_{1\times n}$ হ'ল 1x n ক্ৰমৰ এটা শাৰী মৌলকক্ষ।

(ii) স্তম্ভ মৌলকক্ষ (Column Matrix) **:** m-টা শাৰী আৰু কেৱল এটা স্তম্ভ থকা যিকোনো m x1 মৌলকক্ষক স্তম্ভ মৌলকক্ষ বোলে।

যেনে—

$$B=\begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$ হ'ল 4×1 ক্ৰমৰ এটা স্তম্ভ মৌলকক্ষ

সাধাৰণতে $B=[b_{ij}]_{m\times 1}$ হ'ল m × 1 ক্ৰমৰ এটা স্তম্ভ মৌলকক্ষ

(iii) বৰ্গ মৌলকক্ষ (Square Matrix) **:** যিবোৰ মৌলকক্ষৰ শাৰী আৰু স্তম্ভৰ সংখ্যা সমান সেইবোৰক বৰ্গ মৌলকক্ষ বোলে।

অৰ্থাৎ, মৌলকক্ষ A= $[\ a_{ij}\ ]_{m\times n}$ত যদি m = n হয়, তেন্তে মৌলকক্ষ Aক বৰ্গ মৌলকক্ষ বোলে।

উদাহৰণ ঃ (a)

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$ হ'ল 2 ক্ৰমৰ এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ

(b)

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ হ'ল 3 ক্ৰমৰ এটা বৰ্গ মৌলকক্ষ

A = $[\ a_{ij}\ ]_{m\times m}$, বৰ্গ মৌলকক্ষৰ মৌল a_{11}, a_{22}, a_{33} ..... ইত্যাদিক কৰ্ণ মৌল (Diagonal Elements) বোলা হয়। এই মৌলবোৰ যিডাল ৰেখাত পৰে সেইৰেখাডালক মৌলকক্ষটোৰ মুখ্য কৰ্ণ (Principal Diagonal) বোলে।

(iv) বিকৰ্ণ মৌলকক্ষ (Diagonal Matrix) **:** যদি কোনো বৰ্গ মৌলকক্ষৰ অ-কৰ্ণ মৌলবোৰ (non-diagonal) 'শূন্য' হয়, তেন্তে মৌলকক্ষটোক বিকৰ্ণ মৌলকক্ষ বোলা হয়।

যেনে—

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

হ'ল যথাক্রমে 2 আৰু 3 ক্রমৰ বিকর্ণ মৌলকক্ষ।

(v) অদিশ মৌলকক্ষ (Scalar Matrix) **:** যিবোৰ বিকর্ণ মৌলক্ষেত্রৰ (য'ত আটাইবোৰ অ-কর্ণ মৌলবোৰৰ মান 'শূন্য') সকলোবোৰ কর্ণ মৌলবোৰৰ সমান হয় তেনে মৌলকক্ষটোক অদিশ মৌলকক্ষ বোলে।

যেনে—

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

হ'ল যথাক্রমে 2 আৰু 3 ক্রমৰ অদিশ মৌলকক্ষ

অর্থাৎ, বর্গ মৌলকক্ষ $A=[a_{ij}]_{mxm}$ তেতিয়াহে এটা অদিশ মৌলকক্ষ হ'ব যদি,

a_{ij} = 0 হয়; ইয়াত i $\neq$ j

a_{ij} = k (ধ্ৰৱক), যেতিয়া i = j হ'ব।

(vi) একক অথবা অভেদ মৌলকক্ষ (Unit or Identity Matrix) **:** যিটো সমান মৌলকক্ষৰ কর্ণ মৌলবোৰ একক আৰু অ-কর্ণ মৌলবোৰ শূন্য হয় তেনে মৌলকক্ষক একক অথবা অভেদ মৌলকক্ষ বোলে।

যেনে—

$$I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

একক মৌলকক্ষবোৰক I আখৰটোৰে বুজোৱা হয়।

I_2 আৰু I_3 হ'ল যথাক্রমে 2 আৰু 3 ক্রমৰ একক মৌলকক্ষ।

অর্থাৎ, বর্গ মৌলকক্ষ $A=[a_{ij}]_{m\times m}$ এটা একক মৌলকক্ষ হ'ব যদিহে

a_{ij} = 0 হয়, য'ত i $\neq$ j

আৰু

a_{ij} = 1 হয়, য'ত i = j

(vii) ৰিক্ত অথবা শূন্য মৌলকক্ষ (Null Matrix or Zero Matrix) **:** m x n ক্রমৰ মৌলকক্ষ এটাৰ সকলো মৌলবোৰ যদি 'শূন্য' হয়, তেন্তে তাক ৰিক্ত অথবা শূন্য মৌলকক্ষ বোলে। এনে

মৌলকক্ষক 'O'ৰে বুজোৱা হয়।

যেনে—

$\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ হ'লে ক্রমে 2 x2 আৰু 4x3 ক্রমৰ শূন্য মৌলকক্ষ

(viii) উচ্চ ত্রিভূজাকাৰ আৰু নিম্ন ত্রিভুজাকাৰ মৌলকক্ষ (Upper Triangular Matrix and Lower Triangular Matrix) **:** ধৰা হ'ল A এটা n ক্রমৰ বর্গ মৌলকক্ষ।

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n}\\a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots a_{3n}\\\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\\a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots \quad a_{nn}\end{bmatrix}$$

A-ৰ কর্ণৰ মৌলবোৰ হ'ল $a_{11}, a_{12}, \ldots\ldots, a_{nn}$ অর্থাৎ a_{ij}, i = j.

A-ৰ মুখ্য কর্ণৰ (principal diagonal) আটাইবোৰ উচ্চ মৌল হ'ল

$a_{12}, a_{13}\ldots\ldots a_{1n}, a_{23}\ldots\ldots a_{2n}\ldots\ldots$ ইত্যাদি, ইয়াত a_{ij} , i < j

A-ৰ মুখ্য কর্ণৰ (principal diagonal) আটাইবোৰ নিম্ন মৌল হ'ল $a_{21}, a_{31},$

$a_{32}, \ldots\ldots a_{n1}, a_{n2}, \ldots\ldots$ অর্থাৎ a_{ij}, i > j.

যদি বর্গ মৌলকক্ষ A-ৰ আটাইবোৰ a_{ij} -ৰ বাবে i > j মৌলবোৰ '0' হয়, তেন্তে A-ক এটা উচ্চ ত্রিভুজাকাৰ মৌলকক্ষ বোলে।

উদাহৰণ ঃ

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2 & 6\\0 & 2 & -4 & 1\\0 & 0 & 1 & 2\\0 & 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$ হ'ল এটা উচ্চ ত্রিভুজাকাৰ মৌলকক্ষ

যদি বর্গ মৌলকক্ষ A-ৰ আটাইবোৰ a_{ij} -ৰ বাবে i < j মৌলবোৰ '0' হয়, তেন্তে A-ক এটা নিম্ন ত্রিভুজাকাৰ মৌলকক্ষ বোলে।

উদাহৰণ ঃ

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 4 & 0\\ -2 & 1 & 3 & 5\end{bmatrix}$$ হ'ল এটা নিম্ন ত্রিভুজাকাৰ মৌলকক্ষ

টোকা ঃ এটা বিকর্ণ মৌলকক্ষ উচ্চ আৰু নিম্ন উভয় ত্রিভুজাকাৰ হয়।

৬.৫ মৌলকক্ষৰ সমতা (EQUALITY OF MATRICES)

$A = [a_{ij}]$ আৰু $B = [b_{ij}]$ মৌলকক্ষ দুটাক সমান বুলি কোৱা হ'ব, যদিহে

(i) দুয়োটাৰে আকৃতি আৰু ক্রম একে হয়।

(ii) এটা মৌলকক্ষৰ মৌলবোৰ আনটো মৌলকক্ষৰ অনুৰূপ মৌলবোৰৰ সমান হয়।

যেনে, $a_{ij} = b_{ij}$ (সকলোবোৰ i আৰু j-ৰ বাবে)

যদি, A আৰু B সমান হয়, তেন্তে আমি A = B বুলি লিখোঁ।

যদি, A আৰু B সমান নহয়, তেন্তে আমি $A \neq B$ বুলি লিখোঁ।

উদাহৰণ ঃ

1. যদি $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}_{2\times2}, B=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}_{2\times2}$, তেন্তে A = B

2. যদি $A=\begin{bmatrix}1^2 & 3^2\\ 2^2 & 4^2\end{bmatrix}_{2\times2}, B=\begin{bmatrix}1 & 9\\ 4 & 16\end{bmatrix}_{2\times2}$ তেন্তে A = B

3. যদি $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}_{2\times2}, B=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}_{2\times3}$ তেন্তে $A \neq B$

4. যদি $\begin{bmatrix}x & a\\ y & b\\ z & c\end{bmatrix}_{3\times2} = \begin{bmatrix}-3 & 0\\ 1 & 2\\ 4 & \sqrt{3}\end{bmatrix}_{3\times2}$

তেন্তে, $x = -3, y = 1, z = 4, a = 0, b = 2, c = \sqrt{3}$

টোকা ঃ তলত উল্লেখ কৰা কাৰণবোৰৰ বাবে দুটা মৌলকক্ষ অসমান হ'ব পাৰে—

(i) ক্রম সমান নহ'ব পাৰে।

(ii) অনুৰূপ মৌলবোৰ সমান নহ'ব পাৰে।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ যদি কোনো এটা মৌলকক্ষৰ 10 টা মৌল থাকে, তেন্তে মৌলকক্ষটোৰ সম্ভাব্য ক্রমবোৰ কি হ'ব?

প্রশ্ন নং ২ঃ যদি $\begin{bmatrix} 2a+b & 5c-d \\ a-2b & 4c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ -3 & 25 \end{bmatrix}$

হয়, তেন্তে a, b, c আৰু d -ৰ মান নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, $B \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ হয়, তেন্তে মৌলকক্ষ

দুটা সমান হ'বনে?

৬.৬ মৌলকক্ষৰ যোগ আৰু বিয়োগ (ADDITION AND SUBSTRACTION OF MATRICES)

ধৰা হ'ল, $A = [a_{ij}]_{mxn}$ আৰু $B = [b_{ij}]_{mxn}$ হ'ল m × n ক্রমৰ দুটা মৌলকক্ষ।

দুয়োটা মৌলকক্ষৰ যোগফলক (বিয়োগফলক) A+B (A-B)-ৰ সহায়ত উলিওৱাৰ পাছত পোৱা উত্তৰটোক আন এটা মৌলকক্ষ $C = [c_{ij}]$ -ৰে বুজোৱা হয়। এই মৌলকক্ষটোৰ ক্রমো m×n হয়। C-ৰ যিকোনো মৌলয়েই A আৰু B-ৰ অনুৰূপ মৌলৰ যোগফল অথবা বিয়োগফল হ'ব। অর্থাৎ, সকলো i আৰু j মানৰ ক্ষেত্রতে $c_{ij} = a_{ij}+b_{ij}$

অর্থাৎ, $C = [c_{ij}] = [a_{ij}+b_{ij}]_{mxn}$

উদাহৰণ 6.1 ঃ যদি $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

তেন্তে $C = A+B = \begin{bmatrix} 5+2 & 1-5 \\ 3+(-2) & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

একেদৰে $D=A-B = \begin{bmatrix} 5-2 & 1-(-5) \\ 3-(-2) & 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

টোকা ঃ যদি যিকোনো দুটা মৌলকক্ষ A আৰু B -ৰ ক্রম একে হয়, তেন্তে মৌলকক্ষ দুটাক যোগ নাইবা বিয়োগৰ বাবে অনুক্রমী (conformable) বুলি কোৱা হয়।

মৌলকক্ষৰ ঋণাত্মক ৰূপ ঃ কোনো ধনাত্মক মৌলকক্ষ A ৰ ঋণাত্মক ৰূপটো হ'ব - A। ইয়াৰ মৌলবোৰ মৌলকক্ষ A-ৰ অনুৰূপ মৌলবোৰৰ বিপৰীত হ'ব।

উদাহৰণ 6.2 ঃ

$$\text{যদি } A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}, \text{ তেন্তে } -A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -4 \\ 5 & -6 \end{bmatrix}$$

উদাহৰণ 6.3 ঃ যদি $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ আৰু $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$, তেন্তে A + B আৰু A – B উলিয়াওক।

সমাধান ঃ

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5+3 & 0+1 \\ 3+6 & 1+2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5-3 & 0-1 \\ 3-6 & 1-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$$

উদাহৰণ 6.4 ঃ যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, তেন্তে [A+B] + C = A + [B+C] বুলি প্ৰমাণ কৰক

সমাধান ঃ

$$A+B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 0+3 \\ 4+5 & 3-2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[A+B]+C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+3 & 3+5 \\ 9+2 & 1+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$$

আকৌ, $B+C = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & +0 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0+3 & 3+5 \\ 5+2 & -2+0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A+[B+C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+3 & 0+8 \\ 4+7 & 3-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore [A+B]+C = A+[B+C]$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৪ঃ যদি (i) A মৌলকক্ষৰ 3টা শাৰী আৰু 2 টা স্তম্ভ থাকে। আনহাতে B মৌলকক্ষৰ 2টা শাৰী আৰু 2টা স্তম্ভ থাকে।

(ii) A মৌলকক্ষৰ 3টা শাৰী, 3টা স্তম্ভ থাকে, আনহাতে B মৌলকক্ষৰ 3টা শাৰী আৰু 3 টা স্তম্ভ থাকে।

(iii) A আৰু B দুটা একে ক্রমৰ দুটা সমান মৌলকক্ষ হয়, তেন্তে A+B সূত্রটো সত্যাপন কৰিব পৰা যাবনে?

৬.৭ মৌলকক্ষৰ অদিশ পূৰণ (MULTIPLICATION OF A MATRIX BY A SCALAR)

মৌলকক্ষৰ অদিশ পূৰণৰ নিয়মটো তলত দিয়া হ'ল—

যদি $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ হ'ল $m \times n$ ক্রমৰ এটা মৌলকক্ষ। ইয়াৰ k হ'ল অদিশ। তেন্তে,

$kA = k[a_{ij}]_{m\times n} = [ka_{ij}]_{m\times n}$

অর্থাৎ, kA-ৰ (i, j)তম মৌলটো হ'ল A-ৰ (i, j)তম মৌলৰ k গুণ।

উদাহৰণ 6.5 ঃ

যদি, k = 3 আৰু $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$, তেন্তে

$$3A = 3\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times2 & 3\times(-1) \\ 3\times(-2) & 3\times3 \\ 3\times0 & 3\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -6 & 9 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}_{3\times2}$$

আৰু,

$$\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\times2 & \frac{1}{2}\times(-1) \\ \frac{1}{2}\times(-2) & \frac{1}{2}\times3 \\ \frac{1}{2}\times0 & \frac{1}{2}\times1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}_{3\times2}$$

উদাহৰণ 6.6 ঃ

যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}_{2\times2}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}_{2\times2}$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰক যে,

2(A+B) = 2A + 2B

সমাধান ঃ

প্ৰদত্ত ৰাশি

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3+4 & 9+0 \\ 1+7 & 8+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\therefore 2\,(A+B) = 2\begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times7 & 2\times9 \\ 2\times8 & 2\times10 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 18 \\ 16 & 20 \end{bmatrix}$$

আকৌ, $2A+2B = 2\begin{bmatrix}3 & 9\\ 1 & 8\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}4 & 0\\ 7 & 2\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}2\times3 & 2\times9\\ 2\times1 & 2\times8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\times4 & 2\times0\\ 2\times7 & 2\times2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}6 & 18\\ 2 & 16\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}8 & 0\\ 14 & 4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}6+8 & 18+0\\ 2+14 & 16+4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}14 & 18\\ 16 & 20\end{bmatrix}$$

$\therefore 2(A+B) = 2A + 2B$ প্ৰমাণিত হ'ল।

উদাহৰণ 6.7 ঃ

যদি $k = 3, l = -2$ আৰু $A = \begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$,

তেন্তে প্ৰমাণ কৰক যে— $(k+l)A = kA + lA$

$$(k+l)A = (3-2)\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix} = (1)\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

আকৌ,

$$kA + lA = 3A - 2A = 3\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}9 & 6\\ 3 & 0\\ 6 & 3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}6 & 4\\ 2 & 0\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}9-6 & 6-4\\ 3-2 & 0-0\\ 6-4 & 3-2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\therefore (k+l)\,A = kA + lA$. প্রমাণিত হ'ল।

উদাহৰণ 6.8 ঃ যদি $k=4$, $l=2$ আৰু $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,

তেন্তে প্রমাণ কৰক যে, $k(lA) = (kl)A$.

সমাধান ঃ

$$k(lA) = 4(2A) = 4 \begin{bmatrix} 2\times3 & 2\times2 \\ 2\times1 & 2\times0 \\ 2\times2 & 2\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4\times2\times3 & 4\times2\times2 \\ 4\times2\times1 & 4\times2\times0 \\ 4\times2\times2 & 4\times2\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8\times3 & 8\times2 \\ 8\times1 & 8\times0 \\ 8\times2 & 8\times1 \end{bmatrix}$$

$$= 8\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$= 8A$

$= (4\times2)\,A$

$= (kl)A$. প্রমাণিত হ'ল।

উদাহৰণ 6.9 ঃ

যদি k=5 and $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, তেন্তে প্ৰমাণ কৰক যে,

$(-k)A = -(kA) = k(-A)$

সমাধান ঃ

$$(-k)\,A = (-5)\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}(-5)\times 3 & -(5\times 2)\\ (-5)\times 1) & -(5\times 0)\\ -(5\times 2) & -(5\times 1)\end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix}(5)\times 3 & (5)\times 2\\ (5)\times 1 & (5\times 0)\\ (5\times 2) & (5\times 1)\end{bmatrix} = -(kA)$$

লগতে, $k(-A) = 5\begin{bmatrix}-3 & -2\\ -1 & 0\\ -2 & -1\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}5\times(-3) & 5\times(-2)\\ 5\times(-1) & 5\times 0\\ 5\times(-2) & 5\times(-1)\end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix}5\times 3 & 5\times 2\\ 5\times 1 & 5\times 0\\ 5\times 2 & 5\times 1\end{bmatrix}$$

$$= -5\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix} = -(kA)$$ প্ৰমাণিত হ'ল।

উদাহৰণ 6.10 ঃ যদি $A=\begin{bmatrix}0 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix}$ আৰু $B=\begin{bmatrix}4 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$ তেন্তে $3A - 2B$ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ

$$3A - 2B = 3\begin{bmatrix}0 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 2\end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix}4 & 0 & -3\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0 & 9 & 6\\ 3 & 12 & 6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}8 & 0 & -6\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0-8 & 9-0 & 6-(-6)\\ 3-0 & 12-2 & 6-4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-8 & 9 & 12\\ 3 & 10 & 2\end{bmatrix}$$

৬.৮ মৌলকক্ষৰ পূৰণ (MULTIPLICATION OF TWO MATRICES)

A আৰু B মৌলকক্ষ দুটা তেতিয়াহে পূৰণ কৰিব পৰা যাব আৰু ইয়াৰ পূৰণফল AB ওলাব যেতিয়া A -ৰ স্তম্ভ সংখ্যা B -ৰ শাৰীৰ সংখ্যাৰ সমান হ'ব।

ধৰা হ'ল, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ আৰু $B = [b_{jk}]_{n\times p}$,

তেন্তে, A, B, -ৰ পূৰণফল হ'ব $m\times p$ ক্ৰমৰ আন এটা মৌলকক্ষ C

অৰ্থাৎ $AB = C = [c_{jk}]_{m\times p}$ ইয়াত

$$C_{jk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk} = a_{i1}\, b_{1k} + a_{i2}\, b_{2k} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{in}\, b_{nk}$$

অৰ্থাৎ, C= AB মৌলকক্ষৰ (j, k)তম মৌলটো উলিয়াবলৈ A-ৰ j-তম শাৰীৰ অনুৰূপ মৌল B-ৰ k-তম স্তম্ভৰ অনুৰূপ মৌলটো পূৰণ কৰি পূৰণফলটো যোগ কৰিব লাগে।

পূৰণৰ এই নিয়মটো 'ৰ বাই কলাম পূৰণ' (*row by column multiplication)* বোলে।

উদাহৰণ 6.11 ঃ

যদি $A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}_{3\times 2}$ আৰু $B = \begin{bmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{bmatrix}_{2\times 2}$

তেন্তে, $AB = \begin{bmatrix}a_{11}b_{11} + a_{12}\ b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}\ b_{22}\\ a_{21}b_{11} + a_{22}\ b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}\ b_{22}\\ a_{31}b_{11} + a_{32}\ b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}\ b_{22}\end{bmatrix}_{3\times 2}$

টোকা : 1) যদি পূৰণফল AB ওলায় তেন্তে পূৰণফল BA ওলাবই বুলি কোনো ধৰাবন্ধা নিয়ম নাই।

উদাহৰণ 6.12 ঃ $A=[2\ \ 3]_{1\times2}$ আৰু $B=\begin{bmatrix}4 & 0 & 5\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}_{2\times3}$

ইয়াত, $AB=\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 0 & 5\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$

$=[8+3 \quad 0+6 \quad 10+9]=[11\ \ 6\ \ 19]$

কিন্তু $BA=\begin{bmatrix}4 & 0 & 5\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}\ [2\ \ 3]$ এই পূৰণফলটোৰ কোনো অস্তিত্ব নাই।

$\therefore AB\neq BA$

মৌলকক্ষৰ পূৰণ ক্ষেত্ৰত ক্ৰমবিনিময়ে বিধি প্ৰযোজ্য নহয়।

2) A আৰু B একে ক্ৰমৰ দুটা সমান মৌলকক্ষ হ'লে AB আৰু BA উলিয়াব পৰা যায় যদিও $AB\neq BA$ হ'ব পাৰে।

উদাহৰণ 6.13 ঃ যদি $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ আৰু $B=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & 1\end{bmatrix}$

তেন্তে, $AB=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & 1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}2x3+1x4 & 2x5+1x1\\ 0x3+2x4 & 0x5+2x1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}10 & 11\\ 8 & 2\end{bmatrix}$

$BA=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}3x3+5x0 & 3x1+5x2\\ 4x2+1x0 & 4x1+1x2\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}9 & 13\\ 8 & 6\end{bmatrix}$

এতেকে দেখা গ'ল যে $AB \neq BA$

উদাহৰণ 6.14 ঃ

যদি $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ আৰু $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ -2 & 1 & 3\end{bmatrix}$

তেন্তে AB আৰু BA উলিয়াব পাৰিবনে?

সমাধান ঃ

ইয়াত A -ৰ ক্রম হ'ল 2×2

B -ৰ ক্রম হ'ল 2×3

∴AB -ৰ ক্রম হ'ব 2×3

আকৌ, B-ৰ ক্রম হ'ল 2×3

A-ৰ ক্রম হ'ল 2×2

∴B-ৰ স্তম্ভ সংখ্যা 3 আৰু A-ৰ শাৰী সংখ্যা 2

∴BA-ৰ অস্তিত্ব নাই

অর্থাৎ, মৌলকক্ষ দুটা BA পূৰণফলৰ বাবে অনক্রমী নহয়।

উদাহৰণ 6.15 ঃ

যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$

$C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}_{2\times3}$ তেন্তে প্রমাণ কৰক যে,

A(B+C) = AB + AC

সমাধান ঃ

$$B+C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

A (B+C)

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{2\times2} \begin{bmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 4 & 8 & 1 \end{bmatrix}_{2\times3} = \begin{bmatrix} 1\times8+2\times4 & 1\times1+2\times8 & 1\times3+2\times1 \\ 3\times8+4\times4 & 3\times1+4\times8 & 3\times3+4\times1 \end{bmatrix}_{2\times3}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 17 & 5 \\ 40 & 35 & 13 \end{bmatrix}$$

আকৌ, $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1\times3+2\times0 & 1\times1+2\times2 & 1\times2+2\times1 \\ 3\times3+4\times0 & 3\times1+4\times2 & 3\times2+4\times1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 9 & 11 & 10 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times5+2\times4 & 1\times0+2\times6 & 1\times1+2\times0 \\ 3\times5+4\times4 & 3\times0+4\times6 & 3\times1+4\times0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 13 & 12 & 1 \\ 31 & 24 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 9 & 11 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 13 & 12 & 1 \\ 31 & 24 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 16 & 17 & 5 \\ 40 & 35 & 13 \end{bmatrix}$$

$\therefore A(B + C) = AB + AC$

উদাহৰণ 6.16 ঃ

যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{2\times2}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times2}$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

A(BC) আৰু (AB)C উলিয়াওক আৰু প্ৰমাণ কৰক যে $A(BC) \neq (AB)C$

সমাধান ঃ

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}_{3\times2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}_{2\times2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+3\times2 & 1\times2+3\times0 \\ 0\times1+2\times2 & 0\times2+2\times0 \\ -1\times1+4\times2 & -1\times2+4\times0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 0 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A(BC) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 0 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\times7+1\times4+(-1)\times7 & 1\times2+1\times0+(-1)\times(-2) \\ 2\times7+0\times4+3\times7 & 2\times2+0\times0+3\times(-2) \\ 3\times7+(-1)\times4+2\times7 & 3\times2+(-1)\times0+2\times(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 35 & -2 \\ 31 & 2 \end{bmatrix}$$

আৰু $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1\times1+1\times0+(-1)(-1) & 1\times3+1\times2+(-1)4 \\ 2\times1+0\times0+3(-1) & 2\times3+0\times2+3\times4 \\ 3\times1+(-1)\times0+2\times(-1) & 3\times3+(-1)\times2+2\times4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{bmatrix}$$

$$(AB)C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 18 \\ 1 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times1+1\times2 & 2\times2+1\times0 \\ (-1)\times1+18\times2 & (-1)\times2+18\times0 \\ 1\times1+15\times2 & 1\times2+15\times0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 35 & -2 \\ 31 & 2 \end{bmatrix}$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৫ঃ দিয়া হ'ল,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix},$$

প্রমাণ কৰক যে—

$$B(C+D) = BC + BD$$

$$(B+C)\,D = BD + CD$$

প্রশ্ন নং ৬ঃ A, B আৰু C মৌলকক্ষৰ ক্রম অনুসৰি সাংখ্যিক মান নির্ধাৰণ কৰক।

ইয়াত $(A+B)\,C = AC + BC$

প্রশ্ন নং ৭ঃ যদি, $A + B = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $A - B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, তেন্তে A আৰু B মান উলিয়াওক।

প্রশ্ন নং ৮ঃ দিয়া হ'ল, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 21 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, প্রমাণ কৰক যে,

$A^2 = B^2 = I$ (একক মৌলকক্ষ)

প্রশ্ন নং ৯ঃ যদি $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, প্রমাণ কৰক যে $A^2 - 5A + 7I = 0$

৬.৯ মৌলকক্ষৰ পক্ষান্তৰ (TRANSPOSE OF A MATRIX)

ধৰা হ'ল $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ এতিয়া, যদি A-ৰ শাৰীবোৰ স্তম্ভলৈ আৰু স্তম্ভবোৰ শাৰীলৈ সলনি কৰা হয়, তেন্তে A-ৰ পৰা nxm ক্রমৰ এটা মৌলকক্ষ পোৱা যাব। এই প্রক্রিয়াটোকে মৌলকক্ষৰ পক্ষান্তৰ বোলা হয়। ইয়াক A' অথবা A^T প্রতীকেৰে বুজোৱা হয়। অর্থাৎ, A' অথবা A^T মৌলকক্ষৰ n টা শাৰী আৰু m-টা স্তম্ভ থাকে

উদাহৰণ ঃ

যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ হয়, তেন্তে,

$$A' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

৬.১০ সমমিতি মৌলকক্ষ (SYMMETRIC MATRIX)

প্রতিসম মৌলকক্ষ ঃ

বর্গ মৌলকক্ষ $A=[a_{ij}]$-ক প্রতিসম মৌলকক্ষ বোলা হয় ,যেতিয়া i আৰু j-ৰ সকলোবোৰ মান বাবে $a_{ij} = a_{ji}$ হয়।

অর্থাৎ, মৌলকক্ষটোৰ (i, j) তম মৌলটো (j, i)তম মৌলৰ সমান।

উদাহৰণ স্বৰূপে,

$$\begin{bmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

হ'ল সমমিতি মৌলকক্ষ।

উপপাদ্য ঃ মৌলকক্ষ A এটা সমমিতি মৌলকক্ষ হ'বলৈ প্রয়োজনীয় আৰু যথোপযুক্ত চর্তটো $A = A'$



৬.১১ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- mn সংখ্যাৰ সমষ্টি এটাক m শাৰী আৰু n স্তম্ভত ভগাই এটা আয়তাকৃতিৰ অনুবিন্যাসত ( ) অথবা [ ] বন্ধনীৰ মাজত উপস্থাপন কৰা পদ্ধতিটোক m×n ক্রমৰ (m বাই n বুলি পঢ়া হয়) মৌলকক্ষ বোলা হয়।
- মৌলকক্ষ গঠন কৰা সংখ্যাবোৰক মৌলকক্ষটোৰ মৌল বোলা হয়।
- মৌলকক্ষৰ i তম শাৰী আৰু j তম স্তম্ভত থকা মৌলটোক মৌলকক্ষটোৰ (i, j) তম মৌল বোলে আৰু ইয়াক a_{ij} প্রতীকেৰে প্রকাশ কৰা হয়।
- কেৱল এটা শাৰী থকা মৌলকক্ষক শাৰী মৌলকক্ষ বোলা হয়। এনে মৌলকক্ষৰ ক্রমটো হ'ল 1×n ।
- কেৱল এটা স্তম্ভ থকা মৌলকক্ষক স্তম্ভ মৌলকক্ষ বোলা হয়। এনে মৌলকক্ষৰ ক্রমটো হ'ল m×1।
- A মৌলকক্ষৰ m=n হ'লে, A=$[a_{ij}]_{m\times n}$ হ'ল এটা বর্গ মৌলকক্ষ
- বর্গ মৌলকক্ষ A =$[a_{ij}]$ এটা অদিশ মৌলকক্ষ হ'ব যদিহে $a_{ij} = \begin{cases} k & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$
- এটা বর্গ মৌলকক্ষ A = $[a_{ij}]$ তেতিয়াহে এটা বিকর্ণ মৌলকক্ষ হ'ব, যেতিয়া a_{ij} = 0 ইয়াত i≠j ।
- এটা বর্গ মৌলকক্ষ A=$[a_{ij}]$ তেতিয়াহে এটা একক মৌলকক্ষ হ'ব যেতিয়া

  a_{ij} = 1 ,ইয়াত i = j

  = 0, ইয়াত i≠j

  n ক্রমৰ একক মৌলকক্ষক I অথবা I_n প্রতীকেৰে প্রকাশ কৰা হয়।
- সকলোবোৰ মৌলৰ মান শূন্য হ'লে তেনে মৌলকক্ষক ৰিক্ত অথবা শূন্য মৌলকক্ষ বোলে। ৰিক্ত মৌলকক্ষক 'O' প্রতীকেৰে প্রকাশ কৰা হয়।
- যদি a_{ij} = 0 আৰু i>j হয় তেন্তে মৌলকক্ষটোক উচ্চ ত্রিভূজাকাৰ মৌলকক্ষ বোলে।
- যদি a_{ij} = 0 আৰু i < j হয় তেন্তে মৌলকক্ষটোক নিম্ন ত্রিভূজকাৰ মৌলকক্ষ বোলে।
- দুটা মৌলকক্ষক তেতিয়াহে সমান বুলি কোৱা হয় যেতিয়া দুয়োটাৰে ক্রম আৰু অনুৰূপ মৌলবোৰ সমান হয়।
- যদি A আৰু B দুটা একে ক্রমৰ মৌলকক্ষ, তেন্তে সিহঁতৰ যোগ আৰু বিয়োগফল A+B, A–B অথবা B–A ৰ সহায়ত নির্ণয় কৰিব পৰা যায়।
- একে ক্রমৰ A আৰু B মৌলকক্ষৰ ক্ষেত্রত $(A+B)' = A' + B'$

- পূৰণৰ বাবে অনুক্ৰমী A আৰু B মৌলকক্ষৰ ক্ষেত্ৰত $(AB)' = B'A'$
- যদি A′=A হয়, তেন্তে A মৌলকক্ষটোক সমমিতি বোলা হয়।



৬.১২ অধিক জানিবলৈ

1) Agarwal, D.K. (2012). Business Mathematics, New Delhi: Vrindra Publication (p) Ltd.
2) Baruah, S. (2011). Basic Mathematics and Its Application in Economics, New Delhi: Trinity Press Pvt. Ltd.
3) Bose, D. (2004). *Mathematical Economics;* New Delhi: Himalaya Publishing House.
4) Chiang, A.C. (2006) *Fundamental Methods of Economics Analysis*; New Delhi: MC Graw Hill Education India.
5) Kandoi, Balwant (2011). *Mathematics for Business and Economics with Application;* New Delhi: Himalaya Publishing House.



৬.১৩ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ

$10 = 1 \times 10$ $10 = 5 \times 2$

$10 = 2 \times 5$ $10 = 10 \times 1$

মৌলকক্ষটোৰ সম্ভাব্য ক্ৰমবোৰ হ'ব 1×10, 2×5, 5×2 আৰু 10×1.

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $\begin{pmatrix} 2a+b & 5c+d \\ a-2b & 4c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 3 & 25 \end{pmatrix}$

2a+b=4 5c–d=11

a–2b=–3 4c+d=25

অৰ্থাৎ, a = 1, b = 2, c = 4, d = 9

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দুটা মৌলকক্ষ সমান হ'বলৈ সিহঁতৰ ক্ৰম আৰু অনুৰূপ মৌলবোৰ একে হ'ল লাগিব। প্ৰদত্ত মৌলকক্ষ দুটাৰ ক্ৰম একে। কিন্তু A-ৰ (3,3)তম মৌলটো B-ৰ (3, 3)তম মৌলৰ সমান নহয়। অৰ্থাৎ $\therefore A \neq B$

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ

(i) A + B সূত্রটো সত্যাপন কৰিব পৰা নাযাব। কিয়নো A মৌলকক্ষৰ ক্রম 3×2 আৰু B মৌলকক্ষৰ ক্রম 2×2 ।

(ii) A+B সূত্রটো সত্যাপণ কৰিব পৰা যাব। কিয়নো A আৰু B মৌলকক্ষৰ ক্রম 3×3

(iii) A+B সূত্রটো সত্যাপণ কৰিব পৰা যাব। কিয়নো A আৰু B একে ক্রমৰ সমান মৌলকক্ষ।

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ

$$B(C+D)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 1\\ 7 & 4\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8 & 2\\ 11 & 6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1x8+2x11 & 1x2+2x6\\ 3x8+4x11 & 3x2+4x6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}30 & 14\\ 68 & 30\end{bmatrix}$$

$$BC+BD=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\ 7 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1x3+2x4 & 1x1+2x2\\ 3x3+4x4 & 3x1+4x2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1x5+2x7 & 1x1+2x4\\ 3x5+4x7 & 3x1+4x4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}11 & 5\\ 25 & 11\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}19 & 9\\ 43 & 19\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}11+19 & 5+9\\ 25+43 & 11+19\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30 & 14\\ 68 & 30\end{bmatrix}$$

$$\therefore B(C+D)=BC+CD$$

আকৌ, $(B+C)D=\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}5 & 1\\ 7 & 4\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1+3 & 2+1\\ 3+4 & 4+2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\ 7 & 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 7 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\ 7 & 4\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4x5+3x7 & 4x1+3x4 \\ 7x5+6x7 & 7x1+6x4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 41 & 16 \\ 77 & 31 \end{bmatrix}$$

BD+CD $$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1x5+2x7 & 1x1+2x4 \\ 3x5+4x7 & 3x1+4x4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x5+1x7 & 3x1+1x4 \\ 4x5+2x7 & 4x1+2x4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 9 \\ 43 & 19 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 22 & 7 \\ 34 & 12 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19+22 & 9+7 \\ 43+34 & 19+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & 16 \\ 77 & 31 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (B+C)D = BD + CD$$

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ

যদি A-ৰ ক্ৰম 4×3
তেন্তে B-ৰ ক্ৰম 4×3
আৰু C-ৰ 3×2

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ

দিয়া আছে, A + B $= \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $A - B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$\therefore A + B + A - B = 2A = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7+3 & 0+0 \\ 2+0 & 5+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

আকৌ,

A+B – (A–B) = A+B–A+B=2B

$$= \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7-3 & 0-0 \\ 2-0 & 5-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

আৰু $\therefore B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0x0+1x1 & 0x1+1x0 \\ 1x0+0x1 & 1x1+0x0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$B^2 = BB = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0x0+(-i)i & 0x(-i)+(-i)x0 \\ ix0+0xi & ix(-i)+0x0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -i^2 & 0 \\ 0 & -i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} = I$$

৯ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ

$A^2-5A+7I=A.A-5A+7I$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} - 5\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + 7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3x3+1(-1) & 3x1+1X2 \\ (-1)x3+2(-1) & (-1)x1+2x2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8-15+7 & 5-5+0 \\ -5+5+0 & 3-10+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$



৬.১৪ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন নং ১ঃ যদি, মৌলকক্ষটো $\begin{bmatrix} 4 & -3 & 19 & \sqrt{2} \\ 11 & 24 & -7 & -5 \\ 1 & \sqrt{3} & 0 & 1 \end{bmatrix}$

হয়, তেন্তে (i) মৌলকক্ষটোৰ ক্রম উলিয়াওক

(ii) মৌলকক্ষটোৰ মৌলবোৰ উলিয়াওক

(iii) a_{23}, a_{12}, a_{32}, $a_{34,}$,a_{44} মৌলবোৰ লিখক

প্রশ্ন নং ২ঃ যদি $A=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$ আৰু $B=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, তেন্তে A +B আৰু A– B উলিয়াওক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ যদি $A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, তেন্তে 3A আৰু -5A উলিয়াওক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ যদি, $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$, আৰু $B=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, তেন্তে AB আৰু BA উলিয়াওক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$-ৰ যোগাত্মক অভেদটো কি?

প্রশ্ন নং ৬ঃ যদি, $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

$C=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, তন্তে A(BC) আৰু (AB)C উলিয়াওক আৰু প্রমাণ কৰক যে

A(BC) = (AB) C

প্রশ্ন নং ৭ঃ A(B+C) = AB + AC প্রমাণ কৰক।

ইয়াত $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ আৰু $C=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 6 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

প্রশ্ন নং ৮ঃ যদি, $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, তেন্তে $(A')'=A$ বুলি প্রমাণ কৰক।

প্রশ্ন নং ৯ঃ যদি, $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ আৰু $B=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, তেন্তে $(AB)'=B'A'$

প্রশ্ন নং ১০ঃ যদি, $A=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ তেন্তে $A^4=\begin{bmatrix} 1+2\times 4 & -4\times 4 \\ 4 & 1-2\times 4 \end{bmatrix}$ বুলি প্রমাণ কৰক।

প্রশ্ন নং ১১ঃ যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, তেন্তে A^{-1} উলিয়াওক।

প্রশ্ন নং ১২ঃ $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ মৌলকক্ষৰ বিপৰীত উলিয়াওক।

প্রশ্ন নং ১৩ঃ যদি $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ 0 & 10 & -4 \end{bmatrix}$, তেন্তে 'adj A' উলিয়াওক।

প্রশ্ন নং ১৪ঃ যদি $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, তেন্তে A^{-1} উলিয়াওক।

*** ***** ***