অধ্যায় ৮ ঃ ধাৰাবাহিক অৱকলন

অধ্যায় গাঁথনি

8.1 উদ্দেশ্য
8.2 পৰিচয়
8.3 কেইটামান প্ৰামাণিক ফলনৰ nতম অৱকলজ
8.4 দুটা ফলনৰ পূৰণফলৰ nতম অৱকলজ সম্বন্ধীয় লাইবনিৎজৰ উপপাদ্য
8.5 অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
8.6 অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান
8.7 অধিক জানিবলৈ
8.8 আৰ্হি প্ৰশ্ন

৮.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- জানিবলৈ সমৰ্থ হ'ব যে ফলন আৰু সিহঁতৰ বিভিন্ন ক্ৰমৰ অৱকলজবোৰ নিজ নিজ আদি ক্ষেত্ৰত স্থিত হয়
- কিছুমান প্ৰামাণিক ফলনৰ nতম অৱকলজ উলিয়াব পাৰিব
- ঈপ্সিত ক্ৰমলৈ দুটা ফলনৰ পূৰণফল অৱকলন কৰিব পাৰিব।

৮.২ পৰিচয়

এটা অৱকলনীয় ফলন f(x)ৰ অৱকলিত ফলনো অৱকলনীয় ফলন হ'ব পাৰে। এই ক্ষেত্ৰত আমি কোনো চলক বিন্দু x-ত $f'(x)$ৰ অৱকলজ উলিয়াব পাৰোঁ। এই অৱকলজক $f''(x)$ এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াক f(x)ৰ দ্বিতীয় অৱকলজ বুলি কোৱা হয়। গতিকে $f''(x)$ হ'ল f(x)ৰ অৱকলজৰ অৱকলজ। যদি f(x)ক yৰে বুজোৱা হয়, তেনেহ'লে $f''(x)$ক $\frac{d^2y}{dx^2}$ বা y_2ৰে বুজোৱা হয়।

আকৌ যদি f(x)ৰ দ্বিতীয় অৱকলজো এটা অৱকলনীয় ফলন হয়, তেতিয়া আমি $f''(x)$ক আকৌ অৱকলন কৰিব পাৰিম। ইয়াৰ পৰা আমি তৃতীয় অৱকলজ পাম। ইয়াক $f'''(x)$ বা $\frac{d^3y}{dx^3}$ বা y_3 বা $f^{(3)}(x)$ৰে বুজোৱা হয়।

এই প্ৰক্ৰিয়াটো চলাই যাব পাৰি যদিহে অৱকলজটো প্ৰত্যেক ক্ষেত্ৰতে অৱকলনীয় হয়। সাধাৰণভাৱে f(x)ৰ nতম অৱকলজক $\frac{d^ny}{dx^n}$ বা $f^n(x)$ বা y_nৰে বুজোৱা হয়।

এটা ফলন f(x)ক এটা অন্তৰালত n বাৰ অৱকলন কৰিব পাৰি যদি অন্তৰালটোৰ প্ৰত্যেক বিন্দুত ধাৰাবাহিক অৱকলজবোৰ $f'(x)$, $f''(x)$,....., $f^n(x)$ স্থিত হয়।

বহুপদ ফলনবোৰক যিকোনো সংখ্যকবাৰ অৱকলন কৰিব পাৰি।

৮.৩ কিছুমান প্ৰামাণিক ফলনৰ nতম অৱকলজ

1) যদি $y = (ax+b)^m$, তেনেহ'লে, $y_1 = ma(ax+b)^{m-1}$

$y_2 = m(m-1)a^2(ax+b)^{m-2}$

$y_3 = m(m-1)(m-2)a^3(ax+b)^{m-3}$

সাধাৰণভাৱে,

$y_n = m(m-1)(m-2)....\{m-(n-1)\}a^n\ (ax+b)^{m-n}$

$y = (ax+b)^m \Rightarrow y_n = m(m-1)(m-2).....\{m-(n-1)\}a^n\ (ax+b)^{m-n}$

টোকা ঃ $m = -1$ বহুৰাই, আমি পাওঁ,

$y_n = (-1)(-1-1)(-1-1) \ldots (-1-(n-1))a^n(ax+b)^{-1-n}$

$= (-1)^n n!a^n(ax+b)^{-(n+1)}$

$$= \frac{(-1)^n n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

$$y = \frac{1}{ax+b} \Rightarrow y_n = \frac{(-1)^n n!a^n}{(ax+b)^{n+1}}$$

2) যদি $y = x^m$, তেনেহ'লে, $y_1 = mx^{m-1}$

$y_2 = m(m-1)x^{m-2}$

সাধাৰণভাৱে, $y_n = m(m-1)(m-2) \ldots \ldots (m-n+1)x^{m-n}$

$y = x^m \Rightarrow y_n = m\ (m-1)(m-2) \ldots \ldots (m-n+1)x^{m-n}$

টোকা ঃ a) যদি $n > m$, তেনেহ'লে, $y_n = 0$

b) যদি $n = m$, তেনেহ'লে, $y_n = n!$

3) যদি $y = e^{ax}$, তেনেহ'লে, $y_1 = ae^{ax}$

$y_2 = a^2e^{ax}$

সাধাৰণভাৱে, $y_n = a^ne^{ax}$

$y = e^{ax} \Rightarrow y_n = a^ne^{ax}$

টোকা ঃ যদি $y = e^x$, তেনেহ'লে, $y_n = e^x$.

4) যদি $y = \sin(ax+b)$, তেনেহ'লে,

$$y_1 = a\cos(ax+b) = a\sin\left\{\frac{\pi}{2}+(ax+b)\right\}$$

$$y_2 = a^2\cos\left\{\frac{\pi}{2}+(ax+b)\right\} = a^2\sin\left\{2.\frac{\pi}{2}+(ax+b)\right\}$$

$$y_3 = a^3\cos\left\{2.\frac{\pi}{2}+(ax+b)\right\} = a^3\sin\left\{3.\frac{\pi}{2}+(ax+b)\right\}$$

সাধাৰণভাৱে, $y_n = a^n \sin\left\{n\frac{\pi}{2}+(ax+b)\right\}$

$$y = \sin(ax+b) \Rightarrow y_n = a^n\sin\left\{n\frac{\pi}{2}+(ax+b)\right\}$$

টোকা ঃ a = 1, b = 0, বহুবাই আমি পালোঁ $y = \sin x \Rightarrow y_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$

5) যদি y = cos(ax+b), তেনেহ'লে,

$$y_1 = -a\sin(ax+b) = a\cos\left\{\frac{\pi}{2}+(ax+b)\right\}$$

$$y_2 = -a^2\sin\left\{\frac{\pi}{2}+(ax+b)\right\} = a^2\cos\left\{2.\frac{\pi}{2}+(ax+b)\right\}$$

$$y_3 = -a^3\sin\left\{2\frac{\pi}{2}+(ax+b)\right\} = a^3\cos\left\{3.\frac{\pi}{2}+(ax+b)\right\}$$

সাধাৰণভাৱে, $y_n = a^n\cos\left\{n\frac{\pi}{2}+(ax+b)\right\}$

$$y = \cos(ax+b) \Rightarrow y_n = a^n\cos\left\{n\frac{\pi}{2}+(ax+b)\right\}$$

টোকা ঃ a = 1, b = 0, বহুবাই আমি পালোঁ, $y = \cos x \Rightarrow y_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}+x\right)$

6) যদি y = log(ax+b), তেনেহ'লে, $y_1 = \frac{a}{ax+b} = a(ax+b)^{-1}$

$$y_2 = (-1)a^2(ax+b)^{-2}$$

$$y_3 = (-1)(-2)\,a^3(ax+b)^{-3}$$

সাধাৰণভাৱে, $y_n = (-1)(-2)\ldots\ldots \{-(n-1)\}\, a^n(ax+b)^{-n}$

$$= (-1)^{n-1}\,\underline{n-1}\; a^n\,(ax+b)^{-n}$$

$$y = \log(ax+b) \Rightarrow y_n = (-1)^{n-1}\,\underline{n-1}\; a^n(ax+b)^{-n}$$

7) যদি $y = e^{ax}\sin bx$, তেনেহ'লে, $y_1 = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$

ধৰা হ'ল $a = r\cos\theta$, $b = r\sin\theta$

$\therefore r = \sqrt{a^2+b^2}$ and $\tan\theta = \frac{b}{a}$

$\therefore\ y_1 = r\cos\theta.e^{ax}\sin bx + r\sin\theta.e^{ax}\cos bx$

$\Rightarrow y_1 = re^{ax}(\cos\theta\ \sin bx + \sin\theta\ \cos bx)$

$\Rightarrow y_1 = re^{ax}\sin(bx+\theta)$

$\therefore\ y_2 = r[ae^{ax}\sin(bx+\theta) + be^{ax}\cos(bx+\theta)]$

$= re^{ax}[r\cos\theta\sin(bx+\theta) + r\sin\theta\cos(bx+\theta)]$

$= r^2e^{ax}\sin(bx+\theta+\theta)$

$= r^2e^{ax}\sin(bx+2\theta)$

সাধাৰণভাৱে, $y_n = r^n e^{ax}\sin(bx+n\theta)$

$$= \left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\ \sin\left(bx + n\ \tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$

$y = e^{ax}\sin bx$

$$\Rightarrow y_n = \left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\sin\left(bx + n\ \tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ ঃ অধোলিখিতবোৰৰ x সাপেক্ষে nতম অৱকল সহগ উলিয়াওক।

i) $y = \sinx$ ii) $y = \cosx$ iii) $y = e^{ax}\cosbx$

iv) $y = \frac{1}{ax+b}$ v) $y = e^x\sinx$ vi) $y = \logx$.

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1: অধোলিখিতবোৰৰ x সাপেক্ষে অৱকল সহগ উলিয়াওক।

a) $y = \frac{1}{x^2-16}$ b) $y = \frac{1-x}{1+x}$

সমাধান ঃ a) $y = \frac{1}{x^2-16}$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{(x-4)(x+4)} = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+4}\right]$$

$$\therefore y_n = \frac{1}{8}\left[\frac{(-1)^n n!.1^n}{(x-4)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!.1^n}{(x+4)^{n+1}}\right]$$

$$\left[\because y = \frac{1}{ax+b} \Rightarrow y_n = \frac{(-1)^n n!.a^n}{(ax+b)^{n+1}}\right]$$

$$\Rightarrow y_n = \frac{1}{8}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-4)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+4)^{n+1}}\right] = \frac{(-1)^n n!}{8}\left[\frac{1}{(x-4)^{n+1}} - \frac{1}{(x+4)^{n+1}}\right]$$

b) $y = \frac{1-x}{1+x} = \frac{2-(1+x)}{1+x}$

$$= \frac{2}{1+x} - \frac{1+x}{1+x}$$

$$= 2.\frac{1}{1+x} - 1$$

$$\therefore y_n = 2.\frac{(-1)^n n!.1^n}{(1+x)^{n+1}} - 0 = \frac{2.(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

উদাহৰণ 2: nতম অৱকলজ উলিয়াওক।

a) $y = \sin 3x \cos 5x$ b) $y = \tan^{-1}x$

c) $y = \cos^2 x$ d) $y = \cos^4 x$

সমাধান ঃ a) $y = \sin 3x \cos 5x$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(2\sin 3x \cos 5x)$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}[\sin 8x - \sin 2x]$$

$$\therefore y_n = \frac{1}{2}\left[8^n \sin\left(n\frac{\pi}{2} + 8x\right) - 2^n \sin\left(n\frac{\pi}{2} + 2x\right)\right]$$

$$= 2^{n-1}\left[2^{2n}\sin\left(n\frac{\pi}{2} + 8x\right) - \sin\left(n\frac{\pi}{2} + 2x\right)\right]$$

b) $y = \tan^{-1}x \Rightarrow y_1 = \frac{1}{1+x^2}$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{(x-i)(x+i)}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$$

$$\Rightarrow y_n = \frac{1}{2i}\left[\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x-i)^n} - \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(x+i)^n}\right]$$

$$\Rightarrow y_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i}\left[\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n}\right]$$

ধৰা হ'ল, $x = r\cos\theta$ আৰু $1 = r\sin\theta$

$\therefore r = \sqrt{x^2+1}$ আৰু $\tan\theta = \frac{1}{x}$

তেনেহ'লে, $\frac{1}{(x-i)^n} = (r\cos\theta - ir\sin\theta)^{-n}$

$= r^{-n}(\cos\theta - i\sin\theta)^{-n}$

$= r^{-n}(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ (ডি মইভাৰৰ উপপাদ্যৰ পৰা)

আৰু $\frac{1}{(x+i)^n} = (r\cos\theta + ir\sin\theta)^{-n}$

$= r^{-n}(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n}$

$= r^{-n}(\cos n\theta - i\sin n\theta)$

$$\therefore y_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i}\left[r^{-n}(\cos n\theta + i\sin n\theta) - r^{-n}(\cos n\theta - i\sin n\theta s\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{2i}\left[2ir^n \sin n\theta\right]$$

$$= (-1)^n(n-1)!\, r^{-n}\sin n\theta$$

$$= \frac{(-1)^n(n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}}.\sin\left(n\tan^{-1}\frac{1}{x}\right)$$

c) $y = \cos^2 x \Rightarrow y = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

$$\therefore y_n = \frac{1}{2}\left[0 + 2^n\cos\left(n\frac{\pi}{2} + 2x\right)\right]$$

$$= 2^{n-1}\cos\left(n\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

d) $y = \cos^4 x = (\cos^2 x)^2$

$$= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + 2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[3 + 4\cos 2x + \cos 4x\right]$$

$$\therefore y_n = \frac{1}{8}\left[0 + 4.2^n\cos\left(n\frac{\pi}{2}+2x\right) + 4^n\cos\left(n\frac{\pi}{2}+4x\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2^3}\left[2^{n+2}\cos\left(n\frac{\pi}{2}+2x\right) + 2^{2n}\cos\left(n\frac{\pi}{2}+4x\right)\right]$$

$$= 2^{n-1}\cos\left(n\frac{\pi}{2}+2x\right) + 2^{2n-3}\cos\left(n\frac{\pi}{2}+4x\right)$$

উদাহৰণ 3: যদি $y = \sin nx + \cos nx$, দেখুওৱাক যে $y_r = n^r\left\{1+(-1)^r\sin 2nx\right\}^{\frac{1}{2}}$

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $y = \sin nx + \cos nx$

$$\therefore y_r = n^r\sin\left(r\frac{\pi}{2}+nx\right) + n^r\cos\left(r\frac{\pi}{2}+nx\right)$$

$$\Rightarrow y_r = n^r\left[\left\{\sin\left(r\frac{\pi}{2}+nx\right)+\cos\left(r\frac{\pi}{2}+nx\right)\right\}^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= n^r\left[\sin^2\left(r\frac{\pi}{2}+nx\right)+\cos^2\left(r\frac{\pi}{2}+nx\right)+2\sin\left(r\frac{\pi}{2}+nx\right)\cos\left(r\frac{\pi}{2}+nx\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= n^r\left[1+\sin\left\{2\left(r\frac{\pi}{2}+nx\right)\right\}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= n^r\left[1+\sin(r\,\pi+2nx)\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= n^r\left[1+(-1)^r\sin 2nx\right]^{\frac{1}{2}}$$

উদাহৰণ 4 : দেখুওৱাক যে $x = 0$ ৰ বাবে $\frac{x^3}{x^2-1}$ ৰ অৱকল সহগ 0 বা $-n!$ হ'ব যদি যথাক্রমে n যুগ্ম বা অযুগ্ম, $n > 1$.

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $y = \frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$

$$= x + \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

$$= x + \frac{1}{2(x-1)} + \frac{1}{2(x+1)}$$

$\therefore$ যেতিয়া $n > 1$, আমি পালোঁ, $y_n = 0 + \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$

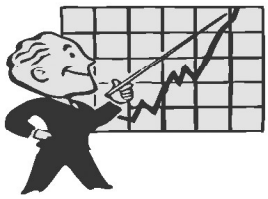
$$\Rightarrow y_n = \frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$$

$$\therefore (y_n)_0 = \frac{(-1)^n n!}{2!}\left[\frac{1}{(-1)^{n+1}} + \frac{1}{1}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{2}\left[(-1)^{n+1} + 1\right]$$

$$= \begin{cases} \frac{n!}{2}(-1+1), \text{ যদি n যুগ্ম} \\ \frac{-n!}{2}(1+1), \text{ যদি n অযুগ্ম} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ যদি n যুগ্ম} \\ -n!, \text{ যদি n অযুগ্ম} \end{cases}$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ২ ঃ অধোলিখিতবোৰৰ nতম অৱকল সহগ উলিয়াওক।

a) $\frac{1}{x+2}$ b) $\frac{1}{x^2-4}$ c) $\frac{1}{x^2-1}$

প্রশ্ন নং ৩ ঃ y_n উলিয়াওক যদি,

a) $y = \cos 3x \cos 7x$ b) $y = \sin^2 x$

c) $y = \tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}$ d) $y = \log(2x+5)$

e) $y = e^x \cos 3x$

প্রশ্ন নং ৪ ঃ যদি $y = (ax+b)^m$ আৰু n, mতকৈ সৰু এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, প্রমাণ কৰক যে $y_n = \frac{m!}{(m-n)!}a^n(ax+b)^{m-n}$ কি চর্ত সিদ্ধ হ'লে,

a) y_n শূন্য হ'ব? b) y_n ধ্রুৱক হ'ব?

৮.৪ লাইবনিৎজৰ উপপাদ্য

ধৰা হ'ল, u আৰু v দুটা xৰ ফলন আৰু ফলন দুটা n বাৰ অৱকলনীয়। তেনেহ'লে,

$$(uv)_n = u_n v + {}^nc_1 u_{n-1}v_1 + {}^nc_2 u_{n-2}v_2 + \ldots + {}^nc_r u_{n-r}v_r + \ldots + uv_n$$

প্রমাণ ঃ গণিতীয় আৱোহ-তত্ত্বৰ সহায়ত আমি উপপাদ্যটো প্রমাণ কৰিম।

অৱকলনৰ সহায়ত আমি পাওঁ,

$$(uv)_1 = u_1 v + uv_1 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ (1)$$

গতিকে n = 1ৰ বাবে উপপাদ্যটো সত্য।

ধৰা হ'ল, n = mৰ বাবে উপপাদ্যটো সত্য m > 1, $m \in N$.

গতিকে,

$$(uv)_m = u_m v + {}^mc_1 u_{m-1} v_1 + {}^mc_2 u_{m-2} v_2 + \ldots + {}^mc_{r-1} u_{m-r+1} v_{r-1} + {}^mc_r u_{m-r} v_r + \ldots + uv_m \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

(2)ৰ উভয় পক্ষক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\begin{aligned}(uv)_{m+1} &= (u_{m+1}v + u_m v_1) + {}^mc_1(u_m v_1 + u_{m-1}v_2) + {}^mc_2(u_{m-1}v_2 + u_{m-2}v_3) + \\ &\quad \ldots + {}^mc_{r-1}(u_{m-r+2}v_{r-1} + u_{m-r+1}v_r) + {}^mc_r(u_{m-r+1}v_r + u_{m-r}v_n) + \\ &\quad \ldots + (u_1 v_m + uv_{m+1}) \\ &= u_{m+1}v + (1+{}^mc_1)u_m v_1 + ({}^mc_1 + {}^mc_2)u_{m-1}v_2 + \ldots \\ &\quad + ({}^mc_{r-1} + {}^mc_r)u_{m-r+1}v_r + \ldots + uv_{m+1} \\ &= u_{m+1}v + {}^{m+1}c_1 u_m v_1 + {}^{m+1}c_2 u_{m-1}v_2 + \ldots + {}^{m+1}c_r u_{m-r+1}v_r + \ldots + uv_{m+1}\end{aligned}$$

$[\because {}^mc_0 = 1,\ {}^mc_{r-1} + {}^mc_r = {}^{m+1}c_r]$

$\therefore$ n = m + 1ৰ বাবে উপপাদ্যটো সত্য, যদি ই n = mৰ বাবে সত্য। কিন্তু উপপাদ্যটো n = 1ৰ বাবে সত্য। এইদৰে n = 2, n = 3 আদিৰ বাবে সত্য।

অর্থাৎ উপপাদ্যটো nৰ সকলো ধনাত্মক অখণ্ড মানৰ বাবে সত্য।

টোকা ঃ গট্‌ফ্রিড্ উইলহেল্ম লাইবনিৎজ (Gottfried Wilhelm Leibnitz, 1646-1716) আছিল এজন প্রথিতযশা গণিতজ্ঞ।



গট্‌ফ্রিড্ উইলহেল্ম লাইবনিৎজ (1646-1716) ঃ তেওঁ জার্মান গণিতজ্ঞ আৰু দার্শনিক আছিল।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1: যদি $y = x^n \log x$, দেখুওৱাক যে $xy_{n+1} = n!$

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $y = x^n \log x$

$$\therefore y_1 = x^n \frac{1}{x} + nx^{n-1}\log x$$

$$\Rightarrow xy_1 = x^n + nx^n \log x$$

$$\Rightarrow xy_1 = x^n + ny$$

লাইবনিৎজৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত n বাৰ অৱকলন কৰি, আমি পাওঁ,

$$xy_{n+1} + {}^nc_1 . 1 . y_n = n! + ny_n$$

$$\Rightarrow xy_{n+1} + ny_n = n! + ny_n$$

$$\Rightarrow xy_{n+1} = n!$$

উদাহৰণ 2: যদি $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$, দেখুওৱাক যে,

i) $x^2y_2 + xy_1 + y = 0$

ii) $x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $y = a\cos(\log x) + b\sin(\log x)$ ... ... (1)

$$\therefore y_1 = -a\frac{\sin(\log x)}{x} + \frac{b\cos(\log x)}{x}$$

$\Rightarrow xy_1 = -a\sin(\log x) + b\cos(\log x)$ ... ... (2)

(2)ক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$xy_2 + 1.y_1 = -\frac{a\cos(\log x)}{x} - \frac{b\sin(\log x)}{x}$$

$\Rightarrow x^2y_2 + xy_1 = -[a\cos(\log x) + b\sin(\log x)]$

$\Rightarrow x^2y_2 + xy_1 = -y$, (1)ৰ পৰা

$\Rightarrow x^2y_2 + xy_1 + y = 0$, এইটো হ'ল (i).

(1)ক লাইবনিৎজৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত n বাৰ অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$(x^2y_{n+2} + {}^nc_1.2xy_{n+1} + {}^nc_2.2.y_n) + (xy_{n+1} + {}^nc_1.1.y_n) + y_n = 0$$

$$\Rightarrow x^2y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2!}.2y_n + xy_{n+1} + ny_n + y_n = 0$$

$\Rightarrow x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2-n+n+1)y_n = 0$

$\Rightarrow x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$

উদাহৰণ 3 : যদি $y = e^{a\sin^{-1}x}$, প্ৰমাণ কৰক যে,

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2+a^2)y_n = 0.$$

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $y = e^{a\sin^{-1}x} \Rightarrow \log y = a\sin^{-1}x$

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ, $\frac{1}{y}.y_1 = a.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\Rightarrow \frac{y_1^2}{y^2} = \frac{a^2}{1-x^2}$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = a^2y^2$$

আকৌ x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$(1-x^2)2\,y_1y_2 + (-2x)y_1^2 = a^2.2yy_1 \Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 = a^2y$

লাইবনিৎজৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত n বাৰ অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\left\{(1-x^2)y_{n+2} + {}^n c_1(-2x)y_{n+1} + {}^n c_2(-2)y_n\right\} - \left\{xy_{n+1} + {}^n c_1.1.y_n\right\} = a^2y_n$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - 2nxy_{n+1} - 2.\frac{n(n-1)}{2!}y_n - xy_{n+1} - ny_n = a^2y_n$$

$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2-n+n+a^2)y_n = 0$

$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2+a^2)y_n = 0$

উদাহৰণ 4: যদি $y = \sin(m \sin^{-1}x)$, প্ৰমাণ কৰক যে,

i) $(1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$

ii) $(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2-m^2)y_n = 0$

লগতে $y_n(0)$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $y = \sin(m \sin^{-1}x)$ ... ... (1)

$\Rightarrow \sin^{-1}y = m\sin^{-1}x$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.y_1 = m.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (অৱকলন কৰি)

$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = m^2(1-y^2)$ ... ... (2)

আকৌ, x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$(1-x^2)2y_1y_2 + (-2x)y_1^2 = m^2(0-2y\,y_1)$

$\Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 = -m^2y$

$\Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 + m^2y = 0$ ... ... (3)

এইটো হ'ল (i)

আকৌ লাইবনিৎজৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত (3)ক n বাৰ অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$\left\{(1-x^2)y_{n+2} + {}^n c_1(-2x)y_{n+1} + {}^n c_2(-2)y_n\right\} - \left\{xy_{n+1} + {}^n c_1.1.y_n\right\} + m^2y_n = 0$

$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - 2nxy_{n+1} - 2.\frac{n(n-1)}{2!}y_n - xy_{n+1} - ny_n + m^2y_n = 0$

$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2-n+n-m^2)y_n = 0$

$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2-m^2)y_n = 0$ ... ... (4)

এইটো হ'ল (ii),

$x = 0$ বহুৱাই, 1)ৰ পৰা $y(0) = 0$

2)ৰ পৰা $y_1(0) = m$

3)ৰ পৰা $y_2(0) = 0$

4)ৰ পৰা $y_{n+2}(0) = (n^2-m^2)y_n(0)$ ... ... (5)

(5)ত $n = 1, 2, 3, \ldots$ বহুৱাই আমি পাওঁ,

$y_3(0) = (1^2-m^2)y_1(0) = m(1^2-m^2)$

$y_4(0) = (2^2-m^2)y_2(0) = 0$

$y_5(0) = (3^2-m^2)y_3(0) = m(1^2-m^2)(3^2-m^2)$

$y_6(0) = (4^2-m^2)\,y_4(0) = 0$

$y_7(0) = (5^2-m^2)y_5(0) = m(1^2-m^2)\,(3^2-m^2)\,(5^2-m^2)$ এইদৰে ওলাই থাকিব।

যদি n যুগ্ম, $y_n(0) = 0$

আৰু $y_n(0) = m(1^2-m^2)(3^2-m^2)(5^2-m^2) \ldots \ldots \{(n-2)^2-m^2\}$

উদাহৰণ 5: যদি $y = (\sin^{-1}x)^2$, প্ৰমাণ কৰক যে,

$$(1-x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0$$

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $y = (\sin^{-1}x)^2$ ... ... (1)

$$\Rightarrow y_1 = 2\sin^{-1}x.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-x^2}.y_1 = 2\sin^{-1}x$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = 4(\sin^{-1}x)^2$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_1^2 = 4y, \text{ (1)ৰ পৰা}$$

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ, $(1-x^2)2y_1y_2 + (-2x)y_1^2 = 4y_1$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_2 - xy_1 = 2$$

লাইবনিৎজৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত n বাৰ অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\left\{(1-x^2)y_{n+2} + {}^nc_1(-2x)y_{n+1} + {}^nc_2(-2)y_n\right\} - \left\{xy_{n+1} + {}^nc_1.1.y_n\right\} = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - 2nxy_{n+1} - 2.\frac{n(n-1)}{2!}.y_n - xy_{n+1} - ny_n = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - (n^2-n+n)y_n = 0$$

$$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1} - n^2y_n = 0$$

উদাহৰণ 6 : যদি $I_n = \frac{d^n}{dx^n}(x^n \log x)$, দেখুওৱাক যে, $I_n = nI_{n-1} + (n-1)!$

ইয়াৰ সহায়ত দেখুওৱাক যে, $I_n = n!\left(\log x + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right)$

সমাধান ঃ $I_n = \frac{d^n}{dx^n}\left(x^n \log x\right)$

$$= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{\frac{d}{dx}\left(x^n \log x\right)\right\}$$

$$= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^n.\frac{1}{x} + nx^{n-1}\log x\right)$$

$$= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^{n-1}\right) + n\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(x^{n-1}\log x\right)$$

$$= (n-1)! + nI_{n-1}$$

অৰ্থাৎ, $I_n = nI_{n-1} + (n-1)!$ ... ... (1)

দ্বিতীয় অংশ ঃ

(1)ৰ পৰা $\frac{I_n}{n!} = \frac{nI_{n-1}}{n!} + \frac{(n-1)!}{n!}$

$$\Rightarrow \frac{I_n}{n!} = \frac{I_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{1}{n} \quad \text{... ... ... (2)}$$

nৰ ঠাইত n–1 বহুৰাই আমি পাওঁ, $\frac{I_{n-1}}{(n-1)!}=\frac{I_{n-2}}{(n-2)!}+\frac{1}{(n-1)}$

(2)ৰ পৰা $\frac{I_n}{n!}=\frac{I_{n-2}}{(n-2)!}+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}$

এইদৰে কৰি থাকিলে আৰু (2) ব্যৱহাৰ কৰিলে আমি পাম,

$$\frac{I_n}{n!}=\frac{I_1}{1!}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow I_n=n!\left(I_1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{n}\right) \quad \text{... ... ... (3)}$$

এতিয়া, $I_1=\frac{d}{dx}(x\log x)$

$$=x.\frac{1}{x}+1.\log x$$

$$=1+\log x$$

$$\therefore (3)\text{ ৰ পৰা } I_n=n!\left(\log x+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+.....+\frac{1}{n}\right)$$

উদাহৰণ 7: যদি $y^{\frac{1}{m}}+y^{-\frac{1}{m}}=2x$, প্ৰমাণ কৰক যে,

$$(x^2-1)y_{n+2}+(2n+1)xy_{n+1}+(n^2-m^2)y_n=0$$

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $y^{\frac{1}{m}}+y^{-\frac{1}{m}}=2x$ ... ... (1)

$$\Rightarrow y^{\frac{2}{m}}+1=2xy^{\frac{1}{m}}$$

$$\Rightarrow y^{\frac{2}{m}}-2xy^{\frac{1}{m}}+1=0$$

$$\Rightarrow y^{\frac{1}{m}}=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2-4}}{2}$$

$$\Rightarrow y^{\frac{1}{m}}=\frac{2x\pm2\sqrt{x^2-1}}{2}$$

$$\Rightarrow y=\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right)^m \quad \text{... ... ... (2)}$$

$$\therefore y_1=m\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right)^{m-1}\left(1\pm\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}(2x)\right)$$

$$\Rightarrow y_1=\frac{m\left(x\pm\sqrt{x^2-1}\right)^m}{x\pm\sqrt{x^2-1}}.\frac{\sqrt{x^2-1}\pm x}{\sqrt{x^2-1}}$$

$\Rightarrow y_1 = \pm\frac{m\,y}{\sqrt{x^2-1}}$, (2)ৰ সহায়ত

$\Rightarrow (x^2-1)y_1^2 = m^2y^2$

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ, $(x^2-1)2y_1y_2 + 2xy_1^2 = m^2.2y\,y_1$

$\Rightarrow (x^2-1)y_2 + xy_1 = m^2y$

লাইবনিজৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত n বাৰ অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$\{(x^2-1)y_{n+2} + {}^nc_1.2x.y_{n+1} + {}^nc_2.2.y_n\} + (xy_{n+1} + {}^nc_1.1.y_n\} = m^2y_n$

$\Rightarrow (x^2-1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2-n+n-m^2)y_n = 0$

$\Rightarrow (x^2-1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2-m^2)y_n = 0$

উদাহৰণ 8: যদি $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \log\left(\frac{x}{n}\right)^n$, প্ৰমাণ কৰক যে,

$x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + 2n^2y_n = 0$

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = \log\left(\frac{x}{n}\right)^n$ ... ... (1)

$\Rightarrow \cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right) = n(\log x - \log n)$

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাও, $\frac{-1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}.\frac{y_1}{b} = n\left(\frac{1}{x}-0\right)$

$\Rightarrow \frac{-y_1}{\sqrt{b^2-y^2}} = \frac{n}{x}$

$\Rightarrow x^2y_1^2 = n^2(b^2-y^2)$

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ, $x^2.2y_1y_2 + 2xy_1^2 = n^2(0-2y\,y_1)$

$\Rightarrow x^2y_2 + xy_1 = -n^2y$

লাইবনিৎজৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত n বাৰ অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$(x^2y_{n+2} + {}^nc_1.2xy_{n+1} + {}^nc_2.2.y_n) + (xy_{n+1} + {}^nc_1.1.y_n) = -n^2y_n$

$\Rightarrow x^2y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + 2.\frac{n(n-1)}{L2}y_n + xy_{n+1} + ny_n + n^2y_n = 0$

$\Rightarrow x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2-n+n+n^2)y_n = 0$

$\Rightarrow x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + 2n^2y_n = 0$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৫ ঃ যদি $y = x^n \log x$ লাইবনিৎজৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ ৰ্Á¡ y_{n+1} নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৬ ঃ যদি $y = \cos(\log x)$, প্রমাণ কৰক যে,

$x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$

প্রশ্ন নং ৭ ঃ যদি $y = (x^2-1)^n$, প্রমাণ কৰক যে,

$(x^2-1)y_{n+2} + 2xy_{n+1} - n(n+1)y_n = 0$

প্রশ্ন নং ৮ ঃ যদি $y = e^{\tan^{-1}x}$, প্রমাণ কৰক যে,

$(1+x^2)y_{n+2} + [2(n+1)x-1]y_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$

প্রশ্ন নং ৯ ঃ যদি $y = \tan^{-1}x$, প্রমাণ কৰক যে,

$(1+x^2)y_{n+2} + 2(n+1)xy_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$

ইয়াৰ সহায়ত $y_n(0)$ উলিয়াওক।

প্রশ্ন নং ১০ ঃ যদি $y = \left(\log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right)^2$, প্রমাণ কৰক যে,

$(1+x^2)y_{n+2} + 2(n+1)xy_{n+1} + n^2y_n = 0$

দেখুৱাওক যে $(y_{n+2})_0 = -n^2(y_n)_0$

প্রশ্ন নং ১১ ঃ যদি $y = e^x \log x$, প্রমাণ কৰক যে,

i) $xy_2 - (2x-1)y_1 + (x-1)y = 0$

ii) $xy_{n+2} + (n-2x+1)y_{n+1} - (2n-x+1)y_n + ny_{n-1} = 0$

প্রশ্ন নং ১২ ঃ যদি $y = \dfrac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$, প্রমাণ কৰক যে,

$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+3)xy_{n+1} - (n+1)^2y_n = 0$

প্রশ্ন নং ১৩ ঃ যদি $x = \tan(\log y)$, প্রমাণ কৰক যে,

$(1+x^2)y_{n+1} + (2nx-1)y_n + n(n-1)y_{n-1} = 0$



৮.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- $y = f(x)$ ফলনক n বাৰ ধাৰাবাহিকভাৱে অৱকলন কৰি yৰ nতম অৱকলজক $y^{(n)}(x)$, $f^{(n)}(x)$, $D^{(n)}y$, $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ or $y_n(x)$ৰে বুজোৱা হয়।
- কিছুমান প্রামাণিক ফলনৰ nতম অৱকলজ তলত দিয়া হ'ল ঃ

  a) $y = (ax+b)^m$ৰ বাবে $y_n = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots\{m-(n-1)\}a^n(ax+b)^{m-n}$.

b) $y = x^m$ৰ বাবে $y_n = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)x^{m-n}$

d) $y = \sin(ax+b)$ৰ বাবে $y_n = a^n \sin\left\{n\frac{\pi}{2} + (ax+b)\right\}$

e) $y = \cos(ax+b)$ৰ বাবে $y_n = a^n \cos\left\{n\frac{\pi}{2} + (ax+b)\right\}$

f) $y = \log(ax+b)$ৰ বাবে $y_n = (-1)^{n-1} \lfloor\underline{n-1}\, a^n (ax+b)^{-n}$

g) $y = e^{ax}\sin bx$ৰ বাবে $y_n = \left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}} e^{ax} \sin\left(bx + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)$.

- দুটা ফলনৰ পূৰণফলৰ nতম অৱকলজ উলিয়াবৰ বাবে লাইবনিৎজৰ উপপাদ্যটো হ'ল এনে ধৰণৰ ঃ

ধৰা হ'ল, u আৰু v দুটা xৰ ফলন। ফলন দুটাক nবাৰ অৱকলন কৰিব পাৰি। তেনেহ'লে,

$(uv)_n = u_n v + {}^nc_1 u_{n-1} v_1 + {}^nc_2 u_{n-2} v_2 + \ldots\ldots + {}^nc_r u_{n-r} v_r + \ldots\ldots + uv_n$

৮.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ i) দিয়া আছে, $y = \sin x$

$$y_1 = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$y_2 = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(2.\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$y_3 = \cos\left(2.\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2.\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(3.\frac{\pi}{2} + x\right)$$

এইদৰে, $y_n = \sin\left(n.\frac{\pi}{2} + x\right)$

ii) দিয়া আছে, $y = \cos x$

$$y_1 = -\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$y_2 = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$y_3 = -\sin\left(2.\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2.\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(3.\frac{\pi}{2} + x\right)$$

এইদৰে, $y_n = \cos\left(n.\frac{\pi}{2} + x\right)$

iii) দিয়া আছে, $y = e^{ax}\cos bx$

$y_1 = ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx$ ($a = r\cos\theta$ আৰু $b = r\sin\theta$ বহুওৱা হ'ল,

$$\therefore r = \sqrt{a^2+b^2} \text{ আৰু } \tan\theta = \frac{b}{a})$$

$= r\cos\theta\, e^{ax}\cos bx - r\sin\theta e^{ax}\sin bx$

$= re^{qx}\cos(bx+\theta)$

$y_2 = r[ae^{ax}\cos(bx+\theta) - be^{ax}\sin(bx+\theta)]$

$= re^{ax}[r\cos\theta\cos(bx+\theta) - r\sin\theta\sin(bx+\theta)]$

$= r^2e^{ax}[\cos\theta\cos(bx+\theta) - \sin\theta\sin(bx+\theta)]$

$= r^2e^{ax}\cos(bx+2\theta)$

এইদৰে, $y_n = r^n e^{ax}\cos(bx+n\theta)$

$$= \left(a^2+b^2\right)^{\frac{n}{2}} e^{ax}\cos\left(bx + n\tan^{-1}\frac{b}{a}\right).$$

iv) দিয়া আছে, $y = \dfrac{1}{ax+b}$

$$y_1 = -\frac{1}{(ax+b)^2}$$

$$y_2 = \frac{(-1)(-2)}{(ax+b)^3}a^2 = \frac{(-1)^2 2!}{(ax+b)^3}a^2$$

$$y_3 = \frac{(-1)^2 2!(-3)}{(ax+b)^4}a^3 = \frac{(-1)^2 3!}{(ax+b)^4}a^3$$

এইদৰে, $y_n = \dfrac{(-1)^2 n!}{(ax+b)^{n+1}}a^n$.

v) দিয়া আছে, $y = e^x\sin x$

$$y = e^x\sin x + e^x\cos x$$

$$y_1 = \sqrt{2}e^x\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$$

$$= \sqrt{2}e^x\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$$

$$= 2^{\frac{1}{2}}e^x\sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]$$

$$= 2^{\frac{2}{2}}\left[e^x\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)+e^x\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right]$$

$$= 2^{\frac{2}{2}} e^x \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + x\right)$$

$$= 2^{\frac{2}{2}} e^x \sin\left(2.\frac{\pi}{4} + x\right)$$

এইদৰে, $y_n = 2^{\frac{n}{2}} e^x \sin\left(n.\frac{\pi}{4} + x\right)$.

vi) দিয়া আছে, $y = \log x$

$$y_1 = \frac{1}{x}$$

$$y_2 = \frac{-1}{x^2}$$

$$y_3 = \frac{(-1)(-2)}{x^3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}$$

$$y_4 = \frac{(-1)(-2)(-3)}{x^4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$$

এইদৰে, $y_n = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) ধৰা হ'ল, $y = \frac{1}{x+2}$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{-1}{(x+2)^2}$$

$$\Rightarrow y_2 = \frac{(-1)(-2)}{(x+2)^3} = \frac{(-1)^2 2!}{(x+2)^3}$$

সেইদৰে, $y_3 = \frac{(-1)(-2)(-3)}{(x+2)^4} = \frac{(-1)^3 3!}{(x+2)^4}$

এইদৰে, আমি পাম, $y_n = \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}$.

b) ধৰা হ'ল, $y = \frac{1}{x^2-4} \Rightarrow y = \frac{1}{(x+2)(x-2)}$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right]$$

$$y_n = \frac{1}{4}\left[\frac{(-1)^n n!.1^n}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!.1^n}{(x+2)^{n+1}}\right]$$

$$\Rightarrow y_n = \frac{1}{4}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-2)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+2)^{n+1}}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{4}\left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x+2)^{n+1}}\right]$$

c) ধৰা হ'ল, $y = \frac{1}{x^2-1}$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right]$$

$$\therefore\ y_n = \frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^n n!.1^n}{(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!.1^n}{(x+1)^{n+1}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}} - \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}\right]$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{2}\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right]$$

৩নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) দিয়া আছে, $y = \cos 3x \cos 7x$

$$= \frac{1}{2}(2\cos 3x \cos 7x)$$

$$= \frac{1}{2}[\cos 4x + \cos 10x]$$

$$y_n = \frac{1}{2}\left[4^n \cos\left(n\frac{\pi}{2} + 4x\right) + 10^n \cos\left(n\frac{\pi}{2} + 10x\right)\right]$$

b) দিয়া আছে, $y = \sin^2 x$

$$= \frac{1}{2}(2\sin^2 x)$$

$$= \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$$

$$y_n = 0 - \frac{1}{2}.2^n \cos\left(n\frac{\pi}{2} + 2x\right)$$

$$= -2^{n-1}\cos\left(n\frac{\pi}{2} + 2x\right).$$

c) দিয়া আছে, $y = \tan^{-1}\frac{1-x}{1+x}$

$= \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} x$

$= \frac{\pi}{4} - \tan^{-1} x$

$y_n = 0 - (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{\sin n\theta}{r^n}$, যাতে, $r = \sqrt{x^2+1}$ আৰু $\tan\theta = \frac{1}{x}$.

$\Rightarrow y_n = \frac{(-1)^n(n-1)!}{(x^2+1)^{\frac{n}{2}}}\sin\left(n\tan^{-1}\frac{1}{x}\right)$

d) দিয়া আছে, $y = \log(2x+5)$

$y_1 = \frac{2}{2x+5}$

$y_2 = (-1)\frac{2^2}{(2x+5)^2}$

$y_3 = (-1)(-2)\frac{2^3}{(2x+5)^3} = (-1)^2 2!\frac{2^3}{(2x+5)^3}$

এইদৰে, $y_n = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{2^n}{(2x+5)^n}$.

e) দিয়া আছে, $y = e^x \cos 3x \Rightarrow y_1 = e^x\cos3x - 3e^x\sin3x$

$= e^x(\cos3x - 3\sin3x)$

$= e^x(r\cos\theta\cos3x - r\sin\theta\sin3x)$

ëÂযাতে, $r\cos\theta = 1$ আৰু $r\sin\theta = 3$

$r = \sqrt{10}$ আৰু $\tan^{-1}3 = \theta$]

$= e^x r\cos(3x+\theta)$

$= re^x\cos(3x+\theta)$

$y_2 = r[e^x\cos(3x+\theta) - 3e^x\sin(3x+\theta)]$

$= re^x[r\cos\theta\cos(3x+\theta) - r\sin\theta\sin(3x+\theta)]$

$= r^2e^x\cos(\theta+3x+\theta)$

$= r^2e^x\cos(3x+2\theta)$

এইদৰে, $y_n = r^ne^x\cos(3x+n\theta)$

$= (10)^{\frac{n}{2}}e^x\cos(3x+n\tan^{-1}3)$.

৪নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) আমি জানো যে যদি, $y = (ax+b)^m$, তেনেহ'লে,

$$y_n = m(m-1)(m-2), ..., [m-(n-1)]a^n(ax+b)^{m-n},\ n < m$$

$$= \frac{m!}{(m-n)!}a^n(ax+b)^{m-n}$$

দ্বিতীয় অংশ ঃ a) If $n > m$, $y_n = 0$

b) If $n = m$, $y_n = n!$, এটা ধ্ৰুৱক।

৫নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $y = x^n \log x$

$$\therefore y_1 = nx^{n-1}\log x + x^n.\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow xy_1 = nx^n \log x + x^n$$

$$\Rightarrow xy_1 = ny + x^n$$

লাইবনিৎজৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত n বাৰ অৱকলন কৰি, আমি পাওঁ,

$$xy_{n+1} + n.1.y_n = n.y_n + n!$$

$$\Rightarrow xy_{n+1} = n!$$

$$\Rightarrow y_{n+1} = \frac{n!}{x}.$$

৬নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $y = \cos(\log x)$

$$\Rightarrow \cos^{-1} y = \log x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} y\right) = \frac{d}{dx}(\log x)$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}}y_1 = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow -xy_1 = \sqrt{1-y^2}$$

$$\Rightarrow x^2y_1^2 = 1 - y^2$$

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ, $x^2 2y_1y_2 + 2x.y_1^2 = -2y.y_1$

$$\Rightarrow x^2y_2 + x.y_1 = -y$$

$$\Rightarrow x^2y_2 + x.y_1 + y = 0$$

লাইবনিৎজৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত n বাৰ অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\left\{x^2y_{n+2} + n.2x.y_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2!}.2y_n\right\} + \{xy_{n+1} + n.1.y_n\} + y_n = 0$$

$$\Rightarrow x^2y_{n+1} + (2n+1)y_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$$

৭নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $y = (x^2-1)^n$ ... ... (1)

$$y_1 = n(x^2-1)^{n-1}.2x$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{n(x^2-1)^n.2x}{(x^2-1)}$$

$$\Rightarrow (x^2-1)y_1 = ny.2x \quad (1)\text{ৰ সহায়ত}$$

$$\Rightarrow (x^2-1)y_1 = 2nxy$$

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ $(x^2-1)y_2 + 2xy_1 = 2n(1.y + xy_1)$

$$\Rightarrow (x^2-1)y_2 + 2(1-n)xy_1 - 2ny = 0$$

লাইবনিৎজৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত n বাৰ অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\left\{(x^2-1)y_{n+2} + n.2xy_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2!}.2.y_n\right\} + 2(1-n)\{xy_{n+1} + n.1.y_n\} - 2ny_n = 0$$

$\Rightarrow (x^2-1)y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + (n^2-n)y_n + 2(1-n)xy_{n+1} + 2(1-n)ny_n - 2ny_n = 0$

$\Rightarrow (x^2-1)y_{n+2} + 2xy_{n+1} - n(n+1)y_n = 0$

৮নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $y = e^{\tan^{-1}x}$

$$\Rightarrow \log y = \tan^{-1}x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}.y_1 = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = y$$

লাইবনিৎজৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত (n+1) বাৰ অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$(1+x^2)y_{n+2} + (n+1).2x.y_{n+1} + \frac{(n+1).n}{2!}.2.y_n = y_{n+1}$$

$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+2} + \{2(n+1)x - 1\}y_{n+1} + n(n+1)y_n = 0$

৯নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $y = \tan^{-1}x$ ... ... (1)

$$\therefore y_1 = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{... ... ... (2)}$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = 1$$

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$(1+x^2)y_2 + 2xy_1 = 0$ ... ... (3)

লাইবনিৎজৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত (3)ক n বাৰ অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\left\{(1+x^2)y_{n+2} + n.2x.y_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2!}.2y_n\right\} + 2\{xy_{n+1} + n.1.y_n\} = 0$$

$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+2} + 2nxy_{n+1} + n(n-1)y_n + 2xy_{n+1} + 2ny_n = 0$

$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+2} + 2(n+1)xy_{n+1} + \{n(n-1) + 2n\}n_n = 0$

$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+2} + 2(n+1)xy_{n+1} + (n^2+n)y_n = 0$

$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+2} + 2(n+1)xy_{n+1} + (n^2+1)y_n = 0$ ... ... (4)

x = 0 বহুৱাই, আমি পাওঁ, (1)ৰ পৰা y(0) = 0

(2)ৰ পৰা $y_1(0) = 1$

(3)ৰ পৰা $y_2(0) = 0$

(4)ৰ পৰা $y_{n+2}(0) = -n(n+1)y_n(0)$ ... ... (5)

(5)ত n = 1, 2, 3, ... বহুৱাই আমি পাওঁ,

$y_3(0) = -1.2.y_1(0) = -2!$

$y_4(0) = -2.3.y_2(0) = 0$

$y_5(0) = -3.4.y_3(0) = -3.4.(-2!) = 4!$

$y_6(0) = -4.5.y_4(0) = 0$

$y_7(0) = -5.6.y_5(0) = -5.6.(4!) = -6!$

এইদৰে ওলাই থাকিব।

এইদৰে, $y_n(0) = \begin{cases} 0 \text{ , যদি n যুগ্ম} \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}(n-1)! \text{ , যদি n অযুগ্ম} \end{cases}$

১০নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $y = \left\{\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right\}^2$ ... ... (1)

$$y_1 = 2\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}.2x\right)$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{2\sqrt{y}}{x+\sqrt{1+x^2}}.\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2}.y_1 = 2\sqrt{y}$

$\Rightarrow \left(1+x^2\right)y_1^{\,2} = 4y$ ... ... (2)

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$(1+x^2)2y_1y_2 + 2xy_1^{\,2} = 4y_1$

$\Rightarrow (1+x^2)y_2 + xy_1 - 4 = 0$ ... ... (3)

লাইবনিৎজৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত (3)ক n বাৰ অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\left\{\left(1+x^2\right)y_{n+2} + n.2x.y_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2!}.2.y_n\right\} + \left\{xy_{n+1} + n.1.y_n\right\} = 0$$

$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + n^2y_n = 0$ ... ... (4)

(4)ত x = 0 বহুৱাই আমি পাওঁ, $(y_{n+2})_0 + 0 + n^2(y_n)_0 = 0$

$\Rightarrow (y_{n+2})_0 = -n^2(y_n)_0$

১১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $y = e^x \log x$ ... ... (1)

$$y_1 = e^x \log x + e^x.\frac{1}{x}$$

$\Rightarrow y_1 = y + e^x.\frac{1}{x}$, (1)ৰ পৰা

$\Rightarrow xy_1 = xy + e^x$

$\Rightarrow xy_1 - xy = e^x$ ... ... (2)

(2)ক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$(xy_2+1.y_1) - (1.y+xy_1) = e^x$

$\Rightarrow xy_2 + y_1 - y - xy_1 = xy_1 - xy$, (2)ৰ পৰা

$\Rightarrow xy_2 + y_1 - 2xy_1 - y + xy = 0$

$\Rightarrow xy_2 - (2x-1)y_1 + (x-1)y = 0$

লাইবনিৎজৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত n বাৰ অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$\{xy_{n+2} + n.1.y_{n+1}\} - \{(2x-1)y_{n+1} + n.2.y_n\} + \{(x-1)y_n + n.1.y_{n-1}\} = 0$

$\Rightarrow xy_{n+2} + ny_{n+1} - (2x-1)y_{n+1} - 2ny_n(x-1)y_n + ny_{n-1} = 0$

$\Rightarrow xy_{n+2} + (n-2x+1)y_{n+1} - (2n-x+1)y_{n+1} + ny_{n-1} = 0$

১২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\Rightarrow y\sqrt{1-x^2} = \sin^{-1} x$$

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$y_1\sqrt{1-x^2} + y.\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\Rightarrow (1-x^2)y_1 - xy = 1$

আকৌ, x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$\{(1-x^2)y_2 + (-2x)y_1\} - \{xy_1 + 1.y\} = 0$

$\Rightarrow (1-x^2)y_2 - 3xy_1 - y = 0$

লাইবনিৎজৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত n বাৰ অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\left\{(1-x^2)y_{n+2} + n.(-2x)y_{n+1} + \frac{n(n-1)}{2!}(-2)y_n\right\} - 3\{xy_{n+1} + n.1.y_n) - y_n = 0$$

$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - 2nxy_{n+1} - (n^2-n)y_n - 3xy_{n+1} - 2ny_n - y_n = 0$

$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - (2n+3)xy_{n+1} - (n^2+2n+1)y_n = 0$

$\Rightarrow (1-x^2)y_{n+2} - (2n+3)xy_{n+1} - (n+1)^2y_n = 0$

১৩নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $x = \tan(\log y)$

$$\Rightarrow \tan^{-1} x = \log y$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1}x\right)=\frac{d}{dx}\left(\log y\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{y}.y_1$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y_1 = y$$

লাইবনিৎজৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত n বাৰ অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\left(1+x^2\right)y_{n+1}+n.2x.y_n+\frac{n(n-1)}{2!}.2y_{n-1}=y_n$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+1} + 2nxy_n + n(n-1)y_{n-1} - y_n = 0$$

$$\Rightarrow (1+x^2)y_{n+1} + (2nx - 1)y_n + n(n-1)y_{n-1} = 0$$

$$\Rightarrow \left(1+x^2\right)y_{n+1}+\left(2nx-1\right)y_n+n(n-1)y_{n-1}=0$$

৮.৭ অধিক জানিবলৈ

1) Avez, A.: *An Elementary Treatise on Differential Calculus*; Princeton: Princeton University Press, 2001.
2) Rao, S. (2004): *Differential Calculus*; Berkeley: University of California Press.



৮.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ nতম অৱকলজ উলিয়াওক।

a) $y = e^{ax}x^2$ b) $y = \log(1+x)$ c) $y=\frac{1-x}{1+x}$

d) $y = \sin x$ e) $y = e^x(2x+3)^3$

প্ৰশ্ন ২ ঃ যদি $y=\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, দেখুৱাওক যে nতম অৱকলজ হ'ল—

$y_n = (-1)^{n-1}(n-1)!\sin^n\theta\sin n\theta$, য'ত $\theta = \cot^{-1}x$.

প্ৰশ্ন ৩ ঃ যদি $\cos^{-1}\left(\frac{y}{b}\right)=\log\left(\frac{x}{n}\right)^n$, প্ৰমাণ কৰক যে,

$x^2y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + 2n^2y_n = 0$.

প্ৰশ্ন ৪ ঃ $y_n(0)$ নিৰ্ণয় কৰক, যদি $y = (\sin^{-1}x)^2$.

প্ৰশ্ন ৫ ঃ $y_n(0)$ নিৰ্ণয় কৰক, যদি $y = e^{m\sin^{-1}x}$.

প্ৰশ্ন ৬ ঃ যদি $y^{\frac{1}{m}} + y^{-\frac{1}{m}} = 2x$, প্ৰমাণ কৰক যে,

$(x^2-1)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + (n^2-m^2)y_n = 0.$

প্ৰশ্ন ৭ ঃ $y_n(0)$ নিৰ্ণয় কৰক, যদি $y = \cos(m \sin^{-1}x)$.

প্ৰশ্ন ৮ ঃ যদি $\sin^{-1}y = 2\log(x+1)$, দেখুওৱাক যে

$(x+1)^2y_{n+2} + (2n+1)(x+1)y_{n+1} + (n^2+4)y_n = 0.$

প্ৰশ্ন ৯ ঃ অধোলিখিতবোৰৰ nতম অৱকলজ উলিয়াওক।

a) $\frac{x+1}{x^2-4}$ b) $\frac{x^4}{(x-1)(x-2)}$

c) $\log x^2$ d) $e^x \sin 4x \cos 6x$

প্ৰশ্ন ১০ ঃ যদি $y = (x^2-1)^n$, দেখুওৱাক যে, $(x^2-1)y_{n+2} + 2xy - n(n+1)y_n = 0.$

প্ৰশ্ন ১১ ঃ যদি $y = \left[\log_e\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right)\right]^2$, প্ৰমাণ কৰক যে

$(a^2+x^2)y_{n+2} + (2n+1)xy_{n+1} + n^2y = 0.$

প্ৰশ্ন ১২ ঃ যদি $y = e^{\tan^{-1}x}$, প্ৰমাণ কৰক যে, $(1+x^2)y_{n+2} + (2nx-1)xy_{n+1} + n(n-1)y_n = 0.$

প্ৰশ্ন ১৩ ঃ যদি $y = \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$, $y_{n+1}(0)$ৰ সহায়ত $y_{n-1}(0)$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰক।

*** ***** ***

অধ্যায় ৯ ঃ অৱকলজৰ প্ৰয়োগ

অধ্যায় গাঁথনি

9.1 উদ্দেশ্য
9.2 পৰিচয়
9.3 বৰ্ধমান আৰু হ্ৰাসমান ফলন
9.4 পৰিৱৰ্তনৰ হাৰ হিচাপে অৱকলজ
9.5 ফলনৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান
    9.5.1 গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান উলিওৱাৰ পদ্ধতি
9.6 গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মানৰ প্ৰয়োগ
9.7 বক্ৰতা
    9.7.1 সংজ্ঞা
    9.7.2 বক্ৰতা ব্যাসাৰ্ধ
    9.7.3 কার্টেজীয় বক্ৰৰ বাবে বক্ৰতা ব্যাসাৰ্ধ
    9.7.4 ধ্ৰুৱীয় আকাৰত বক্ৰতা ব্যাসাৰ্ধ
9.8 স্পৰ্শক আৰু অভিলম্ব
    9.8.1 স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ সমীকৰণ
9.9 অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
9.10 অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান
9.11 অধিক জানিবলৈ
9.12 আৰ্হি প্ৰশ্ন

৯.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- যিবোৰ অন্তৰালত ফলন এটা বৰ্ধমান বা হ্ৰাসমান, সেয়া নিৰ্ণয় কৰিবলৈ সমৰ্থ হ'ব
- দৈৰ্ঘ্য, কালি, আয়তন ইত্যাদিৰ বৃদ্ধি বা হ্ৰাসৰ হাৰ নিৰ্ণয় কৰিবলৈ সমৰ্থ হ'ব
- কোনো বক্ৰৰ যিবোৰ বিন্দুত গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান থাকে, সেই বিন্দুবোৰ নিৰ্ণয় কৰিব পাৰিব
- কোনো বক্ৰৰ কোনো বিন্দুত বক্ৰটোৰ বক্ৰতা উলিয়াব পাৰিব
- কোনো নিৰ্দিষ্ট বক্ৰৰ কোনো নিৰ্দিষ্ট বিন্দুত স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ সমীকৰণ উলিয়াব পাৰিব।

৯.৩ পৰিচয়

এই অধ্যায়ত আমি অৱকলজৰ চিনৰ দ্বাৰা পৰিচালিত হোৱা ফলনৰ প্ৰকৃতি সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম। যদি ফলনৰ লেখটো ঊৰ্দ্ধমুখী দিশত বা নিম্নমুখী দিশত থাকে, ফলনটোক একদিষ্ট ফলন (Monotonic Function) বুলি কোৱা হয়। আকৌ, ফলনটোৰ আদিক্ষেত্ৰৰ যিবোৰ বিন্দুত ফলনটোৱে ঊৰ্দ্ধমুখী দিশৰ পৰা নিম্নমুখী দিশলৈ বা নিম্নমুখী দিশৰ পৰা ঊৰ্দ্ধমুখী দিশলৈ দিশ সলনি কৰে, সেই বিন্দুবোৰ সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম। এই বিন্দুবোৰত ফলনটোৰ অৱকলজ, যদি থাকে, শূন্য হয়। আকৌ, অৱকলজৰ সহায়ত কোনো বক্ৰৰ এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুত স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ সমীকৰণ উলিয়াম। আকৌ, অৱকলজৰ সহায়ত আমি বক্ৰৰ বক্ৰতা নিৰ্ণয় কৰিম।

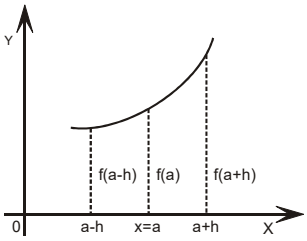
৯.৩ বৰ্ধমান আৰু হ্ৰাসমান ফলন

যদি গোটেই আদি ক্ষেত্ৰটোত ফলন এটা বৰ্ধমান বা হ্ৰাসমান হয়, তেনেহ'লে ফলনটোক একদিষ্ট ফলন বুলি কোৱা হয়। $f(x) = e^x$, $f(x) = 2x + 5$ বৰ্ধমান ফলনৰ দুটা উদাহৰণ। আনহাতেদি, $f(x) = -x^5$, $f(x) = e^{-x}$ হ্ৰাসমান ফলনৰ দুটা উদাহৰণ।

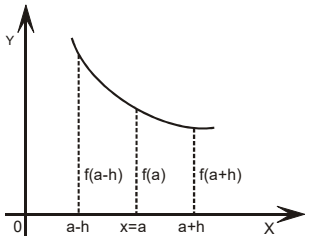
ফলন এটা $x = a$ বিন্দুত একদিষ্টভাৱে বৰ্ধমান বুলি কোৱা হয় যদি কোনো ক্ষুদ্ৰ ধনাত্মক সংখ্যা h-ৰ বাবে $f(a+h) > f(a)$ আৰু $f(a-h) < f(a)$ চিত্ৰ 9.1।

ফলন এটা $x = a$ বিন্দুত একদিষ্টভাৱে হ্ৰাসমান বুলি কোৱা হয় যদি কোনো ক্ষুদ্ৰ ধনাত্মক সংখ্যা h-ৰ বাবে $f(a+h) < f(a)$ আৰু $f(a-h) > f(a)$ চিত্ৰ 9.2।

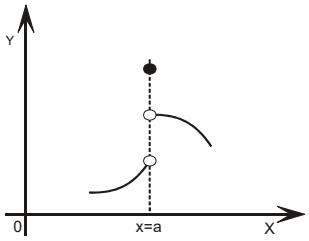
চিত্ৰ 9.3ত $f(x)$ ফলনটো একদিষ্টভাৱে বৰ্ধমানো নহয়, হ্ৰাসমানো নহয়।



চিত্ৰ 9.1



চিত্ৰ 9.2



চিত্ৰ 9.3

$f(x)$ ফলন বৰ্ধমান বা হ্ৰাসমান হোৱাৰ চর্ত ঃ

ধৰা হ'ল, $f(x)$ এটা বৰ্ধমান ফলন

$h > 0$ আৰু $h \to 0$-ৰ বাবে $f(x+h) > f(x)$

$$\Rightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} > 0,\ h > 0 \text{ আৰু } h \to 0\text{-ৰ বাবে}$$

$$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

$\Rightarrow f'(x) \geq 0$ বিপৰীতভাৱেও কথাটো সত্য।

$\therefore$ xত f(x) ফলনটো বৰ্ধমান হ'ব যদি আৰু যদিহে $f'(x) \geq 0$। সেইদৰে xত ফলনটো হ্ৰাসমান হ'ব যদি আৰু যদিহে $f'(x) \leq 0$।

টোকা ঃ একদিষ্ট ফলন প্ৰতিলোমনীয়। বিপৰীতটোৱো সত্য।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1: দেখুওৱাক যে $0 < x < \frac{\pi}{2}$ৰ বাবে $f(x) = \frac{x}{\sin x}$ বৰ্ধমান।

সমাধান ঃ $f(x) = \frac{x}{\sin x}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{\cos x(\tan x - x)}{\sin^2 x}$$

$$> 0 \left[\because 0 < x < \frac{\pi}{2}, \therefore \cos x > 0, \sin^2 x > 0 \text{ আৰু } \tan x > x\right]$$

$\therefore$ $0 < x < \frac{\pi}{2}$ অন্তৰালত একদিষ্ট বৰ্ধমান f'(x)।

উদাহৰণ 2 : দেখুওৱাক যে $f(x) = x - \sin x$ এটা বৰ্ধমান ফলন।

সমাধান ঃ $f(x) = x - \sin x$

$\Rightarrow f'(x) = 1 - \cos x$

$\Rightarrow x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi$ আদিৰ বাহিৰে অন্য সকলো বিন্দুতে $f'(x) > 0$

যিহেতু $\pm 2\pi, \pm 4\pi$ আদি বিন্দুবোৰ বিচ্ছিন্ন আৰু ইহঁতে কোনো অন্তৰাল গঠন নকৰে, $x \in R$-ৰ বাবে f(x) এটা একদিষ্টভাৱে বৰ্ধমান ফলন।

উদাহৰণ 3 : দেখুওৱাক যে $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)}$ for $x > 0$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $f(x) = \log(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x)$$

$$= \frac{1-(1-x^2)}{1+x}$$

$$= \frac{x^2}{1+x} > 0, \; x > 0\text{-ৰ বাবে}$$

$\therefore$ $x > 0$-ৰ বাবে f(x) এটা বৰ্ধমান ফলন।

আকৌ, $f(0) = 0$

$\therefore$ x > 0-ৰ বাবে f(x) > 0

$\Rightarrow \log(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$ for x > 0 ... ... (1)

ধৰা হ'ল, $g(x) = \left\{x - \frac{x^2}{2(1+x)}\right\} - \log(1+x)$

$$\Rightarrow g'(x) = 1 - \frac{2(1+x).2x - x^2.2}{\{2(1+x)\}^2} - \frac{1}{1+x}$$

$$= 1 - \frac{2x + x^2}{2(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{2(1+x)^2 - (2x + x^2) - 2(1+x)}{2(1+x)^2}$$

$$= \frac{2 + 4x + 2x^2 - 2x - x^2 - 2 - 2x}{2(1+x)^2}$$

$$= \frac{x^2}{2(1+x)^2} > 0,\ x > 0\text{-ৰ বাবে}$$

$\Rightarrow$ x > 0-ৰ বাবে g(x) এটা বৰ্ধমান ফলন। কিন্তু g(0) = 0

$\therefore$ x > 0-ৰ বাবে g(x) > 0

$\Rightarrow x - \frac{x^2}{2(1+x)} > \log(1+x),\ x > 0$ ... ... (2)

(1) আৰু (2) লগ লগাই আমি পাওঁ,

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x - \frac{x^2}{2(1+x)},\ x > 0\text{-ৰ বাবে}$$

উদাহৰণ 4: $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$ ফলনটো কোনবোৰ অন্তৰালত বৰ্ধমান বা হ্ৰাসমান নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 1$

$$\Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 30x + 36$$

$$= 6(x^2 - 5x + 6)$$

$$= 6(x-2)(x-3)$$

এতিয়া, $f'(x) > 0 \Rightarrow 6(x-2)(x-3) > 0$

$\Rightarrow$ (x–2 > 0 আৰু x–3 > 0) বা (x–2 < 0 আৰু x–3 < 0)

$\Rightarrow$ (x > 2 আৰু x > 3) বা (x < 2 আৰু x < 3)

$\Rightarrow$ x > 3 বা x < 2

$\therefore\ ]-\infty, 2[\cup]3, \infty[$ অন্তৰালত f(x)ত বৰ্ধমান।

আকৌ, $f'(x) < 0 \Rightarrow 6(x-2)(x-3) < 0$

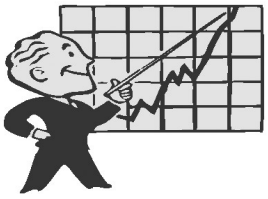
$\Rightarrow (x-2 > 0$ আৰু $x-3 < 0)$ বা $(x-2 < 0$ আৰু $x-3 > 0)$

$\Rightarrow (x > 2$ আৰু $x < 3)$ বা $(x < 2$ আৰু $x > 3)$

$\Rightarrow x > 2$ বা $x < 3$

$\Rightarrow 2 < x < 3$

$\therefore$]2, 3[অন্তৰালত f(x)ত হ্ৰাসমান।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১ ঃ দেখুওৱাক যে সকলো x-ৰ বাবে $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ এটা বৰ্ধমান ফলন।

প্ৰশ্ন নং ২ ঃ যদি $x > 0$, দেখুওৱাক যে

a) $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x$ b) $x - \frac{x^2}{2(1+x)} > \log(1+x)$

প্ৰশ্ন নং ৩ ঃ অধোলিখিত ফলনবোৰ কোনবোৰ অন্তৰালত বৰ্ধমান বা হ্ৰাসমান নিৰ্ণয় কৰক।

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 168x + 36$

b) $f(x) = \frac{\log x}{x}$ for $x > 0$

c) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 84x + 7$

৯.৪ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰ হিচাপে অৱকলজ

স্বতন্ত্ৰ চলক x-ৰ সাপেক্ষে $y = f(x)$ ফলনৰ অৱকলজ হ'ল x-ৰ পৰিৱৰ্তন সাপেক্ষে y-ৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰ। ধৰা হ'ল x-ৰ মানৰ এক ক্ষুদ্ৰ পৰিৱৰ্তন Δx আৰু ধৰা হ'ল, y-ৰ মানৰ অনুৰূপ ক্ষুদ্ৰ পৰিৱৰ্তন Δy, তেনেহ'লে,

$y + \Delta y = f(x+\Delta x)$

$\Rightarrow \Delta y = f(x+\Delta x) - y$

$\Rightarrow \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$

$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$,

ইয়াৰ পৰা x সাপেক্ষে y-ৰ গড় পৰিৱৰ্তনৰ হাৰ পোৱা যায়।

গতিকে, x-ৰ পৰিৱৰ্তন সাপেক্ষে y-ৰ তাৎক্ষণিক পৰিৱৰ্তনৰ হাৰ

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

$\therefore$ $f'(x)$এ x সাপেক্ষে f(x)-ৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰ বুজায়।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1: এটা গোলকীয় বেলুনৰ আয়তন ছেকেণ্ডত 25 cm^3কৈ বাঢ়ে। যেতিয়া গোলকটোৰ ব্যাসার্ধ 5 cm, তেতিয়া ইয়াৰ পৃষ্ঠ কালি কি হাৰত বাঢ়ে নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, যিকোনো সময় t ত,

বেলুনৰ ব্যাসার্ধ = r

বেলুনৰ পৃষ্ঠকালি = S

বেলুনৰ আয়তন = V

তেনেহ'লে, $S = 4\pi r^2$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

এতিয়া, $\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\left(\pi.3r^2\right)\frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{4\pi r^2}.\frac{dV}{dt} \qquad \text{... ... ... (1)}$$

আকৌ, $\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left(4\pi r^2\right)$

$$= 4\pi(2r)\frac{dr}{dt}$$

$$= 8\pi r.\frac{1}{4\pi r^2}\frac{dV}{dt}, \text{ (1)-ৰ সহায়ত}$$

$$= \frac{2}{r}\frac{dV}{dt}$$

দিয়া আছে, $\frac{dV}{dt} = 25cm^3/s$ আৰু r = 5 cm

$$\therefore \frac{dS}{dt} = \frac{2}{5}\times 25\,cm^2/s$$

$$= 10\ cm^2/sec$$

উদাহৰণ 2: দুটা বৰ্গৰ বাহু ক্ৰমে x আৰু y আৰু $y = x - x^2$. প্ৰথম বৰ্গৰ কালি সাপেক্ষে দ্বিতীয় বৰ্গৰ কালিৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, x বাহুবিশিষ্ট বৰ্গৰ কালি A আৰু y বাহু বিশিষ্ট বৰ্গৰ কালি S.

$\therefore A = x^2$ আৰু $S = y^2$, $\frac{dS}{dA}$ নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।

এতিয়া, $\frac{dS}{dx} = \frac{d}{dx}\left(y^2\right)$

$= \frac{d}{dx}\left(x - x^2\right)^2$ $[\because y = x - x^2$, দিয়া আছে]

$= \frac{d}{dx}\left(x^2 - 2x^3 + x^4\right)$

$= 2x - 6x^2 + 4x^3$ ... . (1)

আকৌ, $\frac{dA}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x$ ... ... (2)

$$\therefore \frac{dS}{dA} = \frac{\frac{dS}{dx}}{\frac{dA}{dx}} = \frac{2x - 6x^2 + 4x^3}{2x}$$

$= 1 - 3x + 2x^2$

উদাহৰণ 3: এটা শঙ্কুৰ আকৃতিৰ পাত্ৰৰ উচ্চতা 10 মিটাৰ আৰু ভূমিৰ ব্যাসাৰ্ধ উচ্চতাৰ আধা। পাত্ৰটো মিনিটত $1.5m^3$ সুষম হাৰে তৰল পদাৰ্থৰে পূৰ কৰিবলৈ লোৱা হ'ল। পানীৰ স্তৰ কি হাৰত বাঢ়ে নিৰ্ণয় কৰক, যেতিয়া ই পাত্ৰটোৰ ওপৰৰ পৰা 3 মিটাৰ তলত থাকে।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল শঙ্কুটো OAB আৰু ইয়াৰ উচ্চতা OC =10m

ভূমিৰ ব্যাসাৰ্ধ, $AC = \frac{1}{2}OC$

$= 5m$

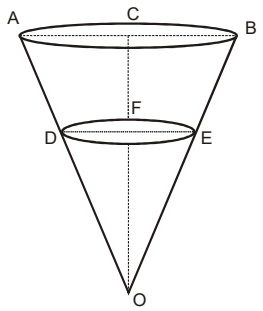
ধৰা হ'ল, যিকোনো মুহূৰ্ত t ত পাত্ৰটোত থকা জলীয় পদাৰ্থই ODE শঙ্কু গঠন কৰে। ধৰা হ'ল, t সময়ত শঙ্কুটোৰ ভূমিৰ ব্যাসাৰ্ধ r আৰু উচ্চতা h.

তেনেহ'লে, $\frac{DF}{AC} = \frac{OF}{OC}$ $[\because \Delta OAC$ আৰু ΔODF সদৃশ]

$\Rightarrow \frac{r}{5} = \frac{h}{10}$

$\Rightarrow r = \frac{h}{2}$ ... ... (1)

ধৰা হ'ল, t সময়ত তৰল শঙ্কুটোৰ আয়তন V.



গতিকে, $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$= \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h$, (1)-ৰ সহায়ত

$= \frac{1}{12}\pi h^3$

$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi h^3}{12}\right)$

$= \frac{\pi}{12}.3h^2\frac{dh}{dt}$

$= \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi h^2}\frac{dV}{dt}$ ... ... (2)

দিয়া আছে, $\frac{dV}{dt} = 1.5\ m^3/min$

$h = (10 - 3)m = 7m$

$\therefore (2) \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{4}{\pi(7)^2}\times 1.5\ m/min$

$= \frac{6}{49\pi} m/min$

উদাহৰণ 4: এটা আয়তৰ দৈর্ঘ্য প্রতি ছেকেণ্ডত 3.5cmকৈ বাঢ়ে আৰু প্রস্থ প্রতি ছেকেণ্ডত 3cmকৈ কমে। আয়তটোৰ দৈর্ঘ্য যেতিয়া 12cm আৰু প্রস্থ 8cm, তেতিয়া আয়ত ক্ষেত্রটোৰ কালিৰ পৰিৱর্তনৰ হাৰ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, যিকোনো মুহূর্ত t,

আয়তটোৰ দৈর্ঘ্য = x

প্রস্থ = y

আয়ত ক্ষেত্রটোৰ কালি = A

$\therefore A = xy$

$\Rightarrow \frac{d}{dt}(A) = \frac{d}{dt}(xy)$

$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = x\frac{dy}{dt} + y\frac{dx}{dt}$ ... ... (1)

দিয়া আছে, $\frac{dx}{dt} = 3.5 \text{ cm/sec}$

$$\frac{dy}{dt} = -3 \text{ cm/sec}$$

$\therefore (1) \Rightarrow \frac{dA}{dt} = (-3x + 3.5y) \text{ cm/sec}$

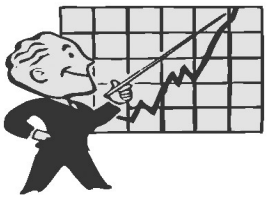
যেতিয়া x = 12 cm, y = 8 cm, আমি পাওঁ,

$\frac{dA}{dt} = (-3 \times 12 + 3.5 \times 8) \text{ cm}^2/\text{sec}$

= (–36+28) cm^2/sec

= –8 cm^2/sec

আয়ত ক্ষেত্রটোৰ কালিৰ পৰিৱৰ্তন হাৰ ছেকেণ্ডত 8 cm^2.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৪ঃ ব্যাসার্ধৰ পৰিৱৰ্তন সাপেক্ষে r ব্যাসার্ধৰ এটা গোলকৰ আয়তন V-ৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰ নিৰ্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ ঃ এটা গোলকীয় বেলুনৰ আয়তন ছেকেণ্ডত 20 cm^3কৈ বাঢ়ে। যেতিয়া গোলকটোৰ ব্যাসার্ধ 4 cm, তেতিয়া ইয়াৰ পৃষ্ঠ কালি কি হাৰত বাঢ়ে নিৰ্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৬ ঃ এটা স্থিৰ হ্রদত শিলগুটি এটা দলিয়াই দিয়া হ'ল। ঢৌবোৰে বৃত্তৰ আকাৰত ছেকেণ্ডত 3.5 cm দ্রুতিৰে গতি কৰে। যি মুহূর্তত বৃত্তাকাৰ ঢৌৰ ব্যাসার্ধ 7.5 cm, সেই সময়ত কালি কি হাৰত বাঢ়ে নিৰ্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৭ ঃ এডাল পাইপৰ পৰা ছেকেণ্ডত 9 cm^3হাৰত বালি পৰি আছে। বালিবোৰে এটা শঙ্কুৰ ৰূপ লয় আৰু শংকুটোৰ উচ্চতা ভূমিৰ ব্যাসার্ধৰ এক-ষষ্ঠাংশ। শঙ্কুটোৰ উচ্চতা কি হাৰত বাঢ়ে নিৰ্ণয় কৰক যদি উচ্চতা 3 cm.

প্রশ্ন নং ৮ ঃ $y^2 = 8x$ বক্ৰৰ যিটো বিন্দুত ভুজ আৰু কোটি একে হাৰত পৰিৱর্তিত হয়, সেই বিন্দুটো নিৰ্ণয় কৰক।

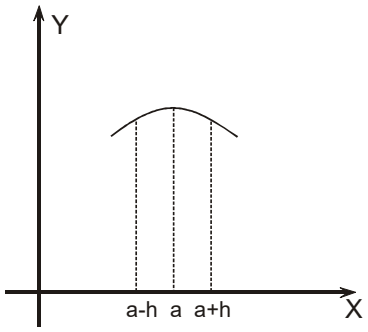
প্রশ্ন নং ৯ ঃ এজন মানুহৰ উচ্চতা 2m আৰু এটা লেম্প পষ্টৰ উচ্চতা 6m. মানুহজনে ঘণ্টাত 6km সম দ্রুতিৰে লেম্প পষ্টটোৰ পৰা খোজ কাঢ়ি আহি আছে। মানুহজনৰ ছাঁ কি হাৰত বাঢ়ে নিৰ্ণয় কৰক। ছাঁটোৰ টুপটো লেম্প পষ্টটোৰ পৰা কি হাৰত আঁতৰি আহি আছে নিৰ্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ১০ ঃ এটা ঘনৰ দাঁতি ছেকেণ্ডত 3cm কৈ বাঢ়ে। যেতিয়া দাঁতি 10cm, তেতিয়া ঘনটোৰ আয়তন কি হাৰত বাঢ়ে নিৰ্ণয় কৰক।

৯.৫ ফলনৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান

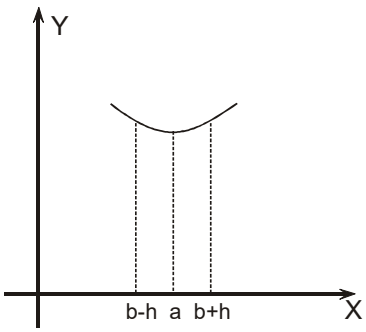
এটা ফলন f(x)-ৰ x = aত গৰিষ্ঠ মান (Maximum) থাকে। যদি x = a-ৰ নিকটতম সামীপ্যত f(x)এ লোৱা সকলো মানতকৈ f(a) ডাঙৰ।

ইয়াৰ অর্থ এইটোৱেই যে অতি ক্ষুদ্ৰ ধনাত্মক h-ৰ বাবে f(a) > f(a+h) আৰু f(a) > f(a–h) (চিত্ৰ 9.4 দ্ৰষ্টব্য)।



স্থানীয় গৰিষ্ঠ

চিত্ৰ 9.4



স্থানীয় লঘিষ্ঠ

চিত্ৰ 9.5

সেইদৰে এটা ফলন f(x)-ৰ x = bত লঘিষ্ঠ মান (Minimum) থাকে যদি x = b-ৰ নিকটতম সামীপ্যত f(x)এ লোৱা সকলো মানতকৈ f(b) সৰু।

ইয়াৰ অর্থ এইটোৱেই যে অতি ক্ষুদ্ৰ ধনাত্মক h অৰ বাবে f(b) < f(b+h) আৰু f(b) < f(b–h) (চিত্ৰ 9.5 দ্ৰষ্টব্য)।

জ্যামিতীয়ভাৱে, এটা বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন কোনো ফলন f-ৰ সেই বিন্দুত গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান থাকিব যদিহে যথাক্ৰমে সেই বিন্দুত লেখটোৰ এটা শীর্ষ (Peak) বা গুহিকা (Cavity) থাকে।

টোকা ঃ i) ফলনৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মানক যথাক্ৰমে স্থানীয় (আপেক্ষিক) গৰিষ্ঠ মান বা স্থানীয় (আপেক্ষিক) লঘিষ্ঠ মান বুলি কোৱা হয়, কিয়নো বিন্দুটোৰ কোনো সামীপ্য সাপেক্ষে এইবোৰ ক্ৰমে গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান। গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে চৰম মান (Extremum) শব্দটোৱো ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

ii) এটা বিন্দুত স্থানীয় গৰিষ্ঠ মান আন এটা বিন্দুত স্থানীয় লঘিষ্ঠ মানতকৈ সৰু হ'ব পাৰে।

iii) এটা ফলনৰ কেবাটাও গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান থাকিব পাৰে। এটা অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান এটাৰ পিছত এটাকৈ ওলায়।

iv) গৰিষ্ঠ মানত, f(x) ফলনটো বর্ধমানৰ পৰা হ্ৰাসমানলৈ সলনি হয় আৰু লঘিষ্ঠ মানত ফলনটো হ্ৰাসমানৰ পৰা বর্ধমানলৈ সলনি হয়।

৯.৫.১ গৰিষ্ঠ মান বা লঘিষ্ঠ মান উলিওৱাৰ পদ্ধতি

প্ৰথম পদ্ধতি ঃ

1) $\frac{dy}{dx}$ নিৰ্ণয় কৰক।

2) x-ৰ বাস্তৱ মানৰ বাবে $\frac{dy}{dx} = 0$ সমাধান কৰক। ধৰা হ'ল এই মানবোৰ a, b, c আদি।

3) $x = a$ লোৱা যাওক। a-ৰ একেবাৰে ওচৰৰ সৰু আৰু ডাঙৰ মানৰ বাবে $\frac{dy}{dx}$-ৰ চিন চোৱা যাওক।

   i) যদি $\frac{dy}{dx}$-ৰ চিন ধনাত্মকৰ পৰা ঋণাত্মকলৈ সলনি হয়, $x = a$ বিন্দুত $f(x)$ লঘিষ্ঠ।

   ii) যদি $\frac{dy}{dx}$-ৰ চিন ঋণাত্মকৰ পৰা ধনাত্মকলৈ সলনি হয়, $x = a$ৰ বিন্দুত $f(x)$ লঘিষ্ঠ।

   iii) যদি $\frac{dy}{dx}$-ৰ চিন সলনি নহয়, তেনেহ'লে $x = a$ বিন্দুত গৰিষ্ঠ মানো নাই, লঘিষ্ঠ মানো নাই।

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

(1) আৰু (2) প্ৰথম পদ্ধতিৰ দৰেই।

3) $\frac{d^2y}{dx^2}$ নিৰ্ণয় কৰক আৰু মান বহুৱাওক। $x = a$ লোৱা হ'ল।

   i) যদি $x = a$ত $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ তেনেহ'লে, $x = a$ত $f(x)$ গৰিষ্ঠ।

   ii) যদি $x = a$ত $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ তেনেহ'লে, $x = a$ত $f(x)$ লঘিষ্ঠ।

   iii) যদি $x = a$ত $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, কিন্তু $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$, তেনেহ'লে $x = a$ত গৰিষ্ঠ মানো নাই, লঘিষ্ঠ মানো নাই।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1 : $x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ ফলনৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $y = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$$

গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 = 0$

$\Rightarrow 5x^2(x^2-4x+3) = 0$

$\Rightarrow 5x^2(x-1)(x-3) = 0$

$\Rightarrow x = 0, x = 1, x = 3$

$x = 0$ লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল, δ এটা অতি সৰু ধনাত্মক সংখ্যা।

যেতিয়া, $x = 0 - \delta$, আমি পাওঁ,

$$\frac{dy}{dx} = 5(0-\delta)^2(0-\delta-1)(0-\delta-3)$$

$$= 5\delta^2(\delta+1)(\delta+3) > 0$$

যেতিয়া, $x = 0 + \delta$, আমি পাওঁ,

$$\frac{dy}{dx} = 5(0+\delta)^2(0+\delta-1)(0+\delta-3)$$

$$= 5\delta^2(\delta-1)(\delta-3)$$

$$>0$$

$\therefore \frac{dy}{dx}$-ৰ চিনৰ কোনো পৰিৱৰ্তন নাই।

গতিকে, $x = 0$ত ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ মানো নাই, লঘিষ্ঠ মানো নাই।

$x = 1$ লোৱা হ'ল।

যেতিয়া, $x = 1-\delta$, আমি পাওঁ,

$$\frac{dy}{dx} = 5(1-\delta)^2(1-\delta-1)(1-\delta-3)$$

$$= 5(1-\delta)^2(-\delta)(-\delta-2)$$

$$> 0$$

যেতিয়া, $x = 1 + \delta$, আমি পাওঁ,

$$\frac{dy}{dx} = 5(1+\delta)^2(1+\delta-1)(1+\delta-3)$$

$$= 5(1+\delta)^2\delta(\delta-2)$$

$$< 0$$

গতিকে, $\frac{dy}{dx}$-ৰ চিন ধনাত্মকৰ পৰা ঋণাত্মকলৈ সলনি হয়। গতিকে ফলনটো $x = 1$ বিন্দুত গৰিষ্ঠ আৰু গৰিষ্ঠ মান $= 1^5-5(1)^4 + 5(1)^3 - 1$

$= 0$

$x = 3$ লোৱা হ'ল।

যেতিয়া, $x = 3 - \delta$, আমি পাওঁ,

$$\frac{dy}{dx} = 5(3-\delta)^2(3-\delta-3)(3-\delta-1)$$

$$= 5(3-\delta)^2(-\delta)(-\delta+2)$$

$$< 0$$

যেতিয়া $x = 3 + \delta$, আমি পাওঁ,

$$\frac{dy}{dx} = 5(3+\delta)^2(3+\delta-3)(3+\delta-1)$$

$$= 5(3+\delta)^2(\delta)(\delta+2)$$

$$> 0$$

$\therefore$ গতিকে, $\frac{dy}{dx}$-ৰ চিন ঋণাত্মকৰ পৰা ধনাত্মকলৈ সলনি হয়।

$\therefore$ ফলনটো $x = 3$ বিন্দুত লঘিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান $= 3^5 - 5(3)^4 + 5(3)^3 - 1$

$$= 243 - 405 + 135 - 1$$

$$= -28$$

উদাহৰণ 2: x-ৰ কি মানৰ বাবে $f(x) = x(5-x)$ গৰিষ্ঠ হ'ব নিৰ্ণয় কৰক। $f(x)$-ৰ গৰিষ্ঠ মান কি?

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $f(x) = x(5-x)$

$$\Rightarrow f(x) = 5x - x^2$$

$$\therefore f'(x) = 5 - 2x$$

চৰম মানৰ বাবে, $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow 5 - 2x = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{2}$$

আকৌ, $f''(x) = \frac{d}{dx}(5-2x)$

$$= -2$$

$$f''\left(\frac{5}{2}\right) = -2 < 0$$

$\therefore x = \frac{5}{2}$ ত $f(x)$ গৰিষ্ঠ আৰু গৰিষ্ঠ মান $= f\left(\frac{5}{2}\right)$

$$= \frac{5}{2}\left(5 - \frac{5}{2}\right) = \frac{25}{4}$$

উদাহৰণ 3: যদি $y = a\log x + bx^2 + x$ ফলনৰ $x = -1$ আৰু $x = 2$, বিন্দুত চৰম মান থাকে, a আৰু b নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $y = a\log x + bx^2 + x$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{a}{x} + 2bx + 1$$

চৰম মানৰ বাবে $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \frac{a}{x} + 2bx + 1 = 0$$

$x = -1$, হ'লে, $-a - 2b + 1 = 0$

$$\Rightarrow a = 1 - 2b \qquad \text{... ... ... (1)}$$

$x = 2$, হ'লে, $\frac{a}{2} + 4b + 1 = 0$

$$\Rightarrow \frac{1-2b}{2} + 4b + 1 = 0, \text{ (1)-ৰ পৰা}$$

$$\Rightarrow 1 - 2b + 8b + 2 = 0$$

$$\Rightarrow 6b = -3$$

$$\Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore a = 1 - 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$$

উদাহৰণ 4: প্ৰমাণ কৰক যে $\sin x + \cos x$ ফলনৰ গৰিষ্ঠ মান $\sqrt{2}$.

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $f(x) = \sin x + \cos x$

$$\therefore f'(x) = \cos x - \sin x$$

চৰম মানৰ বাবে, $f'(x) = 0$

$$\Rightarrow \cos x - \sin x = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \sin x$$

$$\Rightarrow \tan x = 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

এতিয়া, $f''(x) = \frac{d}{dx}(\cos x - \sin x)$

$$= -\sin x - \cos x$$

$$\therefore f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} < 0$$

$\therefore x = \frac{\pi}{4}$ বিন্দুত f(x) গৰিষ্ঠ আৰু

গৰিষ্ঠ মান = $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

উদাহৰণ 5: প্ৰমাণ কৰক যে $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ -ৰ গৰিষ্ঠ মান $e^{\frac{1}{e}}$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $y = \left(\frac{1}{x}\right)^x$

উভয় পক্ষৰ ঘাতাঙ্ক লৈ, আমি পাওঁ, $\log y = x\log\frac{1}{x}$

$= x\log x^{-1}$

$= -x\log x.$

উভয় পক্ষক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\left[x.\frac{1}{x} + 1.\log x\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y(1+\log x) \qquad \text{... ... ... (1)}$$

y-ৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow -y(1+\log x) = 0$

$\Rightarrow \log x = -1$

$\Rightarrow \log x = -\log e$

$\Rightarrow \log x = \log e^{-1}$

$\therefore x = \frac{1}{e}$

(1)ক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left[y.\frac{1}{x} + (1+\log x).\frac{dy}{dx}\right]$$

$= -\left[\frac{y}{x} - y(1+\log x)^2\right]$, (1)-ৰ পৰা

$x = \frac{1}{e}$-ৰ বাবে

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\left[\frac{e^{\frac{1}{e}}}{\frac{1}{e}} - e^{\frac{1}{e}}\left(1+\log\frac{1}{e}\right)^2\right]$$

$$= -e.e^{\frac{1}{e}} < 0$$

$\therefore = \frac{1}{e}$ বিন্দুত ফলনটো গৰিষ্ঠ। ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ মান $= \left(\frac{1}{\frac{1}{e}}\right)^{\frac{1}{e}}$

$$= e^{\frac{1}{e}}$$

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১১ ঃ অধোলিখিত ফলনবোৰৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান নিৰ্ণয় কৰক।

a) $2x^2 - 6x + 3$ b) $x + \frac{1}{x}$ c) $4x^3 - 15x^2 + 12x - 1$

প্ৰশ্ন নং ১২ ঃ দেখুওৱাক যে $x = \frac{1}{e}$-ৰ বাবে x^x ফলনটো লঘিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ১৩ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $x = \frac{\pi}{3}$-ৰ বাবে $\sin x(1+\cos x)$ গৰিষ্ঠ।

৯.৬ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মানৰ প্ৰয়োগ

ব্যাৱহাৰিক জীৱনত গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মানৰ বহুল প্ৰয়োগ আছে। উদাহৰণ স্বৰূপে, এটা শঙ্কুৰ আকৃতিৰ তম্বুৰ ব্যাসাৰ্ধ আৰু উচ্চতাৰ মাজৰ সম্বন্ধ উলিয়াব লাগে, যদি ইয়াৰ ধাৰকত্ব নিৰ্দিষ্ট আৰু সৰ্বনিম্ন পৰিমাণৰ কাপোৰ ব্যৱহাৰ কৰিব লাগে। এনে ধৰণৰ সমস্যা সমাধান কৰাৰ ক্ষেত্ৰত, যিটো ফলনৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান নিৰ্ণয় কৰিব লাগে, সেই ফলনটো আমি উলিয়াওঁ। যদি ই দুটা চলক বিশিষ্ট হয়, প্ৰদত্ত তথ্যৰ পৰা এটা চলক অপনয়ন কৰি, ফলনটো এক চলক বিশিষ্ট কৰি লোৱা হয়।

উদাহৰণ 1: দুটা সংখ্যাৰ যোগফল ধ্ৰুৱক। যেতিয়া প্ৰতিটো সংখ্যা সিহঁতৰ যোগফলৰ আধা, প্ৰমাণ কৰক যে তেতিয়া সিহঁতৰ পূৰণফল গৰিষ্ঠ।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, x আৰু y, তেনেহ'লে, $x + y = \text{ধ্ৰুৱক} = c$ ধৰা হ'ল।

$\Rightarrow y = c - x$ ... . (1)

ধৰা হ'ল, সংখ্যা দুটাৰ পূ�ৰণফল P তেনেহ'লে,

$P = xy$

$\Rightarrow P = x(c-x)$, (1)-ৰ পৰা

$\Rightarrow P = cx - x^2$

$\therefore \frac{dP}{dx} = c - 2x$

P-ৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে,

$\frac{dP}{dx} = 0$

$\Rightarrow c - 2x = 0$

$\Rightarrow x = \frac{c}{2}$

এতিয়া, $\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{d}{dx}(c - 2x)$

$= -2$

< 0

$\therefore x = \frac{c}{2}$-ৰ বাবে P গৰিষ্ঠ।

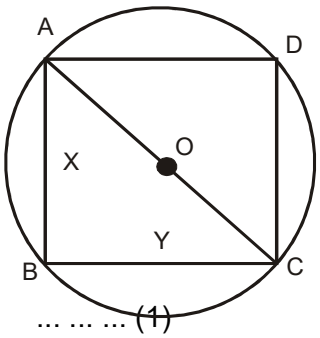
যেতিয়া, $x = \frac{c}{2}$, (1)-ৰ পৰা $= \frac{c}{2}$

যেতিয়া, $x = y = \frac{c}{2}$, P গৰিষ্ঠ।

অৰ্থাৎ পূৰণফল গৰিষ্ঠ যেতিয়া প্ৰতিটো সংখ্যা যোগফলৰ আধা।

উদাহৰণ 2: প্ৰমাণ কৰক যে এটা বৃত্তত অন্তৰ্লিখিত কৰিব পৰা সৰ্বোচ্চ কালিৰ আয়ত ক্ষেত্ৰটো এটা বৰ্গক্ষেত্ৰ।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, এটা বৃত্তত অন্তৰ্লিখিত ABCD এটা আয়তক্ষেত্ৰ আৰু বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্ধ a,



ধৰা হ'ল, আয়তক্ষেত্ৰটোৰ দৈৰ্ঘ আৰু প্ৰস্থ ক্ৰমে x আৰু y.

এতিয়া $AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = (2a)^2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4a^2$ ... ... (1)

ধৰা হ'ল, ABCD আয়তক্ষেত্ৰটোৰ কালি A, তেনেহ'লে,

$A = xy$

$\Rightarrow A = x\sqrt{4a^2 - x^2}$, (1)-ৰ পৰা

$\because A > 0$

$\therefore$ A গৰিষ্ঠ যেতিয়া A^2 গৰিষ্ঠ।

ধৰা হ'ল, $u = A^2$

$\Rightarrow u = x^2(4a^2 - x^2)$

$\Rightarrow u = 4a^2x^2 - x^4$

$\therefore \frac{du}{dx} = 8a^2x - 4x^3$ ... ... (2)

u-ৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে,

$\frac{du}{dx} = 0$

$\Rightarrow 8a^2x - 4x^3 = 0$

$\Rightarrow 4x(2a^2 - x^2) = 0$

$\Rightarrow x = \sqrt{2}a \qquad [\because x > 0]$

(2)ক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(8a^2x - 4x^3\right)$

$= 8a^2 - 12x^2$

যেতিয়া, $x = \sqrt{2}a$, আমি পাওঁ,

$\frac{d^2u}{dx^2} = 8a^2 - 12\left(\sqrt{2}a\right)^2$

$= 8a^2 - 24a^2$

$= -16a^2$

< 0

$\therefore$ যেতিয়া $x = \sqrt{2}a$, u গৰিষ্ঠ।

অর্থাৎ যেতিয়া $x = \sqrt{2}a$, A গৰিষ্ঠ।

আৰু $y = \sqrt{4a^2 - x^2}$

$= \sqrt{4a^2 - 2a^2}$ (যেতিয়া $x = \sqrt{2}a$)

$= \sqrt{2a^2}$

$= \sqrt{2}a$

$\therefore$ যেতিয়া, $x = y = \sqrt{2}a$, A গৰিষ্ঠ।

গতিকে, আয়তক্ষেত্ৰটোৰ কালি সৰ্বোচ্চ যেতিয়া ই এটা বৰ্গক্ষেত্ৰ।

উদাহৰণ 3: এটা শঙ্কুৰ উচ্চ h আৰু অৰ্ধ শীৰ্ষ কোণ α, শঙ্কুটোত এটা বেলুন অন্তৰ্লিখিত কৰা হ'ল। দেখুওৱাক যে ইয়াৰ সৰ্বোচ্চ আয়তন $\frac{4}{27}\pi h^2 \tan^2\alpha$.

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, ABC এটা শঙ্কু, ইয়াৰ অৰ্ধ শীৰ্ষ কোণ α আৰু উচ্চতা OA = h. PQRS বেলনটো ইয়াত অন্তৰ্লিখিত কৰা হ'ল। ধৰা হ'ল, ইয়াৰ ব্যাসাৰ্ধ r আৰু উচ্চতা h'. তেনেহ'লে, $h' = OO' = AO - AO' = h - r\cot\alpha$

ধৰা হ'ল, বেলনটোৰ আয়তন V. তেনেহ'লে, $V = \pi r^2 h'$

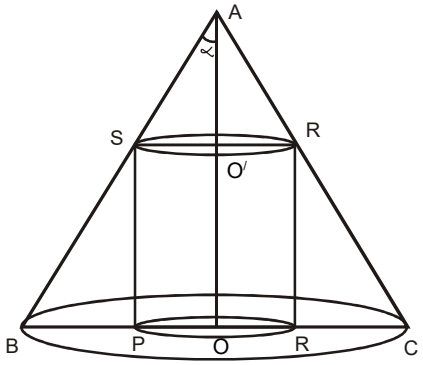
$$\Rightarrow V = \pi r^2(h - r\cot\alpha)$$

$$\therefore \frac{dV}{dr} = 2\pi r(h - r\cot\alpha) + \pi r^2(-\cot\alpha)$$

$$= 2\pi rh - 3\pi r^2\cot\alpha$$

$$\therefore \frac{dV}{dr} = \pi r(2h - 3r\cot\alpha) \qquad \text{... ... ... (1)}$$

V-ৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে, $\frac{dV}{dr} = 0$



$$\Rightarrow \pi r(2h - 3r\cot\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow r = 0,\ r = \frac{2h}{3\cot\alpha}$$

$$\Rightarrow r = 0,\ r = \frac{2}{3}h\tan\alpha$$

কিন্তু, $r > 0$ (শঙ্কুৰ ব্যাসাৰ্ধ)

$$\therefore r = \frac{2}{3}h\tan\alpha$$

(1)ক r সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{d^2V}{dr^2} = 2\pi h - 6\pi r\cot\alpha$$

যেতিয়া, $r = \frac{2}{3}h\tan\alpha$, we get,

$$\frac{d^2V}{dr^2} = 2\pi h - 6\pi\left(\frac{2}{3}h\tan\alpha\right)\cot\alpha$$

$$= 2\pi h - 4\pi h$$

$$= -2\pi h < 0$$

$\therefore$ যেতিয়া, $r = \frac{2}{3}h\tan\alpha$, V গৰিষ্ঠ আৰু গৰিষ্ঠ আয়তন

$$= \pi.\frac{4}{9}h^2\tan^2\alpha\left(h-\frac{2}{3}h\tan\alpha\cot\alpha\right)$$

$$= \frac{4\pi}{9}h^2\tan^2\alpha\left(h-\frac{2}{3}h\right)$$

$$= \frac{4\pi}{9}h^2\tan^2\alpha.\frac{h}{3}$$

$$= \frac{4}{27}\pi h^3\tan^2\alpha$$

উদাহৰণ 4: এটা শঙ্কু এটা প্ৰদত্ত গোলকত অন্তৰ্লিখিত কৰা হ'ল। দেখুওৱাক যে শঙ্কুটোৰ উচ্চতা আৰু গোলকটোৰ ব্যাসৰ অনুপাত 2 : 3 হ'লে শঙ্কুটোৰ আয়তন সৰ্বোচ্চ হ'ব।

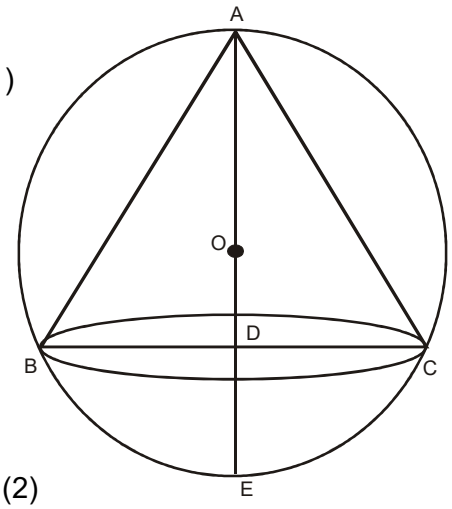
সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, গোলকটোৰ ব্যাস d.

$\therefore AE = d$

ধৰা হ'ল, গোলকটোত অন্তৰ্লিখিত শঙ্কুটো ABC. ধৰা হ'ল, শঙ্কুটোৰ ভূমিৰ কেন্দ্ৰ D.

ধৰা হ'ল, শঙ্কুটোৰ উচ্চতা AD = x আৰু ব্যাসাৰ্ধ BD = r

সামতলিক জ্যামিতিৰ পৰা, $AD.DE = BD^2$



$\Rightarrow x(d-x) = r^2$

$\Rightarrow r^2 = xd - x^2$ ... ... (1)

$\therefore$ শঙ্কুটোৰ আয়তন,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 x$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(xd-x^2\right)x \text{ , (1)-ৰ পৰা}$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(x^2d-x^3\right)$$

$$\therefore \frac{dV}{dx} = \frac{1}{3}\pi\left(2dx-3x^2\right) \quad \text{... ... ... (2)}$$

V-ৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে,

$$\frac{dV}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}\pi\left(2dx-3x^2\right) = 0$$

$$\Rightarrow x(2d-3x) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{2d}{3} \quad [\because x > 0]$$

(2)ক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

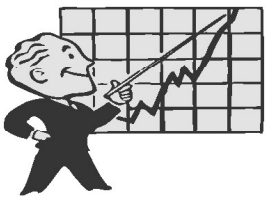
$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{1}{3}\pi(2d - 6x)$$

যেতিয়া, $x = \frac{2d}{3}$, আমি পাওঁ,

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{1}{3}\pi\left(2d - 6.\frac{2d}{3}\right)$$

$$= -\frac{2\pi d}{3} < 0$$

$\therefore$ শঙ্কুটোৰ আয়তন গৰিষ্ঠ হ'ব যেতিয়া, $x = \frac{2}{3}d$ অর্থাৎ যেতিয়া, $x : d = 2 : 3$.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১৪ঃ দুটা সংখ্যাৰ যোগফল 20 আৰু পূৰণফল সৰ্বোচ্চ হ'লে সংখ্যা দুটা নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ১৫ঃ এটা আয়তক্ষেত্ৰ আৰু এটা অৰ্ধবৃত্তেৰে এটা চিত্ৰ গঠিত; অৰ্ধবৃত্তটোৰ ব্যাস আয়তক্ষেত্ৰটোৰ এটা বাহু। চিত্ৰটোৰ পৰিসীমা 20m. চিত্ৰটোৰ কালি সৰ্বোচ্চ হ'বলৈ হ'লে আয়তক্ষেত্ৰটোৰ দৈর্ঘ্য, প্ৰস্থ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ১৬ঃ প্ৰদত্ত হেলনীয়া উচ্চতাৰ এটা শংকুৰ আয়তন সৰ্বোচ্চ হ'বলৈ হ'লে অৰ্ধ শীৰ্ষকোণ $\tan^{-1}\sqrt{2}$ হ'ব লাগিব, —প্ৰমাণ কৰক।

প্ৰশ্ন নং ১৭ঃ দেখুওৱাক যে প্ৰদত্ত পৰিসীমাৰ সকলো আয়তক্ষেত্ৰৰ ভিতৰত বৰ্গক্ষেত্ৰৰ কালি সৰ্বোচ্চ।

প্ৰশ্ন নং ১৮ঃ এচটা বৰ্গাকাৰ টিনৰ প্ৰতি বাহুৰ দৈর্ঘ্য 10 cm আৰু টিনচটাৰ প্ৰতিটো চুকৰ পৰা এটা বৰ্গ কাটি কটা টুকুৰাকেইটা ভাঁজ লগাই এটা ওপৰ খোলা বাকচ গঠন কৰা হ'ল। বাকচটোৰ আয়তন গৰিষ্ঠ হ'বলৈ হ'লে প্ৰতিটো চুকৰ পৰা কটা বৰ্গৰ বাহু নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ১৯ঃ প্ৰমাণ কৰক যে R ব্যাসাৰ্ধৰ এটা গোলকত অন্তৰ্লিখিত কৰিব পৰা সৰ্বোচ্চ শঙ্কুটোৰ আয়তন গোলকটোৰ আয়তনৰ $\frac{8}{27}$ গুণ।

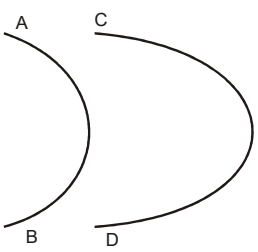
প্ৰশ্ন নং ২০ঃ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তত অন্তৰ্লিখিত কৰিব পৰা সৰ্বোচ্চ আয়তক্ষেত্ৰটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰক।

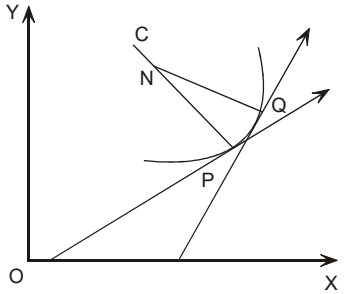
৯.৭ বক্ৰতা

AB আৰু CD বক্ৰ দুডাল লোৱা হ'ল। চিত্ৰৰপৰা আমি দেখিছোঁ যে ABতকৈ CD বেছি ভাঁজ লগা। অৰ্থাৎ CD-ৰ বক্ৰতা (Curvature) ABতকৈ বেছি।

৯.৭.১ সংজ্ঞা

ধৰা হ'ল, এটা নিৰ্দিষ্ট বক্ৰত P আৰু Q দুটা ওচৰা-উচৰি বিন্দু। PQ চাপটো ইয়াৰ জ্যাডালৰ পিনে অৱতল। ধৰা হ'ল, P আৰু Q বিন্দুত টনা বক্ৰটোৰ অভিলম্ব (Normal) দুডালে N বিন্দুত কটাকটি কৰে। যদি Q, Pৰ পিনে অগ্ৰসৰ হয়, তেনেহ'লে N, এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু C-ৰ পিনে অগ্ৰসৰ হ'ব। এই বিন্দুটোক বক্ৰটোৰ বক্ৰতা কেন্দ্ৰ (Centre of Curvature) বুলি কোৱা হয়। CPক বক্ৰতা ব্যাসাৰ্ধ (Radius of Curvature) বুলি কোৱা হয় আৰু ইয়াক ρৰে বুজোৱা হয়।

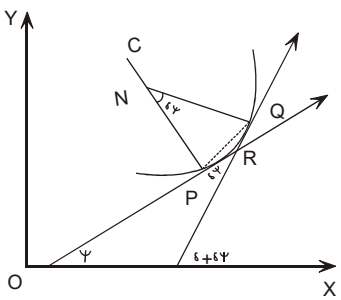




$\frac{1}{CP}$ ক Pত বক্ৰটোৰ বক্ৰতা বুলি কোৱা হয়। C কেন্দ্ৰীয় আৰু CP ব্যাসাৰ্ধৰ বৃত্তটোক Pত বক্ৰটোৰ **বক্ৰতা বৃত্ত** (Circle of Curvature) বুলি কোৱা হয়।

৯.৭.২ বক্ৰতা ব্যাসাৰ্ধ

ধৰা হ'ল, বক্ৰটোত A এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু। ধৰা হ'ল, বক্ৰটোত P আৰু Q দুটা ওচৰা-উচৰি বিন্দু। ধৰা হ'ল, P আৰু Q বিন্দুত টনা স্পৰ্শক দুডালে x অক্ষৰ লগত ক্ৰমে ψ আৰু $\psi + \delta\psi$ কোণ কৰে।



ধৰা হ'ল, চাপ = s.

চাপ PQ = δs.

ধৰা হ'ল, P আৰু Q বিন্দুত টনা অভিলম্ব দুডালে N বিন্দুত কটাকটি কৰে। ধৰা হ'ল, P আৰু Q বিন্দুত টনা স্পৰ্শক দুডালে R বিন্দুত কটাকটি কৰে।

চিত্ৰৰ পৰা, $\angle PNQ = \angle TRT' = \delta\psi$

P বক্ৰতা ব্যাসার্ধ = $\rho = \lim_{\delta s \to 0} PN$

PNQ-ৰ ত্ৰিভুজৰ পৰা, $\frac{PN}{\sin NQP} = \frac{\text{chord } PQ}{\sin PNQ}$

$$\Rightarrow \frac{PN}{\sin NQP} = \frac{\text{chord } PQ}{\sin \delta\psi}$$

$$\Rightarrow PN = \frac{\text{chord } PQ . \sin NQP}{\sin \delta\psi}$$

$$\Rightarrow PN = \frac{\text{chord } PQ}{\delta s} . \frac{\delta s}{\delta\psi} . \frac{\delta\psi}{\sin \delta\psi} . \sin NQP$$

Hence, $\rho = \lim_{\substack{\delta s \to 0 \\ \delta\psi \to 0}} \left\{ \frac{\text{chord} PQ}{\delta s} . \frac{\delta s}{\delta\psi} . \frac{\delta\psi}{\sin \delta\psi} . \sin NQP \right\}$

$$= 1 . \frac{ds}{d\psi} . 1 . \sin\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{ds}{d\psi}$$

৯.৭.৩ কার্টেজীয় বক্ৰৰ বাবে বক্ৰতা ব্যাসার্ধ

ধৰা হ'ল, বক্ৰটো $y = f(x)$

আমি জানো যে $\frac{dy}{dx} = \tan\psi$, য'ত ψ যিকোনো বিন্দুত টনা স্পৰ্শকে x অক্ষৰ লগত কৰা কোণ।

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\tan\psi)$$

$$= \sec^2\psi . \frac{d\psi}{dx}$$

$$= \sec^2\psi . \frac{d\psi}{ds} . \frac{ds}{dx}$$

$$= (1 + \tan^2\psi) . \frac{1}{\rho} . \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \rho\frac{d^2y}{dx^2} = \left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

টোকা ঃ ρৰ মান অক্ষৰ বাছনিৰ ক্ষেত্ৰত নিৰ্ভৰ নকৰে। গতিকে আমি ল'ব পাৰোঁ,

$$\rho = \frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

টোকা ঃ ρএ দৈর্ঘ্য বুজায়। গতিকে ই ঋণাত্মক হ'ব নোৱাৰে।

৯.৭.৪ ধ্ৰুৱীয় আকাৰত বক্ৰতা ব্যাসার্ধ

আমি জানো যে, $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$

r সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$-\frac{2}{p^3}\frac{dp}{dr} = -\frac{2}{r^3} - \frac{4}{r^5}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^4}.2\frac{dr}{d\theta}.\frac{d}{dr}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^3}\frac{dp}{dr} = \frac{1}{r^3} + \frac{2}{r^5}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{r^4}\frac{dr}{d\theta}.\frac{d}{d\theta}\left(\frac{dr}{d\theta}\right).\frac{d\theta}{dr}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^3}\frac{dp}{dr} = \frac{1}{r^3} + \frac{2}{r^5}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - \frac{1}{r^4}\frac{d^2r}{d\theta^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^3}\frac{dp}{dr} = \frac{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}}{r^5}$$

$$\Rightarrow r\frac{dr}{dp} = \frac{r^6}{p^3\left[r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2}\right]} \qquad \text{... ... ... (1)}$$

কিন্তু $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$

$\Rightarrow \frac{r^4}{p^2} = r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2$

$\Rightarrow \left(\frac{r^4}{p^2}\right)^{3/2} = \left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{3/2}$

$\Rightarrow \frac{r^6}{p^3} = \left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{3/2}$ ... ... (2)

$\therefore \rho = r\frac{dr}{dp}$

$$= \frac{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{3/2}}{r^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2} + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ বক্ৰৰ $\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$ বিন্দুত বক্ৰতা ব্যাসার্ধ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত বক্ৰটো হ'ল,

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ... ... (1)

$\therefore \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sqrt{a}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$ ... ... (2)

(2)ক r সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} + \sqrt{y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= -\frac{-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}.\left(\frac{-\sqrt{y}}{\sqrt{x}}\right)-\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}}{x}$$

$$= \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{2x\sqrt{x}}, \text{ (1)-ৰ পৰা}$$

$\left(\frac{a}{4},\frac{a}{4}\right)$ বিন্দুত $\frac{dy}{dx} = -1$ আৰু $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sqrt{a}}{2.\frac{a}{4}.\frac{\sqrt{a}}{2}} = \frac{4}{a}$

$$\therefore \text{ বক্ৰতা ব্যাসাধ } \rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$= \frac{(1+1)^{3/2}}{\frac{4}{a}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

উদাহৰণ 2: $y = e^x$ বক্ৰটোৰে y অক্ষক যিটো বিন্দুত ছেদ কৰে সেই বিন্দুত বক্ৰটোৰ বক্ৰতা ব্যাসার্ধ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত বক্ৰটো হ'ল, $y = e^x$ ... ... (1)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^x \text{ আৰু } \frac{d^2y}{dx^2} = e^x$$

যেতিয়া, $x = 0$, (1)-ৰ পৰা আমি পাওঁ, $y = 1$

$\therefore$ (1) বক্ৰটোৰে y অক্ষক (0, 1) বিন্দুত ছেদ কৰে।

(0,1) বিন্দুত $\frac{dy}{dx} = 1, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 1$

$$\therefore \text{ বক্ৰতা ব্যাসার্ধ } \rho = \frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$= \frac{(1+1)^{3/2}}{1}$$

$$= 2\sqrt{2}$$

উদাহৰণ 3: $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1-\cos\theta)$ বক্ৰৰ যিকোনো বিন্দু θ ত বক্ৰতা ব্যাসার্ধ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $x = a(\theta - \sin\theta)$ ... ... (1)

$y = a(1-\cos\theta)$ ... ... (2)

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta) \text{ আৰু } \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2}$$

আকৌ, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\cot\frac{\theta}{2}\right) = -\operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2}.\frac{1}{2}.\frac{d\theta}{dx}$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2}.\frac{1}{a(1-\cos\theta)}$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{\theta}{2}.\frac{1}{a.2\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$= -\frac{1}{4a}\operatorname{cosec}^4\frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \rho = \frac{\left(1+\cot^2\frac{\theta}{2}\right)^{3/2}}{-\frac{1}{4a}\operatorname{cosec}^4\frac{\theta}{2}} = \frac{-4a\operatorname{cosec}^3\frac{\theta}{2}}{\operatorname{cosec}^4\frac{\theta}{2}} = -4a\sin\frac{\theta}{2}$$

কিন্তু বক্ৰতা ব্যাসার্ধ ঋণাত্মক হ'ব নোৱাৰে।

$$\therefore \rho = 4a\sin\frac{\theta}{2}$$

উদাহৰণ 4: $r = a(1-\cos\theta)$ বক্ৰৰ (r, θ) বিন্দুত বক্ৰতা ব্যাসার্ধ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত বক্ৰটো হ'ল, $r = a(1-\cos\theta)$

$$\therefore \frac{dr}{d\theta} = a\sin\theta \text{ আৰু } \frac{d^2r}{d\theta^2} = a\cos\theta$$

আমি জানো যে বক্ৰতা ব্যাসার্ধ,

$$\rho = \frac{\left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2} + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$$= \frac{\left[a^2(1-\cos\theta)^2 + a^2\sin^2\theta\right]^{3/2}}{a^2(1-\cos\theta)^2 - a(1-\cos\theta).a\cos\theta + 2a^2\sin^2\theta}$$

$$= \frac{a^3\left[1+\cos^2\theta - 2\cos\theta + \sin^2\theta\right]^{3/2}}{a^2\left[1+\cos^2\theta - 2\cos\theta + \cos^2\theta - \cos\theta + 2\sin^2\theta\right]}$$

$$= \frac{a(2-2\cos\theta)^{3/2}}{(3-3\cos\theta)}$$

$$= \frac{a.2^{3/2}(1-\cos\theta)^{3/2}}{3(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}a}{3}\sqrt{1-\cos\theta}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}\,a}{3}\sqrt{\frac{r}{a}}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{2ar}$$

উদাহৰণ 5: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, উপবৃত্তৰ বাবে দেখুওৱাক যে মুখ্য অক্ষৰ এটা মূৰত বক্ৰতা ব্যাসার্ধ উপবৃত্তটোৰ অর্ধ নাভিলম্বৰ সমান।

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত উপবৃত্তটো হ'ল,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ (1)$$

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2x}{a^2y} \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ (2)$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= -\frac{b^2}{a^2}.\frac{y.1-x.\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$= -\frac{b^2}{a^2y^2}\left[y+\frac{b^2x^2}{a^2y}\right], \text{ (2)-ৰ সহায়ত}$$

$$= -\frac{b^2}{a^4y^3}\left[a^2y^2 + b^2x^2\right]$$

$$= -\frac{b^2}{a^4y^3}\left[a^2b^2\right], \text{ (1)-ৰ সহায়ত}$$

$$= -\frac{b^4}{a^2y^3}$$

$\therefore$ (x, y) বিন্দুত বক্ৰতা ব্যাসার্ধ,

$$\rho = \frac{\left\{1+\left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)^2\right\}^{3/2}}{-\frac{b^4}{a^2y^3}}$$

$$= \frac{\left(a^4y^2 + b^4x^2\right)^{3/2}}{a^4b^4} \quad \text{(ঋণাত্মক চিন বাদ দি)}$$

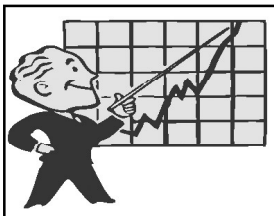
$\because$ মুখ্য অক্ষৰ এটা মূৰৰ স্থানাঙ্ক (a, 0)

$\therefore$ (a, 0) বিন্দুত বক্ৰতা ব্যাসার্ধ,

$$\rho = \frac{\left(0 + b^4a^2\right)^{3/2}}{a^4b^4}$$

$$= \frac{b^2}{a}$$

= নাভিলম্বৰ আধা।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ২১ ঃ $a^2y = x^3 - a^3$ বক্ৰৰ (x, y) বিন্দুত বক্ৰতা ব্যাসার্ধ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২২ ঃ অধোলিখিত বক্ৰবোৰৰ (s, ψ) বিন্দুত বক্ৰতা ব্যাসার্ধ নিৰ্ণয় কৰক।

a) $s = 4a \sin\psi$ b) $s = c\log\sec\psi$

প্ৰশ্ন নং ২৩ ঃ $x^3 + y^3 = 3axy$ বক্ৰৰ $\left(3\frac{a}{2}, 3\frac{a}{2}\right)$ বিন্দুত বক্ৰতা নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২৪ ঃ $x = a(t+\sin t), y = a(1-\cos t)$ ছাইক্ৰয়ডৰ যিকোনো বিন্দুত বক্ৰতা ব্যাসার্ধ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২৫ ঃ $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$ বক্ৰৰ যিকোনো বিন্দুত θ ত বক্ৰতা নিৰ্ণয় কৰক।

৯.৮ স্পৰ্শক আৰু অভিলম্ব

আমি জানো যে $y = f(x)$ বক্ৰৰ (x, y) বিন্দুত স্পৰ্শকৰ প্ৰৱণতা অৱকলজ $\frac{dy}{dx}$ ৰ সমান। প্ৰৱণতা হ'ল $\tan\theta$, য'ত θ হ'ল স্পৰ্শক ডালে x অক্ষৰ লগত কৰা কোণ। $\frac{dy}{dx} = 0$ হ'লে, স্পৰ্শক ডাল x অক্ষৰ সমান্তৰাল। $\frac{dx}{dy} = 0$ হ'লে স্পৰ্শক ডাল y অক্ষৰ সমান্তৰাল।

৯.৮.১ স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ সমীকৰণ

ধৰা হ'ল, প্ৰদত্ত বক্ৰটো $y = f(x)$ আৰু ধৰা হ'ল, বক্ৰটোত $P(x_0, y_0)$ এটা বিন্দু।

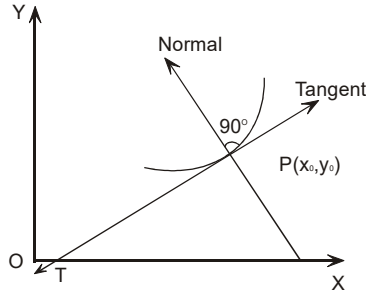
$P(x_0, y_0)$ বিন্দুত টনা স্পৰ্শকৰ প্ৰৱণতা $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0, y_0)}$

$\therefore$ স্থানাঙ্ক জ্যামিতিৰ সহায়ত, $P(x_0, y_0)$ বিন্দুত স্পৰ্শকৰ (Tangent) সমীকৰণ,

$$y - y_0 = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0, y_0)} (x - x_0)$$

আকৌ, $P(x_0, y_0)$ বিন্দুত অভিলম্বৰ (Normal) সমীকৰণ,

$$y - y_0 = \frac{-1}{\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0, y_0)}} (x - x_0)$$



মন্তব্য 1: যদি $\left[\frac{dx}{dy}\right]_{(x_0, y_0)} = 0$, স্পৰ্শকডাল y অক্ষৰ সমান্তৰাল আৰু ইয়াৰ সমীকৰণ $x = x_0$.

মন্তব্য 2: যদি $\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0, y_0)} = 0$, স্পৰ্শকডাল x অক্ষৰ সমান্তৰাল আৰু ইয়াৰ সমীকৰণ $y = y_0$.

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1: $y = 2x^2 + 3\sin x$ বক্ৰৰ $x = 0$ বিন্দুত স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত বক্ৰটো হ'ল, $y = 2x^2 + 3\sin x$ ... ... (1)

$x = 0$ বিন্দুত, $y = 0$

$\therefore$ বিন্দুটো $(0, 0)$.

(1)ক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{dy}{dx} = 4x + 3\cos x$$

$$\Rightarrow \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(0,0)} = 0 + 3 = 3$$

$\therefore$ (0, 0) বিন্দুত স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ, $y - 0 = 3(x-0)$

$$\Rightarrow 3x - y = 0$$

আকৌ, (0, 0) বিন্দুত অভিলম্বৰ সমীকৰণ, $y - 0 = \frac{-1}{3}(x-0)$

$$\Rightarrow x + 3y = 0$$

উদাহৰণ 2: $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ বক্ৰৰ কোনবোৰ বিন্দুত স্পৰ্শক x অক্ষৰ সমান্তৰাল নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত বক্ৰটো হ'ল, $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ ... ... (1)

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 6x^2 - 6x - 12$$

ধৰা হ'ল (1)-ৰ (α,β) বিন্দুত স্পৰ্শক x অক্ষৰ সমান্তৰাল।

$$\therefore \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(\alpha,\beta)} = 0$$

$$\Rightarrow 6\alpha^2 - 6\alpha - 12 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha-2)(\alpha+1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 2, -1$$

$\because$ (α,β) বিন্দুটো (1)ত আছে,

$\therefore$ (1)-ৰ পৰা $\beta = 2\alpha^3 - 3\alpha^2 - 12\alpha + 20$

$\alpha = 2$ হ'লে, $\beta = 16 - 12 - 24 + 20 = 0$

$\alpha = -1$ হ'লে, $\beta = -2 - 3 + 12 + 20 = 27$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় বিন্দুকেইটা হ'ল (2, 0) আৰু (–1, 27).

উদাহৰণ 3: মূল বিন্দুৰ পৰা $y = \sin x$ বক্ৰলৈ স্পৰ্শক টনা হ'ল। দেখুওৱাক যে সিহঁতৰ স্পৰ্শ বিন্দুবোৰ $x^2y^2 = x^2 - y^2$.

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত বক্ৰটো হ'ল, $y = \sin x$ ... ... (1)

ধৰা হ'ল, (1)ত (x_1, y_1) যিকোনো এটা বিন্দু

$\therefore$ $y_1 = \sin x_1$ ... ... (2)

(1)ক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{dy}{dx} = \cos x$$

$$\therefore \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)} = \cos x_1$$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুত স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$y - y_1 = \cos x_1.(x - x_1)$$

$\because$ এই স্পৰ্শকডাল মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যায়,

$$\therefore 0 - y_1 = \cos x_1.(0 - x_1)$$

$$\Rightarrow y_1 = x_1 \cos x_1 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

(2) আৰু (3)ৰ পৰা আমি পালোঁ,

$$y_1^2 + \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2 = \sin^2 x_1 + \cos^2 x_1$$

$$\Rightarrow x_1^2 y_1^2 + y_1^2 = x_1^2$$

$$\Rightarrow x_1^2 - y_1^2 = x_1^2 y_1^2$$

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুটোৰ সঞ্চাৰ পথ হ'ল, $x^2 - y^2 = x^2y^2$

উদাহৰণ 4: যদি $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ বক্ৰৰ কোনো বিন্দুত টনা অভিলম্বই x অক্ষৰ লগত Φ কোণ কৰে, দেখুওৱাক যে ইয়াৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$y \cos\Phi - x \sin\Phi = a \cos 2\Phi .$$

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত বক্ৰটো হ'ল, $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $\ldots\ldots\ldots$ (1)

(1)ক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$\therefore$ (1)-ৰ (x, y) বিন্দুত টনা অভিলম্বৰ প্ৰৱণতা,

$$\Rightarrow \frac{-1}{\frac{dy}{dx}} = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{3}} = \tan\Phi \text{ (দিয়া আছে)}$$

$$\Rightarrow \frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sin\Phi}{\cos\Phi}$$

$$\Rightarrow \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sin\Phi} = \frac{y^{\frac{1}{3}}}{\cos\Phi} = \frac{\sqrt{x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt{\sin^2\Phi + \cos^2\Phi}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^{\frac{2}{3}}}}{1}, \text{ (1)-ৰ পৰা}$$

$\therefore x^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}\sin\Phi$ আৰু $y^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{1}{3}}\cos\Phi$

অৰ্থাৎ, $x = a\sin^3\Phi$ আৰু $y = a\cos^3\Phi$

$\therefore$ (1)-ৰ $(a\sin^3\Phi, a\cos^3\Phi)$ বিন্দুত টনা অভিলম্বই x অক্ষৰ লগত Φ কোণ কৰে।

গতিকে অভিলম্বৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$y - a\cos^3\Phi = \tan\Phi(x - a\sin^3\Phi)$$

$$\Rightarrow y\cos\Phi - a\cos^4\Phi = x\sin\Phi - a\sin^4\Phi$$

$$\Rightarrow y\cos\Phi - x\sin\Phi = a(\cos^4\Phi - \sin^4\Phi)$$

$$= a(\cos^2\Phi - \sin^2\Phi)(\cos^2\Phi + \sin^2\Phi)$$

$$= a\cos 2\Phi$$

উদাহৰণ 5: $2y - x = 2$ ৰেখাডালে $y^2 = 2x$ বক্ৰক স্পৰ্শ কৰে। স্পৰ্শ বিন্দুৰ স্থানাঙ্ক উলিয়াওক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, স্পৰ্শ বিন্দুৰ স্থানাঙ্ক (x_1, y_1).

ই প্ৰদত্ত বক্ৰ $y^2 = 2x$, ... (1)

$\therefore y_1^2 = 2x_1$ ... ... (2)

(1)ক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$2y\frac{dy}{dx} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y}$$

$$\therefore \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1,y_1)} = \frac{1}{y_1}$$

প্ৰদত্ত ৰেখাডাল হ'ল, $2y - x = 2$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 1$$

ইয়াৰ প্ৰৱণতা $\frac{1}{2}$.

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{y_1} \Rightarrow y_1 = 2$$

(2)ত $y_1 = 2$ বহুৰাই আমি পাওঁ, $4 = 2x$

$\Rightarrow x_1 = 2$

$\therefore$ স্পৰ্শ বিন্দুটো হ'ল (2, 2).



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ২৬ ঃ $x^2 - 4y^2 = 9$ বক্ৰৰ (5, –2) বিন্দুত স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২৭ ঃ $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ বক্ৰৰ কোনবোৰ বিন্দুত স্পৰ্শক x অক্ষৰ সমান্তৰাল নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২৮ ঃ $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ বক্ৰৰ (a, b) বিন্দুত অভিলম্বৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২৯ ঃ $y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$ বক্ৰই x অক্ষক যিটো বিন্দুত স্পৰ্শ কৰে সেই বিন্দুত স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৩০ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $y^2 = 4a\left\{x + a\sin\left(\frac{x}{a}\right)\right\}$ বক্ৰৰ যিবোৰ বিন্দুত স্পৰ্শক x অক্ষৰ সমান্তৰাল, সেই বিন্দুবোৰ এটা অধিবৃত্তৰ ওপৰত থাকে।



৯.৯ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- [a, b] অন্তৰালত f(x) বৰ্ধমান যদি $f'(x) \geq 0, \forall x \in [a,b]$.
- f(x) অন্তৰালত [a, b] সতত বৰ্ধমান যদি $f'(x) > 0, \forall x \in [a,b]$.
- f(x) অন্তৰালত [a, b] হ্ৰাসমান যদি $f'(x) \leq 0, \forall x \in [a,b]$
- f(x) অন্তৰালত [a, b] সতত হ্ৰাসমান যদি $f'(x) < 0, \forall x \in [a,b]$.
- এটা ফলন এটা অন্তৰালত বৰ্ধমান হ'ব পাৰে আৰু আন এটা অন্তৰালত হ্ৰাসমান হ'ব পাৰে।
- $\frac{dy}{dx}$ এ x সাপেক্ষে y-ৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰ বুজায়।
- $f'(x) = 0$ সমীকৰণ সমাধান কৰি পোৱা x-ৰ মানবোৰক অচল (Stationary) বা ক্ৰান্তিক (Critical) বিন্দু বোলে। এই বিন্দুবোৰত ফলনটোৰ স্থানীয় গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান থাকে যদি যথাক্ৰমে $f''(x) < 0$ or $f''(x) > 0$.

- ρ কার্টেজীয় বক্ৰৰ বাবে বক্ৰতা ব্যাসার্ধ হ'ল,

$$\rho = \frac{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

- ρ ধ্ৰুৱীয় ৰূপত বক্ৰতা ব্যাসার্ধ হ'ল,

$$\rho = \frac{\left\{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2 - r\frac{d^2r}{d\theta^2} + 2\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

- বক্ৰতা হ'ল বক্ৰতা ব্যাসার্ধৰ প্ৰতিক্ৰমী।
- $y = f(x)$ বক্ৰৰ এটা বিন্দুত $\frac{dy}{dx}$ এ সেই বিন্দুত টনা স্পৰ্শকৰ প্ৰৱণতা বুজায়।
- যদি $\frac{dy}{dx} > 0$, স্পৰ্শকডালে x অক্ষৰ লগত সূক্ষ্ম কোণ কৰে।
- যদি $\frac{dy}{dx} < 0$, স্পৰ্শকডালে x অক্ষৰ লগত স্থূল কোণ কৰে।
- যদি $\frac{dy}{dx} = 0$, স্পৰ্শকডাল x অক্ষৰ সমান্তৰাল।
- যদি $\frac{dy}{dx} = 0$, স্পৰ্শকডাল y অক্ষৰ সমান্তৰাল।
- $y = f(x)$ বক্ৰৰ (x_0, y_0) বিন্দুত টনা স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$y - y_0 = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0,y_0)} (x - x_0)$$

- $y = f(x)$ বক্ৰৰ (x_0, y_0) বিন্দুত টনা অভিলম্বৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$y - y_0 = \frac{-1}{\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_0,y_0)}} (x - x_0)$$

৯.১০ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$

$= 3(x^2-2x+1)$

$= 3(x-1)^2$

$\geq 0, \ \forall x \in R$

$\therefore$ x-ৰ সকলো মানৰ বাবে f(x) বৰ্ধমান।

২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, $f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(1+x).1 - x.1}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1+x-1}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{x}{(1+x)^2} > 0 \text{ বাবে } x > 0$$

$\Rightarrow$ x > 0-ৰ বাবে f(x) এটা বৰ্ধমান ফলন। আকৌ, f(0) = 0

$\therefore$ f(x) > 0 বাবে x > 0

$$\therefore \log(1+x) - \frac{x}{1+x} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{1+x} < \log(1+x) \qquad \text{... ... ... (1)}$$

আকৌ, ধৰা হ'ল, g(x) = x – log(1+x)

$$\Rightarrow g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{1+x-1}{1+x}$$

$$= \frac{x}{1+x} > 0 \text{ বাবে } x > 0$$

$\Rightarrow$ x > 0-ৰ বাবে g(x) এটা বৰ্ধমান ফলন। আকৌ, g(0) = 0

$\Rightarrow$ g(x) > 0 বাবে x > 0

$\Rightarrow$ log (1+x) <x ... ... (2)

(1) আৰু (2) লগ লগাই আমি পাওঁ, $\frac{x}{1+x} < \log(1+x) < x; \text{ if } x > 0$

b) ধৰা হ'ল, $f(x) = \left\{x - \frac{x^2}{2(1+x)}\right\} - \log(1+x)$

$$\therefore f'(x) = 1 - \frac{(1+x).2x - x^2.1}{2(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}$$

$$= 1 - \frac{2x + x^2}{2(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{2(1+x)^2 - 2x - x^2 - 2(1+x)}{2(1+x)^2}$$

$$= \frac{2 + 4x + 2x^2 - 2x - x^2 - 2 - 2x}{2(1+x)^2}$$

$$= \frac{x^2}{2(1+x)^2} > 0 \text{ for } x > 0$$

$\Rightarrow$ x > 0-ৰ বাবে f(x) এটা বৰ্ধমান ফলন।

আকৌ, f(0) = 0

$\therefore$ x > 0-ৰ বাবে f(x) > 0

$$\Rightarrow x - \frac{x^2}{2(1+x)} > \log(1+x)$$

৩নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 168x + 36$

$\Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 18x - 168$

$= 6(x^2 - 3x - 28)$

$= 6(x-7)(x+4)$

এতিয়া, $f'(x) > 0$

$\Rightarrow 6(x-7)(x+4) > 0$

$\Rightarrow$ (x – 7 > 0 আৰু x + 4 > 0) বা (x – 7 < 0 আৰু x + 4 < 0)

$\Rightarrow$ (x > 7 আৰু x > –4) বা (x < 7 আৰু x < –4)

$\Rightarrow$ x > 7 বা x < – 4

$\therefore \ ]-\infty,-4[\cup]7,\infty[$ অন্তৰালত ফলনটো সতত বৰ্ধমান।

আকৌ, $f'(x) < 0$

$\Rightarrow 6\,(x-7)(x+4) < 0$

$\Rightarrow$ (x – 7 > 0 আৰু x + 4 < 0) বা (x –7 < 0 আৰু x + 4 > 0)

$\Rightarrow$ (x > 7 আৰু x < –4) বা (x < 7 আৰু x > –4)

$\Rightarrow$ x < 7 আৰু x > –4

$\Rightarrow$ –4 < x < 7

$\therefore\ ]-4,7[$ অন্তৰালত ফলনটো হ্ৰাসমান।

b) $f(x) = \frac{\log x}{x}; x > 0$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x - \log x.1}{x^2}$$

$$= \frac{1-\log x}{x^2}$$

এতিয়া, $f'(x) \geq 0 \Rightarrow \frac{1-\log x}{x^2} \geq 0$

$$\Rightarrow 1 \geq \log x$$

$$\Rightarrow 0 < x \leq e$$

$\therefore\ ]0,e[$ অন্তৰালত $f(x)$ বৰ্ধমান।

আকৌ, $f'(x) \leq 0 \Rightarrow \log x \geq 1; x > 0$

$$\Rightarrow x \geq e\ ;\ x > 0$$

$\therefore\ [e,\infty[$ অন্তৰালত $f(x)$ হ্ৰাসমান।

c) $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 84x + 7$

$\therefore\ f'(x) = 6x^2 - 30x - 84$

$= 6(x^2-5x-14)$

$= 6(x-7)(x+2)$

এতিয়া, $f'(x) > 0$

$\Rightarrow (x-7)(x+2) > 0$

$\Rightarrow x < -2$ or $x > 7$

$\therefore\ ]-\infty,-2[\cup]7,\infty[$ অন্তৰত $f(x)$ এটা বৰ্ধমান ফলন।

আকৌ, $f'(x) < 0 \Rightarrow (x-7)(x-2) < 0$

$$\Rightarrow -2 < x < 7$$

$\therefore\ ]-2,7[$ অন্তৰালত $f(x)$ এটা হ্ৰাসমান ফলন।

৪নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, V = গোলকটোৰ আয়তন, r = গোলকটোৰ ব্যাসাৰ্ধ

$\therefore V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $\frac{dV}{dr}$ উলিয়াব লাগে।

$$\frac{dV}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

$$= \frac{4}{3}\pi.3r^2$$

$$= 4\pi r^1$$

৫নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, যিকোনো সময় tত, গোলকীয় বেলুনৰ ব্যাসার্ধ = r, গোলকীয় বেলুনৰ আয়তন = V, গোলকীয় বেলুনৰ পৃষ্ঠকালি = S

$\therefore V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ... ... (1)

$S = 4\pi r^2$ ... ... (2)

প্ৰশ্নমতে, $\frac{dV}{dt} = 20\,cm^3/sec$

$\therefore \frac{d}{dt}\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 20$, (1)-ৰ পৰা

$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi.3r^2\frac{dr}{dt} = 20$

$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{5}{\pi r^2}$

(2)-ৰ পৰা $\frac{dS}{dt} = \frac{d}{dt}\left(4\pi r^2\right)$

$= 4\pi.2r\frac{dr}{dt}$

$= 8\pi r.\frac{5}{\pi r^2}$

$= \frac{40}{r}$

যেতিয়া ব্যাসার্ধ 4 cm, $\frac{dS}{dt} = 10cm^2/sec$

৬নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, যিকোনো সময় tত,চক্ৰীয় ঢৌৰ ব্যাসাধ = r, আবৃত অংশৰ কালি = A

$\therefore A = \pi r^2$ ... ... (i)

(i)ক t সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$\frac{dA}{dt} = \pi.2r\frac{dr}{dt}$

$= 2\pi r(3.5)cm^2/sec\left[\because \frac{dr}{dt} = 3.5\,cm/sec\right]$

$= 7\pi r\ cm^2/sec$

যেতিয়া r = 7.5 cm, $\frac{dA}{dt} = 7\pi(7.5)\,cm^2/sec = 52.5\ \pi\ cm^2/sec$

৭নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, যিকোনো সময় tত, লম্ব বৃত্তীয় শঙ্কুৰ ব্যাসার্ধ = r, লম্ব বৃত্তীয় শঙ্কুৰ উচ্চতা = h, লম্ব বৃত্তীয় শঙ্কুৰ আয়তন = V

$$\therefore V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots \text{ (i)}$$

এতিয়া, $h = \frac{1}{6}r$ (দিয়া আছে)

$\therefore$ (i)-ৰ পৰা $V = \frac{1}{3}\pi(6h)^2 h$

$$\Rightarrow V = 12\pi h^3 \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots \text{ (ii)}$$

(ii)ক t সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{dV}{dt} = 12\pi.3h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\Rightarrow 9 = 36\pi h^2\frac{dh}{dt} \quad \left[\because \frac{dV}{dt} = 9\ cm^3/\sec \text{ দিয়া আছে}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{1}{4\pi h^2}$$

যেতিয়া h = 3, আমি পাওঁ,

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{4\pi.3^2} = \frac{1}{36\pi}$$

গতিকে, উচ্চতা 3 cm হ'লে বালিৰ শঙ্কুটোৰ উচ্চতা ছেকেণ্ডত $\frac{1}{36\pi}$ cm কৈ বাঢ়ে।

৮নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $y^2 = 8x$ ... ... (1)

প্ৰশ্নমতে, $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$ ... ... (2)

(1)-ৰ পৰা $\Rightarrow \frac{d}{dt}(y^2) = \frac{d}{dt}(8x)$

$$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dt} = 8\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow 2y\frac{dx}{dt} = 8\frac{dx}{dt},\ (2)\text{-ৰ পৰা}$$

$$\Rightarrow 2y = 8$$

$$\Rightarrow y = 4$$

(1)ত y = 4 বহুৱাই আমি পাওঁ,

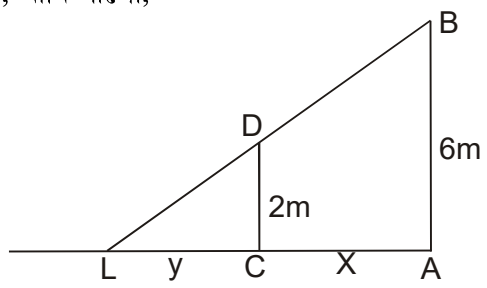
$$16 = 8x \Rightarrow x = 2$$

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া বিন্দুটো (2, 4).

৯নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, AB লেম্প প'ষ্ট আৰু B হ'ল লাইটটোৰ অৱস্থান। ধৰা হ'ল, যিকোনো মুহূৰ্তত মানুহজনৰ অৱস্থান CD, এই অৱস্থানত, ধৰা হ'ল, মানুহজন আৰু দণ্ডডালৰ মাজৰ দূৰত্ব x আৰু ছাঁৰ দৈর্ঘ্য y.

$\therefore$ AB = 6, CD = 2, AC = x, CL = y

ABL আৰু CDL সদৃশ ত্ৰিভুজৰ পৰা, আমি পালোঁ,



$$\frac{AB}{CD} = \frac{AL}{CL}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{2} = \frac{x+y}{y}$$

$$\Rightarrow 3y = x + y$$

$$\Rightarrow 2y = x$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(2y) = \frac{d}{dt}(x)$$

$$\Rightarrow 2\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

এতিয়া, $\frac{dx}{dt} = 6\,km/h$ (দিয়া আছে)

$$\therefore 2\frac{dy}{dt} = 6\ km/h$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = 3\ km/h$$

$\therefore$ ছাঁৰ দৈর্ঘ্য ঘণ্টাত 3kmকৈ বাঢ়ে। আকৌ, লেম্প প'ষ্টৰ পৰা ছাঁৰ টুপৰ দূৰত্ব = x + y

$\therefore$ প'ষ্টটোৰ পৰা ছাঁ টুপ আঁতৰি অহাৰ হাৰ $= \frac{d}{dt}(x+y)$

$$= \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}$$

$$= 6\ km/h + 3\ km/h$$

$$= 9\ km/h$$

১০নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, যিকোনো সময় tত, ঘনটোৰ প্ৰত্যেক দাঁতিৰ দৈর্ঘ্য = x, ঘনটোৰ আয়তন = V

$\therefore V = x^3$ ... ... (i)

এতিয়া, $\frac{dx}{dt} = 3\,cm/sec$ (দিয়া আছে) ... ... (ii)

(i)ক t সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ, $\frac{dV}{dt} = 3x^2\frac{dx}{dt}$

$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = 9x^2$, (ii)-ৰ সহায়ত

যেতিয়া x = 10cm,

আমি পালোঁ $\frac{dV}{dt} = 9 \times 10^2 \ \text{cm}^3/\text{sec}$

$= 900 \ \text{cm}^2/\text{sec}$

১১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) ধৰা হ'ল, $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$

$\therefore f'(x) = 4x - 6$

গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 4x - 6 = 0$

$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$

এতিয়া, $f''(x) = \frac{d}{dx}(4x-6)$

$\Rightarrow f''(x) = 4$

$\Rightarrow f''\left(\frac{3}{2}\right) = 4 > 0$

$\therefore x = \frac{3}{2}$ ত ফলনটো লঘিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান $= f\left(\frac{3}{2}\right)$

$= 2 \times \frac{9}{4} - 6 \times \frac{3}{2} + 3$

$= \frac{9 - 18 + 6}{2}$

$= -\frac{3}{2}$

b) ধৰা হ'ল, $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$\therefore f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$

গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 1 - \frac{1}{x^2} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = -1, x = 1$

এতিয়া, $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

$= 0 - \frac{-2}{x^3}$

$= \frac{2}{x^3}$

$\therefore f''(-1) = -2 < 0$

$\Rightarrow$ x = –1ত ফলনটো গৰিষ্ঠ আৰু গৰিষ্ঠ মান, $f(-1) = -1+\frac{1}{-1} = -2.$

আকৌ, $f''(1) = 2 > 0$

$\therefore$ x = 1ত ফলনটো লঘিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান, f(1) = 1 + 1 = 2

c) ধৰা হ'ল, $f(x) = 4x^3 - 15x^2 + 12x - 1$

$\Rightarrow f'(x) = 12x^2 - 30x + 12$

গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 12x^2 - 30x + 12 = 0$

$\Rightarrow 6(2x^2-5x+2) = 0$

$\Rightarrow (2x-1)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = 2$

এতিয়া, $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(12x^2 - 30x + 12\right)$

$= 24x - 30$

$\therefore f''\left(\frac{1}{2}\right) = 12 - 30$

$= -18 < 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$ত f(x) গৰিষ্ঠ আৰু গৰিষ্ঠ মান $= f\left(\frac{1}{2}\right)$

$= 4\times\frac{1}{8} - 15\times\frac{1}{4} + 12\times\frac{1}{2} - 1$

$= \frac{1}{2} - \frac{15}{4} + 5$

$= \frac{2-15+20}{4}$

$= \frac{7}{4}$

আকৌ, $f''(2) = 24 \times 2 - 30$

$= 18 > 0$

$\Rightarrow$ x = 2ত f(x) গৰিষ্ঠ আৰু গৰিষ্ঠ মান= f(2)

$= 4 \times 8 - 15 \times 4 + 12 \times 2 - 1$

$= 32 - 60 + 24 - 1$

$= 56 - 61$

$= -5$

১২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, $y = x^x$

$\therefore \log y = \log x^x$

$\Rightarrow \log y = x \log x$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}(x \log x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = x.\frac{1}{x} + 1.\log x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y(1 + \log x) \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots\ (1)$$

গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে, $\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow y(1+\log x) = 0$

$\Rightarrow \log x = -1$

$$\Rightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

এতিয়া, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\{y(1 + \log x)\}$

$$= \frac{dy}{dx}.(1 + \log x) + y.\frac{1}{x}$$

$= y(1+\log x)^2 + \frac{y}{x}$, (1)-ৰ পৰা

যেতিয়া $x = \frac{1}{e}$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}(1-1)^2 + \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}.e$$

$$= e\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}} > 0$$

$x = \frac{1}{e}$ ত ফলনটো লঘিষ্ঠ আৰু ফলনটোৰ লঘিষ্ঠ মান, $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

১৩নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, $f(x) = \sin x(1+\cos x)$

$\therefore f'(x) = \cos x(1+\cos x) + \sin x(-\sin x)$

$= \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x$

$= \cos x + \cos 2x$

গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে, $f'(x) = 0$

$\Rightarrow \cos x + \cos 2x = 0$

$\Rightarrow \cos 2x = -\cos x$

$\Rightarrow \cos 2x = \cos(\pi - x)$

$\Rightarrow 2x = \pi - x$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3}$

$f''(x) = -\sin x - 2\sin 2x$

$\therefore f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} - 2\sin\frac{2\pi}{3} < 0$

$\therefore$ ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ মান $x = \frac{\pi}{3}$ বিন্দুত আছে।

১৪নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, x আৰু y দুটা সংখ্যা।

প্ৰশ্নমতে, $x + y = 20$

$\Rightarrow y = 20 - x$ ... ... (1)

ধৰা হ'ল, সংখ্যা দুটাৰ পূৰণফল P

$\therefore P = xy$

$\Rightarrow P = x(20-x)$, (1)-ৰ সহায়ত

$\Rightarrow P = 20x - x^2$

$\therefore \frac{dP}{dx} = 20 - 2x$

P-ৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে, $\frac{dP}{dx} = 0$

$\Rightarrow 20 - 2x = 0$

$\Rightarrow x = 10$

এতিয়া, $\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{d}{dx}(20 - 2x)$

$= -2 < 0$

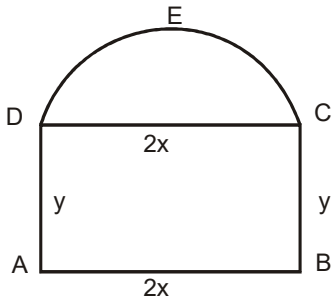
$\therefore$ যেতিয়া x = 10, P গৰিষ্ঠ।

আকৌ, x = 10, হ'লে, y = 10

$\therefore$ সংখ্যা দুটা হ'ল 10 আৰু 10.

১৫নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, আয়তক্ষেত্ৰটো ABCD আৰু DEC অৰ্ধবৃত্ত আৰু ইয়াৰ ব্যাস DC. ধৰা হ'ল, DC = 2x

AD = y



$\therefore$ চিত্ৰটোৰ পৰিসীমা = $2x + 2y + \pi x$

$\therefore$ $2x + 2y + \pi x = 20$

$\Rightarrow y = 10 - x - \frac{\pi}{2}x$ ... ... (1)

ধৰা হ'ল, চিত্ৰটোৰ কালি A.

$\therefore A = 2xy + \frac{1}{2}\pi x^2$

$= 2x\left[10 - x - \frac{\pi}{2}x\right] + \frac{1}{2}\pi x^2$, (1)-ৰ পৰা

$= 20x - 2x^2 - 2.\frac{\pi}{2}x^2 + \frac{1}{2}\pi x^2$

$= 20x - 2x^2 - \frac{\pi}{2}x^2$

$\therefore \frac{dA}{dx} = 20 - 4x - \pi x$ ... ... (2)

Aৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে, $\frac{dA}{dx} = 0$

$\Rightarrow 20 - 4x - \pi x = 0$

$\Rightarrow (4+\pi)x = 20$

$\Rightarrow x = \frac{20}{4+\pi}$

(2)ক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ, $\frac{d^2A}{dx^2} = -4 - \pi < 0$

$\therefore$ যেতিয়া $x = \frac{20}{4+\pi}$ কালি গৰিষ্ঠ।

$\therefore$ আয়ত ক্ষেত্ৰটোৰ এটা বাহু $2x = \frac{40}{4+\pi}$

আয়ত ক্ষেত্ৰটোৰ আনটো বাহু = y

$$= 10 - \frac{20}{4+\pi} - \frac{\pi}{2}.\frac{20}{4+\pi}$$

$$= 10 - \frac{20}{4+\pi} - \frac{10\pi}{4+\pi}$$

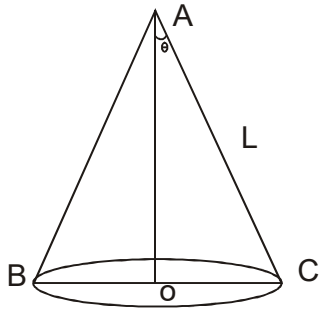
$$= \frac{40+10\pi-20-10\pi}{4+\pi}$$

$$= \frac{20}{4+\pi}$$

১৬নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, শঙ্কুটো ABC, ইয়াৰ ভূমি BC আৰু শীৰ্ষ বিন্দু A.

ধৰা হ'ল, ইয়াৰ উচ্চতা AO. ধৰা হ'ল, $\angle OAC = \theta$

ধৰা হ'ল, হেলনীয়া (Slant) উচ্চতা AC.



শঙ্কুটোৰ ব্যাসার্ধ = OC = $l \sin\theta$

শঙ্কুটোৰ উচ্চতা = OA = $l \cos\theta$

$\therefore$ আয়তন $V = \frac{1}{3}\pi(l\sin\theta)^2.l\cos\theta$

$$= \frac{\pi l^3}{3}\sin^2\theta\cos\theta$$

$$\therefore \frac{dV}{d\theta} = \frac{\pi l^3}{3}\left[2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta\right]$$

$$= \frac{\pi l^3}{3}\sin\theta\left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \quad \text{... ... ... (2)}$$

গৰিষ্ঠ আয়তনৰ বাবে, $\frac{dV}{d\theta} = 0$

$$\Rightarrow \frac{\pi l^3}{3}\sin\theta\left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos^2\theta - \sin^2\theta = 0 \quad [\because \sin\theta \neq 0 \text{ যিহেতু } \theta > 0]$$

$$\Rightarrow 2 - \tan^2\theta = 0$$

$$\Rightarrow \tan^2\theta = 2$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \sqrt{2} \quad [\because \theta > 0 \quad \therefore \tan\theta > 0]$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}\sqrt{2}$$

(2)ক θ সাপেক্ষে অৱকলন কৰি, আমি পাওঁ,

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{\pi l^3}{3}\left[\sin\theta\left(-4\cos\theta\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta\right) + \cos\theta\left(2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\right]$$

$$= \frac{\pi l^3}{3}\left[\cos\theta\left\{-4\sin^2\theta - 2\sin^2\theta + 2\cos^2\theta - \sin^2\theta\right\}\right]$$

$$= \frac{\pi l^3}{3}\cos\theta\left(-7\sin^2\theta + 2 - 2\sin^2\theta\right)$$

$$= \frac{\pi l^3}{3}\cos\theta\left(2 - 9\sin^2\theta\right)$$

যেতিয়া $\theta = \tan^{-1}\sqrt{2}$, আমি পালোঁ,

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = \frac{\pi l^3}{3}.\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2 - 9.\frac{2}{3}\right) \qquad \left[\because \tan\theta = \sqrt{2} \;\; \therefore \sin\theta = \sqrt{\frac{2}{3}}, \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$= -\frac{4\pi l^3}{3\sqrt{3}} < 0$$

$\therefore$ যেতিয়া $\theta = \tan^{-1}\sqrt{2}$, V গৰিষ্ঠ।

১৭নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, ABCD আয়ত ক্ষেত্ৰটোৰ প্ৰদত্ত পৰিসীমা 'a'.

ধৰা হ'ল, AB = x

AD = y

$\therefore$ 2x + 2y = a

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}(a - 2x) \qquad \text{... ... ... (i)}$$

ধৰা হ'ল, আয়ত ক্ষেত্ৰটোৰ কালি A

$\therefore$ A = xy

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\left(ax - 2x^2\right)$ (i)-ৰ সহায়ত

$$\therefore \frac{dA}{dx} = \frac{1}{2}(a - 4x) \qquad \text{... ... ... (ii)}$$

A-ৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে, $\frac{dA}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(a - 4x) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{a}{4}$$

(ii)ক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ, $\frac{d^2A}{dx^2} = \frac{1}{2}(0 - 4)$

$= -2 < 0$

$\therefore x = \frac{a}{4}$ হ'লে, A গৰিষ্ঠ।

আকৌ, $x = \frac{a}{4}$ হ'লে, $y = \frac{1}{2}\left(a - 2.\frac{a}{4}\right) = \frac{a}{4}$

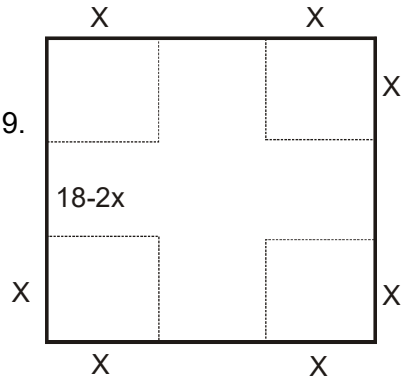
$\therefore x = y = \frac{a}{4}$ হ'লে, A গৰিষ্ঠ।

প্ৰদত্ত পৰিসীমাৰ আয়ত ক্ষেত্ৰবোৰৰ ভিতৰত বৰ্গক্ষেত্ৰৰ কালি গৰিষ্ঠ।

১৮নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, প্ৰতিটো কোণৰ প্ৰত্যেক বাহুৰ পৰা কাটি লগীয়া অংশ x cm.

$\therefore$ বাকচটোৰ ভূমিৰ মাত্ৰা (18–2x)cm আৰু (18–2x)cm.

বাকচটোৰ উচ্চতা = x cm.



ধৰা হ'ল, বাকচটোৰ আয়তন = V

$\therefore V = x(18–2x)(18–2x);\ x > 0,\ x < 9.$

$\Rightarrow V = 324x – 7x – 72x^2 + 4x^3$

$\therefore \frac{dV}{dx} = 324 – 144x + 12x^2$

গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে, $\frac{dV}{dx} = 0$

$\Rightarrow 324 – 144x + 12x^2 = 0$

$\Rightarrow 12(x^2–12x+27) = 0$

$\Rightarrow x^2 – 12x + 27 = 0$

$\Rightarrow (x–3)(x–9) = 0$

$\Rightarrow x = 3 \qquad [\because x < 9]$

এতিয়া, $\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d}{dx}(324 – 144x + 12x^2)$

$= –144 + 24x$

যেতিয়া x = 3, আমি পাওঁ, $\frac{d^2V}{dx^2} = –144 + 72$

$= –72 < 0$

$\therefore$ যেতিয়া x = 3, V গৰিষ্ঠ।

$\therefore$ গৰিষ্ঠ আয়তন পাবলৈ বাকচটোৰ প্ৰত্যেক কোণৰ পৰা 3cm দৈৰ্ঘ্যৰ বৰ্গ কাটিব লাগিব।

১৯নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, R ব্যাসাৰ্ধৰ গোলকটোৰ কেন্দ্ৰ O.

ধৰা হ'ল, গোলকটোত অন্তৰ্লিখিত শঙ্কুটো হ'ল ABC.

ধৰা হ'ল, শঙ্কুটোৰ উচ্চতা R + x আৰু শঙ্কুৰ ভূমিৰ ব্যাসাৰ্ধ y.

$\therefore\ x^2 + y^2 = R^2$

$\Rightarrow\ y^2 = R^2 - x^2$ ... ... (1)

ধৰা হ'ল, শঙ্কু আৰু গোলকৰ আয়তন ক্ৰমে V আৰু V_1

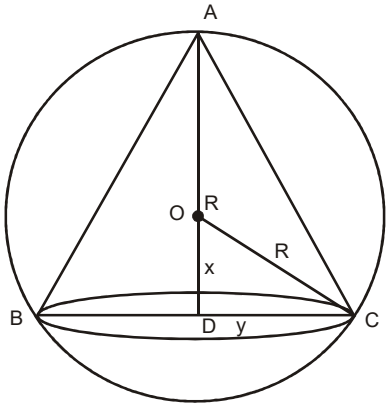
$\therefore\ V = \frac{1}{3}\pi y^2(R + x)$ ... ... (2)

$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3$ ... ... (3)

(2)-ৰ পৰা $\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi(R^2 - x^2)(R + x)$, (1)-ৰ সহায়ত

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi(R^3 + R^2x - Rx^2 - x^3)$$

$$\therefore \frac{dV}{dx} = \frac{1}{3}\pi(R^2 - 2Rx - 3x^2)$$



V-ৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে,

$$\frac{dV}{dx} = 0$$

$\Rightarrow R^2 - 2Rx - 3x^2 = 0$

$\Rightarrow 3x^2 + 2Rx - R^2 = 0$

$\Rightarrow (3x - R)(x + R) = 0$

$\Rightarrow 3x - R = 0\ \ [\because x + R \neq 0]$

$$\Rightarrow x = \frac{R}{3}$$

এতিয়া, $\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{3}\pi(R^2 - 2Rx - 3x^2)\right]$

$$= \frac{1}{3}\pi(-2R - 6x)$$

$x = \frac{R}{3}$ হ'লে, $\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{1}{3}\pi\left(-2R - 6.\frac{R}{3}\right)$

$$= -\frac{4}{3}\pi R < 0$$

$\therefore\ x = \frac{R}{3}$ হ'লে,

V গৰিষ্ঠ আৰু গৰিষ্ঠ শঙ্কুটোৰ আয়তন = $\frac{1}{3}\pi\left(R^2-\frac{R^2}{9}\right)\left(R+\frac{R}{3}\right)$

$= \frac{1}{3}\pi.\frac{8R^2}{9}.\frac{4R}{3}$

$= \frac{8}{27}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)$

$= \frac{8}{27}V_1 = \frac{8}{27}$ (গোলকটোৰ আয়তন)

২০নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্ৰদত্ত উপবৃত্তটো $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ... ... (1)

ধৰা হ'ল, উপবৃত্তটোত অন্তৰ্লিখিত আয়তক্ষেত্ৰটো ABCD.

ধৰা হ'ল, AB = 2x, BC = 2y.

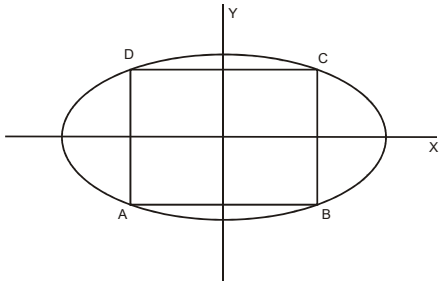
ধৰা হ'ল, আয়তক্ষেত্ৰটোৰ কালি A.

$\therefore$ A = (2x)(2y)

= 4xy

$= 4\frac{b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}$ $\left[\because \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}\right.$
$\left.\therefore y^2=\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)\right]$

$\because$ A > 0 $\therefore$ A গৰিষ্ঠ $\Rightarrow$ A^2 গৰিষ্ঠ।



ধৰা হ'ল, $u = A^2$

$\Rightarrow u = \frac{16b^2}{a^2}x^2\left(a^2-x^2\right)$

$\Rightarrow u = \frac{16b^2}{a^2}\left(a^2x^2-x^4\right)$

$\therefore \frac{du}{dx}=\frac{16b^2}{a^2}\left(2a^2x-4x^3\right)$

u-ৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে,

$\frac{du}{dx}=0$

$\Rightarrow 2a^2x - 4x^3 = 0$

$\Rightarrow 2x(a^2-2x^2) = 0$

$\Rightarrow 2x^2 = a^2$ $[\because x > 0]$

$\Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{2}}$

এতিয়া $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{16b^2}{a^2}\left(2a^2 - 12x^2\right)$

যেতিয়া $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{16b^2}{a^2}\left(2a^2 - 12.\frac{a^2}{2}\right)$

$= \frac{16b^2}{a^2}\left(-4a^2\right)$

$= -64b^2 < 0$

$\therefore$ যেতিয়া $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, u গৰিষ্ঠ।

অৰ্থাৎ, যেতিয়া $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$, A গৰিষ্ঠ।

$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{b}{\sqrt{2}}$

$\therefore$ সবাতোকৈ ডাঙৰ আয়তক্ষেত্ৰটোৰ কালি = $4xy = 4\frac{a}{\sqrt{2}}.\frac{b}{\sqrt{2}} = 2ab$

২১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্ৰদত্ত বক্ৰটো হ'ল, $a^2y = x^3 - a^3$ ... ... (1)

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি, আমি পাওঁ, $a^2\frac{dy}{dx} = 3x^2$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{a^2}$

আকৌ, x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x}{a^2}$

$$\because \rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$= \frac{\left[1 + \left(\frac{3x^2}{a^2}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{6x}{a^2}}$$

$$= \frac{\left(a^4 + 9x^4\right)^{3/2}}{6a^4x}$$

২২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) $s = 4a \sin\psi$

$$\therefore \frac{ds}{d\psi} = 4a\cos\psi$$

$$\Rightarrow \rho = 4a\cos\psi$$

b) $s = c \log \sec\psi$

$$\Rightarrow \frac{ds}{d\psi} = c.\frac{1}{\sec\psi}.\sec\psi\tan\psi$$

$$\Rightarrow \rho = c\tan\psi$$

২৩নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্ৰদত্ত বক্ৰটো হ'ল, $x^3 + y^3 = 3axy$ ... ... (1)

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি, আমি পাওঁ,

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 3a\left(x\frac{dy}{dx} + y\right)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2\frac{dy}{dx} = ax\frac{dy}{dx} + ay \qquad \text{... ... ... (2)}$$

$$\Rightarrow \left(y^2 - ax\right)\frac{dy}{dx} = ay - x^2$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$$

$\left(\frac{3a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$ বিন্দুটোত $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{3a^2}{2} - \frac{9a^2}{4}}{\frac{9a^2}{4} - \frac{3a^2}{2}} = -1$

(2)ক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$2x + 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{dy}{dx} + ax\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \left(y^2 - ax\right)\frac{d^2y}{dx^2} = 2a\frac{dy}{dx} - 2x - 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2a\frac{dy}{dx} - 2x - 2y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{y^2 - ax}$$

$\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)$ বিন্দুত $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2a(-1)-3a-3a(1)}{\left(\frac{3a}{2}\right)^2-\frac{3a^2}{2}}$

$$=\frac{-8a}{9a^2-6a^2}\times 4$$

$$=\frac{-32}{3a}$$

$\therefore \left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)$ বিন্দুত বক্ৰতা ব্যাসাৰ্ধ $\rho = \left[\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\right]_{\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)}$

$$=\frac{(1+1)^{3/2}}{\frac{-32}{3a}}$$

$$=\frac{-2\sqrt{2}.3a}{32}$$

$$=-\frac{3a}{8\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3a}{8\sqrt{2}}$$ (ঋণাত্মক চিন বিবেচনা নকৰি)

$\therefore$ বক্ৰতা $\left(\frac{3a}{2},\frac{3a}{2}\right)=\frac{1}{p}=\frac{8\sqrt{2}}{3a}$

২৪নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্ৰদত্ত ছাক্লিয়ডটো হ'ল,

$$x = a(t+\sin t) \quad \ldots\ \ldots\ \ldots (1)$$

$$y = a(1-\cos t) \quad \ldots\ \ldots\ \ldots (2)$$

$$\therefore \frac{dx}{dt}=a(1+\cos t)$$

আৰু $\frac{dy}{dt}=a\sin t$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\sin t}{1+\cos t}=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}}=\tan\frac{t}{2}$$

আকৌ, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\tan\frac{t}{2}\right) = \sec^2\frac{t}{2}.\frac{1}{2}.\frac{dt}{dx}$

$= \frac{1}{2}\sec^2\frac{t}{2}.\frac{1}{a(1+\cos t)}$

$= \frac{1}{2a}\sec^2\frac{t}{2}.\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}$

$= \frac{1}{4a}\sec^4\frac{t}{2}$

বক্রতা ব্যাসার্ধ ρ =

=

=

=

২৫নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্রদত্ত বক্রটো হ'ল,

$x = a\cos^2\theta$ ... ... (1)

$y = a\sin^3\theta$ ... ... (2)

$= -3a\cos^2\theta.\sin\theta$

আৰু

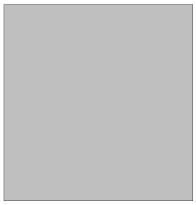
$= 3a\sin^2\theta.\cos\theta$



= 

= 

= 

 বক্ৰতা ব্যাসাৰ্ধ = 









 বক্ৰতা = 

২৬নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ বক্ৰটোৰ প্ৰদত্ত সমীকৰণ হ'ল, $x^2 - 4y^2 = 9$ ... ... (1)









(5, –2) বিন্দুত স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ হ'ল,

$y + 2 = -$ 

or $8y + 16 = -5x + 25$

or $5x + 8x - 9 = 0$

(5, –2) বিন্দুত অভিলম্বৰ সমীকৰণ হ'ল,



or 

or $5y + 10 = 8x - 40$

or $8x - 5y - 50 = 0$

২৭নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্ৰদত্ত বক্ৰটো হ'ল,

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ ... ... (1)





x অক্ষৰ সমান্তৰাল স্পৰ্শকৰ বাবে, 

$3x^2 - 6x - 9 = 0$

$3(x^2 - 2x - 3) = 0$

$(x-3)(x+1) = 0$

$x = 3, -1$

যেতিয়া $x = 3$, (1)-ৰ পৰা আমি পাওঁ,

$y = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$

যেতিয়া $x = -1$, (1)-ৰ পৰা আমি পাওঁ,

$y = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$

নিৰ্ণেয় বিন্দুকেইটা হ'ল, (3, –22) আৰু (–1, 10).

২৮নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'ল,

 ... ... (1)

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,









 (a, b) বিন্দুত অভিলম্বৰ সমীক�ৰণ,



বা 

বা $by - b^2 = ax - a^2$

বা $ax - by = a^2 - b^2$

২৯নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্ৰদত্ত বক্ৰটো হ'ল,

$y(x-2)(x-3) - x + 7 = 0$ ... ... (1)

(1) বক্ৰটোৱে x অক্ষক যিটো বিন্দুত কাটে সেই বিন্দুত কোটি শূন্য, অৰ্থাৎ, $y = 0$.



 $x = 7$

 (1) বক্ৰটোৱে x অক্ষক (7, 0) বিন্দুত ছেদ কৰে।

(1)ক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,











 (7, 0) বিন্দুত স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ,

$y - 0 =$ 

বা $20y = x - 7$

বা $x - 20y - 7 = 0$

(7, 0) বিন্দুত অভিলম্বৰ সমীকৰণ,



বা $y = -20(x-7)$

বা $y = -20x + 140$

বা $20x + y = 140$

৩০নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্ৰদত্ত বক্ৰটো হ'ল,

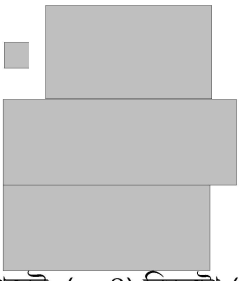
 ... ... (1)

(1)ক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,





ধৰা হ'ল, (1) বক্ৰৰ (α, β) বিন্দুত টনা স্পৰ্শকডাল x অক্ষৰ সমান্তৰাল।

 ... ... (2)

আকৌ, (α, β) বিন্দুটো (1)ত আছে।



$=$ 

$=$  -ৰ সহায়ত



 ৰ সঞ্চাৰ পথ হ'ল, $y^2 = 4ax$, এইটো এটা অধিবৃত্ত।



৯.১১ অধিক জানিবলৈ

1) Gupta, Sudhir (2011) (1st ed.): *Basics of Differentential Calculus*; New Delhi: Anmol publication Pvt. Ltd.
2) Habib, Amber. (2011) (1st ed.): *The Calculus of Finance*; Hyderabad: Universities Press India Pvt. Ltd.
3) Maron, I .A. (1993) (1st ed.): *Problems in Calculus of One Variable*; New Delhi: CBS Publishers & Distributors Pvt Ltd.
4) Sharma, A. K. (2004) (1st ed.): *Text Book of Differential Calculus for B.A, B.Sc, B.Com, I.A.S., P.C.S.*; New Delhi: Discovery Publishing House.



৯.১২ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ অধোলিখিত ফলনবোৰ কোনবোৰ অন্তৰালত বৰ্ধমান বা হ্ৰাসমান নিৰ্ণয় কৰক।

a) $x^3 - 9x^2 + 15x + 11$

b) $2x^3 - 12x^2 + 18x + 15$

c) $x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + 21$

d) $(x+3)^3(x-5)^3$

প্ৰশ্ন ২ ঃ দেখুওৱাক যে [redacted], [redacted]

প্ৰশ্ন ৩ ঃ অধোলিখিত ফলনবোৰৰ কোনবোৰ বিন্দুত গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান আছে নিৰ্ণয় কৰক।

a) $y = 9x^3 - 45x^2 + 48x + 11$

b) $y = 11 - 12x + 6x^2 - x^3$

প্ৰশ্ন ৪ ঃ দেখুওৱাক যে [redacted] ফলনটোৰ $x = 0$ বিন্দুত চৰম মান আছে। চৰম মানটো গৰিষ্ঠ নে লঘিষ্ঠ থিৰ কৰক।

প্ৰশ্ন ৫ ঃ দেখুওৱাক যে $\sin x(1+\cos x)$ ফলনটোৰ [redacted] বিন্দুত গৰিষ্ঠ মান আছে।

প্ৰশ্ন ৬ ঃ x-ৰ কি মানৰ বাবে, sinx ফলনটো x-ৰ আধা হাৰত বাঢ়ে?

প্ৰশ্ন ৭ ঃ এটা বেলুনৰ ব্যাসাৰ্ধ ছেকেণ্ডত 2m হাৰে বাঢ়ে আৰু ইয়াৰ উচ্চতা ছেকেণ্ডত 3m হাৰত কমে। যেতিয়া ব্যাসাৰ্ধ 3m আৰু উচ্চতা 5m, বেলুনটোৰ আয়তন কি হাৰত বাঢ়ে নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৮ ঃ  বক্ৰৰ $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ বিন্দুত স্পৰ্শক সমীকৰণ উলিওৱাক।

প্ৰশ্ন ৯ ঃ $xy^2 = 4(4-x)$ বক্ৰটোৱে $y = x$ ৰেখাডালক ছেদ কৰা বিন্দুত স্পৰ্শক নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ১০ ঃ $r = 3(1+\cos$  বক্ৰটোৰ $(r, 0)$ বিন্দুত বক্ৰতাৰ ব্যাসাৰ্ধ উলিওৱাক।

*** ***** ***

অধ্যায় ১০ ঃ মাধ্য মান উপপাদ্য

অধ্যায় গাঁথনি

10.1 উদ্দেশ্য

10.2 পৰিচয়

10.3 ৰ'লৰ উপপাদ্য

10.3.1 ৰ'লৰ উপপাদ্যৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা

10.4 লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্য

10.4.1 লাগ্ৰাজৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা

10.4.2 লাগ্ৰাজৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ প্ৰমাণ

10.4.3 লাগ্ৰাজৰ মাধ্য মান উপাপাদ্যৰ আন এটা ৰূপ

10.5 কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্য

10.5.1 কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা

10.5.2 কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ প্ৰমাণ

10.6 অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

10.7 অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

10.8 অধিক জানিবলৈ

10.9 আৰ্হি প্ৰশ্ন

১০.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- জানিবলৈ পাব যে এটা মসৃণ বক্ৰৰ এটা প্ৰদত্ত অংশত এটা বিন্দু আছে য'ত বক্ৰটোৰ প্ৰৱণতা অংশটোৰ গড় অৱকলজৰ সমান
- বক্ৰৰ বিভিন্ন স্পৰ্শকৰ জ্যামিতীয় তাৎপৰ্য্য নিগমন কৰিব পাৰিব
- ৰ'লৰ উপপাদ্যৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।

১০.২ পৰিচয়

এই অধ্যায়ত, আমি কেইটামান অতি প্ৰয়োজনীয় উপপাদ্যৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। এই উপপাদ্যবোৰ এটা বন্ধ অন্তৰালৰ অন্তঃস্থ বিন্দুত এটা অবিচ্ছিন্ন বক্ৰৰ স্পৰ্শকৰ লগত জড়িত। সবাতোকৈ গুৰুত্বপূৰ্ণ উপপাদ্যটো হ'ল ৰ'লৰ উপপাদ্য (Rolle's Theorem)। ই মাধ্য মান

উপপাদ্য কেইটাৰ ভিত্তি স্বৰূপ। মাইকেল ৰ'ল (Michel Rolle, 1652-1719) আছিল এজন ফৰাছী গণিতজ্ঞ। আমি লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্য [জোছেফ লুই লাগ্ৰাঞ্জ, (Joseph Louis Lagrange, 1736-1813)] আৰু কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ [অগষ্টিন লুই কছি, (Augustin Louis Cauchy, 1789-1857)] বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

১০.৩ ৰ'লৰ উপপাদ্য

ধৰা হ'ল, f ফলনটো [a, b] অন্তৰালত সংজ্ঞাৱদ্ধ যাতে—

i) [a, b]ত f অবিচ্ছিন্ন,

ii)]a, b[ত f অৱকলনীয়,

iii) f(a) = f(b).

তেনেহ'লে]a, b[ত অন্ততঃ এটা মান, ধৰা হ'ল, c আছে যাতে $f'(c) = 0$.

১০.৩.১ ৰ'লৰ উপপাদ্যৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা



চিত্ৰ **10.1**



চিত্ৰ **10.2**

যদি y = f(x) ফলনৰ লেখ A[a, f(a)] বিন্দুৰ পৰা B[b, f(b)] বিন্দুলৈ প্ৰতিটো বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন, A আৰু B-ৰ মাজৰ প্ৰতিটো বিন্দুত স্পৰ্শক আছে; আৰু A আৰু B বিন্দু দুটাৰ y স্থানাঙ্ক সমান হয়, তেনেহ'লে বক্ৰটোত A আৰু B-ৰ মাজত অন্ততঃ এটা বিন্দু P থাকিব য'ত স্পৰ্শক x অক্ষৰ সমান্তৰাল।

চিত্ৰ 10.1 অত মাত্ৰ এটা বিন্দু আছে য'ত স্পৰ্শক x অক্ষৰ সমান্তৰাল, কিন্তু চিত্ৰ 10.2ত এটাতকৈয়ো অধিক বিন্দুত স্পৰ্শক x অক্ষৰ সমান্তৰাল।

ৰ'লৰ উপপাদ্যৰ বিপৰীতটো সত্য নহয়।

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, 1 ফলনটো লোৱা হ'ল।

ইয়াত $f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

$f'(1) = 3 - 2 - 1 = 0$ আৰু 1

কিন্তু f(–1) গতিকে ৰ'লৰ উপপাদ্যৰ চর্ত (iii) সিদ্ধ নহয়।



মাইকেল ৰ'ল (1652-1719) ঃ এজন ফৰাছী গণিতজ্ঞ। তেওঁ ৰলৰ উপপাদ্যৰ কাৰণে জনাজাত আছিল।

ৰ'লৰ উপপাদ্যৰ প্ৰমাণ ঃ

[a, b]ত f অবিচ্ছিন্ন,

[a, b]ত f পৰিবদ্ধ।

ধৰা হ'ল [a, b]ত f-ৰ লঘিষ্ঠ উচ্চ পৰিবদ্ধ আৰু গৰিষ্ঠ নিম্ন পৰিবদ্ধ ক্ৰমে M আৰু m.

এতিয়া দুটা সম্ভাৱনা আছে।

M = m বা M

ক্ষেত্ৰ প্ৰথম ঃ ধৰা হ'ল, M = m

এই ক্ষেত্ৰত f(x) = f(a) = f(b) = M = m,

f(x) = ধ্ৰুৱক,

$f'(x) = 0$,

$f'(c) = 0$, c

ক্ষেত্ৰ দ্বিতীয় ঃ ধৰা হ'ল, M

এই ক্ষেত্ৰত M বা m পৰিবদ্ধ দুটাৰ অন্ততঃ এটা f(a) = f(b)ৰ পৰা পৃথক হ'ব।

ধৰা হ'ল, M

f(a) < M

ধৰা হ'ল, c যাতে f(c) = M

তেনেহ'লে, f(c+h) f(c) = M, h -ৰ বাবে

f(c+h) – f(c) 0, h -ৰ বাবে

h আৰু h > 0-ৰ বাবে

h আৰু h < 0-ৰ বাবে

$f'(c) = 0$ [$'(c)$ আছে $'(c) = Lf'(c) = f'(c)$]

গতিকে উভয় ক্ষেত্ৰত $f'(c) = 0$; c

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1: $f(x) = x^3 – 6x^2 + 11x – 6$-ৰ বাবে ৰ'লৰ উপপাদ্য সত্যাপন কৰক।

.

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $f(x) = x^3 – 6x^2 + 11x – 6$,

যিহেতু f এটা বহুপদীয় ফলন, গতিকে ই IRত অবিচ্ছিন্ন।

আকৌ, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$;

আৰু $f(1) = 0 = f(3)$

f-এ ৰ'লৰ উপপাদ্যৰ সকলো চর্ত সিদ্ধ কৰে।

c যাতে $f'(c) = 0$.

এতিয়া $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$

$f'(c) = 3c^2 - 12c + 11$

$f'(c) = 0$ $3c^2 - 12c + 11 = 0$

আৰু উভয়ে 1 আৰু 3-ৰ মাজত আছে।

গতিকে ৰ'লৰ উপপাদ্য সত্যাপন কৰা হ'ল।

উদাহৰণ 2: অধোলিখিত ফলনকেইটাৰ বাবে ৰ'লৰ উপপাদ্যৰ চর্তকেইটা সিদ্ধ হয়নে?

a) $f(x) = x^2$, [2,3]

b) $f(x) = \tan x$, $[0, \pi]$

সমাধান ঃ

a) [2, 3]ত f অবিচ্ছিন্ন আৰু অৱকলনীয়।

কিন্তু $f(2) = 4$, $f(3) = 9$

$f(2)$

ৰ'লৰ উপপাদ্যৰ তৃতীয় চর্তটো সিদ্ধ নহয়।

b) এই ক্ষেত্রত $f(0) = 0$ আৰু $f(\pi) = 0$

$f(0) = f(\pi)$

ৰ'লৰ উপপাদ্যৰ তৃতীয় চর্তটো সিদ্ধ হয়।

কিন্তু, ত f অবিচ্ছিন্ন নহয়।

ৰ'লৰ উপপাদ্যৰ প্রথম দুটা চর্ত সিদ্ধ নহয়।

উদাহৰণ 3: [1,3]ত সংজ্ঞাৱদ্ধ $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + b$ ফলনে [redacted] ৰ বাবে ৰ'লৰ উপপাদ্য সিদ্ধ কৰে। a আৰু b-ৰ মান নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ যিহেতু f(x)-এ [1, 3]ত ৰ'লৰ উপপাদ্যৰ চর্তকেইটা সিদ্ধ কৰে,

[redacted]

[redacted] $1 - 6 + a + b = 27 - 54 + 3a + b$

[redacted] $-5 + a = -27 + 3a$

[redacted] $22 = 2a$

[redacted] $a = 11$

[redacted] f(1) = f(3), b-ৰ ওপৰত নির্ভৰশীল নহয়।

[redacted] b যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা।

[redacted] b[redacted]

[redacted] a = 11, b[redacted]

উদাহৰণ 4: যদি $2a + 3b + 6c = 0$, প্রমাণ কৰক যে $ax^2 + bx + c = 0$, সমীকৰণৰ অন্ততঃ এটা মূল]0, 1[অন্তৰালত থাকে।

সমাধান ঃ [redacted] ফলনটো লোৱা হ'ল।

[redacted] f(0) = 0

আৰু [redacted]

[redacted]

= 0 [redacted] দিয়া আছে]

[redacted] f(0) = f(1) =0

আকৌ, [0, 1]ত f অবিচ্ছিন্ন আৰু]0, 1[ত f অৱকলনীয়।

ৰ'লৰ উপপাদ্য মতে,

[redacted]]0, 1[ত অন্ততঃ এটা সংখ্যা, ধৰা হ'ল, α আছে যাতে $f'(\alpha) = 0$

অর্থাৎ, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকৰণৰ এটা মূল আছে।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ ঃ $f(x) = x^3 - 4x$, x [redacted] [–2, 2] ফলনৰ বাবে ৰ'লৰ উপপাদ্য সত্যাপন কৰক।

প্রশ্ন নং ২ঃ অধোলিখিত ফলনবোৰৰ বাবে নির্দিষ্ট অন্তৰালত ৰ'লৰ উপপাদ্য প্রযোজ্য হয়নে নহয় বিচাৰ কৰক।

a) $y = x(x-4)$; x

c) $f(x) =$

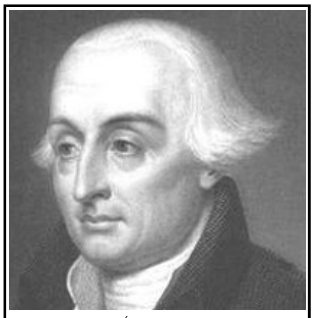
প্রশ্ন নং ৩ঃ [1, 3]ত সংজ্ঞাৱদ্ধ $f(x) = x^3 + bx^2 + ax + 5$ ফলনে –ৰ বাবে ৰ'লৰ উপপাদ্য সিদ্ধ কৰে। a আৰু bৰ মান নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ ৰ'লৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত অধোলিখিত বক্ৰবোৰৰ কোণবোৰ বিন্দুত স্পর্শক x অক্ষৰ সমান্তৰাল নির্ণয় কৰক।

a) $f(x) = 16 - x^2$; x

b) $f(x) = \cos x - 1$; x π]

১০.৪ লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্য



জোছেফ লুই লাগ্ৰাঞ্জৰ (1736-1813) ঃ ইটালীৰ এজন বিখ্যাত গণিতজ্ঞ।

ধৰা হ'ল f ফলনটো [a, b] অন্তৰালত সংজ্ঞাৱদ্ধ যাতে—

i) [a, b]ত f অবিচ্ছিন্ন,

ii)]a, b[ত f অৱকলনীয়।

তেনেহ'লে]a, b[ত অন্ততঃ এটা মান, ধৰা হ'ল c আছে যাতে—

১০.৪.১ লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা



চিত্ৰ **10.3**



চিত্ৰ **10.4**

AB জ্যাৰ প্রৱণতা

যদি $y = f(x)$ ফলনৰ লেখ A[a, f(a)] বিন্দুৰ পৰা B[b, f(b)] বিন্দুলৈ প্রতিটো বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন; A আৰু B ৰ মাজৰ প্রতিটো বিন্দুত স্পর্শক আছে; আৰু A আৰু B বিন্দু দুটাৰ Y-স্থানাঙ্ক সমান নহয়, তেনেহ'লে বক্ৰটোত A আৰু B-ৰ মাজত অন্ততঃ এটা বিন্দু P থাকিব য'ত স্পর্শক AB জ্যাৰ সমান্তৰাল।

চিত্র 10.3ত মাত্র এটা বিন্দু আছে য'ত স্পর্শক AB জ্যাৰ সমান্তৰাল, কিন্তু চিত্র 10.4ত এটাতকৈয়ো অধিক বিন্দুত স্পর্শক জ্যাডালৰ সমান্তৰাল।

১০.৪.২লাগ্রাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ প্রমাণ

g ফলনটো বিবেচনা কৰা হ'ল,

$$g(x) = f(x) + Ax \quad \text{... ... ... (1)}$$

ইয়াত A এটা ধ্রুৱক (বাস্তৱ সংখ্যা)।

যাতে g(a) = g(b)

$f(a) + Aa = f(b) + Ab$

$Aa - Ab = f(b) + Ab$

$-A(b-a) = f(b) - f(a)$

$A = -$

A-ৰ এই মানৰ বাবে—

i) [a, b]ত g অবিচ্ছিন্ন, যিহেতু [a, b]ত f আৰু Ax অবিচ্ছিন্ন;

ii)]a, b[ত g অৱকলনীয়, যিহেতু]a, b[ত f আৰু Ax অৱকলনীয়;

iii) g(a) = g(b)

g-এ ৰ'লৰ উপপাদ্যৰ সকলো চর্ত সিদ্ধ কৰে।

]a, b[ত অন্তত এটা c থাকিব যাতে $g'(c) = 0$ ... ... (3)

(1)ক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$g'(x) = f'(x) + A$

$g'(c) = f'(c) + A$

$0 = f'(c) + A$, (3)-ৰ সহায়ত

$f'(c) = -A$

$f'(c) =$ -ৰ সহায়ত

১০.৪.৩লাগ্রাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ আন এটা ৰূপ

ধৰা হ'ল, f ফলনটো [a, a+h] অন্তৰালত সংজ্ঞাৱদ্ধ যাতে—

i) [a, a+h] অন্তৰালত f অবিচ্ছিন্ন;

ii)]a, a+h[অন্তৰালত f অৱকলনীয়।

তেনেহ'লে,]0, 1[অন্তৰালত এনে এটা সংখ্যা, ধৰা হ'ল t, থাকিব যাতে—

$$f(a+h) = f(a) + h\, f'(a+th)$$

প্রমাণ ঃ g ফলনটো বিবেচনা কৰা হ'ল।

$g(x) = f(x) + Ax$ ... ...(1)

যাতে A এটা ধ্রুৱক, যাতে—

$g(a) = g(a+h)$

$f(a) + Aa = f(a+h) + A(a+h)$

$f(a) + Aa = f(a+h) + Aa + Ah$

$f(a) - f(a+h) = Ah$

$A =$

এতিয়া, i) [a, a+h] ত g অবিচ্ছিন্ন;

ii)]a, a+h[ত g অৱকলনীয়;

iii) $g(a) = g(a+h)$

গতিকে, g-এ ৰ'লৰ উপপাদ্যৰ সকলো চর্ত সিদ্ধ কৰে।

]a, a+h[ত এনে এটা সংখ্যা c থাকিব যাতে $g'(c) = 0$ ... ... (3)

$0 < t < 1$ (দিয়া আছে)

$a + th$

গতিকে $c = a + th$ বুলি ধৰিব পাৰি।

(3)-ৰ পৰা $g'(a+th) = 0$ ... ... (4)

(1)ক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$g'(x) = f'(x) + A$

$g'(a+th) = f'(a+th) + A$

$0 = f'(a+th) + A$, (4)-ৰ পৰা

$0 = f'(a+th) +$ -ৰ পৰা

$0 = hf'(a+th) + f(a) - f(a+h)$

$f(a+h) = f(a) + hf'(a+th)$

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1: $f(x) = 2x^2 - 10x + 29$, $x \in [2, 7]$-ৰ বাবে লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্য সত্যাপন কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $f(x) = 2x^2 - 10x + 29$

f(x) এটা বহুপদ। গতিকে সকলো বাস্তৱ সংখ্যাৰ বাবে f অবিচ্ছিন্ন আৰু অৱকলনীয়।

i) [2,7]ত f(x) অবিচ্ছিন্ন;

ii)]2,7[ত f(x) অৱকলনীয়।

[2,7] অন্তৰালত f(x)-এ লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ সকলো চর্ত সিদ্ধ কৰে।

]2, 7[অন্তৰালত অন্ততঃ এনে এটা বাস্তৱ সংখ্যা c থাকিব যাতে—



এতিয়া, 

= 4x – 10

$f'(c) = 4c - 10$





= 8



$4c - 10 = 8$

$4c = 18$



$2 < c < 7$

লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্যমান উপপাদ্য সত্যাপন কৰা হ'ল।

উদাহৰণ 2: $y = (x-3)^2$ বক্ৰৰ যি বিন্দুত স্পর্শক (3, 0) আৰু (4, 1) বিন্দু সংযোগী জ্যাৰ সমান্তৰাল, সেই বিন্দুটো নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $y = f(x) = (x-3)^2$

$f(x) = x^2 - 6x + 9$ এটা বহুপদ

[3, 4]ত f অবিচ্ছিন্ন আৰু]3, 4[ত f অৱকলনীয়।

f(x)-এ লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ সকলো চর্ত সিদ্ধ কৰে।

]3, 4[ত এটা বিন্দু c থাকিব যাতে—

 আৰু (4, 1) সংযোগী ৰেখাৰ প্ৰৱণতা।



$2c - 6 = 1$





গতিকে, বক্রটোৰ উলিয়াব লগীয়া বিন্দুটো হ'ল, 

উদাহৰণ 3: যদি $0 < a < b$, প্রমাণ কৰক যে 

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $f(x) = \tan^{-1}x$



[a, b]ত লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্যটো হ'ল,







... ... (1)

$0 < a < c$,  $^2 < c^2$

$1 + a^2 < 1 + c^2$





, (1)-ৰ পৰা

অর্থাৎ, 

আকৌ,  $0 < c < b$, $^2 < b^2$

$1 + c^2 < 1 + b^2$



, (1)-ৰ পৰা

অর্থাৎ, 

(2) আৰু (3)ৰ পৰা,

উদাহৰণ 4: লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ সহায়ত -ৰ এটা আসন্ন মান উলিয়াওক।

সমাধান ঃ তলৰ ফলনটো লোৱা হ'ল,

f(x) = ; x

যিহেতু [0, ত অবিচ্ছিন্ন আৰু]0, ত অৱকলনীয়।

]64, 66[ত f অবিচ্ছিন্ন আৰু [64, 66]ত অৱকলনীয়।

লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ পৰা,]64,66[ত এনে এটা c আছে।

যাতে,

... ... (1)

... ... (2)

আকৌ, (1)

... ... (3)

(2) আৰু (3)-ৰ পৰা,

(মোটামুটিভাৱে)

উদাহৰণ 5: যদি এটা ফলন f-এ লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্য সিদ্ধ কৰে আৰু $f'(x) = 0$, প্ৰমাণ কৰক যে [a,b] ত f এটা ধ্ৰুৱক ফলন।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $a < x_1 < x_2 < b$

[a, b]ত f-এ লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্য সিদ্ধ কৰে আৰু $[x_1, x_2]$

$[x_1, x_2]$তো f-এ লাগ্ৰাঞ্জৰ উপপাদ্যৰ চৰ্তবোৰ সিদ্ধ কৰে।

$]x_1, x_2[$ত এনে এটা বিন্দু c থাকিব যাতে—

... ... (1)

দিয়া আছে, $f'(x) = 0$,

$f'(c) = 0$ (c

, (1)-ৰ পৰা

$f(x_2) - f(x_1) = 0$

$f(x_1) = f(x_2)$, $a < x_1 < x_2 < b$

[a, b]ত f(x) ধ্ৰুৱক।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ৫ ঃ অধোলিখিত ফলনবোৰৰ বাবে নিৰ্দিষ্ট অন্তৰালত লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্য সত্যাপন কৰক।

a) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3$; x [0, 1]

b) $f(x) =$; x [1, 5]

c) $f(x) = \log_e x$; x [1, e]

প্ৰশ্ন নং ৬ ঃ যদি $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ আৰু $a = 0$, $b = 4$;

সিদ্ধ কৰাকৈ c-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৭ ঃ $y = x^3 - 3x$ বক্ৰৰ যি বিন্দুত স্পৰ্শক, (1, –2) আৰু (2, 2) বিন্দু সংযোগী জ্যাৰ সমান্তৰাল, সেই বিন্দু নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৮ ঃ যদি $f(x) = ax^2 + bx + c$, লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্য $f(x+h) = f(x) + hf'(x+th)$-ৰ পৰা t-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰক।

১০.৫ কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্য

ধৰা হ'ল, f আৰু g ফলন দুটা [a, b] অন্তৰালত সংজ্ঞাৱদ্ধ যাতে—

i) [a, b] ত f আৰু g অবিচ্ছিন্ন;

ii)]a, b[ত f আৰু g অৱকলনীয়;

iii) $g'(x) \neq 0$

তেনেহ'লে,]a, b[ত অন্ততঃ এটা মান, ধৰা হ'ল, c আছে যাতে—



১০.৫.১ কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা



অগষ্টিন লই কছি (1789-1857) ঃ এজন ফৰাছী গণিতজ্ঞ আছিল।



বিন্দুত টনা স্পর্শকৰ প্ৰৱণতা

বিন্দুত টনা স্পর্শকৰ প্ৰৱণতা

আকৌ, AB জ্যাৰ প্ৰৱণতা আৰু

$A'B'$ জ্যাৰ প্ৰৱণতা

জ্যাৰ প্ৰৱণতা

জ্যাৰ প্ৰৱণতা

এইদৰে, যদি $y = f(x)$ আৰু $y = g(x)$ ফলনৰ লেখ যথাক্ৰমে A[a, f(a)] বিন্দুৰ পৰা B[b, f(b)] আৰু A′[a, g(a)] বিন্দুৰ পৰা B′[b, g(b)] বিন্দুলৈ প্ৰতিটো বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন; A আৰু Bৰ মাজৰ, A′ আৰু B′ মাজৰ প্ৰতিটো বিন্দুত স্পর্শক আছে; A′ আৰু B′ মাজৰ কোনো বিন্দুতে স্পর্শক x অক্ষৰ সমান্তৰাল নহয়, তেনেহ'লে]a, b[ত অন্ত এটা বিন্দু C থাকিব যাতে AB আৰু $A'B'$ জ্যাৰ প্ৰৱণতাৰ অনুপাত, $x = c$-এ বক্ৰ দুডালক কটা বিন্দুত টনা স্পর্শকৰ প্ৰৱণতাৰ অনুপাতৰ সমান।

১০.৫.২ কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ প্ৰমাণ

φ ফলনটো বিবেচনা কৰা হ'ল,

$$\varphi(x) = f(x) + Ag(x) \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ (1)$$

A এটা ধ্রুৱক (বাস্তৱ সংখ্যা) যাতে—

$\varphi(a) = \varphi(b)$

$f(a) + Ag(a) = f(b) + Ag(b)$

$A[g(a)-g(b)] = f(b) - f(a)$

$A = -$ 

A-ৰ এই মানৰ বাবে,

i) [a, b]ত φ অবিচ্ছিন্ন, কিয়নো [a, b]ত f আৰু g অবিচ্ছিন্ন;

ii)]a, b[ত φ অৱকলনীয়, কিয়নো]a, b[ত f আৰু g অৱকলনীয়;

iii) $\varphi(a) = \varphi(b)$

গতিকে, -এ ৰ'লৰ উপপাদ্যৰ সকলো চর্ত সিদ্ধ কৰে।

]a, b[ত অন্ততঃ এটা বিন্দু c থাকিব যাতে $\varphi'(c) = 0$ ... ... (3)

(1)ক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$\varphi'(x) = f'(x) + Ag'(x)$

$\varphi'(c) = f'(c) + Ag'(c)$

$0 = f'(c) + Ag'(c)$, (3)-ৰ সহায়ত

$-Ag'(c) = f'(c)$

$-A =$ 

অনুসিদ্ধান্ত ঃ কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ অন্য ৰূপ।

ধৰা হ'ল, [a, a+h] অন্তৰালত সংজ্ঞাৱদ্ধ f আৰু g দুটা ফলন যাতে—

i) [a, a+h]ত f আৰু g অবিচ্ছিন্ন;

ii)]a, a+h[ত f আৰু g অৱকলনীয়;

iii) $g'(x)$  0, 

তেনেহ'লে]0, 1[এনে বিন্দু t থাকিব যাতে—

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1: [1, 2]ত সংজ্ঞাৱদ্ধ $f(x) = x^2$ আৰু $g(x) = x^3$ ফলনৰ বাবে কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্য সত্যাপন কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$

f আৰু g উভয়ে বহুপদীয় ফলন। গতিকে [1, 2] অন্তৰালত উভয়ে অবিচ্ছিন্ন আৰু অৱকলনীয়।

আকৌ, $f'(x) = 2x$, $g'(x) = 3x^2$



f আৰু g-এ কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ সকলো চর্ত সিদ্ধ কৰে।

]1, 2[ত এনে এটা বিন্দু c থাকিব যাতে—







$9c^2 = 14c$

$9c = 14$ 





কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্য সত্যাপন কৰা হ'ল।

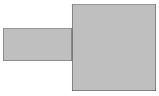
উদাহৰণ 2: ধৰা হ'ল, a, b আৰু θ ই $0 < a < \theta < b <$ , সিদ্ধ কৰে। প্রমাণ কৰক যে



সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$.

ধৰা হ'ল, f(x) আৰু g(x) অবিচ্ছিন্ন আৰু অৱকলনীয়।

আকৌ, $f'(x) = \cos x$, $g'(x) = -\sin x$

আৰু $g'(x)$  0; 

]a, b[ত এনে এটা θ থাকিব যাতে—









উদাহৰণ 3: যদি f ফলনটো [a, b]ত অবিচ্ছিন্ন আৰু]a, b[ত অৱকলনীয়, আৰু a < c < b, কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ পৰা নিগমন কৰক যে

$f(b) - f(a) = cf'(c)$ 

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $g(x) = \log x$, $x > 0$

, $x > 0$

কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্যটো হ'ল,





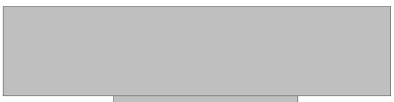


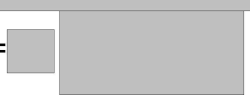
 $f(b) - f(a) = cf'(c)$ 

উদাহৰণ 4: কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্যত, ধৰা হ'ল, $f(x) =$  আৰু $g(x) =$ 

প্ৰমাণ কৰক যে c হ'ল a আৰু b-ৰ গুণোত্তৰ মাধ্য।

সমাধান ঃ কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্যটো হ'ল,

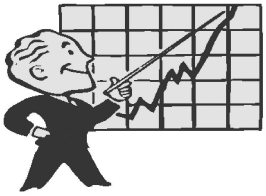
 ... ... (1)

এতিয়া, $f(x) =$ 

আৰু $g(x) =$ 



a আৰু b-ৰ মাজৰ গুণোত্তৰ মাধ্য c.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৯ঃঅধোলিখিত ফলনৰ যোৰকেইটাৰ বাবে কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ c নির্ণয় কৰক।

i) $f(x) = \log x$, $g(x) =$ on $[1, e]$

ii) $f(x) =$, $g(x) =$ on $[1, 3]$

প্রশ্ন নং ১০ ঃ কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্যত যদি $f(x) =$, $g(x) =$, প্রমাণ কৰক যে c হ'ল a আৰু b-ৰ হৰাত্মক মাধ্য।

প্রশ্ন নং ১১ ঃ কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্যত যদি $f(x) = e^{-x}$, $g(x) = e^{x}$, প্রমাণ কৰক যে c হ'ল a আৰু b ৰ সমান্তৰ মাধ্য।



১০.৬ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- ৰ'লৰ উপপাদ্য হ'ল এনে ধৰণৰ—

  ধৰা হ'ল f ফলনটো [a, b] অন্তৰালত সংজ্ঞাৱদ্ধ যাতে—

  i) [a, b]ত f অবিচ্ছিন্ন;

  ii)]a, b[ত f অৱকলনীয়;

  iii) f(a) = f(b).

  তেনেহ'লে]a, b[অন্ততঃ এটা মান, ধৰা হ'ল, c আছে যাতে $f'(c) = 0$.

- লাগ্রাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্য হ'ল এনে ধৰণৰ—

  ধৰা হ'ল, f ফলনটো [a, b] অন্তৰালত সংজ্ঞাৱদ্ধ যাতে—

  i) [a, b]ত f অবিচ্ছিন্ন;

  ii)]a, b[ত f অৱকলনীয়।

  তেনেহ'লে,]a,b[ত অন্ততঃ এটা মান, ধৰা হ'ল, c আছে যাতে—

.

লাগ্রাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ আন এটা ৰূপ হ'ল এনে ধৰণৰ—

ধৰা হ'ল, f ফলনটো [a, a+h] অন্তৰালত সংজ্ঞাৱদ্ধ যাতে—

i) [a, a+h] অন্তৰালত f অবিচ্ছিন্ন;

ii)]a, a+h[অন্তৰালত f অৱকলনীয়।

তেনেহ'লে,]0, 1[অন্তৰালত এনে এটা সংখ্যা, ধৰা হ'ল, t থাকিব যাতে—

$f(a+h) = f(a) + h\, f'(a+th)$

- কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্য হ'ল এনে ধৰণৰ—

ধৰা হ'ল, f আৰু g ফলন দুটা [a, b] অন্তৰালত সংজ্ঞাৱদ্ধ যাতে—

i) [a, a+h]ত f আৰু g অবিচ্ছিন্ন;

ii)]a, b[ত f আৰু g অৱকলনীয়;

iii) $g'(x)$ 

তেনেহ'লে,]a,b[ত এনে বিন্দু t থাকিব যাতে—



কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্য হ'ল এনে ধৰণৰ—

ধৰা হ'ল, f আৰু g ফলন দুটা [a, a+h] অন্তৰালত সংজ্ঞাৱদ্ধ যাতে—

i) [a, a+h]ত f আৰু g অবিচ্ছিন্ন;

ii)]a, a+h[ত f আৰু g অৱকলনীয়;

iii) $g'(x)$ 

তেনেহ'লে,]0, 1[ত এনে বিন্দু t থাকিব যাতে—



১০.৭ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ যিহেতু f(x) এটা বহুপদীয় ফলন, গতিকে ই [–2, 2] অন্তৰালত অবিচ্ছিন্ন।

আকৌ, $f'(x) = 3x^2 - 4$ অন্তৰালত]–2, 2[.

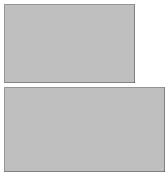
আৰু $f(-2) = -8 + 8 = 0$, $f(2) = 8 - 8 = 0$

 $f(-2) = f(2)$

 f(x)-এ [–2, 2] অন্তৰালত ৰ'লৰ উপপাদ্যৰ সকলোবোৰ চর্ত সিদ্ধ কৰে।

]–2, 2[ত এনে এটা c আছে যাতে $f'(c) = 0$.

$f'(c) = 0$ $3c^2 - 4 = 0$



cৰ এই দুয়োটা মানেই –2 আৰু 2-ৰ মাজত আছে।

গতিকে, ৰ'লৰ উপপাদ্য সত্যাপন কৰা হ'ল।

২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) দিয়া আছে $y = f(x) = x(x-4)$;

$= x^2 - 4x$

y এটা বহুপদীয় ফলন, গতিকে ই [0, 4]ত অবিচ্ছিন্ন।

আকৌ,]0, 4[অন্তৰালত স্থিত।

আকৌ, $f(0) = 0$

$f(4) = 0$

$f(0) = f(4)$

y-এ ৰ'লৰ উপপাদ্যৰ সকলোবোৰ চর্ত সিদ্ধ কৰে।

]0, 4[ত এনে এটা বিন্দু c আছে যাতে

$2c - 4 = 0$

$c = 2$

ৰ'লৰ উপপাদ্য প্ৰযোজ্য।

b) দিয়া আছে $f(x) = x$, .

যিহেতু f(x) এটা বহুপদীয় ফলন, সকলো বাস্তৱ সংখ্যাৰ বাবে ই অবিচ্ছিন্ন আৰু অৱকলনীয়।

[1, 2]ত $f(x) = x$ অবিচ্ছিন্ন আৰু]1, 2[ত $f'(x) = 1$ স্থিত।

কিন্তু

ৰ'লৰ উপপাদ্য প্ৰযোজ্য নহয়।

c) ;

[–1, 1] অন্তৰালত f(x) অবিচ্ছিন্ন।

$x = 0$ বিন্দুত ফলনটো অৱকলনীয় নহয়।

গতিকে ত ই অৱকলনীয় নহয়।

ৰ'লৰ উপপাদ্য প্ৰযোজ্য নহয়।

৩নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $f(x) = x^3 + bx^2 + ax + 5$

$f'(x) = 3x^2 + 2bx + a$

-ৰ বাবে ৰ'লৰ উপপাদ্য সিদ্ধ হয়।

f(1) = f(3) আৰু 

এতিয়া, f(1) = f(3)

 1 + b + a + 5 = 27 + 9b + 3a + 5

 2a + 8b + 26 = 0

 a + 4b + 13 = 0 ... ... (1)

আকৌ, f′(c) = 0

 $3c^2 + 2bc + a = 0$

 দিয়া আছে, 

, (1)-ৰ পৰা







 b = –6

 (1)-ৰ পৰা a – 24 + 13 = 0  1

৪নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) দিয়া আছে, $f(x) = 16 - x^2$  $f'(x) = -2x$

এতিয়া, f′(c) = 0 gives –2c = 0



নির্ণেয় বিন্দুটো হ'ল, (0, 16).

b) দিয়া আছে, f(x) = cos x – 1

 $f'(x) = -\sin x$

এতিয়া, f′(c) = 0, –sin c = 0

 sin c = 0

 $c = \pi$

 $f(p) = \cos\pi - 1 = -1 - 1 = -2$

 নির্ণেয় বিন্দুটো $(\pi, -2)$.

৫নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) দিয়া আছে, $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 3$

$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$

$f(x)$ এটা বহুপদ।

x-ৰ সকলো বাস্তৱ মানৰ বাবে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন।

$[0, 1]$ত $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন আৰু $]0, 1[$ত অৱকলনীয়।

গতিকে $[0, 1]$ অন্তৰালত $f(x)$-এ লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ চর্ত সিদ্ধ কৰে।

$]0, 1[$ অন্তৰালত এনে এটা c আছে যাতে

$3c^2 - 4c - 1 = (1-2-2+3) - (3)$

$3c^2 - 4c - 1 = -2$

$3c^2 - 4c + 1 = 0$

$(3c-1)(c-1) = 0$

.

কিন্তু, $0 < c < 1$

গতিকে, প্রদত্ত ফলনৰ বাবে লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্য সত্যাপন কৰা হ'ল।

b) দিয়া আছে,

স্পষ্টত, $[1, 5]$ত $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন।

এতিয়া,

$]1, 5[$ অন্তৰালত $f(x)$ অৱকলনীয়।

$[1, 5]$ অন্তৰালত $f(x)$-এ লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ চর্ত সিদ্ধ কৰে।

$]1, 5[$ অন্তৰালত এনে এটা c আছে যাতে



$2c^2 = 75 - 3c^2$

$5c^2 = 75$

$c^2 = 15$



কিন্তু, $1 < c < 5$ 

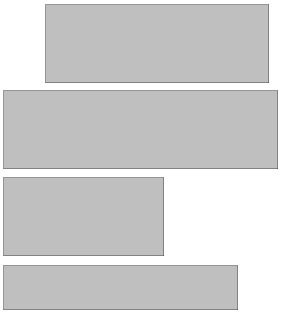
গতিকে লাগ্রাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্য সত্যাপন কৰা হ'ল।

c) দিয়া আছে, $f(x) = \log_e x$

x-ৰ সকলো বাস্তৱ মানৰ বাবে f(x) অবিচ্ছিন্ন আৰু অৱকলনীয়।

]1, e[অন্তৰালত f(x) অবিচ্ছিন্ন আৰু [1, e] অন্তৰালত ই অৱকলনীয়।

]1, 3[অন্তৰালত এনে এটা c আছে যাতে



গতিকে, প্ৰদত্ত ফলনৰ বাবে লাগ্রাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্য সত্যাপন কৰা হ'ল।

৬নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$, $a = 0$, $b = 4$

এতিয়া, $f(0) = (-1)(-2)(-3) = -6$

$f(4) = (3)(2)(1) = 6$

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$

$f'(c) = 3c^2 - 12c + 11$



$3 = 3c^2 - 12c + 11$

$3c^2 - 12c + 8 = 0$



৭নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, $f(x) = y$

$f(x) = x^3 - 3x$

$f(x)$ এটা বহুপদ।

x-ৰ সকলো বাস্তৱ মানৰ বাবে $f(x)$ অবিচ্ছিন্ন আৰু অৱকলনীয়।

$[1, 2]$ অন্তৰালত লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ চৰ্ত সিদ্ধ কৰে।

$]1, 2[$ অন্তৰালত এনে c আছে যাতে

$3c^2 - 3 = 4$

$f(c) = c^3 - 3c$

আৰু

বক্ৰটোৰ বিন্দু দুটা হ'ল আৰু

৮নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x+h) = a(x+h)^2 + b(x+h) + c$

আৰু $f'(x) = 2ax + b$

এতিয়া, $f(x+h) = f(x) + hf'(x+th)$

$a(x+h)^2 + b(x+h) + c = ax^2 + bx + c + h[2a(x+th) + b]$

$ax^2 + 2ahx + ah^2 + bx + bh + c = ax^2 + bx + c + 2ahx + 2ah^2t + bh$

$ah^2 = 2ah^2t$

.

৯নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ i) দিয়া আছে, $f(x) = \log x$, [redacted]

$f(x)$ আৰু $g(x)$ উভয়ে $[1, e]$ত অবিচ্ছিন্ন।

আকৌ, $]1, e[$ অন্তৰালত [redacted] আৰু [redacted] স্থিত হয়।

আৰু [redacted], x [redacted]

[redacted] $f(x)$ আৰু $g(x)$ ফলন দুটাই কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ সকলো চর্ত সিদ্ধ কৰে।

[redacted] $]1, e[$ অন্তৰালত এনে c আছে যাতে—

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted].

ii) দিয়া আছে, [redacted], [redacted]

$f(x)$ আৰু $g(x)$ উভয়ে $[1, 3]$ত অবিচ্ছিন্ন।

আকৌ, $]1, 3[$ অন্তৰালত [redacted] আৰু [redacted] স্থিত হয়।

আৰু [redacted], [redacted]

[redacted] $f(x)$ আৰু $g(x)$ ফলন দুটাই কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ সকলো চর্ত সিদ্ধ কৰে।

[redacted] $]1, 3[$ অন্তৰালত এনে আছে যাতে—

[redacted]

[redacted]

[redacted]

[redacted]

১০নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, [redacted] আৰু [redacted]

[redacted] আৰু [redacted]

কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ পৰা, আমি পাওঁ,

[redacted]

[redacted] a আৰু b-ৰ হৰাত্মক মাধ্য c.

১১নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $f(x) = e^{-x}$ আৰু $g(x) = e^{x}$

$f'(x) = -e^{-x}$ আৰু $g'(x) = e^{x}$

কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ পৰা, আমি পাওঁ,

[redacted]

$e^{2c} = e^{a+b}$

$2c = a + b$

a আৰু b-ৰ সমান্তৰ মাধ্য c.



১০.৮ অধিক জানিবলৈ

1) Gupta, Sudhir (2011) (1st ed.): *Basics of Differentential Calculus*; New Delhi: Anmol publication Pvt. Ltd.
2) Habib, Amber. (2011) (1st ed.): *The Calculus of Finance*; Hyderabad: Universities Press India Pvt. Ltd.
3) Maron, I .A. (1993) (1st ed.): *Problems in Calculus of One Variable*; New Delhi: CBS Publishers & Distributors Pvt Ltd.
4) Sharma, A. K. (2004) (1st ed.): *Text Book of Differential Calculus for B.A, B.Sc, B.Com, I.A.S., P.C.S.*; New Delhi: Discovery Publishing House.



১০.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ অধোলিখিত ফলনবোৰৰ বাবে ৰ'লৰ উপপাদ্য সত্যাপন কৰক।

i) ; x [a, b]

ii) $f(x) = (x-a)^m(x-b)^n$; x

iii) ; x [0, π]

iv) $f(x) = e^x(\sin x - \cos x)$;

v) $f(x) = (x-1)(x-2)^2$; x

প্ৰশ্ন ২ ঃ অধোলিখিত ফলনবোৰৰ বাবে লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্য সত্যাপন কৰক।

i) $f(x) = x^3 - 6x$,

ii) $f(x) = x^3 - 3x - 1$,

iii) $f(x) = \log x$, 

প্রশ্ন ৩ ঃ $f(x) = x^3 + 5x^2 - 6x$, [0, 1] ফলনৰ বাবে ৰ'লৰ উপপাদ্য সত্যাপন কৰক।

প্রশ্ন ৪ ঃ [–2, 1] অন্তৰালত সংজ্ঞাৱদ্ধ $f(x) = x - x^3$ ফলনৰ বাবে লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্যমান উপপাদ্য প্ৰযোজ্য হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক। লগতে c-ৰ মান উলিয়াওক।

প্রশ্ন ৫ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে  আৰু b বাস্তৱ সংখ্যা।

প্রশ্ন ৬ ঃ যদি এটা পৰিমেয় অখণ্ড ফলন f(x)-ৰ a আৰু b-ৰ মাজত nটা শূন্য আছে, প্ৰমাণ কৰক যে (a, b)ত $f'(x)$-ৰ (n–1)টা শূন্য আছে।

প্রশ্ন ৭ ঃ যদি $0 < u < v < 1$, লাগ্ৰাঞ্জৰ মাধ্য মান উপপাদ্যৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰক।

ss

নিগমন কৰক 

প্রশ্ন ৮ ঃ অধোলিখিত ফলনৰ যোৰকেইটাৰ বাবে কছিৰ মাধ্য মান উপপাদ্য সত্যাপন কৰক।

i) x^2, x in [a, b] ii) e^x, e^{-x} in [a, b]

iii) ,  in [a, b] iv) ,  in [a, b]

প্রশ্ন ৯ ঃ যদি  দেখুওৱাক যে $0 < \cos a - \cos b < b - a$.

প্রশ্ন ১০ ঃ দেখুওৱাক যে  যদি 

*** ***** ***

অধ্যায় ১১ ঃ আংশিক অৱকলন

অধ্যায় গাঁথনি

11.1 উদ্দেশ্য
11.2 পৰিচয়
11.3 বহু চলক বিশিষ্ট ফলন
11.4 আংশিক অৱকলজ
11.5 আংশিক অৱকলনৰ বাবে শৃঙ্খল বিধি
11.6 সুষম ফলন
11.7 অইলাৰৰ সুষম ফলন সম্পৰ্কীয় উপপাদ্য
11.8 অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
11.9 অগ্রগতিৰ খতিয়ান
11.10 অধিক জানিবলৈ
11.11 আৰ্হি প্ৰশ্ন

১১.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- এটাতকৈ অধিক চলক বিশিষ্ট ফলনৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- আংশিক অৱকলনৰ বিষয়ে অৱগত হ'ব পাৰিব
- শৃঙ্খল বিধিৰ সহায়ত আংশিক অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰিব পাৰিব
- সুষম ফলন সম্পৰ্কে শিকিব
- অইলাৰৰ সুষম ফলন সম্পৰ্কীয় উপপাদ্য সম্বন্ধে অৱগত হ'ব।

১১.২ পৰিচয়

এই অধ্যায়ত আমি বহু চলক বিশিষ্ট ফলন সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম। প্ৰথম অধ্যায়ত এটা চলক বিশিষ্ট ফলন সম্বন্ধে আলোচনা কৰিছোঁ আৰু পঞ্চম অধ্যায়ত এনে ফলনৰ অৱকলজো উলিয়াইছোঁ। এতিয়া আমি বহু চলক বিশিষ্ট ফলনৰ আংশিক অৱকলজ উলিয়াম। লগতে সুষম ফলন সম্পৰ্কে আৰু অইলাৰৰ সুষম ফলন সম্পৰ্কীয় উপপাদ্য সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম।

১১.৩ বহু চলক বিশিষ্ট ফলন

এটা চলক বিশিষ্ট ফলন সম্বন্ধে আমি জানো কিন্তু বহু ক্ষেত্ৰত আমি বহু চলক বিশিষ্ট ফলনৰ মুখামুখি হওঁ।

ধৰি লওঁক আপোনাৰ চহৰখনৰ সপ্তাহৰ অন্তত বতৰৰ আগতীয়া বতৰা দিব লাগে। আমি তাপমাত্রাৰ বাবে এটা সূত্র গঠন কৰোঁ। ই কেবাটাও পৰিৱেশভিত্তিক চলকৰ ফলন। এটা পৰিৱেশভিত্তিক চলক পৰিৱর্তিত হ'লে আৰু বাকীকেইটা চলক অপৰিৱর্তিত হৈ থাকিলেও বতৰৰ বতৰা সলনি হ'ব। এই ক্ষেত্রত আমি আংশিক অৱকলজৰ ধাৰণা ব্যৱহাৰ কৰিম।

উদাহৰণ স্বৰূপে আয়ত ক্ষেত্রৰ কালি A = xy। ই চলক x (দৈর্ঘ্য) আৰু চলক y-ৰ (প্রস্থ) ফলন। কিউবয়ডৰ আয়তন V = xyz । ই চলক x (দৈর্ঘ্য), চলক, y (প্রস্থ) আৰু চলক z অৰ (উচ্চতা) ফলন।

যদি u, y, z চলক তিনিটা এনেদৰে সম্পর্কিত হৈ থাকে যে x আৰু y-ৰ মানৰ ওপৰত u নির্ভৰশীল, তেনেহ'লে uক x আৰু y চলক দুটাৰ ফলন বুলি কোৱা হয় আৰু ইয়াক এনেদৰে লিখা হয় u = f(x, y). ইয়াত uক পৰতন্ত্র চলক (Dependent Variable) আৰু x আৰু yক স্বতন্ত্র চলক (Independent Variables) বুলি কোৱা হয়।

এনেদৰে, $u = f(x_1, x_2)$ হ'ল দুটা চলকৰ ফলন, ইয়াত u হ'ল পৰতন্ত্র চলক, আৰু x_1, x_2 স্বতন্ত্র চলক।

আকৌ, $u = f(x_1, x_2, x_3)$ হ'ল তিনিটা চলকৰ ফলন, ইয়াত u হ'ল পৰতন্ত্র চলক আৰু x_1, x_2, x_3 হ'ল স্বতন্ত্র চলক। সেইদৰে $u = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ হ'ল চাৰিটা চলকৰ ফলন, ইয়াত u হ'ল পৰিতন্ত্র চলক আৰু x_1, x_2, x_3, x_4 হ'ল স্বতন্ত্র চলক।

এইদৰে $u = f(x_1, x_2, x_3, ..., ..., x_n)$ হ'ল nটা চলকৰ ফলন। ইয়াত u হ'ল পৰতন্ত্র চলক আৰু x_1, x_2, x_3, ..., ..., x_n হ'ল স্বতন্ত্র চলক।

উদাহৰণ ঃ

i) $u = f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ দুটা চলক x, y-ৰ ফলন।

ii) $u = f(x, y, z) = x^2 + 3xy + yz^2 + z^3$ তিনিটা চলক x, y, z-ৰ ফলন।

১১.৪ আংশিক অৱকলজ

যদি বহু স্বতন্ত্র চলক বিশিষ্ট এটা ফলনৰ এটা চলক সাপেক্ষে অৱকলজ (বাকীকেইটা চলকক ধ্রুৱক হিচাপে লৈ) উলিওৱা হয়। তেনেহ'লে ইয়াক আংশিক অৱকলজ (Partial Derivative) বুলি কোৱা হয়। এটাতকৈ বেছি স্বতন্ত্র চলক বিশিষ্ট ফলনৰ আংশিক অৱকলজ উলিওৱা প্রক্রিয়াক আংশিক অৱকলন (Partial Differentiation) বুলি কোৱা হয়।

ধৰা হ'ল, z = f(x, y) দুটা চলকৰ ফলন।

x সাপেক্ষে z-ৰ আংশিক অৱকলজক $\frac{\partial z}{\partial x}$ বা $\frac{\partial f}{\partial x}$ বা f_x-ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংখ্যা এনেদৰে দিয়া হয়,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$ যদিহে সীমা থাকে।

সেইদৰে, y সাপেক্ষে z-ৰ আংশিক অৱকলজক বা বা f_yৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

 যদিহে সীমা থাকে।

 আৰু ক -ৰ প্ৰথম ক্ৰমৰ আংশিক অৱকলজ (First Order Partial Derivatives) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ 1: ধৰা হ'ল, $f(x, y) = xy^2$

তেনেহ'লে, $f_x(x, y) =$ $_y(x, y) =$

$= y^2$

$= 2xy$

দুটাতকৈ অধিক চলক বিশিষ্ট ফলনঃ তিনিটা বা ততোধিক চলক বিশিষ্ট ফলনৰ বাবেও আংশিক অৱকলজৰ সংজ্ঞা দিব পাৰি।

যদি $u = f(x, y, z)$, তেনেহ'লে y আৰু zক ধ্ৰুৱক হিচাপে লৈ x সাপেক্ষে uক অৱকলন কৰি x সাপেক্ষে uৰ আংশিক অৱকল সহগ অৰ্থাৎ, উলিওৱা হয়।

অৰ্থাৎ, যদিহে সীমা থাকে।

সেইদৰে, x আৰু zক ধ্ৰুৱক হিচাপে লৈ y সাপেক্ষে uক অৱকলন কৰি y সাপেক্ষে uৰ আংশিক অৱকল সহগ, অৰ্থাৎ, উলিওৱা হয়।

অৰ্থাৎ, যদিহে সীমা থাকে।

আকৌ, x আৰু yক ধ্ৰুৱক হিচাপে লৈ z সাপেক্ষে uক অৱকলন কৰি z সাপেক্ষে u-ৰ আংশিক অৱকল সহগ উলিওৱা হয়।

অৰ্থাৎ, যদিহে সীমা থাকে।

সাধাৰণভাৱে, যদি u এটা nটা চলকৰ ফলন হয়, অৰ্থাৎ, $u = f(x_1, x_2, ..., ..., x_n)$, চলক x_i সাপেক্ষে u-ৰ আংশিক অৱকলজৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।





যদিহে সীমা থাকে।

দ্বিতীয় ক্ৰমৰ আংশিক অৱকল সহগ ঃ যদি $z = f(x, y)$, তেনেহ'লে  বা f_x আৰু  বা f_y প্ৰত্যেকেই x আৰু y ৰ ফলন। গতিকে ইয়াক পুনৰ আংশিকভাৱে অৱকলন কৰিব পাৰি।

, ,  আৰু ক -ৰ দ্বিতীয় ক্ৰমৰ আংশিক অৱকলজ (Second Order Partial Derivatives) বুলি কোৱা হয় আৰু এইবোৰক যথাক্ৰমে,

, ,  আৰু ৰে বুজোৱা হয়।

উচ্চতৰ ক্ৰমৰ আংশিক অৱকলজ ঃ ধাৰাবাহিক অৱকলনৰ দ্বাৰা এটা ফলনৰ উচ্চতৰ ক্ৰমৰ আংশিক অৱকলজ উলিওৱা।

তৃতীয় ক্ৰমৰ আংশিক অৱকলজক এনেদৰে বুজোৱা হয়।

, ,

, ইত্যাদি।

সাধাৰণভাৱে nতম্ আংশিক অৱকলজবোৰ হ'ল,



, ইত্যাদি।

টোকাঃ1) এটা চলক বিশিষ্ট ফলনৰ অৱকলনৰ ক্ষেত্ৰত যিবোৰ বিধি প্ৰযোজ্য, সেই একেবোৰ বিধি আংশিক অৱকলনৰ ক্ষেত্ৰতো প্ৰযোজ্য। একমাত্ৰ পাৰ্থক্য এইটোৱেই যে এটা চলক সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰোঁতে বাকীকেইটা চলকক (সাময়িকভাৱে) ধ্ৰুৱক বুলি গণ্য কৰা হয়।

2) যদি $z = f(x)$ এটা চলক x-ৰ ফলন, তেতিয়া আমি  পাওঁ।

3) যদি $z = f(x, y)$, দুটা স্বতন্ত্ৰ চলক x আৰু y-ৰ ফলন, আমি  আৰু  নিৰ্ণয় কৰিব পাৰোঁ। সেইদৰে, দুটাতকৈ অধিক স্বতন্ত্ৰ চলক $x_1, x_2, ..., ..., x_n$-ৰ বাবে, আমি , , ..., ...,  নিৰ্ণয় কৰিব পাৰোঁ।

4) যদি $u = f(x, y)$ আৰু ইয়াৰ আংশিক অৱকলজ অবিচ্ছিন্ন হয়, অৰ্থাৎ,  আৰু  অবিচ্ছিন্ন, অৱকলনৰ ক্ৰম অৰ্থহীন, অৰ্থাৎ, .

5) যদি $z = u + v$, য'ত $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$, তেনেহ'লে, z এটা x আৰু y-ৰ ফলন।

 আৰু 

6) যদি $z = uv$, য'ত $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$, তেনেহ'লে,

; 

7) যদি , য'ত $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$, তেনেহ'লে,

; 

8) দুটা চলকবিশিষ্ট ফলনৰ পৌনঃপুনিক অৱকলনত অৱকলনৰ ক্ৰম স্বেচ্ছাই পৰিৱৰ্তিত কৰিব পাৰি, যদিহে অৱকলজবোৰ অবিচ্ছিন্ন ফলন হয়।

9) দুটা চলকবিশিষ্ট ফলনৰ দুটা প্ৰথম ক্ৰমৰ আংশিক অৱকলজ আছে, চাৰিটা দ্বিতীয় ক্ৰমৰ আংশিক অৱকলজ আছে আৰু এইদৰে 2^nটা n ক্ৰমৰ আংশিক অৱকলজ আছে। mটা স্বতন্ত্ৰ চলকবিশিষ্ট ফলনৰ m^nটা n ক্ৰমৰ আংশিক অৱকলজ আছে।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1: যদি $z = x^2y + xy^3$, প্ৰথম ক্ৰমৰ আংশিক অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $z = x^2y + xy^3$





$= 2xy + y^3$

আকৌ,

$= x^2 + 3xy^2$

উদাহৰণ 2: যদি , আৰু নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে,

আকৌ,

.

উদাহৰণ 3: যদি $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 – 2y^2$, $f_x(2, 1)$ আৰু $f_y(2, 1)$ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ yক ধ্ৰুৱক হিচাপে লৈ আৰু x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$f_x(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$

আৰু $f_x(2, 1) = 3.2^2 + 2.2.1^3 = 16$

সেইদৰে xক ধ্ৰুৱক হিচাপে লৈ আৰু y সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$f_y(x, y) = 3x^2y^2 – 4y$

$f_y(2, 1) = 3.2^2.1^2 – 4.1 = 8$

উদাহৰণ 4: যদি দেখুওৱাক যে

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $u = \log(x^2 + y^2 + z^2)$

 ... ... (1)

আকৌ, 



 ... ... (2)

আৰু 



 ... ... (3)

(1), (2) আৰু (3) যোগ কৰি, আমি পাওঁ,

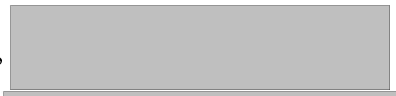


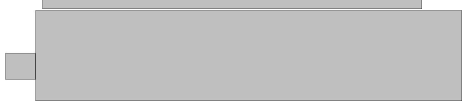
উদাহৰণ 5: যদি z = f(x+ay) + ϕ(x–ay), প্ৰমাণ কৰক যে 

সমাধান ঃ দিয়া আছে, z = f(x+ay) + ϕ(x–ay)



 ... ...(1)

আকৌ, 

 ... ... (2)

(1) আৰু (2) ৰ পৰা, 

উদাহৰণ 6: অধোলিখিত ফলনবোৰৰ বাবে  সত্যাপন কৰক।

i) z = x log(y) ii) 

সমাধান ঃ (i) দিয়া আছে, z = x log(y)



আকৌ, 



এতিয়া, 

 সত্যাপন কৰা হ'ল।

(ii) দিয়া আছে, 



এতিয়া, 











 সত্যাপন কৰা হ'ল।

উদাহৰণ 7: যদি $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, দেখুওৱাক যে

i)

ii)

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$

[$^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$]

i)

ii)









-ৰ পৰা

উদাহৰণ 8: যদি $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, প্ৰমাণ কৰক যে

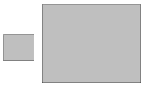
a) 

b)  c) 

সমাধান ঃ (a) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ দিয়া আছে।

 $r^2 = x^2 + y^2$ ... ... (1)

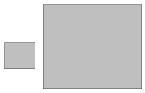
এতিয়া,  ক x সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি]



 (2)-ৰ পৰা

 ... ... (3)

আকৌ (1)ক y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ, 



(4)ক y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

, (4)-ৰ পৰা

 ... ... (5)

(3) আৰু (5) যোগ কৰি আমি পাওঁ, 

আকৌ, 



(b) (4)ক x সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

 (4)-ৰ পৰা, 

 (2)-ৰ পৰা, 

এতিয়া,  আৰু (3)-ৰ পৰা



(c) (2) আৰু (4) বৰ্গ কৰি আৰু যোগ কৰি আমি পাওঁ,





উদাহৰণ 9: যদি $u = e^{xyz}$, দেখুওৱাক যে 

সমাধান ঃ ইয়াত, $u = e^{xyz}$

z সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ, 

এতিয়া y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,



$= e^{xyz}(x^2yz + x)$

এতিয়া x সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$= e^{xyz}(2xyz + 1) + yze^{xyz}(x^2yz + x)$

$= e^{xyz}(2xyz + 1 + x^2y^2z^2 + xyz)\backslash$

$= e^{xyz}(1 + 3xyz + x^2y^2z^2)$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১ঃ অধোলিখিত ফলনবোৰৰ বাবে আৰু নিৰ্ণয় কৰক।

a) $z = x^2y^4$ b) $z = (x^4 + x^2)y^3$

c) $z = \sin x \cos xy$ d) $z = \sin(x^2 + y)$

প্ৰশ্ন নং ২ ঃ যদি z = , নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৩ ঃ যদি $f = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$

(a) f_x, (b) f_{xx}, (c) f_{xy}, (d) f_{xyz} নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৪ ঃ যদি , n-ৰ কি মানৰ বাবে .

প্ৰশ্ন নং ৫ ঃ u = x log y-ৰ বাবে সত্যাপন কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৬ ঃ যদি $u = \log(x^2 + y^2 + z^2)$, দেখুওৱাক যে

.

প্ৰশ্ন নং ৭ ঃ $z = xf(x + y) + y\phi(x + y)$, প্ৰমাণ কৰক যে

১১.৫ আংশিক অৱকলনৰ বাবে শৃঙ্খল বিধি

পূর্ণ অৱকলজ ঃ যদি $u = f(x, y)$, য'ত $x = \phi_1(t)$ আৰু $y = \phi_2(t)$, তেনেহ'লে,



ক t সাপেক্ষে u-ৰ পূর্ণ অৱকল সহগ (Total Differential Coefficient) বুলি কোৱা হয়।

 আৰু  ক্রমে x আৰু y সাপেক্ষে u-ৰ আংশিক অৱকলজ।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল, tত δt এটা ক্ষুদ্র বৃদ্ধি আৰু ধৰা হ'ল, u, x আৰু y ত অনুৰূপ বৃদ্ধি ক্রমে δu, δx আৰু δy তেনেহ'লে আমি পাওঁ,

$u = f(x, y)$ ... ... (1)

আৰু $u + \delta u = f(x + \delta x, y + \delta y)$ ... ... (2)

 $\delta u = f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y)$

$= [f(x + \delta x, y + \delta y) - f(x, y + \delta y)] + [f(x, y + \delta y) - f(x, y)]$

δtৰে হৰণ কৰি আমি পাওঁ,

 ... ... (3)

ধৰা হ'ল, δt  0  δx আৰু δy

এতিয়া, (3)-ৰ পৰা পাওঁ,



 ... ... (4)

যিহেতু, δt শূন্যৰ পিনে অগ্রসৰ হ'লে, δx আৰু δyও শূন্যৰ পিনে আগবাঢ়ে।

গতিকে (4)-ৰ পৰা,



টোকা ঃ 1) যদি $u = f(x, y, z)$, য'ত $x = \phi_1(t)$, $y = \phi_2(t)$, $z = \phi_3(t)$, তেনেহ'লে,



2) উপৰিউক্ত ফলটো সসীম সংখ্যক চলকলৈ সম্প্রসাৰণ কৰিব পাৰি।

যদি $u = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, য'ত $x_1 = \phi_1(t)$, $x_2 = \phi_2(t)$, ..., $x_n = \phi_n(t)$.

তেনেহ'লে, 

3) যদি u এটা x আৰু y-ৰ ফলন, অর্থাৎ, u = f(x, y), য'ত y এটা x-ৰ ফলন, তেনেহ'লে, 

নিগমন ঃ1) যদি u = f(x, y), য'ত $x = f_1(t_1, t_2)$ আৰু $y = f_2(t_1, t_2)$, তেনেহ'লে,

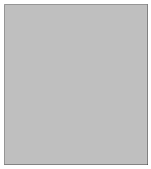
আমি পাওঁ, 

আৰু 

2) **অন্তর্নিহিত ফলনৰ অৱকলন ঃ** যদি u = f(x, y) = c, য'তc এটা ধ্ৰুৱক, এটা অন্তর্নিহিত ফলন, তেনেহ'লে, টোকা (3)-ৰ পৰা,



অর্থাৎ, 

বা 

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1: যদি $u = x^5 y^4$, য'ত $x = t^2$ আৰু $y = t^3$,  নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ইয়াত u এটা x আৰু y-ৰ ফলন, আৰু x আৰু y হ'ল t-ৰ ফলন। u চলক tৰো ফলন।



$= (5x^4 y^4).2t + (4x^5 y^3).3t^2$

$= 10.x^4 y^4 t + 12x^5 y^3 t^2$

$= 10.t^8 t^{12} t + 12t^{10} t^9 t^2$

$= 22t^{21}$

উদাহৰণ 2: যদি u = f(x – y, y – z, z – x), প্ৰমাণ কৰক যে 

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, x – y = X, y – z = y, z – x = Z.

তেনেহ'লে, u = f(X, Y, Z), য'ত X, Y, Z হ'ল x, y, z-ৰ ফলন।







... ... (1)

সেইদৰে, 





... ... (2)

আৰু 

(1), (2) আৰু (3) যোগ কৰি আমি পাওঁ, 

উদাহৰণ 3: যদি $z = xy^2 + x^2y$, $x = at^2$, $y = 2at$;  নিৰ্ণয় কৰক। প্ৰত্যক্ষ প্ৰতিষ্ঠানৰ দ্বাৰা সত্যাপন কৰক।

সমাধান ঃ , 

, 

এতিয়া, 

$= (y^2 + 2xy)2at + (2xy + x^2)2a$

$= (4a^2t^2)2at + (4a^2t^3 + a^2t^4)2a$

$= a^3(16t^3 + 10t^4)$

দ্বিতীয় অংশ ঃ

$z = xy^2 + x^2y = 2a^3t^5 + 4a^3t^4$



$= a^3(10t^4 + 16t^3)$

$= a^3(16t^3 + 10t^4)$ সত্যাপন কৰা হ'ল।

উদাহৰণ 4: যদি z এটা x আৰু y-ৰ ফলন হ'লে, প্ৰমাণ কৰক যে

, যদি $x = e^{u} + e^{-v}$, $y = e^{-u} - e^{v}$.

সমাধান ঃ z এটা x আৰু y-ৰ ফলন। আকৌ x আৰু y প্ৰত্যেকেই u আৰু v-ৰ ফলন।



 ... ... (1)

আকৌ, 

 ... ... (2)

(1)-ৰ পৰা (2) বিয়োগ কৰি আমি পাওঁ,





উদাহৰণ 5: যদি $w = f(x, y)$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, দেখুওৱাক যে



সমাধান ঃ ইয়াত w হ'ল x আৰু y-ৰ ফলন। আকৌ x আৰু y প্ৰত্যেকেই r আৰু θ-ৰ ফলন।



অৰ্থাৎ,  ... ... (1) [

আকৌ, 



(1) আৰু (2) বৰ্গ কৰি আৰু যোগ কৰি আমি পাওঁ,













সত্যাপন কৰা হ'ল।

উদাহৰণ 6: যদি $x^y + y^x = c$,  নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $f(x, y) = x^y + y^x$. 

এতিয়া, 



উদাহৰণ 7: যদি $x = u\cos\alpha - v\sin\alpha$, $y = u\sin\alpha + v\cos\alpha$, প্রমাণ কৰক যে



সমাধান ঃ ইয়াত z হ'ল u আৰু v-ৰ ফলন।









... ... (1)

আকৌ, 

... ... (2)

এতিয়া, (1)-ৰ পৰা

... ... (3)

-ৰ পৰা

... ... (4)

(3) আৰু (4) যোগ কৰি, আমি পাওঁ,

সত্যাপন কৰা হ'ল।

উদাহৰণ 8: এটা লম্ব বৃত্তীয় শঙ্কুৰ উন্নতি 15 cm আৰু ই 0.2 cm/secকৈ বাঢ়ে। ইয়াৰ ভূমিৰ ব্যাসার্ধ 10 cm আৰু ই 0.3 cm/secকৈ কমে। আয়তন কি হাৰত সলনি হয়?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, শঙ্কুটোৰ ভূমিৰ ব্যাসার্ধ x আৰু উন্নতি y। গতিকে, লম্ব বৃত্তীয় শঙ্কুটোৰ আয়তন

যিহেতু, t সাপেক্ষে x আৰু y সলনি হয়, আমি Vক t সাপেক্ষে অৱকলন কৰোঁ।

... ... (1)

x = 10, y = 15 হ'লে, আৰু

(1)-ৰ পৰা আমি পাওঁ,

=

অর্থাৎ, আয়তন ^{3}/sec হাৰত কমে।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৮ ঃ যদি $u = x^2 + y^2 + z^2$ আৰু $x = e^{2t}$, $y = e^{2t}\cos 3t$, $z = e^{2t}\sin 3t$ পূর্ণ অৱকলজ ৰূপে নির্ণয় কৰক আৰু প্রত্যক্ষ প্রতিষ্ঠাপনৰ দ্বাৰা ফলটো সত্যাপন কৰক।

প্রশ্ন নং ৯ ঃ যদি $u = x^2 - y^2$, $x = 2r - 3s + 4$, $y = -r + 8s - 5$, আৰু নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ১০ ঃ অধোলিখিত অন্তর্নিহিত ফলনৰ বাবে নির্ণয় কৰক।

a) $f(x, y) = x \sin(x-y) - (x+y)$ b) $x^y = y^x$

প্রশ্ন নং ১১ ঃ যদি $u = xe^yz$, য'ত , $z = \sin^2 x$, নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ১২ ঃ যদি $u = \sin^{-1}(x-y)$, $x = 3t$, $y = 4t^3$, দেখুওৱাক যে .

১১.৬ সুষম ফলন

তলৰ বহুপদটো লোৱা হ'ল,

$f(x, y) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots\ldots\ldots + a_n y^n$.

ইয়াত প্ৰতিটো পদৰ মাত্ৰা (Degree) n. ফি এটা n মাত্ৰাৰ সুষম ফলন (Homogeneous Function) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ স্বৰূপে, $f(x.y) = x^3 + y^3 + 3x^2y$ হ'ল, এটা 3 মাত্ৰাৰ সুষম ফলন।

সংজ্ঞা 1: এটা ফলন f(x, y)ক n মাত্ৰাৰ সুষম ফলন বুলি কোৱা হয়, যদি x আৰু y প্ৰতিটো পদেই n মাত্ৰাৰ হয়। গতিকে, $a_0x^n + a_0x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \ldots + a_ny^n$ এটা n মাত্ৰাৰ সুষম ফলন।

এই ৰাশিটোক এনে ধৰণে লিখিব পাৰি—

[ ]

= [ ] য'ত [ ]

ৰাশিটোক এনে ধৰণেও লিখিব পাৰি—

[ ]

[ ], য'ত [ ]

সংজ্ঞা 2: x, y চলক বিশিষ্ট এটা ফলনক n মাত্ৰাৰ এটা সুষম ফলন বুলি কোৱা হয়, যদি ইয়াক [ ] বা [ ] ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ স্বৰূপে,

i) $ax^2 + by^2 + 2hxy$, অৰ্থাৎ, [ ] এটা 2 মাত্ৰাৰ সুষম ফলন।

ii) [ ] এটা [ ] মাত্ৰাৰ সুষম ফলন।

এটা ফলন f(x, y) সুষম হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰিব লাগে ঃ আমি x-ৰ ঠাইত tx আৰু y-ৰ ঠাইত ty বহুৱাওঁ। যদি f(fx, fy) = f(x y) তেনেহ'লে f(x y) এটা n মাত্রাৰ সুষম ফলন, অন্যথা f(x y) সুষম নহয়।

উদাহৰণ ঃ 1) $f(x.y) = x^2+y^2$ এটা 2 মাত্রাৰ সুষম ফলন, কিয়নো

$f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2+y^2) = t^2f(x, y)$.

2) $f(x. y) =$ এটা 1 মাত্রাৰ সুষম ফলন, কিয়নো

3) $f(x, y) =$ এটা 1 মাত্রাৰ সুষম ফলন, কিয়নো

4) $f(x, y) =$ এটা 0 মাত্রাৰ সুষম ফলন, কিয়নো

5) $f(x, y) = x^2 + 5xy + y^2$ এটা 2 মাত্রাৰ সুষম ফলন, কিয়নো

$f(tx, ty) = (tx)^2 + 5(tx)(ty) + (th)^2$

$= t^2x^2 + t^25xy + t^2y^2$

$= t^2(x^2+5xy+y^2)$

$= t^2 f(x, y)$

6) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3x^2y$ এটা 3 মাত্রাৰ সুষম ফলন, কিয়নো

$f(tx, ty) = (tx)^3 + (ty)^3 + 3(tx)^2(ty)$

$= t^3(x^3 + y^3 + 3x^2y)$

$= t^3f(x.y)$

7) $f(x, y) =$ এটা –1 মাত্রাৰ সুষম ফলন, কিয়নো

$= t^{-1} f(x. y)$

8) $f(x, y) = x^2 + x + y$ সুষম ফলন নহয়।

টোকা ঃ x, y, z তিনিটা চলক বিশিষ্ট f(x, y, z) ফলনটো n মাত্রাৰ সুষম ফলন হ'ব, যদি $f(tx, ty, tz) = t^n f(x, y, z)$.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১৩ ঃ তলৰ প্রতিটো ফলন সুষম হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক। যদি হয় মাত্রা কিমান?

a) $3x + 4y$ b) $2x^2 + xy$

c) $x^2 + x^3$ d) [redacted]

প্রশ্ন নং ১৪ ঃ [redacted] ফলনটো সুষম হয়নে? যদি হয়, মাত্রা কিমান?

প্রশ্ন নং ১৫ ঃ [redacted] ফলনটো সুষম হয়নে? যদি হয়, মাত্রা কিমান?

প্রশ্ন নং ১৬ ঃ $x^3y^2 + x^{1/2}$ ফলনটো সুষম হয়নে?

প্রশ্ন নং ১৭ ঃ g(x, y) ফলনটো এটা r মাত্রাৰ সুষম ফলন। f ফলনটো সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে, f(x, y) = [redacted] f ফলনটো সুষম হয়নে? যদি হয়, মাত্রা কিমান?



লেওনার্ড অইলাৰ (1707-1783) ঃ এজন প্রথিতযশা ছুইছ গণিতজ্ঞ।

১১.৭ অইলাৰৰ সুষম ফলন সম্পর্কীয় উপপাদ্য

আগৰ অনুচ্ছেদত আমি সুষম ফলন সম্পর্কে আলোচনা কৰিছোঁ। এইটো অনুচ্ছেদত আমি অইলাৰৰ সুষম ফলন সম্পর্কীয় উপপাদ্য সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম।

উক্তি ঃ যদি z = f(x, y) এটা x, y-ৰ n মাত্রাৰ সুষম ফলন হয়, তেনেহ'লে,

[redacted]

প্রমাণ ঃ যিহেতু z = f(x, y) এটা x, y-ৰ n মাত্রাৰ সুষম ফলন, গতিকে z = f(x, y)

[redacted] ... ... (1)

(1)ক আংশিকভাৱে x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

[redacted]









... ... (2)

আকৌ (1)ক আংশিকভাৱে y সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,









... ... (3)

এতিয়া, আমি পাওঁ,





[(2) আৰু (3)-ৰ পৰা]



= nz.

টোকা ঃ লেওনার্ড (Leonhard Euler, 1707-1783) আছিল এজন প্রথিতযশা ছুইছ গণিতজ্ঞ।

অনুসিদ্ধান্ত 1: যদি z = f(x y) এটা x, y-ৰ n মাত্রাৰ সুষম ফলন হয়, তেনেহ'লে,

.

প্রমাণ ঃ  অইলাৰৰ উপপাদ্যৰ পৰা]

(1)ক আংশিকভাৱে x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

 ... ...(2)

আকৌ, (1)ক আংশিকভাৱে y সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

 ... ... (3)

(2) আৰু (3)ক ক্ৰমে x, yৰে পূৰণ কৰি আৰু যোগ কৰি আমি পাওঁ,

অনুসিদ্ধান্ত 2: যদি z এটা x, y-ৰ n মাত্ৰাৰ সুষম ফলন হয়, আৰু z = f(v), তেনেহ'লে,

.

প্ৰমাণ ঃ অইলাৰৰ উপপাদ্যৰ পৰা,

 ... ... (1)

দিয়া আছে, z = f(v)

 আৰু 

 আৰু -ৰ এই মান (1)ত বহুৰাই আমি পাওঁ,



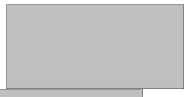
বা 

অনুসিদ্ধান্ত 3: যদি z = f(x, y) এটা x, y-ৰ n মাত্ৰাৰ সুষম ফলন হয়, আৰু z = f(v)

তেনেহ'লে, 

য'ত 

প্ৰমাণ ঃ অনুসিদ্ধান্ত 2-ৰ পৰা 

দিয়া আছে, 

 ... ... (1)

(1)ক x সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,



বা 

আকৌ, (1)ক y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,



বা  

বা 

(2)ক xৰে আৰু (3)ক yৰে পূৰণ কৰি আৰু যোগ কৰি আমি পাওঁ,



বা  $'(v) - 1]\ g(v)$ [(1)-ৰ পৰা]

বা  $'(v) - 1$

টোকা ঃ অইলাৰৰ উপপাদ্যটো যিকোনো সসীম সংখ্যক চলকৰ সুষম ফলনৰ বাবে সম্প্রসাৰণ কৰিব পাৰি।

i) যদি $u = f(x.\ y.\ z)$ এটা x, y, z চলকৰ n সুষম ফলন হয়, তেনেহ'লে,



ii) যদি $u = f(x_1, x_2, ..., ..., ..., x_n)$ এটা $x_1, x_2, ..., x_n$ চলকৰ n মাত্ৰাৰ সুষম ফলন হয়, তেনেহ'লে, 

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1 : $f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2$ ফলনৰ বাবে অইলাৰৰ উপপাদ্য সত্যাপন কৰক।

সমাধান ঃ ইয়াত $f(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2$ ... ... (1)

স্পষ্টতঃ, f(x, y) এটা 2 মাত্ৰাৰ সুষম ফলন।

□ আমি  সত্যাপন কৰোঁ।

(1)ক x সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,





... ... (2)

আকৌ, (1)ক y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,





... ... (3)

(2) আৰু (3) যোগ কৰি আমি পাওঁ,



$= 2(ax^2 + 2hxy + by^2)$

□ অইলাৰৰ উপপাদ্য সত্যাপন কৰা হ'ল।

উদাহৰণ 2: $f = x^3 - 2x^2y + 3xy^2 + y^3$ ফলনৰ বাবে অইলাৰৰ উপপাদ্য সত্যাপন কৰক।

সমাধান ঃ ইয়াত f এটা 3 মাত্ৰাৰ সুষম ফলন।

□ $f_x = 3x^2 - 4xy + 3y^2$

$f_y = -2x^2 + 6xy + 3y^2$

□ $xf_x + yf_y = x(3x^2 - 4xy + 3y^2) + y(-2x^2 + 6xy + 3y^{2)}$

$= 3(x^3 - 2x^2y + 3xy^2 + y^3)$

$= 3f$

□ অইলাৰৰ উপপাদ্য সত্যাপন কৰা হ'ল।

উদাহৰণ 3: যদি $u = \sin^{-1}$ , প্ৰমাণ কৰক যে $xu_x + yu_y =$ 

সমাধান ঃ ইয়াত 



□ sin u এটা , অৰ্থাৎ,  মাত্ৰাৰ সুষম ফলন।









উদাহৰণ 4: যদি  দেখুওৱাক যে



সমাধান ঃ ইয়াত 



 sin v এটা 1 – 4 = –3 মাত্রাৰ সুষম ফলন।

গতিকে অইলাৰৰ উপপাদ্যৰ পৰা,





or  সত্যাপন কৰা হ'ল।

উদাহৰণ 5: i) যদি ,  নিৰ্ণয় কৰক।

ii) যদি , প্ৰমাণ কৰক যে

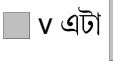


সমাধান ঃ i) ইয়াত 







 v এটা  মাত্রাৰ x আৰু y-ৰ সুষম ফলন।

গতিকে অইলাৰৰ উপপাদ্যৰ পৰা, 

ii) ইয়াত 

= u + v ... ... (1)

য'ত 

আৰু 

এতিয়া, 

 u এটা 6 মাত্রাৰ x, y-ৰ সুষম ফলন।

আকৌ, 

 v এটা 0 মাত্রাৰ x, y-ৰ সুষম ফলন।

গতিকে, অইলাৰৰ উপপাদ্যৰ পৰা, আমি পালোঁ,

 ... ... (2)

আৰু 

(2) আৰু (3) যোগ কৰি আমি পাওঁ,









 [(1)-ৰ পৰা]

 প্ৰমাণ কৰা হ'ল।

উদাহৰণ 6: যদি  প্ৰমাণ কৰক যে



সমাধান ঃ ইয়াত, 

f(x, y) = sinu 

এতিয়া, 







 sin u এটা  মাত্ৰাৰ x, y-ৰ সুষম ফলন।

অইলাৰৰ উপপাদ্যৰ পৰা,



বা



বা



ধৰা হ'ল,









প্রমাণ কৰা হ'ল।

উদাহৰণ 7: যদি  প্রমাণ কৰক যে



সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $u = z_1 + z_2$ ... ... (1)

য'ত  আৰু 

স্পষ্টতঃ z_1 এটা 1 মাত্রাৰ x, y-ৰ সুষম ফলন আৰু z_2 এটা 0 মাত্রাৰ x, y-ৰ সুষম ফলন।

এতিয়া, 



$= 1.z_1 + 0.z_2$ (অইলাৰৰ উপপাদ্যৰ পৰা)

এইদৰে, 

2)ক যথাক্রমে x আৰু y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

 ... . (3)

আৰু  ... ... (4)

(3)ক xৰে আৰু (4)ক yৰে পূৰণ কৰি আৰু যোগ কৰি আমি পাওঁ,



বা  -ৰ পৰা

বা  প্ৰমাণ কৰা হ'ল।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১৮ ঃ  -ৰ বাবে অইলাৰৰ উপপাদ্য সত্যাপন কৰক।

প্ৰশ্ন নং ১৯ ঃ যদি , $x^2u_{xx} + 2xyU_{xy} + y^2U_{yy}$ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২০ ঃ যদি ,

 -ৰ মান নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২১ ঃ যদি , প্ৰমাণ কৰক যে



প্ৰশ্ন নং ২২ ঃ যদি , প্ৰমাণ কৰক যে





১১.৮ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- $u = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ আকাৰৰ ফলনক এটা বহু চলকবিশিষ্ট ফলন বুলি কোৱা হয়; $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ এটা nটা চলকৰ ফলন। ইয়াত u হ'ল পৰতন্ত্ৰ চলক আৰু $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ হ'ল স্বতন্ত্ৰ চলক।

- যদি u এটা nটা চলকৰ ফলন, অর্থাৎ, $u = f(x_1, x_2, ..., ..., ..., x_n)$, তেনেহ'লে, x_i সাপেক্ষে ইয়াৰ অৱকলজ হ'ল,



যদিহে সীমা থাকে।

যদি u দুটা বা ততোধিক স্বতন্ত্ৰ চলকৰ ফলন হয়, যিকোনো এটা স্বতন্ত্ৰ চলক সাপেক্ষে u-ৰ আংশিক অৱকলজ হ'ল,বাকীবিলাক চলকক ধ্ৰুৱক বুলি বিবেচনা কৰি সেই চলক সাপেক্ষে u-ৰ সাধাৰণ অৱকলজ।

- ধাৰাবাহিক অৱকলজ দ্বাৰা এটা ফলনৰ উচ্চতৰ ক্ৰমৰ আংশিক অৱকলজ উলিয়াব পাৰি। nতম্ আংশিক অৱকলজক এনেদৰে বুজোৱা হয়।



 etc.

- যদি $u = f(x, y)$, য'ত $x = \phi_1(t)$ আৰু $y = \phi_2(t)$, তেনেহ'লে,



ক t সাপেক্ষে u-ৰ পূৰ্ণ অৱকল সহগ বুলি কোৱা হয়।

উপৰিউক্ত ফলটো সসীম সংখ্যক চলকলৈ সম্প্ৰসাৰণ কৰিব পাৰি, অর্থাৎ,

যদি $u = f(x_1, x_2, ..., ..., ..., x_n)$, য'ত $x_1 = \phi_1(t)$, $x_2 = \phi_2(t)$, ..., $x_n = \phi_n t(t)$

তেনেহ'লে, 

আকৌ, যদি $u = f(x, y)$, য'ত $x = f_1(t_1, t_2)$ আৰু $y = f_2(t_1, t_2)$, তেনেহ'লে,

আমি পাওঁ, 

আৰু 

- এটা ফলন f(x, y)ক n মাত্ৰাৰ সুষম ফলন বুলি কোৱা হয় যদি প্ৰতিটো পদেই n মাত্ৰাৰ হয়। x, y চলক বিশিষ্ট এটা n মাত্ৰাৰ ফলন f(x, y) এটা সুষম ফলন হ'ব যদি ইয়াক $x^n f$  বা  ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

- যদি z = f(x, y) এটা x, y-ৰ n মাত্ৰাৰ সুষম ফলন হ'লে অইলাৰৰ উপপাদ্যটো হ'ল,

  .

  অইলাৰৰ উপপাদ্যৰ পৰা নিগমন

  a) যদি z = f(x, y) এটা x, y-ৰ n মাত্ৰাৰ সুষম ফলন হ'লে,

  b) যদি z = f(x, y) এটা x, y-ৰ n মাত্ৰাৰ সুষম ফলন হ'লে আৰু z = f(হ'লে,

  , য'ত 

- অইলাৰৰ উপপাদ্যটো যিকোনো সসীম সংখ্যক চলকৰ সুষম ফলনৰ বাবে সম্প্ৰসাৰণ কৰিব পাৰি।

১১.৯ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) 

b) 

c)  = cox x cox xy – y sin y sin xy

 = –x sinx sinxy

d)  = 2x cos(x^2+y)



২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, 











৩নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ $f = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz$

a) 

b) 

c) 

d) 

৪নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, 











আকৌ, 



যিহেতু 







৫নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, u(x.y) = x logy



এতিয়া, 

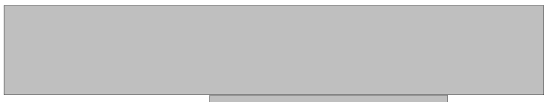
আকৌ, 

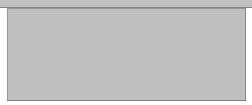
এতিয়া, 



৬নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $u = \log(x^2 + y^2 + z^2)$

 [x আৰু yক ধ্ৰুৱক হিচাপে লৈ]

আৰু 



এতিয়া, 

সমমিতিৰ পৰা, 

 প্ৰমাণ কৰা হ'ল।

৭নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $z = xf(x+y) + y\phi(x+y)$



আৰু 



আকৌ,

আৰু

আকৌ,

এতিয়া,

প্রমাণ কৰা হ'ল।

৮নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ ইয়াত u এটা x, y, z-ৰ ফলন আৰু x, y, z হ'ল t-ৰ ফলন।

$= 2x.2e^{2t} + 2y(2e^{2t}\cos 3t - 3e^{2t}\sin 3t) + 2z(2e^{2t}\sin 3t + 3e^{2t}\cos 3t)$

$= 2e^{2t}.2e^{2t} + 2e^{2t}\cos 3t(2e^{2t}\cos t - 3e^{2t}\sin 3t) +$

$2e^{2t}\sin 3 + (2z(2e^{2t}\sin 3t + 3e^{2t}\cos 3t)$

$= 4e^{4t} + 4e^{4t}\cos 3t - 6e^{4t}\cos 3t \sin 3t + 4e^{41}\sin^2 3t + 6e^{4t}\sin 3t \cos 3t$

$= 4e^{4t} + 4e^{4t}(\cos^2 3t + \sin^2 3t)$

$= 4e^{4t} + 4e^{4t}$

$= 8e^{4t}$

এতিয়া, প্রত্যক্ষ প্রতিষ্ঠাপনৰ দ্বাৰা সত্যাপন,

$u = x^2 + y^2 + z^2$

$= e^{4t} + e^{4t}\cos^2 3t + e^{4t}\sin^2 3t$

$= e^{4t} + e^{4t}(\cos^2 3t + \sin^2 3t)$

$= 2e^{4t}$

৯নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ইয়াত u এটা x, y-ৰ ফলন, আৰু x, y ফলন দুটা r, s-ৰ ফলন। গতিকে

শৃঙ্খল বিধিৰ পৰা,

= 2x.2 +(–2y)(–1)

= 2(2x+y)

= 2x(–3) + (–2y).8

= –6x – 16y

১০নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) ধৰা হ'ল, f(x, y) = xsin(x–y) – (x+y)

b) দিয়া আছে, $x^y = y^x$

উভয় পক্ষৰ ঘাতাঙ্ক লৈ আমি পাওঁ, log ylogx = xlogy

ধৰা হ'ল, f(x, y) = ylogx – xlogy = 0

১১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ইয়াত u এটা x, y আৰু z-ৰ ফলন। y আৰু z হ'ল x-ৰ ফলন।

১২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ পূৰ্ণ অৱকলজৰ পৰা,







১৩নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) 1 মাত্রাৰ সুষম ফলন ঃ $3(tx) + 4(ty) = t(3x+4y)$

b) 2 মাত্রাৰ সুষম ফলন ঃ $2(tx)^2 + (tx)(ty) = t^2(2x^2+xy)$

c) সুষম ফলন নহয়।

d)  মাত্রাৰ সুষম ফলন ঃ 

১৪নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, 



 ফলনটো 2 মাত্রাৰ সুষম ফলন।

১৫নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ হয়, 

 ফলনটো  মাত্রাৰ সুষম ফলন।

১৬নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ ফলনটো সুষম নহয়।

১৭নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে,



 f এটা (r-2) মাত্রাৰ সুষম ফলন।

১৮নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ ইয়াত u এটা 0 মাত্রাৰ সুষম ফলন,





এতিয়া,

= 0

গতিকে অইলাৰৰ উপপাদ্য সত্যাপন কৰা হ'ল।

১৯নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ

tan u এটা (3–1), 2 মাত্ৰাৰ সুষম ফলন।

গতিকে অইলাৰৰ উপপাদ্যৰ পৰা,

অৰ্থাৎ, $xu_x + yu_y = \sin 2u$ ... ... (1)

(1)ক যথাক্ৰমে x আৰু y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$xu_{xn} + u_x + yu_{yx} = 2u_x \cos 2u$ ... ... (2)

$xu_{xy} + u_y + yu_{yy} = 2u_y \cos 2u$ ... ... (3)

(2)ক xৰে আৰু (3)ক yৰে পূৰণ কৰি আৰু যোগ কৰি আমি পাওঁ,

$x^{2}u_{xx} + 2xyu_{xy} + y^{2}u_{xy} = (2\cos 2u - 1)(xu_{x} + yu_{y})$

$= (2\cos 2u - 1)\sin 2u$ (1)ৰ পৰা

$= \sin 4u - \sin 2u$

২০নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ইয়াত

u এটা 1 মাত্ৰাৰ সুষম ফলন n = 1.

অইলাৰৰ উপপাদ্যৰ পৰা,

(1)ক x সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

... ... (2)

আকৌ, (1)ক y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

... ... (3)

(2) আৰু (3) যোগ কৰি আমি পাওঁ,

২১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ইয়াত



 sin u এটা (3–1), অর্থাৎ, 2 মাত্রাৰ সুষম ফলন।

 অইলাৰৰ উপপাদ্যৰ পৰা,



বা 

বা 

বা 

২২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ইয়াত 

 এটা x আৰু y-ৰ  মাত্রাৰ সুষম ফলন।

 অইলাৰৰ উপপাদ্যৰ পৰা, আমি পালোঁ,



বা 

বা 

(1)ক আংশিকভাৱে x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি, আমি পাওঁ,



বা 

আকৌ, (1অক আংশিকভাৱে y সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,



 ... ...(3) 

(2)ক xৰে আৰু (3)ক yৰে পূৰণ কৰি আৰু যোগ কৰি, আমি পাওঁ,

[(1)-ৰ পৰা]

[$^2u - 1 = \cos^2 u$]



১১.১০ অধিক জানিবলৈ

1) Dhami, H. S., *Differential Calculus*; New Delhi: New Age International (P) Limited Publishers.
2) Ginzburg, A.: *Calculus Problems and Solutions*.
3) Kishan, Hari: *Differential Calculus*; New Delhi: Atlantic Publishers Distributors (P) Ltd.
4) Naryan, Shanti: Differential Calculus; S. Chand Limited.
5) Rao, S. Balachandra & Shantha, C. K.: *Differential Calculus*; New Delhi: New Age International (P) Limited Publishers.
6) Sharma, A. K.: *Text Book of Differential Calculus*; New Delhi: Discovery Publishing House.



১১.১১ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ আৰু নিৰ্ণয় কৰক, যদি

i) $u = x \sin y + y \sin x$ ii)

iii) $u = x^y$ iv)

প্ৰশ্ন ২ ঃ যদি , প্ৰমাণ কৰক যে 

প্ৰশ্ন ৩ ঃ যদি , প্ৰমাণ কৰক যে 

প্ৰশ্ন ৪ ঃ যদি , দেখুওৱাক যে 

প্ৰশ্ন ৫ ঃ অধোলিখিত ফলনবোৰৰ বাবে অইলাৰৰ উপপাদ্য সত্যাপন কৰক।

i) $u = 3x^2yz + 4xy^2z + 5y^4$ ii) 

iii)  iv) $u = axy + byz + czx$

v) 

প্ৰশ্ন ৬ ঃ যদি ,  নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৭ ঃ যদি $z = z(x, y)$, $x = e^u + e^{-v}$, $y = e^{-u} – e^v$,

প্ৰমাণ কৰক যে 

প্ৰশ্ন ৮ ঃ যদি $z = f(x, y)$, যাতে $x = e^u\cos v$, $y = e^u\sin v$

প্ৰমাণ কৰক যে 

প্ৰশ্ন ৯ ঃ যদি u এটা n মাত্ৰাৰ সুষম ফলন, প্ৰমাণ কৰক যে–

a) 

b) 

প্ৰশ্ন ১০ ঃ যদি $u = e^{ax+by} f(ax–by)$, প্ৰমাণ কৰক যে 

প্ৰশ্ন ১১ ঃ যদি $u = \cos xyz$,  নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ১২ ঃ যদি , প্ৰমাণ কৰক যে $U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0$

*** ***** ***

অধ্যায় ১২ঃ বহু চলক বিশিষ্ট ফলনৰ চৰম মান

অধ্যায় গাঁথনি

12.1 উদ্দেশ্য

12.2 পৰিচয়

12.3 দুটা চলক বিশিষ্ট ফলনৰ বাবে টেলৰৰ উপপাদ্য

12.4 দুটা চলক বিশিষ্ট ফলনৰ বাবে গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান

12.4.1 দুটা চলক বিশিষ্ট ফলনৰ বা লঘিষ্ঠ মানৰ অস্তিত্বৰ বাবে প্ৰয়োজনীয় চর্ত

12.4.2 অচল বিন্দু আৰু চৰম বিন্দু

12.4.3 দুটা চলক বিশিষ্ট ফলনৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে পর্য্যাপ্ত চর্ত

12.4.4 দুটা চলক বিশিষ্ট ফলনৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান উলিওৱাৰ কার্যকৰী নিয়ম

12.5 অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

12.6 অগ্রগতিৰ খতিয়ান

12.7 অধিক জানিবলৈ

12.8 আর্হি প্রশ্ন

১২.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- দুটা চলক বিশিষ্ট ফলনৰ বাবে টেলৰৰ উপপাদ্য সম্বন্ধে জানিব
- দুটা চলক বিশিষ্ট ফলনৰ বাবে গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কৰিব পাৰিব।

১২.২ পৰিচয়

একাদশ অধ্যায়ত আমি বহু চলক বিশিষ্ট ফলন, আংশিক অৱকলজ, সুষম ফলন আৰু অইলাৰৰ সুষম ফলন সম্পর্কীয় উপপাদ্যৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিছোঁ। এই অধ্যায়ত আমি দুটা চলক বিশিষ্ট টেলৰৰ উপপাদ্যৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। লগতে আমি দুটা চলক বিশিষ্ট ফলনৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান পদ্ধতি সম্বন্ধে অধ্যয়ন কৰিম।

১২.৩দুটা চলকত টেলৰৰ শ্রেণী

ধৰা হ'ল, f(x, y) এটা দুটা চলক বিশিষ্ট ফলন। ধৰা হ'ল ফলনটোৰ সকলো ক্রমৰ অৱকলজ আছে। তেনেহ'লে,

(1)

ব্ৰুক টেলৰৰ (Brook Taylor, 1685-1731) নাম অনুসৰি উপৰিউক্ত শ্ৰেণীটো টেলৰৰ শ্ৰেণী (Taylor's Series) বুলি কোৱা হয়।



ব্ৰুক টেলৰ (1685-1731) ঃ এজন ব্ৰিটিছ্ গণিতজ্ঞ আছিল।

টোকা ঃ 1) উপৰিউক্ত ফলটো যিকোনো সসীম সংখ্যক স্বতন্ত্ৰ চলকলৈ সম্প্ৰসাৰণ কৰিব পাৰি।

2) উপৰিউক্ত ফলটো তলত দিয়া ধৰণেও লিখিব পাৰি,

3) (1)ত x = a, y = b বহুৱাই আমি পাওঁ

f(a+h, y+k) = f(a, b) + [hfx(a, b) + kfy(a, b)]

আন এটা ৰূপ ঃ (a, b) বিন্দু সাপেক্ষে টেলৰৰ শ্ৰেণী,

... ... (4)

(4)ত a = 0, b = 0 বহুৱাই আমি পাওঁ,

... ... (5)

কলিন মেকলৰিনৰ (Colin Maclaurin, 1698-1746) নাম অনুসৰি (4) শ্ৰেণীটো মেকলৰিনৰ শ্ৰেণী (Maclaurin's Series) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ 1: (1, 1) বিন্দু সাপেক্ষে e^{xy}ক সম্প্ৰসাৰণ কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $f(x, y) = e^{xy}$

$f(1, 1) = e^{1.1} = e$



কলিন মেকলৰিন (1698-1746) ঃ এজন স্কটিছ গণিতজ্ঞ আছিল।







দুটা চলকৰ ফলনৰ বাবে টেলৰৰ শ্ৰেণীৰ পৰা,







উদাহৰণ 2: (1, 1) বিন্দুৰ সাপেক্ষে $f(x, y) = x^2 + y^2$ সম্প্ৰসাৰণ কৰক।

সমাধান ঃ ইয়াত, $f(1, 1) = 2$, $f_x(1, 1) = 2$, $f_y(1, 1) = 2$, $f_{xx}(1, 1) = 2$, $f_{xy}(1, 1) = 0$, $f_{yy}(1, 1) = 2$

$f(x, y) = f(1, 1) + (x - 1)f_x(1, 1) + (y - 1)f_y(1, 1) + \frac{1}{2!}[(x - 1)^2 f_{xx}(1, 1) + 2(x - 1)(y - 1)f_{xy}(1, 1) + (y - 1)^2 f_{yy}(1, 1)] + \cdots$

$= 2 + 2(x - 1) + 2(y - 1) + \frac{1}{2!}[2(x - 1)^2 + 0 + 2(y - 1)^2] + \cdots$

$= 2 + 2(x - 1) + 2(y - 1) + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + \cdots$







উদাহৰণ 3: x আৰু y-ৰ ঘাততf(x, y) = $e^y \log(1+x)$ক সম্প্রসাৰণ কৰক।

সমাধান ঃ ইয়াত, f(x, y) = $e^y \log(1+x)$, f(0, 0) = 0



$f_y(x, y) = e^y \log(1+x)$, $f_y(0, 0) = 0$



$_{xy}(0, 0) = 1$



$_{xx}(0, 0) = -1$

$f_{yy}(x, y) = e^y \log(1+x)$, $f_{yy}(0, 0) = 0$

টেলৰৰ শ্রেণীৰ পৰা,

$f(x, y) = e^y \log(1+x) = f(0, 0) + [xf_x(0, 0) + yf_y(0, 0)] +$







উদাহৰণ 4: টেলৰৰ শ্রেণী ব্যৱহাৰ কৰি (x–1) আৰু (y+2)-ৰ ঘাততx^{2}y + 3y – 2 ফলনটোক সম্প্রসাৰণ কৰক।

সমাধান ঃ ইয়াত, f(x,y) = $x^2y + 3y - 2$, a = 1, b = –2

f(1, –2) = $1^2 \times (-2) + 3(-2) - 2 = -10$

$f_x = 2xy$, $f_x(1, -2) = 2(1)(-2) = -4$

$f_y = x^2+3$, $f_y(1, -2) = 1^2 + 3 = 4$

$f_{xx} = 2y$, $f_{xx}(1, -2) = 2(-2) = -4$

$f_{xy} = 2x$, $f_{xy}(1, -2) = 2(1) = 2$

$f_{yy} = 0$, $f_{yy}(1, -2) = 0$

টেলৰৰ শ্রেণীৰ পৰা,

$f(x, y) = f(a, b) + [(x–a)f_x(a.b) + (y–b)f_y(a.b)] +$

[redacted]

[redacted] $x^2y + 3y – 1 = f(x, y)$

$= –10 + [(x–1)(–4) + (y+2)(4)] + ½[(x–1)^2(–4) + 2(x–1)(y+2) + (y+2)^20] + ...$

$= –10 – 4(x–1) + 4(y+2) – 2(x–1)^2 + 2(x–1)(y+2) + ...$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ ঃ (0, 0) বিন্দুৰ সামীপ্যত $e^x \log(1+y)$ ফলনটোৰ প্রথম ছটা পদ টেলৰৰ শ্রেণীৰ সহায়ত নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ ঃ টেলৰৰ শ্রেণী ব্যৱহাৰ কৰি $f(x, y) = x^3 + y^3 + xy^2$ ফলনটো $(x – 1)$ আৰু $(y – 2)$-ৰ ঘাতত সম্প্রসাৰণ কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ ঃ $(x – 1)$ আৰু $(y – 1)$-ৰ ঘাতত e^{xy} ফলনটো সম্প্রসাৰণ কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ ঃ মূল বিন্দু সাপেক্ষে $e^{ax} \sin by$ ফলনটো তৃতীয় মাত্রাৰ পদলৈ সম্প্রসাৰণ কৰক।

১২.৪ দুটা চলক বিশিষ্ট ফলনৰ বাবে গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান

নৱম অধ্যায়ৰ অনুচ্ছেদ 9.5ত আমি এটা চলক বিশিষ্ট ফলনৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান উলিওৱাৰ পদ্ধতি সম্বন্ধে আলোচনা কৰিছোঁ।

আমি পাইছিলোঁ যে $f(x)$ ফলনটোৰ a বিন্দুত গৰিষ্ঠ মান থাকিব যদি $f'(a) = 0$ আৰু $f''(a) < 0$, ফলনটোৰ a বিন্দুত লঘিষ্ঠ মান থাকিব যদি $f'(a) = 0$ আৰু $f''(a) > 0$.

এইটো অনুচ্ছেদত আমি দুটা চলক বিশিষ্ট ফলনৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান উলিওৱা পদ্ধতি সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম।

সংজ্ঞা ঃ $f(x, y)$ ফলনটোৰ $x = a, y = b$ বিন্দুত গৰিষ্ঠ মান থাকে বুলি কোৱা হয় যদি h আৰু k ৰ ক্ষুদ্র আৰু স্বতন্ত্র মানৰ বাবে (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) $f(a, b) > f(a+h, b+k)$.

$f(x. y)$ ফলনটোৰ $x = a, y = b$ বিন্দুত লঘিষ্ঠ মান থাকে বুলি কোৱা হয় যদি h আৰু k ৰ ক্ষুদ্র আৰু স্বতন্ত্র মানৰ বাবে (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) $f(a, b) < f(a+h, b+k)$.

গতিকে $f(x, y)$ ফলনটোৰ (a, b) বিন্দুত গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান থাকিব যদি ক্রমানুসাৰে [redacted] $f = f(a+h, b+k) – f(a, b) < 0$ or > 0. ফলন এটাৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানক চৰম মান বুলি কোৱা হয়। ফলন এটাৰ চৰম (গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ) বিন্দুত মানটোক ফলনটোৰ চৰম (গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ) মান বুলি কোৱা হয়।

১২.৪.১ f(x y) ফলনটো গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ হোৱাৰ চর্ত

টেলৰৰ শ্রেণীৰ পৰা, $f(a+h, b+k) = f(a, b) + [hf_x(a, b) + kf_y(a, b)]$

 ... ... (1)

যিহেতু h, k আদি ক্ষুদ্র সংখ্যা, আমি h^2, hk, k^2 ইত্যাদি পদ বিবেচনা নকৰোঁ।

উপৰিউক্ত (1) প্রসাৰণটো হ'বগৈ,

$\Delta f = [f(a+h, b+k) - f(a, b)]$

$= hf_x(a, b) + kf_y(a, b)$ ... ... (2)

Δf-ৰ চিন = $[hf_x(a, b) + kf_y(a, b)]$-ৰ চিন

$h = 0$ হ'লে, Δ -ৰ চিন k-ৰ চিনৰ সৈতে সলনি হয়। সেইদৰে $k = 0$ হ'লে, Δ -ৰ চিন h আৰু k-ৰ সৈতে চিন সলনি কৰে, $f_x(a, b) = 0 = f_y(a, b)$ নহ'লে, f(x, y)ৰ (a, b)ত গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান থাকিব নোৱাৰে।

(a, b)ত f(x, y) ফলনটো গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ হোৱাৰ প্রয়োজনীয় চর্ত হ'ল,

$f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$

যদি এই চর্তসমূহ সিদ্ধ হয়,তেনেহ'লে, h আৰু k-ৰ ক্ষুদ্র মানৰ বাবে, (1)-ৰ পৰা আমি পাম,





[য'ত, $r = f_{xx}(a, b)$, $s = f_{xy}(a, b)$, $t = f_{yy}(a, b)$]

বা 



 ... ... (3)

এতিয়া, $(hr + ks)^2$ সদায় ধনাত্মক আৰু $k^2 (rt - s^2)$ ধনাত্মক হ'ব, যদি $rt - s^2 > 0$.

এই ক্ষেত্রত h আৰু k-ৰ সকলো মানৰ বাবে Δ -ৰ চিন r-ৰ সৈতে একে হ'ব।

সেয়েহে,

i) যদি $rt - s^2 > 0$, (a, b)ত f(x, y)-ৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান থাকিব যদি ক্রমানুসাৰে $r < 0$ বা $r > 0$.

ii) যদি $rt - s^2 < 0$, h আৰু k-ৰ সৈতে Δ -ৰ চিন একে হ'ব। সেয়েহে (a, b)ত গৰিষ্ঠ মানো নাই, লঘিষ্ঠ মানো নাই।

iii) যদি $rt - s^2 = 0$, (a, b)ত গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান সম্বন্ধে কোনো সিদ্ধান্তত উপনীত হ'ব নোৱাৰি আৰু সেয়ে পুনৰ পৰীক্ষাৰ প্ৰয়োজন।

অচল বিন্দু ঃ (a, b) বিন্দুটোক অচল বিন্দু (Stationary Point) বুলি কোৱা হয়, যদি $f_x(a.\ b) = 0$, $f_y(a.\ b) = 0$ মানটোক অচল মান (Stationary Value) বুলি কোৱা হয়

১২.৪.২ z = f(x, y) ফলনৰ চৰম মান উলিওৱাৰ পদ্ধতি

i) প্ৰথমতে, [ ] আৰু [ ] নিৰ্ণয় কৰক।

ii) [ ] আৰু [ ] সমাধান কৰক।

ধৰা হ'ল, সমাধান (a, b) ; (c, d), ...

iii) (ii)-ৰ প্ৰতিটো সমাধানৰ বাবে [ ], [ ] আৰু [ ]

iv) a) যদি (ii)-ৰ এটা সমাধান (a, b)-ৰ বাবে $rt - s^2 > 0$ আৰু $r < 0$, (a, b)ত z-ৰ গৰিষ্ঠ মান আছে।

b) যদি (ii)-ৰ এটা সমাধান (a, b)-ৰ বাবে $rt - s^2 > 0$ আৰু $r > 0$, (a, b)ত z-ৰ লঘিষ্ঠ মান আছে।

c) যদি (ii)-ৰ এটা সমাধান (a, b)-ৰ বাবে $rt - s^2 < 0$, (a, b)ত z-ৰ চৰম মান নাই।

d) যদি $rt - s^2 = 0$, এটা অনিশ্চিত তথা অস্পষ্ট অৱস্থা আৰু পুনৰ পৰীক্ষাৰ প্ৰয়োজন।

উদাহৰণ 1: $u = x^3y^2(1-x-y)$ ফলনৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $u = x^3y^2(1 - x - y)$

এতিয়া, [ ]

$= x^2y^2[3(1-x-y) - x]$

$= x^2y^2[3 - 4x - 3y]$

[ ]

$= 6xy^2(1-x-y) - 6x^2y^2$

[ ]





u-ৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে,

 আৰু 

 $3x^2y^2(1-x-y) - x^2y^2 = 0$

 $x^2y^2 3-4x-3y = 0$

 $3 - 4x - 3y = 0$

 $4x + 3y = 3$ ... (1)

 $2x^3y(1-x-y) - x^3y^2 = 0$

 $x^3y\,[2(1-x-y) - y] = 0$

 $2 - 2x - 3y = 0$

 $2x + 3y = 2$ ... (2)

(1) আৰু (2) সমাধান কৰি আমি পাওঁ, , 

এতিয়া আমি  বিন্দুত  উলিয়াওঁ।

$= 6xy^2(1-x-y) - 6x^2y^2$ at 





সেইদৰে , 

$= 6x^2y(1-x-y) - 2x^3y - 3x^2y^2$ at 





আৰু , 

$= 2x^3(1-x-y) - 4x^3y,$ 

$$= 2.\frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-4.\frac{1}{8}.\frac{1}{3}$$

$$= -\frac{1}{8}$$

এতিয়া, $rt - s^2 = \frac{1}{72} - \frac{1}{144} = \frac{1}{144} > 0$

আকৌ, $r < 0$

$\therefore \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ বিন্দুত ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ মান আছে। ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ মান,

$$u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{432}$$

উদাহৰণ 2: $z = x^2 - 3xy + y^2 + 2x$ ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান আছেনে নাই পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $z = x^2 - 3xy + y^2 + 2x$.

এতিয়া, $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y + 2$ ... ... (1)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 2y$$ ... ... (2)

আকৌ, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3$$

আৰু $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$

z-ৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে,

$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ আৰু $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$

$\therefore 2x - 3y + 2 = 0$ ... (1) আৰু $-3x + 2y = 0$ ... (2)

(1) আৰু (2) সমাধান কৰি আমি পাওঁ, $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{6}{5}$

এতিয়া, $r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 > 0$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3$$

$$t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2$$

$\therefore rt - s^2 = 2 \times 2 - (-3)^2 = -5 < 0$

$\therefore x = \frac{4}{5}, y = \frac{6}{5}$ ত ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান নাই।

উদাহৰণ 3: $u = x^2y^2 - 5x^2 - 8xy - 5y^2$ ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান আছেনে নাই পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত ফলনটো হ'ল, $u = x^2y^2 - 5x^2 - 8xy - 5y^2$

এতিয়া, $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy^2 - 10x - 8y$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2y - 8x - 10y$$

আকৌ, $r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2y^2 - 10$

$$s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 4xy - 8$$

$$t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2x^2 - 10$$

u-ৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2xy^2 - 10x - 8y = 0 \quad \text{... ... ... (1)}$$

আৰু $\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2x^2y - 8x - 10y = 0$ ... ... (2)

(2)-ৰ পৰা, $y(x^2-5) = 4x$

(1)ত $y = \frac{4x}{x^2 - 5}$ বহুৱাই আমি পাওঁ,

$$x.\frac{16x^2}{(x^2-5)^2} - 5x - \frac{16x}{x^2-5} = 0$$

বা $\frac{16x^3 - 5x(x^2-5)^2 - 16x(x^2-5)}{(x^2-5)^2} = 0$

বা $16x^3 - 5x(x^2 - 5)^2 - 16x(x^2 - 5) = 0$

বা $x[16x^2 - 5x^4 + 50x^2 - 125 - 16x^2 + 80] = 0$

বা $x[-5x^4 + 50x^2 - 45] = 0$

বা $x[x^4 - 10x^2 + 9] = 0$

বা $x(x^2 - 1)(x^2 - 9) = 0$



(2)-ৰ পৰা, যেতিয়া, $x = 0$ $y = 0$,

যেতিয়া $x = 1$ $y = -1$

যেতিয়া $x = -1$ $y = 1$

যেতিয়া $x = 3$ $y = 3$

যেতিয়া $x = -3$ $y = -3$

অচল বিন্দুকেইটা হ'ল, (0, 0), (1, –1), (–1, 1), (3, 3) আৰু (–3, –3).

(0, 0) বিন্দুত, $r = -10$, $s = -8$, $t = -10$.

$rt - s^2 = 100 - 64 = 36 > 0$

$r < 0$, (0, 0) বিন্দুত u গৰিষ্ঠ।

(1, –1) বিন্দুত, $r = -8$, $s = -12$, $t = -8$

$rt - s^2 = 64 - 144 < 0$.

(1, –1) বিন্দুত গৰিষ্ঠ মানো নাই, লঘিষ্ঠ মানো নাই। সেইদৰে আমি দেখুৱাব পাৰোঁ যে (–1, 1), (3, 3) আৰু (–3, –3) বিন্দুকেইটাৰ এটাতো গৰিষ্ঠ মানো নাই, লঘিষ্ঠ মানো নাই।

সেয়েহে একমাত্ৰ (0, 0) বিন্দুটোতহে ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ মান আছে।

উদাহৰণ 4: $x^3 + y^3 - 3axy$ ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান আছেনে নাই পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ ইয়াত, $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$

$f_x = 3x^2 - 3ay$

$f_y = 3y^2 - 3ax$

$r = f_{xx} = 6x$

$s = f_{xy} = -3a$

$t = f_{yy} = 6y$

এতিয়া, $f_x = 0$ আৰু $f_y = 0$

$x^2 - ay = 0$ ... (1) আৰু $y^2 - ax = 0$ ... (2)

(1)-ৰ পৰা, 

(2)ৰ পৰা,  বা $x(x^3 - a^3) = 0$ বা $x = 0, a$

যেতিয়া, $x = 0$, $y = 0$. যেতিয়া, $x = a$, $y = a$.

অচল বিন্দুকেইটা হ'ল, (0, 0) আৰু (a, a)

এতিয়া, $rt - s^2 = 36xy - 9a^2$

(0, 0) বিন্দুত চৰম মান নাই।

(a, a) বিন্দুত $rt - s^2 = 36a^2 - 9a^2 = 27a^2 > 0$

(a, a) বিন্দুত ফলনটোৰ চৰম মান আছে।

এতিয়া, $r = 6a$

যদি $a > 0, r > 0$ আৰু (a, a) বিন্দুত ফলনটোৰ লঘিষ্ঠ মান আছে।

যদি $a < 0, r < 0$ আৰু (a, a) বিন্দুত ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ মান আছে।

উদাহৰণ 5: $\sin x + \sin y + \sin(x+y)$ ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান আছেনে নাই পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ ইয়াত, $f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$

$f_x = \cos x + \cos(x+y), f_y = \cos y + \cos(x+y)$

$r = f_{xx} = -\sin x - \sin(x+y), s = f_{xy} = -\sin(x+y)$

$t = f_{yy} = -\sin y - \sin(x+y)$

এতিয়া, $f_x = 0$ আৰু $f_y = 0$

$\cos x + \cos(x+y) = 0$ ... (1) আৰু $\cos y + \cos(x+y) = 0$ ... (2)

(1)-ৰ পৰা (2) বিয়োগ কৰি আমি পাওঁ,

$\cos x - \cos y = 0$ or $\cos x = \cos y$

(1)-ৰ পৰা $\cos x + \cos 2x = 0$ or $\cos 2x = -\cos x =$

বা $2x = \pi - x$

এটা অচল বিন্দু।

বিন্দুত,

আকৌ,

আৰু $r < 0$

বিন্দুত ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ মান আছে। গৰিষ্ঠ মান আছে।

গৰিষ্ঠ মান =

উদাহৰণ 6 : $f(x.y) = x^3 + 3xy^2 – 15x^2 – 15y^2 + 72x$ ফলনৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ইয়াত, $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 – 15x^2 – 15y^2 + 72x$ ... ... (1)

(1)ক আংশিকভাৱে x আৰু y সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

অচল বিন্দুৰ বাবে $f_x = 0$ আৰু $f_y = 0$.

$3x^2 + 3y^2 – 30x + 72 = 0$ ... (2) আৰু $6xy – 30y = 0$

$6y(x–5) = 0$, বা $x = 5$

যেতিয়া, $y = 0$, (2)-ৰ পৰা, $3x^2 – 30x$ 72 = 0

$x = 60r$ 4

যেতিয়া, $x = 5$, (2)-ৰ পৰা, $75 + 3y^2 – 150 + 72 = 0$

$3y^2 – 3 = 0$

$y =$

অচল বিন্দু চাৰিটা হ'ল, (6, 0), (4, 0), (5, 1), (5, –1).

এতিয়া, f_{xx}, f_{xy} আৰু f_{xy}.

$f_{xx} = r = 6x – 30$, $f_{xy} = s = 6y$, $t = f_{yy} = 6x – 30$.

$rt = 5^2 = (6x – 30)^2 – 36y^2$

$= 36\{(x–5)^2 – y^2\}$ ... ... (3)

এতিয়া (i), (6, 0) বিন্দুত $r = 36 – 30 = 6 > 0$ আৰু $rt – s^2 = 36 > 0$.

(6, 0) বিন্দুত ফলনটোৰ মান লঘিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান,

$= 6^3 + 0 – 15 \times 36 – 0 + 72 \times 6$

$= 216 – 540 + 432$

$= 108$

(ii) (4, 0) বিন্দুত $r = 24 – 30 = –6 < 0$ আৰু $rt – s^2 = 36 > 0$.

(4, 0) বিন্দুত ফলনটোৰ মান গৰিষ্ঠ আৰু গৰিষ্ঠ মান

$= 4^3 + 0 – 15 \times 16 – 0 + 72 \times 4$

$= 64 – 240 + 288 = 112$.

(iii) (5, 10) বিন্দুত $r = 0$, $rt - s^2 = -36 < 0$

এটা পর্য্যাণ বিন্দু (Saddle Point) অর্থাৎ এই বিন্দুটোত গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান নাই।

(iv) (5, -1) বিন্দুত $r= 0$, $rt - s^2 = -36 < 0$

বিন্দুত গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান নাই অর্থাৎ ই এটা পর্যাণ বিন্দু।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৫ ঃ $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান আছেনে নাই পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন নং ৬ ঃ $x^2 + y^2 + 6x + 12$ ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান আছেনে নাই পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন নং ৭ ঃ ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান আছেনে নাই পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন নং ৮ ঃ $Z = x^2 - 3xy + y^2 + 2x = 50$ ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান আছেনে নাই পৰীক্ষা কৰক।



১২.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- ধৰা হ'ল, $f(x, y)$ এটা দুটা চলক বিশিষ্ট ফলন। ধৰা হ'ল, ফলনটোৰ সকলো ক্রমৰ অৱকলজ আছে। তেনেহ'লে, টেলৰৰ শ্রেণীটো হ'ল,

আন এটা ৰূপ ঃ (a, b) বিন্দু সাপেক্ষে টেলৰৰ শ্রেণী,

(A)

$a = 0, b = 0$ বহুৰাই আমি পাওঁ,





উপৰিউক্ত (A) শ্রেণীটো মেকলৰিনৰ শ্রেণী বুলি কোৱা হয়।

- $f(x, y)$ ফলনটোৰ $x = a, y = b$ বিন্দুত গৰিষ্ঠ মান থাকে বুলি কোৱা হয় যদি h আৰু k ৰ ক্ষুদ্র আৰু স্বতন্ত্র মানৰ বাবে (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) $f(a, b) > f(a+h, b+k)$.
  $f(x, y)$ ফলনটোৰ $x = a, y = b$ বিন্দুত লঘিষ্ঠ মান থাকে বুলি কোৱা হয় যদি h আৰু k ৰ ক্ষুদ্র আৰু স্বতন্ত্র মানৰ বাবে (ধনাত্মক বা ঋণাত্মক) $f(a, b) < f(a+h, b+k)$.
- (a, b)ত $f(x, y)$ ফলনটো গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ হোৱাৰ প্রয়োজনীয় চর্ত হ'ল,
  $f_x(a, b) = 0, f_y(a, b) = 0$



১২.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ ইয়াত, $f(x, y) = e^x \log(1+y), f(0, 0) = 0$

$f_x(x, y) = e^x \log(1+y)$, $f_x(0, 0) = 0$

, $f_y(0, 0) = 1$

$f_{xx}(x, y) = e^x \log(1+y)$, $f_{xx}(0, 0) = 0$

, $f_{xy}(0, 0) = 1$

, $f_{yy}(0, 0) = -1$

$f_{xxx}(x, y) = e^x \log(1+y)$, $f_{xxx}(0, 0) = 0$

, $f_{xxy}(0, 0) = 1$,

, $f_{xyy}(0, 0) = -1$

, $f_{yyy}(0, 0) = 2$

.....

$e^x \log(1+y) = f(x, y)$

$= f(0\ 0) + [xf_x(0, 0) + yf_y(0, 0)] +$

২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

$13 + 7(x-1) + 16(y-2) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)(y-2) + 7(y-2)^2 + (x-1)^3$

$+ (x-1)(y-2)^2 + (y-2)^3 + ...$

৩নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৪নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৫নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$

,

,

,

গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে,

আৰু

$3x^2 - 3y = 0$ আৰু $3y^2 - 3x = 0$

বা $x^2 = y$ ... (1) আৰু $y^2 = x$ ... (2)

y-ৰ মান (2) ত বহুৱাই আমি পাওঁ,

$x^4 = x$ বা $x(x^3-1) = 0$

বা $x(x-1)(x^2+x+1) = 0$

বা $x = 0, 1$ [$x^2 + x + 1 = 0$ সমীকৰণৰ মূল জটিল সংখ্যা]

(1)ত $x = 0$ বহুৰাই, আমি পাওঁ, $y = 0$

(1)ত $x = 1$ বহুৰাই, আমি পাওঁ, $y = 1$

অচল বিন্দু দুটা (0,0) আৰু (1,1).

(0, 0) বিন্দুত $r = 0, s = -3, t = 0$

$$rt - s^2 = 0 - 9 < 0$$

(0, 0) বিন্দুত চৰম মান নাই।

(1, 1) বিন্দুত $r = 6, s = -3, t = 6$

$$rt - s^2 = 36 - 9 = 27 > 0$$

আকৌ, $r = 6 > 0$

(1, 1) বিন্দুত ফলনটো লঘিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান $= 1 + 1 - 3 = -1$.

৬নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, $f(x, y) = x^2 + y^2 + 6x + 12$

গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে,

$2x + 6 = 0$, অৰ্থাৎ, $x = -3$ ... ... (1)

আৰু অৰ্থাৎ, $y = 0$ ... ... (2)

এতিয়া,

(–3, 0) বিন্দুত $rt - s^2 = 2 \times 2 - 0 = 4 > 0$

$r = 2 > 0$

(–3, 0) বিন্দুত f(x, y) ফলনটো গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান

$= f(-3, 0) = 9 + 0 - 18 + 12 = 3.$

৭নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে,

গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে,

আৰু

$a^3 = x^2y = xy^2$

(a, a) বিন্দুত গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান আছে।

এতিয়া,

আৰু , (a, a) বিন্দুত

(a, a) বিন্দুত $rt - s^2 = 2 \times 2 - 1 = 3 > 0$

আকৌ, $r = 2 > 0$.

বিন্দুত ফলনটো গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান = $a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$.

৮নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $z = x^2 - 3xy + y^2 + 2x$

z-ৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে,

... ... (1)

... ...(2)

(1) আৰু (2) সমাধান কৰি আমি পাওঁ, ,

Z বিন্দুটো অচল বিন্দু।

আকৌ,

$rt - s^2 = 2 \times 2 - (-3)^2 = -5 < 0$.

ফলনটোৰ বিন্দুত চৰম মান নাই।



১২.৭ অধিক জানিবলৈ

1) Apostol Tom M.: *Calculus*; New Delhi: Wiley India (P.) Ltd..
2) Dhami, H. S.: *Differential Calculus*; New Delhi: New Age International (P) Limited Publishers.
3) Ginzburg, A.: *Calculus Problems and Solutions*.
4) Kishan, Hari: *Differential Calculus*; New Delhi: Atlantic Publishers Distributors (P) Ltd.

5) Naryan, Shanti: *Differential Calculus*; S. Chand Limited.
6) Rao, S. Balachandra & Shantha, C. K: *Differential Calculus*; New Delhi: New Age International (P) Limited Publishers.
7) Sharma, A. K.: *Text Book of Differential Calculus*; New Delhi: Discovery Publishing House.
8) Thomas, George B. & Finney, Ross L: *Calculus and Analytic Geometry*; New Delhi: Narosa Publishing House.



১২.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ y^x-ক (1,1) সাপেক্ষে টেলৰ শ্ৰেণী হিচাপে সম্প্ৰসাৰণ কৰক।

প্ৰশ্ন ২ ঃ (1, 2) সাপেক্ষে $x^2y + 2y$-ৰ টেলৰৰ সম্প্ৰসাৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ ঃ (1, –2) সাপেক্ষে তৃতীয় ক্ৰমৰ পদলৈ $2x^2y + x + y$-ৰ সম্প্ৰসাৰণ টেলৰৰ উপপাদ্যৰ সহায়ত নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ ঃ (1, –1) বিন্দু সাপেক্ষে দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ পদলৈ [illegible] সম্প্ৰসাৰণ কৰক।

প্ৰশ্ন ৫ ঃ অধোলিখিত ফলনবোৰৰ বাবে গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান নিৰ্ণয় কৰক।

a) $2a^2xy – 3ax^2y – ay^3 + x^3y + xy^3$
b) $3x^4y^2 – 6x^2y^2 + 3x^4 + 2y^3 – 6x^2 – 3x + 1$
c) $\sin x \sin y \sin z$
d) [illegible]

প্ৰশ্ন ৬ ঃ দেখুওৱাক যে $u(x, y) = 2x^2y – x^2 – y^2 + 2y$ ফলনটোৰ চৰম মান নাই।

প্ৰশ্ন ৭ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে, যেতিয়া [illegible] তেতিয়া, $x^4 + 2x^2y – x^2 + 3y^2$ ফলনটো লঘিষ্ঠ।

প্ৰশ্ন ৮ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $x = y = 0$ বিন্দুত $u = x^2y^2 – 5x^2 – 8xy – 5y^2$ ফলনটো লঘিষ্ঠ।

প্ৰশ্ন ৯ ঃ দেখুওৱাক যে (0, 0)ত $u(x, y) = x^2 – 2xy + y^2 + x^3 – y^3 + x^5$ ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ মানো নাই, লঘিষ্ঠ মানো নাই।

প্ৰশ্ন ১০ ঃ (2, 1, –3) বিন্দুৰ পৰা $2x + y – 2z = 4$ সমতলখনৰ সৰ্বনিম্ন দূৰত্ব উলিয়াওঁক।

*** ***** ***

অধ্যায় ১৩ ঃ জেক'বিয়ান

অধ্যায় গাঁথনি

13.1 উদ্দেশ্য
13.2 পৰিচয়
13.3 জেক'বিয়ান
  13.3.1 সংজ্ঞা
  13.3.2 ধর্ম
  13.3.3 অন্তর্নিহিত ফলনৰ জেক'বিয়ান
  13.3.4 জেক'বিয়ান শূন্য হ'বলৈ প্রয়োজনীয় আৰু পর্য্যাপ্ত চর্ত
13.4 অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
13.5 অগ্রগতিৰ খতিয়ান
13.6 অধিক জানিবলৈ
13.7 আৰ্হি প্রশ্ন

১৩.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- জেক'বিয়ান আৰু ইয়াৰ ধর্ম সম্বন্ধে অৱগত হ'ব।

১৩.২ পৰিচয়

একাদশ অধ্যায়ত আমি বহু চলক বিশিষ্ট ফলন, আংশিক অৱকলজ, সুষম ফলন আৰু অইলাৰৰ সুষম ফলন সম্পর্কীয় উপপাদ্যৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিছোঁ। এই অধ্যায়ত আমি জেক'বিয়ান আৰু ইয়াৰ ধর্ম সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম।

১৩.৩ জেক'বিয়ান

বহু চলক বিশিষ্ট ফলনৰ বাবে, আমি সিহঁতৰ আংশিক অৱকলজসমূহৰ এটা বিশেষ ফলন উলিয়াওঁ। ইয়াক প্রদত্ত ফলনসমূহৰ ফলনীয় নির্ণায়ক বুলি কোৱা হয়। ফলনীয় নির্ণায়ক সম্বন্ধে পোনতে চিন্তা-চর্চা কৰে জার্মান গণিতজ্ঞ কার্ল গুস্তাভ জেক'বিয়ে (1804-1851)। তেওঁৰ নাম অনুসৰি এই ফলনীয় নির্ণায়কসমূহক জেক'বিয়ান (Jacobian) বুলি কোৱা হয়।



কার্ল গুস্তাভ জেক'বি (1804-1851) ঃ এজন জার্মান গণিতজ্ঞ আছিল।

১৩.৩.১ সংজ্ঞা

জেক'বিয়ান এটা ফলনীয় নির্ণায়ক আৰু ইয়াৰ মৌলবোৰ ফলন।

ধৰা হ'ল, u (x, y) আৰু v(x, y) দুটা স্বতন্ত্ৰ চলক x আৰু y-ৰ ফলন।

x, y সাপেক্ষে u, v-ৰ জেক'বিয়ানক  বা ৰে বুজোৱা হয়। ই এটা

দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ ফলনীয় নিৰ্ণায়ক আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়—



সেইদৰে, তিনিটা স্বতন্ত্ৰ চলক x, y, z-ৰ ফলন u, v, w-ৰ জেক'বিয়ানৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়—

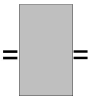


সেইদৰে, nটা চলকৰ nটা ফলনৰ জেক'বিয়ানৰ সংজ্ঞা দিব পাৰি। যদি nটা স্বতন্ত্ৰ চলক $x_1, x_2, ..., x_n$ অৰ $u_1, u_2 ..., u_n$ ফলন হয়, তেনেহ'লে,



নিৰ্ণায়কটোত $x_1, x_2, ..., ..., ..., x_n$ সাপেক্ষে $u_1, u_2, ..., ..., ..., u_n$-ৰ জেক'বিয়ান

বুলি কোৱা হয়। ইয়াক  বা ৰে বুজোৱা হয়।

টোকা ঃ 1)  =  = 1

2) $x_1, x_2, \ldots \ldots \ldots, x_n$ স্বতন্ত্র চলক কেইটাৰ ফলন $u_1, u_2, \ldots, \ldots, \ldots, u_n$ ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে,

$u_1 = f_1(x_1), u_2 = f_2(x_1, x_2), \ldots, \ldots, \ldots, u_n = f_n(x_1, \ldots\ldots\ldots, x_n)$

তেনেহ'লে, 

অর্থাৎ, জেক'বিয়ানটো নির্ণায়কটোৰ মুখ্য কর্ণৰ মৌলসমূহৰ পূৰণফলৰ সমান।

১৩.৩.১ জেক'বিয়ানৰ ধর্ম

I) যদি u, v; r, s-ৰ ফলন আৰু r, s; x, y-ৰ ফলন, তেনেহ'লে



প্রমাণ ঃ 

= 

দ্বিতীয় নির্ণায়কটোৰ স্তম্ভ আৰু শাৰী সালসলনি কৰি,

= 

=

=

সেইদৰে,

টোকা ঃ উপৰিউক্ত ফলটো সসীম সংখ্যক চলকলৈ সম্প্রসাৰণ কৰিব পাৰি।

II) যদি x, y সাপেক্ষে u, v-ৰ জেকবিয়ান J_1 হয় আৰু u, v সাপেক্ষে x, y-ৰ জেক'বিয়ান J_2 হয়, তেনেহ'লে, $J_1 J_2 = 1$

অর্থাৎ,

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল, $u = f(x, y)$ ... ... (1)

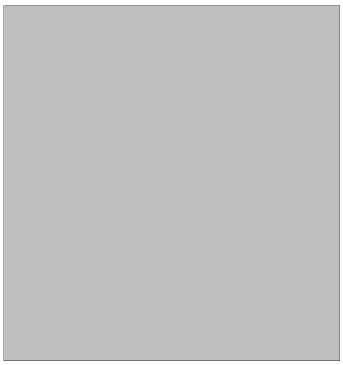
$v = \phi(x, y)$ ... ... (2)

দ্বিতীয় নির্ণায়কটোৰ শাৰী আৰু স্তম্ভ সালসলনি কৰি,

=

=

(1) আৰু (2)ক u আৰু v সাপেক্ষে অৱকলন কৰি, আমি পাওঁ,

= 

(3) আৰু (4)-ৰ পৰা আমি পাওঁ, 

টোকা ঃ উপৰিউক্ত ফলটো সসীম সংখ্যক চলকলৈ সম্প্রসাৰণ কৰিব পাৰি।

III) x, y, z স্বতন্ত্র চলককেইটাৰ ফলন u, v, w যদি স্বতন্ত্র নহয়, তেনেহ'লে,



প্রমাণ ঃ u, v, w স্বতন্ত্র নহয়, তেনেহ'লে,

f(u, v, w) = 0 ... ... (1)

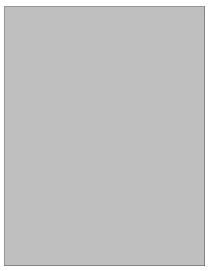
(1)ক x, y, z সাপেক্ষে অৱকলন কৰি, আমি পাওঁ,

 ... ... (2)

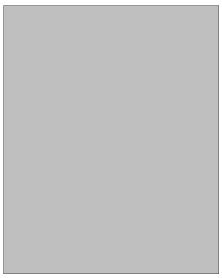
 ... ... (3)

 ... ... (4)

(2), (3) আৰু (4)-ৰ পৰা,  অৱকলন কৰি, আমি পাওঁ,



শাৰী আৰু স্তম্ভ সালসলনি কৰি আমি পাওঁ,



বা  Proved.

টোকা ঃ দুটা ফলন u আৰু v ফলনীয়ভাৱে নির্ভৰশীল বুলি কোৱা হয় যদি সিহঁতৰ জেক'বিয়ান,



যদি জেক'বিয়ান শূন্য নহয়, তেনেহ'লে u আৰু v ফলনীয়ভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

দুটাতকৈ অধিক ফলনৰ বাবেও এই ফলটো সম্প্ৰসাৰণ কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 1: যদি ,  নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে,  আৰু 



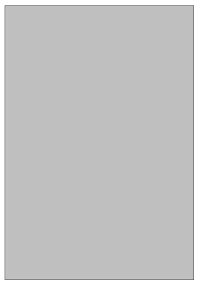




উদাহৰণ 2 : যদি ,

প্ৰমাণ কৰক যে $J(u_1, u_2, u_3) = 4$

সমাধান ঃ দিয়া আছে,

$J(u_1, u_2, u_3) =$ 





,

(R_1-ৰ লগত R_2 যোগ কৰি, R_2-ৰ লগত R_3 যোগ কৰি)

.

উদাহৰণ 3: যদি $x = r \sin\theta \cos\phi$, $y = r \sin\theta \sin\phi$, $z = r \cos\theta$,

দেখুওৱাক যে 

সমাধান ঃ দিয়া আছে,





$= \cos\theta(r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi + r^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi) +$

$r\sin\theta(r\sin^2\theta\cos^2\phi + r\sin^2\theta\sin^2\phi)$

(তৃতীয় শাৰীৰে প্ৰসাৰ কৰি)

$= r^2\sin\theta\cos^2\theta + r^2\sin^3\theta$

$= r^2\sin\theta(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$= r^2\sin\theta$

উদাহৰণ 4: যদি $y_1 = \cos x_1$, $y_2 = \sin x_1 \cos x_2$ আৰু $y_3 = \sin x_1 \sin x_2 \cos x_3$,

প্ৰমাণ কৰক যে 

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $y_1 = \cos x_1$, $y_2 = \sin x_1 \cos x_2$, $y_3 = \sin x_1 \sin x_2 \cos x_3$

এতিয়া, 



$= -\sin x_1 \sin x_2 \sin x_3(\sin^2 x_1 \sin x_2)$

$= -\sin^3 x_1 \sin^2 x_2 \sin x_3$

উদাহৰণ 5: যদি$x = u\cos v$, $y = u\sin v$, প্ৰমাণ কৰক যে 

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $x = u\cos v$ ... ... (1)

$y = u\sin v$ ... ... (2)



$= u\cos^2 v + u\sin^2 v$

$= u(\cos^2 v + \sin^2 v)$

$= u$

(1) আৰু (2) বৰ্গ কৰি আৰু পিছত যোগ কৰি, আমি পাওঁ,

$x^2 + y^2 = u^2(\cos^2 v + \sin^2 v) = u^2 \times 1\ u^2$



(2)ক (1)ৰে হৰণ কৰি, আমি পাওঁ, 

















উদাহৰণ 6: দেখুওৱাক যে  $^{-1}x + \tan^{-1}y$

ফলন দুটা ফলনীয়ভাৱে নিৰ্ভৰশীল আৰু সিহঁতৰ মাজৰ সম্পৰ্ক নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে







 u, v ফলনীয়ভাৱে নির্ভৰশীল।

আমি জানো যে 

 $v = \tan^{-1}u$

 $u = \tan v$

উদাহৰণ 7: যদি $u = 2xy$, $v = x^2 - y^2$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$,

 জেক'বিয়ানটো নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে

 ... ... (1)

এতিয়া, 

আকৌ, 

$= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$ [$x = r\cos\theta c, y = r\sin\theta s, x^2 + y^2 = r^2$]

$= r$

গতিকে (1)-ৰ পৰা,  $^2 + y^2)r = -4r^2.r = -4r^3$

উদাহৰণ 8: যদি , , আৰু

নির্ণয় কৰক। সত্যাপন কৰক যে $J.J^* = 1$

সমাধান ঃ

আকৌ,

$y^2 = vx$

$y^2 = v(u-v)$

এতিয়া,

সত্যাপন ঃ

উদাহৰণ 9: অধোলিখিত ফলনকেইটা ফলনীয়ভাৱে সম্পৰ্কিত হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

$u = e^x \sin y,\ v = e^x \cos y$

সমাধান ঃ জেক'বিয়ান =

= $e^{2x}(-\sin^2 y - \cos^2 y)$

= $-e^{2x}(\sin^2 y + \cos^2 y)$

= $-e^x$

u. v ফলনীয়ভাৱে সম্পৰ্কিত।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১ ঃ a) যদি u x^2, v = y^2; নিৰ্ণয় কৰক।

b) যদি x = ar cosθ, y = br sinθ; নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২ ঃ যদি x = r cosθ, y = r sinθ, z = z, নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৩ ঃ খালী ঠাই পূৰ কৰক।

i) যদি x = r cosθ, y = r sinθ, তেনেহ'লে,

জেক'বিয়ানৰ মান .....

ii) যদি u = x(1–y), v = xy, তেনেহ'লে,

জেক'বিয়ানৰ মান .....

iii) = ...

প্ৰশ্ন নং ৪ ঃ যদি u = xyz, v = $x^2 + y^2 + z^2$, w = x + y + z; নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৫ ঃ তলৰ ফলনবোৰ সম্পৰ্কিত হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক আৰু যদি হয় সিহঁতৰ মাজৰ সম্পৰ্কটো নিৰ্ণয় কৰক।



১৩.৪ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- জেক'বিয়ান এটা ফলনীয় নির্ণায়ক আৰু ইয়াৰ মৌলবোৰ ফলন। তিনিটা স্বতন্ত্ৰ চলক x, y, z-ৰ তিনিটা ফলন u, v, w-ৰ জেক'বিয়ানৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।



- জেক'বিয়ানৰ ধৰ্ম ঃ
  - i) যদি u, v; r, s-ৰ ফলন আৰু r, s; x, y-ৰ ফলন, তেনেহ'লে,



  - ii) যদি x, y সাপেক্ষে u, v-ৰ জেক'বিয়ান J_1 হয় আৰু u, v সাপেক্ষে x, y-ৰ জেক'বিয়ান J_2 হয়, তেনেহ'লে, $J_1 J_2 = 1$; অৰ্থাৎ, 
  - iii) x, y, z স্বতন্ত্ৰ চলককেইটাৰ ফলন u, v, w যদি স্বতন্ত্ৰ নহয়, তেনেহ'লে,

.



১৩.৫ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

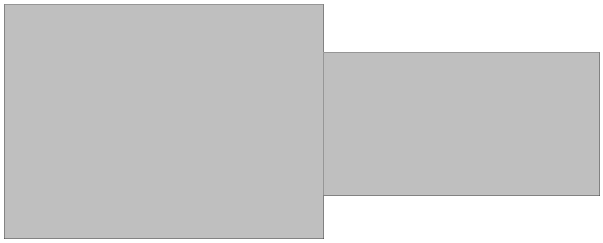
১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ (a) 

(b) 

$= abr\cos^2\theta + abr\sin^2\theta$

$= abr(\cos^2\theta + \sin^2\theta)$

$= abr$

২নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ 

$= \cos\theta(r\cos\theta - 0) - (-r\sin\theta)(\sin\theta - 0) + 0$

$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta$

$= r$

৩নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ i) 

$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta$

$= r$

ii) 

$= x(1-y) + xy$

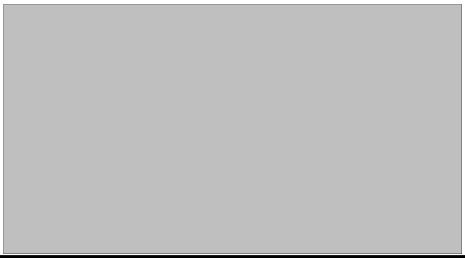
$= x - xy + xy$

$= x$

iii) 

৪নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ যিহেতু u, v, w স্পষ্টকৈ দিয়া আছে, গতিকে আমি প্ৰথমতে,

-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰোঁ।











$= 2(x - y)(y - z)(-z + x)$

$= -2(x - y)(y - z)(z - x)$

আমি জানো যে $JJ^{/} = 1$, য'ত 

৫নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ 





 u, v ফলনীয়ভাৱে নির্ভৰশীল।



 য়েই u আৰু v-ৰ মাজৰ ফলনীয় সম্বন্ধ।



১৩.৬ অধিক জানিবলৈ

1) Apostol Tom M.: *Calculus*; New Delhi: Wiley India (P.) Ltd..
2) Dhami, H. S.: *Differential Calculus*; New Delhi: New Age International (P) Limited Publishers.
3) Ginzburg, A.: *Calculus Problems and Solutions*.
4) Kishan, Hari: *Differential Calculus*; New Delhi: Atlantic Publishers Distributors (P) Ltd.
5) Naryan, Shanti: *Differential Calculus*; S. Chand Limited.
6) Rao, S. Balachandra & Shantha, C. K: *Differential Calculus*; New Delhi: New Age International (P) Limited Publishers.
7) Sharma, A. K.: *Text Book of Differential Calculus*; New Delhi: Discovery Publishing House.
8) Thomas, George B. & Finney, Ross L: *Calculus and Analytic Geometry*; New Delhi: Narosa Publishing House.



১৩.৭ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ অধোলিখিত ৰূপান্তৰণবোৰৰ জেক'বিয়ান নিৰ্ণয় কৰক।

a) $x + y = u, x - y = v$

b) $x = u \sin\alpha + v \cos\alpha$; $y = u \cos\alpha - v \sin\alpha$ (α constant)

c) $x = r \cos\theta \cos\phi$; $y = r \cos\theta \sin\phi$; $z = r \sin\theta$

d) [redacted].

প্ৰশ্ন ২ ঃ যদি $x = e^u \cos v$ আৰু $y = e^u \sin v$, দেখুওৱাক যে [redacted]

প্ৰশ্ন ৩ ঃ যদি $u = x + y$, $v = x - y$ আৰু $x = r \sin\theta$, $y = r \sin\theta$, প্ৰমাণ কৰক যে

[redacted].

প্রশ্ন ৪ ঃ যদি  আৰু  য'ত

$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, প্রমাণ কৰক যে 

*** ***** ***

অধ্যায় ১৪ ঃ লাগ্রাঞ্জৰ অনিৰ্ণীত গুণনীয়ক পদ্ধতি

অধ্যায় গাঁথনি

14.1 উদ্দেশ্য
14.2 পৰিচয়
14.3 লাগ্রাঞ্জৰ অনিৰ্ণীত গুণনীয়ক পদ্ধতি
14.4 অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
14.5 অগ্রগতিৰ খতিয়ান
14.6 অধিক জানিবলৈ
14.7 আৰ্হি প্রশ্ন

১৪.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- লাগ্রাঞ্জৰ অনিৰ্ণীত গুণনীয়ক পদ্ধতি সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

১৪.২ পৰিচয়

দ্বাদশ অধ্যায়ত আমি দুটা চলক বিশিষ্ট ফলনৰ বাবে গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কৰিলোঁ। এই অধ্যায়ত আমি লাগ্রাঞ্জৰ অনিৰ্ণীত গুণনীয়ক পদ্ধতি সম্বন্ধে অধ্যয়ন কৰিম।

১৪.৩ লাগ্রাঞ্জৰ অনিৰ্ণীত গুণনীয়ক পদ্ধতি

ধৰা হ'ল, এটা বহু চলক বিশিষ্ট ফলনৰ চলকবোৰ কিবা সম্বন্ধ বা চর্তেৰে যুক্ত হৈ আছে। এই সম্বন্ধ বা চর্তটোক নিবাধ (Constraint) বুলি কোৱা হয়। লাগ্রাঞ্জৰ অনিৰ্ণীত গুণনীয়ক পদ্ধতিৰ সহায়ত এনে ফলনৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান উলিয়াব পাৰি।

ধৰা হ'ল, f(x, y, z) এটা তিনিটা চলক বিশিষ্ট ফলন আৰু x, y, z চলক তিনিটা $\phi(x, y, z) = 0$ নিবাধেৰে সম্পর্কিত।

$\phi(x. y. z) = 0$ ... ... (1)

আমি নিবাধ সাপেক্ষে f(x, y, z)

f(x, y, z)-ৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান থাকিব, যদি





... ... (2)

(1)-ৰ পূর্ণ অৱকলনৰ দ্বাৰা,



... ... (3)

(3)ক λৰে পূৰণ কৰি আৰু (2)-ৰ লগত যোগ কৰি, আমি পাওঁ,







... ... (4)



... ... (5)



... ... (6)

(1), (4), (5), (6) সমাধান কৰি আমি x, y, z আৰু λ-ৰ মান উলিয়াব পাৰোঁ। যাৰ বাবে f(x, y, z) ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান উলিয়াব পাৰোঁ।

টোকা ঃ লাগ্রাঞ্জৰ পদ্ধতিৰ সহায়ত ফলনটোৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান আছেনে নাই ঠিৰাং কৰিব নোৱাৰি।

উদাহৰণ 1: $u = x^p y^q z^r$-ৰ গৰিষ্ঠ মান নির্ণয় কৰক যদি x, y, z চলক তিনিটা $ax + by + cz = p + q + r$ সম্পর্কেৰে যুক্ত হৈ থাকে।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $u = x^p y^q z^r$ ... ... (1)

যদি $ax + by + cz = p + q + r$ ... ... (2)

(1)-ৰ পৰা 

(3)ক x সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,





সেইদৰে, (3)ক y আৰু z সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,





আৰু 



আকৌ, $\phi(x, y, z) = ax + by + cz - p - q - r$



এতিয়া, লাগ্রাঞ্জৰ সমীকৰণকেইটা হ'ল,







(2)ত বহুৱাই আমি পাওঁ,







$\Rightarrow \lambda = -u$







(1)ত বহুৱাই আমি পালোঁ, 

এইটোৱেই নিৰ্ণেয় গৰিষ্ঠ মান।

উদাহৰণ 2: অন্তৰীক্ষৰ যিকোনো বিন্দু (x, y, z)ত তাপমাত্রা T এনেদৰে দিয়া আছে, $T = 400xyz^2$. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ একক গোলকৰ পৃষ্ঠত সৰ্বোচ্চ তাপমাত্রা নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $T = 400\ xyz^2$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

 $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

এতিয়া লাগ্রাঞ্জৰ সমীকৰণকেইটা হ'ল,

 $\Rightarrow 400z^2 + \lambda(2x) = 0$ ... ... (1)

 $\Rightarrow 400xz^2 + \lambda(2y) = 0$ ... ... (2)

আৰু  $\Rightarrow 800xyz + \lambda(2z) = 0$ ... ... (3)

(1), (2) আৰু (3)ক ক্ৰমে x, y আৰু zৰে পূৰণ কৰি আৰু পিছত যোগ কৰি আমি পাওঁ,

$1600xyz^2 + 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$

$\Rightarrow 1600xyz^2 + 2\lambda(1) = 0$

$\Rightarrow \lambda = -800xyz^2$

λ-ৰ এই মান (1)ত বহুৰাই আমি পালোঁ,

$400yz^2 + 2x(-800xyz^2) = 0$

 $1 - 4x^2 = 0$



λ-ৰ মান (2)ত বহুৰাই আমি পালোঁ, 

λ-ৰ মান (3) ত বহুৰাই আমি পালোঁ,

$800xyz - 1600xyz^3 = 0$

বা $1 - 2z^2 = 0$

বা 

Tত x, y, z মান বহুৰাই আমি পালোঁ,

 = 50

উদাহৰণ 3: xy + yz + zx = p চৰ্তসাপেক্ষে xy + yz + zx = p-ৰ চৰম মান নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত ফলনটো হ'ল, $f = x^2 + y^2 + z^2$

চৰ্তটো হ'ল, xy + yz + zx = p

 $\phi = xy + yz + zx - p$

লাগ্রাঞ্জৰ পদ্ধতি অনুযায়ী,

 $\Rightarrow 2x + \lambda(y+z) = 0$ ... ... (1)



$\Rightarrow 2y + \lambda(x+z) = 0$ ... ... (2)

আৰু 

$\Rightarrow 2z + \lambda(x+y) = 0$ ... ... (3)

(1)-ৰ পৰা (2) বিয়োগ কৰি আমি পাওঁ, $2(x-y) + \lambda(y-x) = 0$

$\Rightarrow 2(x-y) - \lambda(x-y) = 0$

$\Rightarrow (x-y)(2-\lambda) = 0$

$x - y = 0$

$\Rightarrow x = y$

(2)-ৰ পৰা (3) বিয়োগ কৰি আমি পাওঁ, $2(y-z) + \lambda(z-y) = 0$

$\Rightarrow 2(y-z) - \lambda(y-z) = 0$

$\Rightarrow (y-z)(2-\lambda) = 0$

$y - z = 0$

$\Rightarrow y = z$

গতিকে, $x = y = z$.

$xy + yz + zx = p$

$\Rightarrow 3x^2 = p$



f-ৰ চৰম মান $= x^2 + y^2 + z^2$



উদাহৰণ 4: (1, 2, 0) বিন্দুৰ পৰা $z^2 = x^2 + y^2$শঙ্কুলৈ সৰ্বনিম্ন দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত শঙ্কুটোৰ সমীকৰণ $z^2 = x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ... ... (1)

ধৰা হ'ল, P(x, y, z) শঙ্কুটোৰ পৃষ্ঠত থকা এটা বিন্দু। তেন্তে (1, 2, 0)-ৰ পৰা P-ৰ দূৰত্ব হ'ব,

 [দূৰত্বৰ সূত্ৰৰ পৰা]

$\Rightarrow d^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2$

ধৰা হ'ল, $f = (x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2$

আৰু $\phi = x^2 + y^2 - z^2$

লাগ্রাঞ্জৰ পদ্ধতিৰ পৰা,



$\Rightarrow 2(x-1) + \lambda 2x = 0$ ... ... (2)

$\Rightarrow 2(y-2) + \lambda 2y = 0$ ... ... (3)

$\Rightarrow 2z + \lambda 2z = 0$ ... ... (4)

(4)-ৰ পৰা $\lambda = 1$

(2)ত $\lambda = 1$ বহুৰাই আমি পাওঁ,

(3)ত $\lambda = 1$ বহুৰাই আমি পাওঁ, $y = 1$

(1)ত বহুৰাই আমি পাওঁ,

বিন্দুটো হ'ল,

নিম্নতম দূৰত্ব



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১ ঃ লাগ্রাঞ্জৰ গুণনীয়ক ব্যৱহাৰ কৰি দীৰ্ঘবৃত্তজত অন্তলিখিত বৃহত্তম আয়তীয় চৌপলৰ আয়তন নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২ ঃ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ গোলকৰ পৰা (3, 4, 12) বিন্দুটোৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ দূৰত্ব নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৩ ঃ লাগ্রাঞ্জৰ অনিৰ্ণীত গুণনীয়ক পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি (1, 2, 2) বিন্দুৰ পৰা $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ গোলকলৈ হ্ৰস্বতম দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৪ ঃ অন্তৰীক্ষৰ কোনো বিন্দু (x, y, z)ত তাপমাত্ৰা T এনেদৰে দিয়া আছে, $T = kxyz^2$ য'ত k এটা ধ্ৰুৱক। $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ গোলকটোৰ পৃষ্ঠত সৰ্বোচ্চ তাপমাত্ৰা নিৰ্ণয় কৰক।



১৪.৪ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- ধৰা হ'ল,এটা বহু চলক বিশিষ্ট ফলনৰ চলকবোৰ কিবা সম্বন্ধ বা চৰ্তৰে যুক্ত হৈ আছে। এই সম্বন্ধ বা চৰ্তটোক নিবাধ (Constraint) বুলি কোৱা হয়। লাগ্রাঞ্জৰ অনিৰ্ণীত গুণনীয়ক পদ্ধতিৰ সহায়ত এনে ফলনৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান উলিয়াব পাৰি।



১৪.৫ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, চৌপলটোৰ এটা শীৰ্ষ কোণৰ স্থানাঙ্ক (x, y, z), সীমামূৰিয়লি দাঁতি তিনিটা 2x, 2y, 2z গতিকে আয়তন হ'ল,

$$V = (2x)(2y)(2z) = 8xyz \quad \ldots\ \ldots\ \ldots\ (1)$$

আৰু এই ক্ষেত্ৰত নিবাধ হ'ল, [redacted] $\ldots\ \ldots\ \ldots\ (2)$

(1)-ৰ উভয় পক্ষৰ ঘাতাংক লৈ আমি পাওঁ,

$$\log V = \log 8 + \log x + \log y + \log z$$

[redacted]

V-ৰ গৰিষ্ঠ মানৰ বাবে, [redacted]

আকৌ, [redacted]

অৰ্থাৎ, [redacted]

(4)ক λৰে পূৰণ কৰি আৰু (3)-ৰ লগত যোগ কৰি আৰু dx, dy, dz-ৰ সহগক শূন্যৰ সমান কৰি লৈ আমি পাওঁ,

[redacted], [redacted], [redacted]

এই সমীকৰণকেইটাক যথাক্রমে x, y, zৰে পূৰণ কৰি আৰু যোগ কৰি আমি পাওঁ,



$\Rightarrow 4 + \lambda(1) = 0$ [(2)-ৰ পৰা]

$\Rightarrow \lambda = -3$

যিহেতু, 



 (ধনাত্মক চিন ব্যৱহাৰ কৰি)

সেইদৰে,  আৰু 



২নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, গোলকটোত (x, y, z) যিকোনো এটা বিন্দু। (x, y, z)-ৰ পৰা

(3, 4, 12) বিন্দুটোৰ দূৰত্ব হ'ল, .

যদি দূৰত্ব গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ হয়, দূৰত্বৰ বর্গও গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ হ'ব।

ধৰা হ'ল, $f(x, y, z) = (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-12)^2$ ... ... (1)

আৰু নিবাধ হ'ল, $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ ... ... (2)

লাগ্রাঞ্জৰ ফলনটো লোৱা হ'ল,

$$f(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda\phi(x, y, z)$$
$$= (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z-12)^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

অচল মানৰ বাবে, $dF = 0$

$\Rightarrow [2(x-3) + 2\lambda x]dx + [2(y-4) + 2\lambda y]dy + [2(z-12) + 2\lambda z]dz = 0$

$\Rightarrow (x-3) + \lambda x = 0$ ... ... (3)

$(y-4) + \lambda y = 0$ ... ... (4)

$(z-12) + \lambda z = 0$ ... ... (5)

(3)ক xৰে, (4)ক yৰে, (5)ক zৰে পূৰণ কৰি আৰু যোগ কৰি, আমি পাওঁ,

$(x^2 + y^2 + z^2) - 3x - 4y - 12z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$

বা $1 - 3x - 4y - 12z + 2\lambda = 0$ [(2)-ৰ পৰা]

বা $3x + 4y + 12z = 1 + \lambda$ ... ... (6)

(3), (4) আৰু (5)-ৰ পৰা 

x, y, z-ৰ এই মান (6)ত বহুৱাই আমি পাওঁ,



বা $(1+\lambda)^2 = 169$

বা $1 + \lambda =$ 

$\lambda = 12$ or $\lambda = -14$

যেতিয়া, 

যেতিয়া, 

গতিকে, আমি দুটা বিন্দু পালোঁ,  আৰু 

এতিয়া, 



 বিন্দুটো A-ৰ পৰা সৰ্বনিম্ন দূৰত্বত আছে, আৰু

সৰ্বনিম্ন দূৰত্ব = 12.

 বিন্দুটো A-ৰ পৰা সৰ্বোচ্চ দূৰত্বত আছে, আৰু

সৰ্বোচ্চ দূৰত্ব = 14.

৩নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, (x, y, z) গোলকটোত এটা বিন্দু। গতিকে (1, 2, 2) বিন্দুৰ পৰা

ইয়াৰ দূৰত্ব 

তলৰ ফলনটো লোৱা হ'ল,

$f(x, y, z) = \{(x-1)^2 + (y-2)^2\} + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 16)$ য'ত λ এটা গুণনীয়ক।

F-ৰ চৰম মানৰ বাবে, 







ইয়াৰ পৰা আমি পালোঁ, 

$x^2 + y^2 + z^2 = 36$ সমীকৰণত বহুৰাই আমি পালোঁ,





.

গতিকে, আমি দুটা বিন্দু পালোঁ, যথা, (2, 4, 4), (–2, –4, –4)

গতিকে, নিম্নতম দূৰত্ব 

.

আৰু সর্বোচ্চ দূৰত্ব 



.

৪নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ লাগ্রাঞ্জৰ ফলনটো লোৱা হ'ল,

$$f(x, y, z) = kxyz^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - a^2) \quad \ldots\ \ldots\ \ldots (1)$$

চৰম মানৰ বাবে, 

$(kyz^2 + \lambda 2x)dx + (kxz^2 + \lambda 2y)dy + (2kxyz + \lambda 2z)dz = 0$

$\Rightarrow kyz^2 + 2\lambda x = 0 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots (2)$

$kxz^2 + 2\lambda y = 0 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots (3)$

$2kxyz + 2\lambda z = 0 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots (4)$

(2)ক xৰে, (3)ক yৰে আৰু (4)ক zৰে পূৰণ কৰি আৰু যোগ কৰি আমি পাওঁ,

$(4kxyz^2) + 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots (5)$

 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$



(2)-ৰ পৰা, 







সেইদৰে, 

(4)-ৰ পৰা, 



Tত x, y, z-ৰ মান বহুৰাই আমি পালোঁ, 



১৪.৬ অধিক জানিবলৈ

1) Apostol Tom M.: *Calculus*; New Delhi: Wiley India (P.) Ltd..
2) Dhami, H. S.: *Differential Calculus*; New Delhi: New Age International (P) Limited Publishers.
3) Ginzburg, A.: *Calculus Problems and Solutions*.
4) Kishan, Hari: *Differential Calculus*; New Delhi: Atlantic Publishers Distributors (P) Ltd.
5) Naryan, Shanti: *Differential Calculus*; S. Chand Limited.
6) Rao, S. Balachandra & Shantha, C. K: *Differential Calculus*; New Delhi: New Age International (P) Limited Publishers.
7) Sharma, A. K.: *Text Book of Differential Calculus*; New Delhi: Discovery Publishing House.
8) Thomas, George B. & Finney, Ross L: *Calculus and Analytic Geometry*; New Delhi: Narosa Publishing House.



১৪.৭ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ (2, 1, –3) বিন্দুৰ পৰা $2x + y – 2z = 4$ সমতলখনৰ সৰ্বনিম্ন দূৰত্ব উলিয়াওক।

প্ৰশ্ন ২ ঃ $3x^2 + 4xy + 16y^2 = 140$ চৰ্তসাপেক্ষে $x^2 + y^2$–ৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ ঃ $x^2 + y^2 + z^2 = 24$ গোলকৰ পৰা (1, 2, –1) বিন্দুটোৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ ঃ $x + y + z = a$ চৰ্তসাপেক্ষে $x^m y^n z^p$–ৰ গৰিষ্ঠ মান নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৫ ঃ  চৰ্তসাপেক্ষে $x + y + z$–ৰ লঘিষ্ঠ মান নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৬ ঃ $ax + by + cz = d$ চৰ্তসাপেক্ষে $x^2 + y^2 + z^2$–ৰ লঘিষ্ঠ মান নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৭ ঃ $5x^2 + 6xy + 5y^2 – 8 = 0$ বক্ৰৰ পৰা মূল বিন্দুটোৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৮ ঃ $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 1$ চৰ্তসাপেক্ষে $x^2 + y^2 + z^2$–ৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান নিৰ্ণয় কৰক।

*** ***** ***



প্রসঙ্গ পুথি

1) Apostol Tom M.: *Calculus*; New Delhi: Wiley India (P.) Ltd..
2) Avez, A.: *An Elementary Treatise on Differential Calculus*; Princeton: Princeton University Press, 2001.
3) Dhami, H. S., *Differential Calculus*; New Delhi: New Age International (P) Limited Publishers.
4) Ginzburg, A.: *Calculus Problems and Solutions*.
5) Gupta, Sudhir (2011) (1st edition): *Basics of Differentential Calculus*; New Delhi: Anmol publication Pvt. Ltd.
6) Habib, Amber (2011) (1st edition): *The Calculus of Finance*; Hyderabad: Universities Press India Pvt. Ltd.
7) Kishan, Hari: *Differential Calculus*; New Delhi: Atlantic Publishers Distributors (P) Ltd.
8) Maron, I. A. (1993) (1st edition): *Problems in Calculus of One Variable*; New Delhi: CBS Publishers & Distributors Pvt. Ltd.
9) Naryan, Shanti: Differential Calculus; S. Chand Limited.
10) Rao, S. (2004): *Differential Calculus*; Berkeley: University of California Press.
11) Rao, S. Balachandra & Shantha, C. K.: *Differential Calculus*; New Delhi: New Age International (P) Limited Publishers.
12) Sharma, A. K. (2004) (1st edition): *Text Book of Differential Calculus for B.A., B.Sc., B.Com., I.A.S., P.C.S.*; New Delhi: Discovery Publishing House.
13) Thomas, George B. & Finney, Ross L: *Calculus and Analytic Geometry*; New Delhi: Narosa Publishing House.