অধ্যায় ৯ ঃ যথার্থ অৱকল সমীকৰণ (EXACT DIFFERENTIAL EQUATION)

অধ্যায় গাঁথনি

9.1 উদ্দেশ্য

9.2 পৰিচয়

9.3 যথার্থ অৱকল সমীকৰণ

9.4 যথার্থ সমীকৰণলৈ পৰিৱর্তন কৰিব পৰা সমীকৰণ

9.5 অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

9.6 অধিক জানিবলৈ

9.7 অগ্রগতিৰ খতিয়ান

9.8 আৰ্হি প্রশ্ন

৯.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- যথার্থ অৱকল সমীকৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- যথার্থ সমীকৰণলৈ পৰিৱর্তন কৰিব পৰা সমীকৰণ।

৯.২ পৰিচয়

অষ্টম অধ্যায়ত আমি প্রথম ক্রম আৰু প্রথম মাত্রাৰ অৱকল সমীকৰণৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিছো। এই অধ্যায়ত, যথার্থ অৱকল সমীকৰণৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হয়।

৯.৩ যথার্থ অৱকল সমীকৰণ

এটা অৱকল সমীকৰণ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ক যথার্থ অৱকল সমীকৰণ (exact differential equation) বুলি কোৱা হয় যদি ইয়াৰ বাওঁফালৰ ৰাশিটোক এটা ফলন $u(x,y)$ৰ পূর্ণ অৱকল (total differential) হিচাপে প্রকাশ কৰিব পাৰি অর্থাৎ যদি $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$যথার্থ হয়, তেনেহ'লে $M(x,y)dx+N(x,y)dy=du(x,y)$ আৰু ইয়াৰ সমাধান হ'ল $u(x,y)=$ ধ্রুৱক।

উপপাদ্য ঃ $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ যথার্থ হোৱাৰ আৱশ্যকীয় আৰু পর্যাপ্ত চর্ত হ'ল : $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ যথার্থ। তেনেহ'লে এটা ফলন $u(x,y)$ থাকিব যাতে

$$du = Mdx + Ndy$$

$$\text{বা } \frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy = Mdx+Ndy$$

ইয়াৰ পৰা আমি পাওঁ dx আৰু dy

$M=\frac{\partial u}{\partial x}$ আৰু $N=\frac{\partial u}{\partial y}$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ আৰু $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$

যিহেতু $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$, গতিকে $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

বিপৰীত ক্ৰমে ধৰা হ'ল $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

ধৰা হ'ল $\int Mdx=V$, তেনেহ'লে $\frac{\partial V}{\partial x}=M$ আৰু $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.

$\therefore \frac{\partial}{\partial x}\left(N-\frac{\partial V}{\partial y}\right)=0 \Rightarrow N-\frac{\partial V}{\partial y}$ x ৰহিত

$\therefore \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$. $\therefore$ $N=\frac{\partial V}{\partial y}+\phi'(y)$.

$$\therefore Mdx+Ndy=\left(\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy\right)+\phi'(y)dy$$

$$= dV + d(\phi(y))$$

$$= dU \text{ য'ত } U=V+\phi(y)$$

$\therefore M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ যথার্থ আৰু ইয়াৰ সমাধান হ'ল $V+\phi(y)=$ ধ্ৰুৱক

বা $\int_{y=} Mdx+\int\left(N-\frac{\partial V}{\partial y}\right)dy=$ ধ্ৰুৱক

টোকা ঃ যদি $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ যথার্থ হয়, ইয়াৰ সমাধান হ'ল

$$\int_{y=} Mdx + \int (N\text{– } x \text{ যুক্ত পদ})\, dy = C$$

উদাহৰণ 1 ঃ সমাধান কৰক $\left(x^2-4xy-2y^2\right)dx+\left(y^2-4xy-2x^2\right)dy=0$

সমাধান ঃ ইয়াত $M = x^2 - 4xy - 2y^2$ আৰু $N = y^2 - 4xy - 2x^2$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = -4x - 4y$ আৰু $\frac{\partial N}{\partial x} = -4y - 4x$

অর্থাৎ $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

∴প্রদত্ত সমীকৰণটো যথার্থ।

∴নির্ণেয় সমাধান

$\int_{y=} (x^2 - 4xy - 2y^2)dx + \int y^2 dy = 0$ (N অৰ পৰা x যুক্ত পদবোৰ বাদ দিয়া হৈছে।)

বা $\frac{x^3}{3} - 2x^2y - 2y^2x + \frac{y^3}{3} = C$.

উদাহৰণ 2 ঃ সমাধান কৰক $\frac{dy}{dx} + \frac{ax + hy + g}{hx + by + f} = 0$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকৰণটোক এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$(ax + hy + g)dx + (hx + by + f)dy = 0$$

ইয়াত $M = ax + hy + g$ আৰু $N = hx + by + f$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = h = \frac{\partial N}{\partial x}$

∴সমীকৰণটো যথার্থ।

∴নির্ণেয় সমাধান

$\int_{y=} Mdx + \int$ (N অৰ x যুক্ত পদ) $dy = C$

বা $\int (ax + hy + g)dx + \int (by + f)dy = C$

বা $\frac{ax^2}{2} + hyx + gx + \frac{by^2}{2} + fy = C$

বা $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy = 2C$

উদাহৰণ 3 ঃ সমাধান কৰক $y \sin 2x dx - (1 + y + \cos^2 x)dy = 0$

সমাধান ঃ ইয়াত $M = y \sin 2x$ আৰু $N = -1 - y - \cos^2 x$

ধ্রুবক $\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \sin 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$

∴ প্রদত্ত সমীকৰণটো যথার্থ।

সমাধান হ'ল

$\int_{y=} y \sin 2x dx + \int (-1 - y)dy = C$ (N অৰ পৰা x যুক্ত পদ বাদ দিয়া হৈছে)

বা $-\frac{1}{2}y\cos 2x - y - \frac{y^2}{2} = C$

বা $y\cos 2x + 2y + y^2 + 2C = 0$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

প্রশ্ন নং 1 ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক

(a) $\left(y^2e^{xy^2} + 4x^3\right)dx + \left(2xye^{xy^2} - 3y^2\right)dy = 0$

(b) $\left\{y\left(1+\frac{1}{x}\right) + \cos y\right\}dx + \left(x + \log x - x\sin y\right)dy = 0$

(c) $\left[\cos x\tan y + \cos(x+y)\right]dx + \left[\sin x\sec^2 y + \cos(x+y)\right]dy = 0$

(d) $\left(5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3\right)dx + \left(2x^3y - 3x^2y^2 - 5y^4\right)dy = 0$

৯.৪ যথার্থ সমীকৰণলৈ পৰিৱর্তন কৰিব পৰা সমীকৰণ

এটা ফলন $\mu(x,y)$ এৰে পূৰণ কৰাৰ পাছত যদি $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ সমীকৰণটো যথার্থ হয়, তেনেহ'লে $\mu(x,y)$ অক অনুকলন গুণক (integrating factor I.F) বোলে।

উদাহৰণস্বৰূপে $xdy - ydx = 0$ সমীকৰণটো যথার্থ নহয়, কিয়নো

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(-y) = -1$ কিন্তু $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1$.

এটা ফলন $\mu(x,y)$ ৰে পূৰণ কৰি এইটো যথার্থ কৰিব পাৰি আৰু এইটো বিভিন্ন উপায়ে কৰিব পাৰি।

(i) $\mu_1(x,y) = \frac{1}{x^2}$ এটা I.F, কিয়নো $\frac{1}{x^2}(xdy - ydx) = d\left(\frac{y}{x}\right)$

(ii) $\mu_2(x,y) = \frac{1}{y^2}$ এটা I.F, কিয়নো $\frac{1}{y^2}(xdy - ydx) = -d\left(\frac{x}{y}\right)$

(iii) $\mu_3(x,y) = \frac{1}{xy}$ এটা I.F, কিয়নো $\frac{1}{xy}(xdy - ydx) = d\left[\log\frac{y}{x}\right]$

(iv) $\mu_4(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$ এটা I.F, কিয়নো $\frac{1}{x^2+y^2}(xdy - ydx)$

$$= \frac{\frac{xdy - ydx}{x^2}}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

$$= \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$$

প্ৰমেয় ঃ অনুকলন গুণকৰ সংখ্যা অসীম।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল $Mdx + Ndy = 0$ ৰ $\mu(x, y)$ এটা I.F. গতিকে, এটা ফলন $\mu(x, y)$ থাকিব যাতে $\mu Mdx + \mu Ndy = du$.

যিকোনো ফলন $f(u)$ ৰে উভয়পক্ষক পূৰণ কৰি, আমি পাওঁ,

$(\mu f(u))Mdx + (\mu f(u))Ndy = f(u)du = \phi'(u)du$, ধৰা হ'ল।

তেনেহ'লে সোঁপক্ষ RHS $= d\phi(x, y)$, এটা পূৰ্ণ অৱকল।

$\therefore (\mu f(u))[Mdx + Ndy]$ এটা পূৰ্ণ অৱকল।

$\therefore Mdx + Ndy = 0$ ৰ $\mu f(u)$এটা I.F. যিহেতু f এটা স্বেচ্ছ ফলন, $\mu f(u)$ক অসীমভাৱে বাছিব পাৰি।

$Mdx + Ndy = 0$ সমীকৰণটোক সমাধান কৰিবৰ বাবে যদি যথার্থ কৰিবলগীয়া হয়, তেনেহ'লে অনুকলন গুণক উলিয়াওঁতে কেতিয়াবা অসুবিধা পোৱা যায়। তলত অনুকলন গুণক উলিওৱাৰ কেইটামান পদ্ধতিৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ল।

I. নিৰীক্ষণ পদ্ধতিৰ দ্বাৰা অনুকলন গুণক (I.F.) নির্ণয়

নিৰীক্ষণৰ দ্বাৰা (inspection) IF উলিয়াবলৈ হ'লে প্ৰদত্ত সমীকৰণটোৰ পদবোৰক এনেদৰে সজাব লাগে যাতে পূৰ্ণ অৱকল (total differential) পোৱা যায়। উদাহৰণস্বৰূপে–

(i) $d(xy) = ydx + xdy$ (ii) $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$

(iii) $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{x^2}$ (iv) $d\left(\frac{1}{xy}\right) = \frac{-(xdy + ydx)}{x^2y^2}$

(v) $\frac{1}{2}d(x^2 + y^2) = xdx + ydy$ (vi) $\frac{1}{2}d(\log(x^2 + y^2)) = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$

(vii) $d\left(\log\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{xy}$ (viii) $d\left(\log\frac{y}{x}\right) = \frac{xdy - ydx}{xy}$

(ix) $d\left(\tan^{-1}\frac{x}{y}\right)=\frac{ydx-xdy}{x^2+y^2}$ (x) $d\left(\tan^{-1}\frac{y}{x}\right)=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$

উদাহৰণ 1 ঃ সমাধান কৰক (i) $y\left(2xy+e^x\right)dx=e^x dy$

(ii) $xdx+ydy=a\left(x^2+y^2\right)dy$

(iii) $\left(2xy^2-y\right)dx+xdy=0$

(iv) $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}dx$

(v) $xdx=y\left(x^2+y^2-1\right)dy$

(vi) $ye^{\frac{x}{y}}dx=\left(xe^{\frac{x}{y}}+y^2\right)dy$

(vii) $ydx-xdy+\log xdx=0$

সমাধান ঃ (i) $ye^x dx-e^x dy+2xy^2dx=0$

y^2 এৰে হৰণ কৰি, আমি পাওঁ

$$\frac{ye^x dx-e^x dy}{y^2}+2xdx=0$$

বা $d\left(\frac{e^x}{y}\right)+d\left(x^2\right)=0$

অনুকলন কৰি, আমি পাওঁ

$\frac{e^x}{y}+x^2=C$, এইটোৱেই নির্ণেয় সমাধান।

(ii) $xdx+ydy=a\left(x^2+y^2\right)dy$

বা $\frac{2xdx+2ydy}{x^2+y^2}=2ady$

বা $\frac{d\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=2ady$

অনুকলন কৰি, আমি পাওঁ

$\log\left(x^2+y^2\right)=2ay+C$, এইটোৱেই নির্ণেয় সমাধান।

(iii) $2xy^2dx+\left(xdy-ydx\right)=0$

বা $2xdx+\frac{xdy-ydx}{y^2}=0$

বা $d\left(x^2\right)-d\left(\frac{x}{y}\right)=0$

অনুকলন কৰি, আমি পাওঁ

$$x^2-\frac{x}{y}=C$$

বা $x^2y-x=Cy$, এইটোৱেই নির্ণেয় সমাধান।

(iv) $xdy-ydx=\sqrt{x^2+y^2}\,dx$

বা $\frac{xdy-ydx}{\sqrt{x^2+y^2}}=dx$

বা $\frac{\frac{xdy-ydx}{x^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}=\frac{1}{x}dx$

অনুকলন কৰি, আমি পাওঁ

$$\int\frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}}=\int\frac{1}{x}dx\,,$$

বা $\log\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)=\log x+\log C$

বা $\log\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right)=\log\left(Cx\right)$

বা $\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=Cx$

বা $y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$, এইটোৱেই নির্ণেয় সমাধান।

(v) $xdx=y\left(x^2+y^2-1\right)dy$

বা $xdx+ydy=y\left(x^2+y^2\right)dy$

বা $\frac{d\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}=2ydy$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ

$\log\left(x^2+y^2\right)=y^2+C$, এইটোৱেই নির্ণেয় সমাধান।

(vi) $ye^{\frac{x}{y}}dx=\left(xe^{\frac{x}{y}}+y^2\right)dy$

বা $e^{\frac{x}{y}}\left(ydx-xdy\right)=y^2dy$

বা $e^{\frac{x}{y}}\dfrac{ydx-xdy}{y^2}=dy$

বা $e^{\frac{x}{y}}d\left(\dfrac{x}{y}\right)=dy$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ

$e^{\frac{x}{y}}=y+C$, এইটোৱেই নির্ণেয় সমাধান।

(vii) $ydx-xdy+\log xdx=0$

বা $-\dfrac{xdy-ydx}{x^2}+\dfrac{\log x}{x^2}dx=0$

বা $-d\left(\dfrac{y}{x}\right)-\log x.\dfrac{1}{x^2}dx=0$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ

$-\dfrac{y}{x}-\left[-\log x.\dfrac{1}{x}-\int\dfrac{1}{x}.\dfrac{-1}{x}dx\right]=C$

বা $y+\log x+1=Cx$

বা $y+\log x+1-Cx=0$, এইটোৱেই নির্ণেয় সমাধান।

II. সুষম সমীকৰণ $Mdx+Ndy=0$ ৰ সমাধান

প্ৰমেয় ঃ যদি $Mdx+Ndy=0$ এটা r ম মাত্ৰাৰ সুষম সমীকৰণ, তেনেহ'লে $\dfrac{1}{Mx+Ny}$

এটা অনুকলন গুণক যদি $Mx+Ny\neq 0$.

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল $M=x^r\phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ আৰু $N=x^r\psi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ সমীকৰণটোক $\dfrac{1}{Mx+Ny}$ ৰে পূৰণ কৰি, আৰু M আৰু N অৰ মান বহুৱাই আমি পাওঁ

$$\frac{x^r\phi\left(\frac{y}{x}\right)}{x^{r+1}\phi\left(\frac{y}{x}\right)+yx^r\psi\left(\frac{y}{x}\right)}dx+\frac{x^r\psi\left(\frac{y}{x}\right)}{x^{r+1}\phi\left(\frac{y}{x}\right)+x^r y\psi\left(\frac{y}{x}\right)}dy=0$$

এই সমীকৰণটো যথার্থ হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰি চোৱা যাওক।

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^r\phi\left(\frac{y}{x}\right)}{x^{r+1}\phi\left(\frac{y}{x}\right)+yx^r\psi\left(\frac{y}{x}\right)}\right)$$

$$=\frac{\phi'\left(\frac{y}{x}\right).\frac{1}{x}\left\{x\phi\left(\frac{y}{x}\right)+y\psi\left(\frac{y}{x}\right)\right\}-\phi\left(\frac{y}{x}\right)\left\{x\phi'\left(\frac{y}{x}\right).\frac{1}{x}+\psi\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}\right)\right\}}{\left(x\phi\left(\frac{y}{x}\right)+y\psi\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2}$$

$$=\frac{\phi'\phi+\frac{y}{x}\phi'\psi-\phi'\phi-\phi\psi-\frac{y}{x}\phi\psi'}{(x\phi+y\psi)^2}$$

$$=\frac{\frac{y}{x}(\phi'\psi-\phi\psi')-\phi\psi}{(x\phi+y\psi)^2} \qquad \text{... (1)}$$

সেইদৰে, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi\left(\frac{y}{x}\right)}{x\phi\left(\frac{y}{x}\right)+y\psi\left(\frac{y}{x}\right)}\right)$

$$=\frac{\psi'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)\left\{x\phi\left(\frac{y}{x}\right)+y\psi\left(\frac{y}{x}\right)\right\}-\psi\left(\frac{y}{x}\right)\left\{\phi\left(\frac{y}{x}\right)+x\phi'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)+y\phi'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)\right\}}{\left(x\phi\left(\frac{y}{x}\right)+y\psi\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2}$$

$$=\frac{-\frac{y}{x}\phi\psi'-\frac{y^2}{x^2}\psi\psi'-\phi\psi+\psi\phi'.\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}\psi\psi'}{\left(x\phi\left(\frac{y}{x}\right)+y\psi\left(\frac{y}{x}\right)\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{y}{x}\left(\phi'\psi - \psi'\phi\right) - \phi\psi}{\left(x\phi + y\psi\right)^2} \quad \text{... (2)}$$

(1) আৰু (2) ৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে যথার্থতাৰ চর্ত সিদ্ধ হয়। গতিকে $\frac{1}{Mx + Ny}$ এটা অনুকলন গুণক।

উদাহৰণ 2 ঃ সমাধান কৰক $\left(x^2y - 2xy^2\right)dx - \left(x^3 - 3x^2y\right)dy = 0$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকৰণটো x আৰু y ৰ সুষম সমীকৰণ।

$$\text{I.F} = \frac{1}{Mx + Ny} = \frac{1}{\left(x^2y - 2xy^2\right)x + \left(-x^3 + 3x^2y\right)y}$$

$$= \frac{1}{x^3y - 2x^2y^2 - x^3y + 3x^2y^2}$$

$$= \frac{1}{x^2y^2}$$

প্রদত্ত সমীকৰণটোত $\frac{1}{x^2y^2}$ এৰে পূৰণ কৰি আমি পাওঁ

$$\left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right)dx + \left(-\frac{x}{y^2} + \frac{3}{y}\right)dy = 0$$

এইটো এটা যথার্থ সমীকৰণ, কিয়নো $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right) = -\frac{1}{y^2}$ আৰু

$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^2} + \frac{3}{y}\right) = -\frac{1}{y^2}$.

∴ সমাধানটো হ'ল

$$y = \int_{\text{ধ্রুৱক}} \left(\frac{1}{y} - \frac{2}{x}\right)dx + \int \frac{3}{y}dy = C \quad (N \text{ অৰ পৰা } x \text{ যুক্ত পদ বাদ দিয়া হৈছে})$$

বা $\frac{x}{y} - 2\log x + 3\log y = C$.

উদাহৰণ 3 ঃ সমাধান কৰক $y^2dx + \left(x^2 - xy - y^2\right)dy = 0$

সমাধান ঃ এইটো এটা সুষম সমীকৰণ।

$$\text{I.F} = \frac{1}{Mx + Ny} = \frac{1}{xy^2 + x^2y - xy^2 - y^3}$$

$$= \frac{1}{y\left(x^2 - y^2\right)}$$

প্রদত্ত সমীকৰণটোক $\frac{1}{y\left(x^2 - y^2\right)}$, এৰে পূৰণ কৰি, আমি পাওঁ

$$\frac{y}{x^2 - y^2}dx + \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{x^2 - y^2}\right)dy = 0$$

এতিয়া

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2 - y^2}\right) = -\frac{1}{2}\log\left(x^2 - y^2\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y} - \frac{x}{x^2 - y^2}\right) = -\frac{1}{2}\log\left(x^2 - y^2\right)$$

$\therefore$ সমীকৰণটো যথার্থ।

$\therefore$ সমাধানটো হ'ল

$$\int \frac{y}{x^2 - y^2}dx + \int \frac{1}{y}dy = C$$

y = ধ্ৰুৱক x বিহীন পদবোৰ

বা $\frac{y}{2y}\log\frac{x-y}{x+y} + \log y = \log C$

বা $\log y\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = \log C$

বা $y\sqrt{\frac{x-y}{x+y}} = C$

বা $y^2\left(x-y\right) = C^2\left(x+y\right).$

III (A): $f_1\left(xy\right)ydx + f_2\left(xy\right)xdy = 0$ আকাৰৰ সমীকৰণৰ বাবে অনুকলন গুণক হ'ল $\frac{1}{xyf_1\left(xy\right) - xyf_2\left(xy\right)}$ যদি হৰ শূন্য নহয়।

প্ৰমাণ ঃ প্রদত্ত সমীকৰণটোক $\frac{1}{xyf_1\left(xy\right) - xyf_2\left(xy\right)}$, এৰে পূৰণ কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{yf_1\left(xy\right)dx}{xy\left\{f_1\left(xy\right) - f_2\left(xy\right)\right\}} + \frac{xf_2\left(xy\right)dx}{xy\left\{f_1\left(xy\right) - f_2\left(xy\right)\right\}} = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2}{x\left(f_1 - f_2\right)}\right) = \frac{x^2 f_1'\left(f_1 - f_2\right) - f_1\left\{x^2\left(f_1' - f_2'\right)\right\}}{x^2\left(f_1 - f_2\right)^2}$$

$$= \frac{f_1 f_2' - f_1' f_2}{\left(f_1 - f_2\right)^2}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_1}{y(f_1-f_2)}\right)=\frac{y^2f_2'(f_1-f_2)-f_2\{y^2(f_1'-f_2')\}}{y^2(f_1-f_2)^2}$$

$$=\frac{f_1f_2'-f_1'f_2}{(f_1-f_2)^2}$$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$. গতিকে সমীকৰণটো এটা যথার্থ সমীকৰণ আৰু ইয়াক পূৰ্বে আলোচনা কৰা পদ্ধতিৰ দ্বাৰা সমাধান কৰিব পাৰি।

III (B) : $\int\frac{f(xy)+F(xy)}{f(xy)-F(xy)}\frac{d(xy)}{xy}+\log\frac{x}{y}=C$

সমীকৰণৰ সহায়ত দেখুওৱাক যে $f(xy)ydx+F(xy)xdy=0$ ৰ $\frac{1}{xy\{f(xy)-F(xy)\}}$ এটা অনুকলন গুণক। ইয়াৰ সহায়ত সমাধান কৰক

$(x^2y^2+xy+1)ydx-x(x^2y^2-xy+1)dy=0$ আমি

$\frac{yf(xy)dx+xF(xy)dy}{xy\{f(xy)-F(xy)\}}$ এটা পূৰ্ণ অৱকল বুলি দেখুৱাম।

$$\frac{yf(xy)dx+xF(xy)dy}{xy\{f(xy)-F(xy)\}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left\{(xyf(xy)+xyF(xy))\left(\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}\right)+(xyf(xy)-xyF(xy))\left(\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}\right)\right\}}{xyf(xy)-xyF(xy)}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{xyf(xy)+xyF(xy)}{xyf(xy)-xyF(xy)}\frac{d(xy)}{xy}+\frac{1}{2}\frac{ydx-xdy}{xy}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{f(xy)+F(xy)}{f(xy)-F(xy)}\frac{d(xy)}{xy}+\frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{\left(\frac{x}{y}\right)}\right\}$$

$$\therefore\ \int\frac{f(xy)ydx+F(xy)xdy}{xyf(xy)-xyF(xy)}=\frac{1}{2}\left[\int\frac{f(xy)+F(xy)}{f(xy)-F(xy)}\frac{d(xy)}{xy}+\log\frac{x}{y}\right]$$

$$=\frac{1}{2}C$$

$\therefore \quad \dfrac{f(xy)ydx+F(xy)xdy}{xyf(xy)-xyF(xy)}=d\left(\dfrac{1}{2}C\right)$ এটা পূৰ্ণ অৱকল।

$\therefore \quad \dfrac{yf(xy)dx+xF(xy)dy}{xy\{f(xy)-F(xy)\}}=0$ এটা যথার্থ সমীকৰণ।

আৰু $f(xy)ydx+F(xy)xdy=0$ ৰ $\dfrac{1}{xy\{f(xy)-F(xy)\}}$ এটা অনুকলন গুণক।

দ্বিতীয় অংশ ঃ উপৰিউক্ত ফলৰ সহায়ত আমি পাওঁ যে

$(x^2y^2+xy+1)ydx-x(x^2y^2-xy+1)dy=0$ ৰ অনুকলন গুণক হ'ল

$$\frac{1}{xy\{x^2y^2+xy+1+x^2y^2-xy+1\}}=\frac{1}{xy(2x^2y^2+2)}$$

$$\therefore \quad \frac{x^2y^2+xy+1}{2x(x^2y^2+1)}dx+\frac{xy-x^2y^2-1}{2y(x^2y^2+1)}dy=0$$

বা $\left(\dfrac{y}{2(1+x^2y^2)}+\dfrac{1}{2x}\right)dx+\left(\dfrac{x}{2(1+x^2y^2)}-\dfrac{1}{2y}\right)dy=0$

$\therefore$ ইয়াৰ সমাধান হ'ল

$$\frac{1}{2y}\int\frac{ydx}{1+x^2y^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{dy}{y}=\log C$$

বা $\dfrac{1}{2}\tan^{-1}(xy)+\dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{x}{y}\right)=\log C$

বা $C^2y=xe^{\tan^{-1}(xy)}$.

উদাহৰণ 4 ঃ সমাধান কৰক $(1+xy)ydx+(1-xy)xdy=0$

সমাধান ঃ সমীকৰণটো $f_1(xy)ydx+f_2(xy)xdy=0$ আকাৰৰ।

$$\text{I.F}=\frac{1}{Mx-Ny}=\frac{1}{xy(1+xy)-xy(1-xy)}=\frac{1}{2x^2y^2}$$

প্ৰদত্ত সমীকৰণটোক $\dfrac{1}{2x^2y^2}$ এৰে পূৰণ কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{1+xy}{2x^2y}dx+\frac{1-xy}{2xy^2}dy=0$$

এইটো এটা যথার্থ সমীকৰণ আৰু ইয়াৰ সমাধান হ'ল

$$y=\int\left(\frac{1}{2x^2y}+\frac{1}{2x}\right)dx+\int-\frac{1}{2y}dy=\log C$$

বা $-\frac{1}{2xy}+\frac{1}{2}\log x-\frac{1}{2}\log y=\log C$

বা $-\frac{1}{xy}=\log\left(\frac{C^2y}{x}\right)$

বা $\frac{C^2y}{x}=e^{-\frac{1}{xy}}$

বা $C^2y=xe^{-\frac{1}{xy}}$.

উদাহৰণ 5 ঃ সমাধান কৰক $y\left(xy+2x^2y^2\right)dx+x\left(xy-x^2y^2\right)dy=0$

সমাধান ঃ সমীকৰণটো $f_1(xy)ydx+f_2(xy)xdy=0$ আকাৰৰ।

$$\text{I.F}=\frac{1}{xy\{f(xy)-F(xy)\}}=\frac{1}{xy\left(xy+2x^2y^2\right)-xy\left(xy-x^2y^2\right)}$$

$$=\frac{1}{3x^3y^3}$$

∴ প্ৰদত্ত সমীকৰণটোক I.F, এৰে পূৰণ কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{y(1+2xy)}{x^2y^2}dx+\frac{x(1-xy)}{x^2y^2}dy=0$$

বা $\left(\frac{1}{x^2y}+\frac{2}{x}\right)dx+\left(\frac{1}{xy^2}-\frac{1}{y}\right)dy=0$

সমীকৰণটো যথার্থ আৰু ইয়াৰ সমাধান হ'ল

$$\int_{y=}\left(\frac{1}{x^2y}+\frac{2}{x}\right)dx+\int-\frac{1}{y}dy=\log C$$

বা $-\frac{1}{xy}+2\log x-\log y=\log C$

বা $-\frac{1}{xy}=\log\frac{Cy}{x^2}$

বা $\frac{Cy}{x^2}=e^{-\frac{1}{xy}}$

বা $Cy=x^2e^{-\frac{1}{xy}}$

IV (A) যদি $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=f(x)$ এটা x অৰ ফলন বা ধ্ৰুৱক হয়, তেনেহ'লে $Mdx+Ndy=0$ ৰ $e^{\int f(x)dx}$ এটা অনুকলন গুণক।

প্ৰমাণ ঃ আমি দেখুৱাম যে $\left(Me^{\int f(x)dx}\right)dx+\left(Ne^{\int f(x)dx}\right)dy=0$ এটা যথার্থ সমীকৰণ অর্থাৎ বাওঁপক্ষ এটা পূৰ্ণ অৱকল।

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(Me^{\int f(x)dx}\right)=e^{\int f(x)dx}\frac{\partial M}{\partial y}$$

আৰু $\frac{\partial}{\partial x}\left(Ne^{\int f(x)dx}\right)=e^{\int f(x)dx}\frac{\partial N}{\partial x}+Ne^{\int f(x)dx}.f(x)$

$$=e^{\int f(x)dx}\left(\frac{\partial N}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right),\ Nf(x)$$ অৰ ঠাইত $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$ বহুৱাই

$$=e^{\int f(x)dx}\frac{\partial M}{\partial y}$$

$\therefore \frac{\partial}{\partial y}\left(Me^{\int f(x)dx}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(Ne^{\int f(x)dx}\right).$

$\therefore Mdx+Ndy=0$ ৰ $e^{\int f(x)dx}$ এটা অনুকলন গুণক।

IV (B). যদি $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=f(y)$ এটা y ৰ ফলন হয়, তেনেহ'লে $Mdx+Ndy=0$ ৰ $e^{\int f(y)dy}$ এটা অনুকলন গুণক।

প্ৰমাণ ঃ $\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{\int f(y)dy}M\right)=e^{\int f(y)dy}.f(y)M+e^{\int f(y)dy}\frac{\partial M}{\partial y}$

$$=e^{\int f(y)dy}\left\{\frac{\partial M}{\partial y}+f(y)M\right\}$$

$$=e^{\int f(y)dy}\left\{\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right\}$$

$$=e^{\int f(y)dy}.\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$= \frac{\partial\left\{e^{\int f(y)dy}.N\right\}}{\partial x}$$

$\therefore Mdx + Ndy = 0$ এটা যথার্থ সমীকৰণ আৰু $Mdx + Ndy = 0$ ৰ $e^{\int f(y)dy}$ এটা অনুকলন গুণক।

উদাহৰণ 6 ঃ সমাধান কৰক (i) $\left(xy^2 - e^{\frac{1}{x^3}}\right)dx - x^2ydy = 0$

(ii) $\left(xy^3 + y\right)dx + 2\left(x^2y^2 + x + y^4\right)dy = 0$

সমাধান ঃ (i) $M = xy^2 - e^{\frac{1}{x^3}}$ আৰু $N = -x^2y$

$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{2xy + 2xy}{-x^2y} = -\frac{4}{x}$, এটা x অৰ ফলন

$\text{I.F} = e^{-\int\frac{4}{x}dx} = e^{-4\log x} = x^{-4}$

উভয় পক্ষক x^{-4} এৰে পূৰণ কৰি আমি পাওঁ

$\left(x^{-3}y^2 - x^{-4}e^{\frac{1}{x^3}}\right)dx - x^{-2}ydy = 0$, এইটো এটা যথার্থ সমীকৰণ।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান

$$\therefore y^2\int x^{-3}dx - \int e^{\frac{1}{x^3}}.x^{-4}dx + 0 = C$$

বা $\frac{y^2x^{-2}}{-2} + \frac{1}{3}\int e^u du = C$ [$u = x^{-3}$ বহুৰাই, $du = -3x^{-4}dx$]

বা $-\frac{1}{2}\frac{y^2}{x^2} + \frac{1}{3}e^{x^{-3}} = C$.

(ii) ইয়াত $M = xy^3 + y$ আৰু $N = 2\left(x^2y^2 + x + y^4\right)$

$\therefore \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = \frac{1}{y\left(xy^2+1\right)}\left(4xy^2 + 2 - 3xy^2 - 1\right) = \frac{1}{y} = f(y)$ এটা y ৰ ফলন।

$\text{I.F} = e^{\int f(y)dy} = e^{\log y} = y$

সমীকৰণটোক y ৰে পূৰণ কৰি আমি পাওঁ

$\left(xy^4 + y^2\right)dx + 2\left(x^2y^3 + xy + y^5\right)dy = 0$, এইটো এটা যথার্থ সমীকৰণ।

সমীকৰণটোৰ সমাধান হ'ল

$y^4\int xdx + y^2\int dx + 2\int y^5dy = C$

বা, $\frac{1}{2}x^2y^4 + xy^2 + \frac{1}{3}y^6 = C$.

IV(c) দেখুওৱাক যে $(Pdx + Qdy)e^{\int f(x)dx} = 0$ সমীকৰণে যথার্থতাৰ চর্ত সিদ্ধ কৰে যদি $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} + Qf(x)$.

ইয়াৰ পৰা দেখুওৱাক যে অনুকলন গুণক নির্ণয় কৰিব পাৰি যদি $\frac{1}{Q}\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right]$ এটা x অৰ ফলন হয়। ইয়াৰ সহায়ত সমাধান কৰক $\left(x^3 + xy^4\right)dx + 2y^3dy = 0$.

ধৰা হ'ল $M = Pe^{\int f(x)dx}$ আৰু $N = Qe^{\int f(x)dx}$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}e^{\int f(x)dx}$ আৰু $\frac{\partial N}{\partial x} = Qe^{\int f(x)dx}.f(x) + \frac{\partial Q}{\partial x}e^{\int f(x)dx}$

$\therefore$ যথার্থতাৰ চর্ত সিদ্ধ হ'ব যদিহে $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

বা $\frac{\partial P}{\partial y}e^{\int f(x)dx} = Qe^{\int f(x)dx}.f(x) + \frac{\partial Q}{\partial x}e^{\int f(x)dx}$

বা $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} + Qf(x)$

দ্বিতীয় অংশৰ বাবে, আমি দেখিলোঁ যে $(Pdx + Qdy)e^{\int f(x)dx} = 0$ যথার্থ হ'ব, অর্থাৎ $Pdx + Qdy = 0$ ৰ $e^{\int f(x)dx}$ এটা অনুকলন গুণক যদি

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} + Qf(x)$

অর্থাৎ $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = f(x)$, এটা x অৰ ফলন।

সমাধান কৰিব লাগে ঃ $\left(x^3 + xy^4\right)dx + 2y^3dy = 0$

ইয়াত $P = x^3 + xy^4$ আৰু $Q = 2y^3$.

$\therefore \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = \frac{1}{2y^3}\left(4xy^3 - 0\right) = 2x = f(x)$

$\text{I.F} = e^{\int f(x)dx} = e^{\int 2xdx} = e^{x^2}$

সমীকৰণটোৰ উভয় পক্ষক e^{x^2} এৰে পূৰণ কৰি, আমি পাওঁ

$e^{x^2}\left(x^3 + xy^4\right)dx + e^{x^2}.2y^3dy = 0$

সমীকৰণটো যথার্থ।

সমীকৰণটোৰ সমাধান হ'ল

$$\int e^{x^2}.x^2.xdx + y^4\int e^{x^2}xdx = C$$

বা $\frac{1}{2}\int e^u udu + \frac{1}{2}y^4\int e^u du = C \qquad \left(u = x^2\right)$

বা $\frac{1}{2}\left[ue^u - \int e^u du + y^4e^u\right] = C$

বা $ue^u - e^u + y^4e^u = 2C$

বা $e^{x^2}\left(x^2 - 1 + y^4\right) = k$.

(V) $x^a y^b\left(mydx + nxdy\right) + x^c y^d\left(pydx + qxdy\right) = 0$,

আকাৰৰ সমীকৰণৰ বাবে অনুকলন গুণক হ'ল $x^h y^k$.

উভয় পক্ষক $x^h y^k$ ৰে পূৰণ কৰি আমি পাওঁ

$x^{a+h}y^{b+k}\left(mydx + nxdy\right) + x^{c+h}y^{d+k}\left(pydx + qxdy\right) = 0$ ই

$Mdx + Ndy = 0$ আকাৰৰ

ইয়াত $M = mx^{a+h}y^{b+k+1} + px^{c+h}y^{d+k+1}$

আৰু $N = nx^{a+h+1}y^{b+k} + qx^{c+h+1}y^{d+k}$.

যথার্থতাৰ চর্তৰ পৰা আমি পালোঁ

$$mx^{a+h}.(b+k+1)y^{b+k} + px^{c+h}.(d+k+1)y^{d+k}$$
$$= n(a+h+1)x^{a+h}y^{b+k} + q(c+h+1)x^{c+h}y^{d+k}$$

সহগবোৰ তুলনা কৰি আমি পাওঁ

$m(b+k+1) = n(a+h+1)$ and $p(d+k+1) = q(c+h+1)$

বা $\frac{b+k+1}{n} = \frac{a+h+1}{m}$ and $\frac{d+k+1}{q} = \frac{c+h+1}{p}$.

এই সমীকৰণ দুটা সমাধান কৰি h আৰু k ৰ মান উলিয়াই অনুকলন গুণক নির্ধাৰণ কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 7 ঃ সমাধান কৰক $y\left(xy + 2x^2y^2\right)dx + x\left(xy - x^2y^2\right)dy = 0$

সমাধান ঃ $x^a y^b\left(mydx + nxdy\right) + x^c y^d\left(pydx + qxdy\right) = 0$, প্ৰামাণিক আকাৰত সমীকৰণটো লিখা হ'ল ঃ $xy\left(ydx + xdy\right) + x^2y^2\left(2ydx - xdy\right) = 0$.

ধৰা হ'ল $x^h y^k$ এটা অনুকলন গুণক।

$\therefore \frac{1+h+1}{1} = \frac{1+k+1}{1}$ আৰু $\frac{2+h+1}{2} = \frac{2+k+1}{-1}$

বা $h = k$ আৰু $-3-h = 6+2k$.

সমাধান কৰি $h=k=-3$.

$\therefore$ অনুকলন গুণক $\frac{1}{x^3y^3}$.

$\therefore$ সমীকৰণটো হ'বগৈ

$\left(\frac{1}{x^2y}+\frac{2}{x}\right)dx+\left(\frac{1}{xy^2}-\frac{1}{y}\right)dy=0$, এইটো এটা যথার্থ সমীকৰণ আৰু ইয়াৰ সমাধান হ'ল

$$\frac{1}{y}\left(-\frac{1}{x}\right)+2\log x-\log y=C$$

বা $2\log x-\log y-\frac{1}{xy}=C$.

উদাহৰণ 8 ঃ সমাধান কৰক $x(4ydx+2xdy)+y^3(3ydx+5xdy)=0$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল প্ৰদত্ত সমীকৰণটোৰ x^hy^k এটা অনুকলন গুণক।

$$\therefore \quad \frac{1+h+1}{4}=\frac{k+1}{2} \text{ ম } \frac{h+1}{3}=\frac{3+k+1}{5}$$

বা $2k+2=2+h$ আৰু $12+3k=5h+5$

বা $h=2k$ আৰু $5h-3k=7$

সমাধান কৰি আমি পাওঁ $h=2$ আৰু $k=1$.

$\therefore$ সমীকৰণটোৰ x^2y এটা অনুকলন গুণক।

সমীকৰণটোক x^2y ৰে পূৰণ কৰি আমি পাওঁ

$(4x^3y^2+3x^2y^5)dx+(2x^4y+5x^3y^4)dy=0$, এইটো এটা যথার্থ সমীকৰণ।

সমীকৰণটোৰ সমাধান হ'ল

$$4y^2\int x^3dx+3y^5\int x^2dx+0=C$$

বা $y^2x^4+x^3y^5=C$.



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

প্ৰশ্ন ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(i) $ydx-xdy+(1+x^2)dx+x^2\sin ydy=0$

(ii) $(x^2y-2xy^2)dx-(x^3-3x^2y)dy=0$

(iii) $(2x^2y^2+y)dx-(x^3y-3x)dy=0$

(iv) $(xy\sin xy+\cos xy)ydx+(xy\sin xy-\cos xy)xdy=0$

(v) $(x^2+y^2+x)dx+xydy=0$



৯.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ যথার্থ হোৱাৰ আৱশ্যকীয় আৰু পর্যাপ্ত চর্ত হ'ল $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$.
- যদি $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ যথার্থ হয়, তেনেহ'লে ইয়াৰ সমাধান হ'ল

  $\int_{y=\text{ধ্ৰুৱক}} Mdx + \int (N\text{– } x \text{ যুক্ত পদ})\, dy = C$
- এটা ফলন $\mu(x,y)\neq 0$ ৰে পূৰণ কৰাৰ পাছত যদি $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ সমীকৰণটো যথার্থ হয়, তেনেহ'লে $\mu(x,y)\neq 0$ অক $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ সমীকৰণৰ অনুকলন গুণক বুলি কোৱা হয়।



৯.৬ অধিক জানিবলৈ

1) Tenenbaum, Morris and Pollard, Harry. Ordinary Differential Equations, Dover Publications, Inc, N.Y 11501.
2) Differential Equations : An Introduction with Mathematica. Clay C. Ross, second Edition, Springer.
3) Differential Equations : Linear, Nonlinear, ordinary, partial. A.C. King, J. Billinggham and S.R. Otto, Cambridge-2003.
4) Differential equations with Application and Programs. S. Balachandra Rao and H.R. Anuradha, University Press(India) Limited 1996.



৯.৭ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ (a) এই ক্ষেত্রত $Mdx+Ndy=0$, আমি পাওঁ

$M=y^2e^{xy^2}+4x^3$ আৰু $N=2xye^{xy^2}-3y^2$

$\frac{\partial M}{\partial y}=2ye^{xy^2}+y^2.2xye^{xy^2}$

আৰু $\frac{\partial N}{\partial x} = 2ye^{xy^2} + y^2.2xye^{xy^2}$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

$\therefore$ সমীকৰণটো যথার্থ আৰু ইয়াৰ সমাধান হ'ল

$y = \int Mdx + \int$ (N অৰ x যুক্ত পদবোৰ) $dy = C$

বা $\int \left(y^2 e^{xy^2} + 4x^3\right)dx + \int \left(-3y^2\right)dy = C$

বা $y^2 \times \frac{1}{y^2} \times e^{xy^2} + 4 \times \frac{1}{4} \times x^4 - 3 \times \frac{y^3}{3} = C$

বা $e^{xy^2} + x^4 - y^3 = C$.

(b) নিজে চেষ্টা কৰক।

(c) ইয়াত $M = \cos x \tan y + \cos(x+y)$

$N = \sin x \sec^2 y + \cos(x+y)$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \cos x \sec^2 y - \sin(x+y) = \frac{\partial N}{\partial x}$

$\therefore$ সমীকৰণটো যথার্থ আৰু ইয়াৰ সমাধান হ'ল

$y = \int Mdx + \int$ (N অৰ x যুক্ত পদবোৰ) $dy = C$

বা $\int [\cos x \tan y + \cos(x+y)]dx = C$

বা $\sin x \tan y + \sin(x+y) = C$.

(d) নিজে চেষ্টা কৰক।

নির্ণেয় সমাধান হ'ল

$x^5 + x^3y^2 - x^2y^3 - y^5 = C$.

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) প্রদত্ত সমীকৰণটোক x^2 এৰে হৰণ কৰি আমি পাওঁ

$\frac{ydx - xdy}{x^2} + \left(\frac{1+x^2}{x^2}\right)dx + \sin y dy = 0$

বা $-\frac{xdy - ydx}{x^2} + \left(\frac{1}{x^2} + 1\right)dx + \sin y dy = 0$

বা $-d\left(\frac{y}{x}\right)+\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx+\sin ydy=0$

বা $-\frac{y}{x}+x-\left(\frac{1}{x}\right)-\cos\ y=c$

বা $-y+x^2-1-x\cos y=cx$, এইটোৱেই নির্ণেয় সমাধান।

(ii) প্রদত্ত সমীকৰণটো x আৰু y ৰ সুষম সমীকৰণ।

ইয়াত $M=x^2y-2xy^2$ আৰু $N=-x^3+3x^2y$

এতিয়া $Mx+Ny=x^3y-2x^2y^2-x^3y+3x^2y^2=x^2y^2\neq 0$

$\text{I.F}=\frac{1}{Mx+Ny}=\frac{1}{x^2y^2}$

উভয় পক্ষক $\frac{1}{x^2y^2}$ এৰে পূৰণ কৰি আমি পাওঁ

$\left(\frac{1}{y}-\frac{2}{x}\right)dx-\left(\frac{x}{y^2}-\frac{3}{y}\right)dy=0$, এইটো যথার্থ সমীকৰণ।

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হ'ল

$$y=\int\left(\frac{1}{y}-\frac{2}{x}\right)dx+\int\frac{3}{y}dy=C$$

বা $\frac{x}{y}-2\log x+3\log y=C$.

(iii) দিয়া আছে, $\left(2x^2y^2+y\right)dx+\left(3x-x^3y\right)dy=0$ ... (1)

উভয় পক্ষক অনুকলন গুণক (1) I.F x^hy^k ৰে পূৰণ কৰি আমি পাওঁ

$\left(2x^{h+2}y^{k+2}+x^hy^{k+1}\right)dx+\left(3x^{h+1}y^k-x^{h+3}y^{k+1}\right)dy=0$ ... (2)

এইটো যথার্থ হ'ব লাগিব। (2)ক $Mdx+Ndy=0$ ৰ সৈতে তুলনা কৰি আমি পাওঁ

$M=2x^{h+2}y^{k+2}+x^hy^{k+1}$ আৰু $N=3x^{h+1}y^k-x^{h+3}y^{k+1}$

(2) যথার্থ হ'বলৈ হ'লে, $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

$\Rightarrow 2(k+2)x^{h+2}y^{k+1}+(k+1)x^hy^k=3(h+1)x^hy^k-(h+3)x^{h+2}y^{k+1}$

$\Rightarrow 2(k+2)=-(h+3)$ আৰু $(k+1)=3(h+1)$

$\Rightarrow h+2k=-7$ আৰু $3h-k=-2$

$\Rightarrow h=-\frac{11}{7}$ আৰু $k=-\frac{19}{7}$

$\therefore$ (1) অৰ এটা I.F হ'ল $x^{-\frac{11}{7}}y^{-\frac{19}{7}}$. (1) অক $x^{-\frac{11}{7}}y^{-\frac{19}{7}}$ এৰে পূৰণ কৰি আমি পাওঁ

$$\left(2x^{\frac{3}{7}}y^{-\frac{5}{7}}+x^{-\frac{11}{7}}y^{-\frac{12}{7}}\right)dx+\left(3x^{-\frac{4}{7}}y^{-\frac{19}{7}}-x^{\frac{10}{7}}y^{-\frac{12}{7}}\right)dy=0$$

এইটো এটা যথার্থ সমীকৰণ। ইয়াৰ সমাধান হ'ল

$$\frac{2x^{\frac{10}{7}}y^{-\frac{5}{7}}}{\frac{10}{7}}+\frac{x^{-\frac{4}{7}}y^{-\frac{12}{7}}}{-\frac{4}{7}}=\frac{7C}{20}$$

বা $4x^{\frac{10}{7}}y^{-\frac{5}{7}}-5x^{-\frac{4}{7}}y^{-\frac{12}{7}}=C$

(iv) নিজে চেষ্টা কৰক।

নিৰ্ণেয় সমাধান হ'ল

$$\frac{x}{y}\sec xy=C$$
ধ্ৰুৱক

(v) নিজে চেষ্টা কৰক।

নিৰ্ণেয় সমাধান হ'ল

$3x^4+6x^2y^2+4x^3=C$.



৯.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(a) $\frac{dy}{dx}+\frac{y\cos x+\sin y+y}{\sin x+x\cos y+x}=0$

(b) $xdy+ydx+\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=0$

(c) $\left(a^2-2xy-y^2\right)dx-\left(x+y\right)^2dy=0$

(d) $\left(2ax+by\right)ydx+\left(ax+2by\right)xdy=0$

প্ৰশ্ন ২ ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(a) $\left(x^2-3xy+2y^2\right)dx+x\left(3x-2y\right)dy=0$

(b) $\left(x^2-2xy+5y^2\right)dx+\left(2y^2-7xy+x^2\right)dy=0$

(c) $(2x-y)e^{\frac{y}{x}}dx+\left(y+xe^{\frac{y}{x}}\right)dy=0$

(d) $y-x\frac{dy}{dx}=x+y\frac{dy}{dx}$

(e) $\left(2x^3-y^3\right)dy-y^2xdx=0$

(f) $\left(x^4+y^4\right)dx-xy^3dy=0$

(g) $y^2dx+\left(x^2-xy-y^2\right)dy=0$

(h) $\left(y^4-2x^3y\right)dx+\left(x^4-2xy^3\right)dy=0$

*** ***** ***