অধ্যায় ১০ ঃ প্ৰথম ক্ৰম আৰু উচ্চতৰ মাত্ৰাৰ অৱকল সমীকৰণ (FIRST ORDER AND HIGHER DEGREE DIFFERENTIAL EQUATIONS)

অধ্যায় গাঁথনি

10.1 উদ্দেশ্য

10.2 পৰিচয়

10.3 প্ৰথম ক্ৰম আৰু উচ্চতৰ ঘাতৰ অৱকল সমীকৰণ

10.3.1 p ৰ বাবে সমাধানযোগ্য সমীকৰণ

10.3.2 x অৰ বাবে সমাধানযোগ্য সমীকৰণ

10.3.2 y ৰ বাবে সমাধানযোগ্য সমীকৰণ

10.4 ক্লায়ৰেটৰ আকাৰ

10.4.1 ক্লায়ৰেটৰ আকাৰলৈ ৰূপান্তৰ যোগ্য সমীকৰণ

10.5 অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

10.6 অধিক জানিবলৈ

10.7 অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

10.8 আৰ্হি প্ৰশ্ন

১০.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- প্ৰথম ক্ৰম আৰু উচ্চতৰ ঘাতৰ অৱকল সমীকৰণৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- p ৰ বাবে সমাধানযোগ্য সমীকৰণৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- x অৰ বাবে সমাধানযোগ্য সমীকৰণৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- y ৰ বাবে সমাধানযোগ্য সমীকৰণৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- ক্লায়ৰেটৰ আকাৰৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।

১০.২ পৰিচয়

নৱম অধ্যায়ত আমি ৰৈখিক সমীকৰণৰ সমাধানৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিছোঁ। এই ক্ষেত্ৰত পৰতন্ত্ৰ চলক আৰু ইয়াৰ অৱকলজবোৰ প্ৰথম ক্ৰম আৰু প্ৰথম মাত্ৰাৰ। এই অধ্যায়ত আমি অৰৈখিক সমীকৰণৰ সমাধানৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। এই ক্ষেত্ৰত পৰতন্ত্ৰ চলক আৰু ইয়াৰ অৱকলজবোৰ প্ৰথম ক্ৰম আৰু উচ্চতৰ মাত্ৰাৰ। এনে ধৰণৰ সমীকৰণ সমাধান কৰাৰ কোনো নিৰ্দিষ্ট পদ্ধতি নাই। ইয়াত কিছুমান বিশেষ ধৰণৰ সমীকৰণ সমাধান পদ্ধতিৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব।

১০.৩ প্ৰথম ক্ৰম আৰু উচ্চতৰ মাত্ৰাৰ সমীকৰণ

প্ৰথম ক্ৰম আৰু উচ্চতৰ মাত্ৰাৰ অৱকল সমীকৰণ তলৰ চাৰিটা পদ্ধতিৰ এটা বা তাতোকৈ বেছি পদ্ধতিৰ সহায়ত সমাধান কৰিব পাৰি।

(a) p ৰ বাবে সমাধানযোগ্য সমীকৰণ, $\left(p = \frac{dy}{dx} \right)$

(b) y ৰ বাবে সমাধানযোগ্য সমীকৰণ ঃ $y = f(x, p)$

(c) x অৰ বাবে সমাধানযোগ্য সমীকৰণ ঃ $x = f(y, p)$

(d) ক্লায়ৰেটৰ সমীকৰণ ঃ $y = px + f(p)$

১০.৩.১ p ৰ বাবে সমাধানযোগ্য সমীকৰণ

প্ৰথম ক্ৰম আৰু nতম মাত্ৰাৰ এটা অৱকল সমীকৰণ লোৱা হ'ল ঃ

$$p^n + f_1(x, y)p^{n-1} + f_2(x, y)p^{n-2} + ... + f_{n-1}(x, y)p + f_n(x, y) = 0 \ldots (1)$$

ই p ৰ বাবে সমাধানযোগ্য।

বাওঁপক্ষক n টা ৰৈখিক উৎপাদকত ভাঙি, আমি পাওঁ

$$[p - \phi_1(x, y)][p - \phi_2(x, y)]..[p - \phi_n(x, y)] = 0$$

প্ৰত্যেকটো উৎপাদকৰ শূন্যৰ লগত সমতা স্থাপন কৰি, আমি পাওঁ

$$p = \phi_1(x, y),\ p = \phi_2(x, y),...,\ p = \phi_n(x, y).$$

এই n টা সমীকৰণৰ প্ৰতিটোৱে প্ৰথম ক্ৰম আৰু প্ৰথম মাত্ৰাৰ আৰু ইয়াক পঞ্চম অধ্যায়ত বৰ্ণনা কৰা যিকোনো পদ্ধতিৰে সমাধান কৰিব পাৰি।

ধৰা হ'ল এই n টা সমীকৰণৰ সমাধান

$F_1(x, y, c) = 0, F_2(x, y, c) = 0, ..., F_n(x, y, c) = 0$ এই n টা সমাধানে (1)অৰ সাধাৰণ সমাধান গঠন কৰিব। সাধাৰণ সমাধানটো এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$F_1(x, y, c).F_2(x, y, c)...F_n(x, y, c) = 0\ .$$

উদাহৰণ 1 ঃ সমাধান কৰক $p^2 + p\left(e^x + e^{-x}\right) + 1 = 0$

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত সমীকৰণৰ পৰা আমি পাওঁ

$$p^2 + p\left(e^x + e^{-x}\right) + 1 = 0$$

$$\text{বা } p\left(p + e^x\right) + e^{-x}\left(p + e^x\right) = 0$$

$$\text{বা } \left(p + e^x\right)\left(p + e^{-x}\right) = 0$$

$\therefore\ p + e^x = 0$, বা $p + e^{-x} = 0$

সমাধান কৰি আমি পাওঁ

$y + e^x + c_1 = 0$, বা $y - e^{-x} + c_2 = 0$

প্রদত্ত সমীকৰণটো প্রথম ক্রমৰ। সেয়ে ইয়াৰ সাধাৰণ সমাধানত মাত্র এটা Î¦ ¤ÕÃè¤ÞßÁï ±ÇÃÑ¥Á¢ü¸ÀÎ ÃÐÁÕ±ÇÃ c_1 আৰু c_2 ৰ ঠাইত মাত্র এটা ধ্রুৱক c বহুৱালোঁ। যিহেতু এই সমাধান দুটাৰ প্রতিটোৱে ইয়াৰ এটা সমাধান, গতিকে নির্ণেয় সমাধান হ'ল $(y+e^{x}+c)(y-e^{-x}+c)=0$.

উদাহৰণ 2 ঃ সমাধান কৰক $p^2+2py\cot x=y^2$

সমাধান ঃ p ৰ বাবে সমাধান কৰি আমি পাওঁ

$$p=\frac{1}{2}\left(-2y\cot x\pm\sqrt{4y^2\cot^2 x+4y^2}\right)$$

$$=-y\cot x\pm y\cos ecx \quad \text{... (1)}$$

(1) অৰ পৰা, $\frac{dy}{dx}=-y\cot x+y\cos ecx$

$$\text{বা } \frac{dy}{dx}=y(\cos ecx-\cot x)$$

$$\text{বা } \frac{dy}{y}=(\cos ecx-\cot x)dx$$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\log y=\log\tan\frac{x}{2}-\log\sin x+\log c$$

$$\text{বা } y=c\left(\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sin x}\right)=\frac{c}{\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right)}$$

$$\text{বা } y(1+\cos x)=c \quad \text{... (2)}$$

আকৌ, (1) অৰ পৰা $\frac{dy}{dx}=-y(\cot x+\cos ecx)$

$$\text{বা } \frac{dy}{y}=-(\cot x+\cos ecx)dx$$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $\log y=-\log\sin x-\log\tan\frac{x}{2}+\log c$

$$\text{বা } \quad y=\frac{c}{2\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$\text{বা } y(1-\cos x)=c \quad \text{... (3)}$$

(2) আৰু (3) একেলগ কৰি আমি পাওঁ

$y(1 \pm \cos x) = c$ এইটোৱেই নিৰ্ণেয় সমীকৰণ।

উদাহৰণ 3 ঃ সমাধান কৰক $\frac{dy}{dx} - \frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'ল $p - \frac{1}{p} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$

বা $p^2 - p\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right) - 1 = 0$

বা $p\left(p - \frac{x}{y}\right) + \frac{y}{x}\left(p - \frac{x}{y}\right) = 0$

বা $\left(p - \frac{x}{y}\right)\left(p + \frac{y}{x}\right) = 0$

বা $p = \frac{x}{y}, p = -\frac{y}{x}$

সমাধান কৰি, $p = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $x^2 - y^2 = c$

আকৌ $p = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 0$

বা $\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$

অনুকলন কৰি, আমি পাওঁ $xy = c$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সমাধান হ'ল $x^2 - y^2 = c$ আৰু $xy = c$

উদাহৰণ 4 ঃ সমাধান কৰক $p^3 + 3xp^2 - y^3p^2 - 3xy^3p = 0$

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'ল

$$p^3 + 3xp^2 - y^3p^2 - 3xy^3p = 0$$

বা $p^2(p + 3x) - py^3(p + 3x) = 0$

বা $(p^2 - py^3)(p + 3x) = 0$

বা $p(p - y^3)(p + 3x) = 0$

(i) যদি $p = 0$, তেনেহ'লে $\frac{dy}{dx} = 0$ বা $dy = 0$, $\therefore y = c$.

(ii) যদি $p-y^3=0$, তেনেহ'লে $\frac{dy}{dx}=y^3$ বা $\frac{dy}{y^3}=dx$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ, $-\frac{1}{2y^2}=x+c$

বা $2xy^2+2cy^2+1=0$

(iii) যদি $p+3x=0$ তেনেহ'লে $\frac{dy}{dx}+3x=0$ বা $dy+3xdx=0$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $y+\frac{3}{2}x^2=c$

বা $2y+3x^2-2c=0$

∴প্ৰদত্ত অৱকল সমীকৰণটোৰ সমাধান হ'ল

$(y-c)(2xy^2+2cy^2+1)(2y+3x^2-2c)=0$.



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ১

প্ৰশ্ন নং 1 ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(i) $p^3+2xp^2-y^2p^2-2xy^2p=0$

(ii) $p^2y^2\cos^2\alpha-2pxy\sin^2\alpha+y^2-x^2\sin^2\alpha=0$

(iii) $p^2-px+1=0$

(iv) $x^2p^2+xyp-6y^2=0$

১০.৩.২ x অৰ বাবে সমাধানযোগ্য সমীকৰণ

ধৰা হ'ল এটা প্ৰথম ক্ৰমৰ আৰু উচ্চতৰ মাত্ৰাৰ সমীকৰণক $x=f(y,p)$ ... (1) আকাৰলৈ ৰূপান্তৰ কৰিব পাৰি।

(1) অক y সাপেক্ষে অৱকলন কৰি ইয়াক তলৰ আকাৰলৈ ৰূপান্তৰ কৰিব পাৰি।

$$\frac{1}{p}=\frac{dx}{dy}=\phi\left(y,p,\frac{dp}{dx}\right)$$

ধৰা হ'ল এই নতুন অৱকল সমীকৰণক y আৰু p ত সমাধান কৰিব পাৰি।

ধৰা হ'ল ইয়াৰ সমাধান $F(y,p,c)=0$.

প্ৰদত্ত সমীকৰণৰ সহায়ত ইয়াৰ পৰা p অপনয়ন কৰি আমি নিৰ্ণেয় সমাধানটো পাম।

উদাহৰণ 1 ঃ সমাধান কৰক $x=4(p+p^2)$

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $x = 4\left(p + p^2\right)$ ... (1)

(1) অক y সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{1}{p} = 4(1+2p)\frac{dp}{dy}$$

বা $dy = 4p(1+2p)dp$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ

$$y = 4\int\left(p + 2p^2\right)dp = \frac{4}{2}p^2 + \frac{8}{3}p^3 + c$$

$y = 2p^2 + \frac{8}{3}p^3 + c$ এইটোৱেই নিৰ্ণেয় সমাধান।

উদাহৰণ 2 ঃ সমাধান কৰক $4yp^2 - 2px + y = 0$

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত সমীকৰণটোক এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$x = 2py + \frac{y}{2p} \quad \text{... (1)}$$

(1) অক y সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{1}{p} = 2\frac{dp}{dy}.y + 2p + \frac{2p - y2\frac{dp}{dy}}{4p^2}$$

$$= 2\frac{dp}{dy}.y + 2p + \frac{1}{2p} - \frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dy}$$

বা $0 = 2p + 2y\frac{dp}{dy} - \frac{1}{2}\frac{1}{p} - \frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dy}$

$$= 4p^2\left(\frac{1}{2p} + \frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dy}\right) - \left(\frac{1}{2p} + \frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dy}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2p} + \frac{y}{2p^2}\frac{dp}{dy}\right)\left(4p^2 - 1\right)$$

সমাধান কৰি আমি পাওঁ $1 + \frac{y}{p}\frac{dp}{dy} = 0$

বা $\frac{dy}{y} + \frac{dp}{p} = 0$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $yp = c$.

প্ৰদত্ত সমীকৰণত $p = \frac{c}{y}$ বহুৰাই আমি পাওঁ

$$4y.\frac{c^2}{y^2} - 2.\frac{c}{y}.x + y = 0$$

বা $4c^2 - 2cx + y^2 = 0$ এইটোৱেই নিৰ্ণেয় সমীকৰণ।

উদাহৰণ 3 ঃ সমাধান কৰক $y = 2px + y^2 p^3$

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত সমীকৰণটোক এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$x = \frac{y}{2p} - \frac{y^2 p^2}{2} \quad \ldots (1)$$

(1) অক y সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{1}{p} = \frac{2p - 2y\frac{dp}{dy}}{4p^2} - \frac{2yp^2 + y^2 2p\frac{dp}{dy}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{p - y\frac{dp}{dy}}{p^2} - yp^2 - y^2 p\frac{dp}{dy}$$

বা $0 = \frac{1}{2p} - \frac{y\frac{dp}{dy}}{2p^2} - yp^2 - y^2 p\frac{dp}{dy} - \frac{1}{p}$

বা $0 = \frac{1}{2p^2}y\frac{dp}{dy} + yp^2 + y^2 p\frac{dp}{dy} + \frac{1}{2p}$

বা $0 = yp\left(y\frac{dp}{dy} + p\right) + \frac{1}{2p^2}\left(y\frac{dp}{dy} + p\right)$

বা $0 = \left(y\frac{dp}{dy} + p\right)\left(yp + \frac{1}{2p^2}\right)$

সমাধান কৰি, $y\frac{dp}{dy} + p = 0$, চলক পৃথক কৰি আমি পাওঁ

$$\log py = \log c$$

বা $py = c$

বা $p = \frac{c}{y}$

প্ৰদত্ত সমীকৰণৰ পৰা p অপনয়ন কৰি আমি পাওঁ

$$y = \frac{2cx}{y} + y^2.\frac{c^3}{y^3}$$

বা $y^2 = 2cx + c^3$ এইটোৱেই নিৰ্ণেয় সমীকৰণ।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

প্ৰশ্ন নং 1 ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(i) $y^2 \log y = xyp + p^2$

(ii) $p = \tan\left(x - \frac{p}{1+p^2}\right)$ (iii) $p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0$

১০.৩.৩ y ৰ বাবে সমাধানযোগ্য সমীকৰণ

ধৰা হ'ল এটা প্ৰথম ক্ৰম আৰু উচ্চতৰ মাত্ৰাৰ অৱকল সমীকৰণ $y = f(x, p)$ ... (1) আকাৰৰ।

(1) অক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$p = \frac{dy}{dx} = \phi\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right)$$

যদি এই সমীকৰণটো সমাধান কৰা সম্ভৱ হয় আৰু $F(x, p, c) = 0$ ... (2) এটা সমাধান হয়, তেনেহ'লে (1) আৰু (2) ৰ পৰা p অপনয়ন কৰি আমি নিৰ্ণেয় সমাধানটো পাম। যদি p ৰ অপনয়ন সম্ভৱ নহয়, তেনেহ'লে x আৰু y ৰ বাবে (1) আৰু (2) সমাধান কৰি আমি $x = F_1(p, c)$ আৰু $y = F_2(p, c)$ সমাধান হিচাপে পাম।

উদাহৰণ 1 ঃ সমাধান কৰক $y = px + ap(1-p)$

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $y = px + ap(1-p)$ ... (1)

(1) অক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$p = \frac{dp}{dx}x + p + a\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx}a$$

বা $\frac{dp}{dx}(x + a - 2ap) = 0$

$\therefore \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p =$ ধ্ৰুৱক $= c$

আৰু $p = \frac{1}{2a}(x + a)$

p অপনয়ন কৰি আমি পাওঁ $y = cx + ac(1-c)$ এইটো সাধাৰণ সমাধান।

আৰু $y = \frac{1}{2a}(x+a)x + \frac{a}{2a}(x+a)\left(1 - \frac{x+a}{2a}\right)$

$$= \frac{1}{2a}(x+a)\left\{x+a-\frac{ax+a^2}{2a}\right\}$$

$$= \frac{1}{2a}(x+a)^2 - \frac{1}{4a}(x+a)^2$$

$$= \frac{1}{4a}(x+a)^2$$

বা $4ay = (x+a)^2$

উদাহৰণ 2 ঃ সমাধান কৰক $y - 2px = \tan^{-1}(xp^2)$

সমাধান ঃ দিয়া আছে $y - 2px = \tan^{-1}(xp^2)$ ... (1)

(1) অক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$p = 2\frac{dp}{dx}x + 2p + \frac{1}{1+x^2p^4}\left(p^2 + x2p\frac{dp}{dx}\right)$$

বা $0 = \left(p + 2x\frac{dp}{dx}\right) + \frac{p}{1+x^2p^4}\left(p + 2x\frac{dp}{dx}\right)$

বা $0 = \left(p + 2x\frac{dp}{dx}\right)\left(1 + \frac{p}{1+x^2p^4}\right)$

ইয়াৰ পৰা আমি পাওঁ $p + 2x\frac{dp}{dx} = 0$ আৰু $p^4x^2 + p + 1 = 0$ সম্বন্ধৰ দ্বাৰা p পোৱা যায়।

$$\Rightarrow \frac{dp}{p} + \frac{1}{2}\frac{dx}{x} = 0$$

অনুকলন কৰি $\log p + \frac{1}{2}\log x = \log c$

$$\text{বা } px^{\frac{1}{2}} = c$$

$$\text{বা } p = \frac{c}{\sqrt{x}}$$

প্রদত্ত সমীকৰণৰ পৰা p অপনয়ন কৰি আমি পাওঁ

$$y - 2c\sqrt{x} = \tan^{-1} c^2 .$$

উদাহৰণ 3 ঃ সমাধান কৰক $y = 2px + p^n$

সমাধান ঃ দিয়া আছে $y = 2px + p^n$ ... (1)

(1) অক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$p = 2\frac{dp}{dx}x + 2p + np^{n-1}\frac{dp}{dx}$$

বা $0 = 2\frac{dp}{dx}x + p + np^{n-1}\frac{dp}{dx}$

বা $0 = 2x + p\frac{dx}{dp} + np^{n-1}$

বা $\frac{2x}{p} + \frac{dx}{dp} = -np^{n-2}$

ইয়াত $\text{I.F} = e^{2\log p} = p^2$ আৰু সমাধান হ'ল $x.p^2 = -\int np^n dp$

বা $x.p^2 = -n\frac{p^{n+1}}{n+1} + c$

বা $x = -\frac{n}{n+1}p^{n-1} + cp^{-2}$

প্ৰদত্ত সমীকৰণত x অৰ ঠাইত বহুৱাই আমি পাওঁ

$$y = -\frac{2n}{n+1}p^n + 2cp^{-1} + p^n$$

$$= \frac{2c}{p} + \frac{1-n}{1+n}p^n$$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সমাধান হ'ল

$x = \frac{c}{p^2} - \frac{n}{n+1}p^{n-1}$ আৰু $y = \frac{2c}{p} + \frac{1-n}{1+n}p^n$.



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৩

প্ৰশ্ন নং 1 ঃ সমাধান কৰক

(i) $y + px = x^4p^2$

(ii) $y = x + a\tan^{-1}p$

(iii) $y = p\tan p + \log(\cos p)$

১০.৪ ক্লায়ৰেটৰ আকাৰ

$y = px + f(p)$ ... (i) আকাৰৰ সমীকৰণক ক্লায়ৰেটৰ সমীকৰণ (Clairaut's equation) বুলি কোৱা হয়।

(1) অক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ $p = p + x\frac{dp}{dx} + f'(p)\frac{dp}{dx}$

বা $0 = \left(x + f'(p)\right)\frac{dp}{dx}$

$\therefore \quad \frac{dp}{dx} = 0$ বা $x + f'(p) = 0$ ... (ii)

$\frac{dp}{dx} = 0$ ৰ পৰা, $p = c$ ... (iii)

(i) আৰু (iii) ৰ p অপনয়ন কৰি আমি পাওঁ $y = cx + f(c)$ ... (iv)

এইটো (i) অৰ সাধাৰণ সমাধান।

গতিকে আমি দেখিলোঁ যে p ৰ ঠাইত c বহুৱাই ক্লায়ৰেটৰ সমীকৰণৰ সাধাৰণ সমাধান পোৱা যায়।

টোকা ঃ ফৰাছী গণিতজ্ঞ এলেক্সিছ ক্লড ক্লায়ৰেটৰ (1713-1765) নাম অনুসৰি সমীকৰণটো ক্লায়ৰেটৰ সমীকৰণ (Clairaut's equation) বোলা হয়।



এলেক্সিছ ক্লড ক্লায়ৰেটৰ (1713-1765) এজন ফৰাচী গণিতজ্ঞ আছিল।

উদাহৰণ 1 ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(a) $y = px + \frac{a}{p}$

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত সমীকৰণটো ক্লায়ৰেটৰ আকাৰত আছে। p ৰ ঠাইত c বহুৱাই আমি তলৰ সমাধানটো পাওঁ। $y = cx + \frac{a}{c}$.

(b) $p = \log(px - y)$

সমাধান ঃ দিয়া আছে $p = \log(px - y)$

বা $e^p = px - y$

বা $y = px - e^p$, এইটো ক্লায়ৰেটৰ আকাৰ। p ৰ ঠাইত c বহুৱাই আমি তলৰ সমাধানটো পাওঁ। $y = pc - e^c$.

(c) $p = \tan(px - y)$

সমাধান ঃ দিয়া আছে $p = \tan(px - y)$

বা $\tan^{-1} p = px - y$

বা $y = px - \tan^{-1} p$

এইটো ক্লায়ৰেটৰ আকাৰ। গতিকে, p ৰ ঠাইত c বহুৱাই আমি সমাধানটো পাওঁ

$y = Cx - \tan^{-1} C$.

(d) $y^2 + x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4\left(\frac{dx}{dy}\right)^2$

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত সমীকৰণটোক এনেধৰণে লিখিব পাৰি

$$y^2 + x^2 p^2 - 2xy\frac{1}{p} = \frac{4}{p^2}$$

বা $(y - px)^2 = \frac{4}{p^2}$

বা $y = px \pm \left(\frac{2}{p}\right)$, এইটো ক্লায়ৰেটৰ আকাৰ। p ৰ ঠাইত c বহুৱাই আমি সমাধানটো পাওঁ। $y = Cx \pm \left(\frac{2}{C}\right)$

বা $(y - Cx)^2 = \left(\frac{2}{C}\right)^2$

বা $y^2 + x^2C^2 - 2xyC = \frac{4}{C^2}$.



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৪

প্ৰশ্ন নং 1 ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(i) $y = px + p - p^3$

(ii) $y = xp + \sqrt{1 + p^2}$

(iii) $y = xp + ap(1 - p)$

(iv) $y = xp + \sin^{-1} p$

(v) $y = xp + e^p$

(vi) $y = xp + p^2$

(vii) $y = xp + \frac{p}{p-1}$

(viii) $y = px + \sqrt{1 - p^2}$

১০.৪.১ ক্লায়ৰেটৰ আকাৰলৈ ৰূপান্তৰযোগ্য সমীকৰণ

প্ৰথম ক্ৰম কিন্তু উচ্চতৰ ঘাতৰ বহু অৱকল সমীকৰণক যথোপযুক্ত প্ৰতিস্থাপনৰ দ্বাৰা ক্লায়ৰেটৰ আকাৰলৈ ৰূপান্তৰ কৰিব পাৰি। অৱশ্যে, এনে প্ৰতিস্থাপন বাছনি কৰাৰ কোনো নিৰ্দিষ্ট পদ্ধতি নাই। ই অভ্যাস আৰু অভিজ্ঞতাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰে।

উদাহৰণ 1 ঃ $x^2(y - px) = p^2 y$ সমীকৰণক ক্লায়ৰেটৰ আকাৰলৈ ৰূপান্তৰ কৰক আৰু সমাধান কৰক।

সমাধান ঃ $x^2 = u$ আৰু $y^2 = v$ বহুৱাই আমি পাওঁ $2xdx = du$

আৰু $2ydy = dv$

গতিকে $\frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{dy}}{\frac{du}{dx}} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\frac{dy}{dx}$

সেয়েহে, $p = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\frac{dv}{du} = \sqrt{\frac{u}{v}}\frac{dv}{du}$

$\therefore$ প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'বগৈ

$$u\left(\sqrt{v} - \sqrt{\frac{u}{v}}\sqrt{u}\frac{du}{dv}\right) = \frac{u}{v}\left(\frac{dv}{du}\right)^2 . \sqrt{v}$$

বা $u\left(\sqrt{v} - \frac{u}{\sqrt{v}}\frac{du}{dv}\right) = \frac{u}{\sqrt{v}}\left(\frac{dv}{du}\right)^2$

বা $u\sqrt{v}.\frac{\sqrt{v}}{u} - \frac{u^2}{\sqrt{v}}\frac{\sqrt{v}}{u}\frac{dv}{du} = \left(\frac{dv}{du}\right)^2$

বা $v - u\frac{dv}{du} = \left(\frac{dv}{du}\right)^2$

বা $v = u\frac{dv}{du} + \left(\frac{dv}{du}\right)^2$, এইটো ক্লায়ৰেটৰ আকাৰ

$\frac{dv}{du}$ ৰ ঠাইত ধ্ৰুৱক C বহুৱাই সাধাৰণ সমীকৰণ পোৱা যায়।

গতিকে সাধাৰণ সমাধান হ'ল

$$v = uC + C^2$$

অৰ্থাৎ $\sqrt{y} = \sqrt{x}C + C^2$.

উদাহৰণ 2 ঃ $u = \frac{1}{x}$ আৰু $v = \frac{1}{y}$ প্ৰতিষ্ঠাপনৰ দ্বাৰা ক্লায়ৰেটৰ আকাৰলৈ ৰূপান্তৰ কৰি $y^2(y - px) = x^4 p^2$ সমীকৰণটো সমাধান কৰক।

সমাধান ঃ $u = \frac{1}{x}$ অৰ পৰা, $\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2}$ আৰু

$v = \frac{1}{y}$ ৰ পৰা, $\frac{dv}{dy} = -\frac{1}{y^2}$.

গতিকে, $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^2}\frac{dv}{du}$

প্ৰদত্ত সমীকৰণটোৰ ৰূপান্তৰিত ৰূপ হ'বগৈ

$$\frac{1}{v^2}\left(\frac{1}{v}-\frac{1}{u}\frac{u^2}{v^2}\frac{dv}{du}\right)=\frac{1}{u^4}\frac{u^4}{v^4}\left(\frac{dv}{du}\right)^2$$

বা $v^2\left(\frac{1}{v}-\frac{u}{v^2}\frac{dv}{du}\right)=\left(\frac{dv}{du}\right)^2$

বা $v-u\frac{dv}{du}=\left(\frac{dv}{du}\right)^2$

বা $v=u\frac{dv}{du}+\left(\frac{dv}{du}\right)^2$, এইটোৱেই ক্লায়ৱেটৰ ৰূপ।

$\frac{dv}{du}$ ৰ ঠাইত ধ্ৰুৱক C বহুৱাই আমি সাধাৰণ সমাধান পাম

গতিকে ইয়াৰ সাধাৰণ সমাধান হ'ব

$$v=uC+C^2$$

বা $\frac{1}{y}=\frac{1}{x}C+C^2$

বা $x=Cy+C^2xy$.

উদাহৰণ 3 ঃ সমাধান কৰক $(px-y)(py+x)=2p$

সমাধান ঃ $x^2=u$ অৰ্থাৎ $2xdx=du$

আৰু $y^2=v$ অৰ্থাৎ $2ydy=dv$ বহুৱাই, আমি পাওঁ

$$\frac{dv}{du}=\frac{\frac{dv}{dy}}{\frac{du}{dx}}.\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}$$

সেয়েহে, $p=\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}\frac{dv}{du}=\sqrt{\frac{u}{v}}\frac{dv}{du}$

প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'বগৈ

$$\left(\sqrt{\frac{u}{v}}.\frac{dv}{du}.\sqrt{u}-\sqrt{v}\right)\left(\sqrt{\frac{u}{v}}\frac{dv}{du}\sqrt{v}+\sqrt{u}\right)=2\sqrt{\frac{u}{v}}\frac{dv}{du}$$

বা $\left(\frac{u}{\sqrt{v}}\frac{dv}{du}-\sqrt{v}\right)\left(\sqrt{u}\frac{dv}{du}+\sqrt{u}\right)=2\sqrt{\frac{u}{v}}\frac{dv}{du}$

বা $u\frac{dv}{du}-v=\frac{2\frac{dv}{du}}{1+\frac{dv}{du}}$

বা $v=u\frac{dv}{du}-\frac{2\frac{dv}{du}}{1+\frac{dv}{du}}$, এইটো ক্লায়ৰেটৰ ৰূপ।

গতিকে, ইয়াৰ সাধাৰণ সমাধান হ'ব

$$v=uC-\frac{2C}{1+C}$$

বা $y^2=x^2C-\frac{2C}{1+C}$.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৫

প্রশ্ন ঃ প্রদত্ত প্রতিষ্ঠাপনৰ সহায়ত ক্লায়ৰেটৰ আকাৰলৈ ৰূপান্তৰ কৰক আৰু সমাধান কৰক।

(i) $xp^2-2yp+x+2y=0\ \left(u=x^2,v=y-x\right)$

(ii) $(px-y)(py+x)=a^2p\ \left(u=x^2,v=y^2\right)$

(iii) $x^2(y-px)=p^2y\ \ \left(u=x^2,v=y^2\right)$

(iv) $x^2p^2+yp(2x+y)+y^2=0\ (v=xy,u=y)$

(v) $xp^2-2yp+x+2y=0\ \ \left(u=x^2,v=y-x\right)$



১০.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- প্রথম ক্রম আৰু উচ্চতৰ মাত্রাৰ অৱকল সমীকৰণ তলৰ চাৰিটা পদ্ধতিৰ এটা বা তাতোকৈ বেছি পদ্ধতিৰ সহায়ত সমাধান কৰিব পাৰি।

  (a) p ৰ বাবে সমাধানযোগ্য সমীকৰণ ঃ $p=\frac{dy}{dx}$

(b) y ৰ বাবে সমাধানযোগ্য সমীকৰণ ঃ $y = f(x, p)$

(c) x ৰ বাবে সমাধানযোগ্য সমীকৰণ ঃ $x = f(y, p)$

(d) ক্লায়ৰেটৰ সমীকৰণ ঃ $y = px + f(p)$

- প্ৰথম ক্ৰম আৰু n তম মাত্ৰাৰ এটা অৱকল সমীকৰণ লোৱা হ'ল ঃ

$p^n + f_1(x,y)p^{n-1} + f_2(x,y)p^{n-2} + ... + f_{n-1}(x,y)p + f_n(x,y) = 0$

ই p ৰ বাবে সমাধানযোগ্য।

বাওঁপক্ষক n টা ৰৈখিক উৎপাদকত ভাঙি, আমি পাওঁ

$[p - \phi_1(x,y)][p - \phi_2(x,y)]..[p - \phi_n(x,y)] = 0$

প্ৰত্যেকটো উৎপাদকৰ শূন্যৰ লগত সমতা স্থাপন কৰি, আমি পাওঁ

$p = \phi_1(x,y),\ p = \phi_2(x,y),...,\ p = \phi_n(x,y).$

ধৰা হ'ল এই nটা সমীকৰণৰ সমাধান

$F_1(x,y,c) = 0, F_2(x,y,c) = 0, ..., F_n(x,y,c) = 0$

এই n টা সমাধানে সাধাৰণ সমাধান গঠন কৰিব।

সাধাৰণ সমাধানটো এনেদৰে লিখিব পাৰি

$F_1(x,y,c).F_2(x,y,c)...F_n(x,y,c) = 0$.

- ধৰা হ'ল এটা প্ৰথম ক্ৰমৰ আৰু উচ্চতৰ মাত্ৰাৰ সমীকৰণক $x = f(y, p)$ ... (1)

আকাৰৰৈলে ৰূপান্তৰ কৰিব পাৰি।

(1) অক y সাপেক্ষে অৱকলন কৰি ইয়াক তলৰ আকাৰৰৈলে ৰূপান্তৰ কৰিব পাৰি।

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = \phi\left(y, p, \frac{dp}{dx}\right)$$

ধৰা হ'ল এই নতুন অৱকল সমীকৰণক y আৰু p ত সমাধান কৰিব পাৰি।

ধৰা হ'ল ইয়াৰ সমাধান $F(y,p,c) = 0$.

প্ৰদত্ত সমীকৰণৰ সহায়ত ইয়াৰ পৰা p অপনয়ন কৰি আমি নিৰ্ণেয় সমাধানটো পাম।

- ধৰা হ'ল এটা প্ৰথম ক্ৰম আৰু উচ্চতৰ মাত্ৰাৰ অৱকল সমীকৰণ $y = f(x, p)$ ... (1)

(1) অক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$p = \frac{dy}{dx} = \phi\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right)$$

যদি এই সমীকৰণটো সমাধান কৰা সম্ভৱ হয় আৰু $F(x,p,c) = 0$ ... (2) এটা সমাধান হয়, তেনেহ'লে (1) আৰু (2)ৰ পৰা p অপনয়ন কৰি আমি নিৰ্ণেয় সমাধানটো পাম।

যদি p ৰ অপনয়ন সম্ভৱ নহয়, তেনেহ'লে x আৰু y ৰ বাবে (1) আৰু (2) সমাধান কৰি আমি $x = F_1(p,c)$ আৰু $y = F_2(p,c)$ সমাধান হিচাপে পাম।

- $y = px + f(p)$ আকাৰৰ সমীকৰণক ক্লায়ৰেটৰ সমীকৰণ বুলি কোৱা হয়। p ৰ ঠাইত c বহুৱাই ক্লায়ৰেটৰ সমীকৰণৰ সাধাৰণ সমাধান পোৱা যায়। কিছুমান জটিল অৱকল সমীকৰণক যথোপযুক্ত প্ৰতিষ্ঠাপনৰ দ্বাৰা ক্লায়ৰেটৰ আকাৰলৈ ৰূপান্তৰ কৰিব পাৰি।



১০.৬ অধিক জানিবলৈ

1) Tenenbaum, Morris and Pollard, Harry. Ordinary Differential Equations, Dover Publications, Inc, N.Y 11501.

2) Differential Equations : An Introduction with Mathematica. Clay C.Ross, second Edition, Springer.

3) Differential Equations : Linear, Nonlinear, ordinary, partial. A.C. King, J. Billinggham and S. R. Otto, Cambridge-2003.

4) Differential equations with Application and Programs. S. Balachandra Rao and H. R. Anuradha, University Press (India) Limited 1996.



১০.৭ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ১

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ (i) প্ৰদত্ত সমীকৰণটোক এনেদৰে লিখিব পাৰি ঃ

$$p\left(p^2 + 2xp - y^2 p - 2xy^2\right) = 0$$

বা $p\{p(p+2x) - y^2(p+2x)\} = 0$

বা $p(p+2x)(p-y^2) = 0$

বা $p = 0, p+2x = 0, p-y^2 = 0$

অনুকলন কৰি, $y = C$, $y + x^2 = C$ আৰু $x + \frac{1}{y} = C$

সেয়ে সন্মিলিত সমাধান হ'ল

$$(y-C)(y+x^2-C)\left(x+\frac{1}{y}-C\right) = 0 .$$

(ii) দিয়া আছে $(py)^2 - 2(py)x\tan^2\alpha + \left(y^2\sec^2\alpha - x^2\tan^2\alpha\right) = 0$

$$\therefore py = \frac{2x\tan^2\alpha \pm \sqrt{\left\{4x^2\tan^4\alpha - 4\left(y^2\sec^2\alpha - x^2\tan^2\alpha\right)\right\}}}{2}$$

বা $py = x\tan^2\alpha \pm \sqrt{\left\{x^2\tan^2\alpha\left(\tan^2\alpha+1\right) - y^2\sec^2\alpha\right\}}$

বা $y\frac{dy}{dx} = x\tan^2\alpha \pm \sec\alpha\sqrt{x^2\tan^2\alpha - y^2}$

বা $ydy - x\tan^2\alpha dx = \pm\sec\alpha\sqrt{\left(x^2\tan^2\alpha - y^2\right)}dx$

বা $\pm\frac{x\tan^2\alpha dx - ydy}{\sqrt{x^2\tan^2\alpha - y^2}} = -\sec\alpha dx$

অনুকলন কৰি, $\pm\sqrt{\left(x^2\tan^2\alpha - y^2\right)} = C - x\sec\alpha$

বৰ্গ কৰি, আমি পাওঁ

$x^2\tan^2\alpha - y^2 = C^2 - 2Cx\sec\alpha + x^2\sec^2\alpha$

বা $x^2 + y^2 - 2Cx\sec\alpha + C^2 = 0$.

(iii) নিজে চেষ্টা কৰক।

(iv) নিজে চেষ্টা কৰক।

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) x অৰ বাবে সমাধান কৰি, আমি পাওঁ $x = \frac{y\log y}{p} - \frac{p}{y}$ ... (1)

(1) অক y সাপেক্ষে অৱকলন কৰি, আমি পাওঁ

$$\frac{1}{p} = \left(\log y + y.\frac{1}{y}\right)\frac{1}{p} - y\log y.\frac{1}{p^2}\frac{dp}{dy} - \left[-\frac{1}{y^2}.p + \frac{1}{y}\frac{dp}{dy}\right]$$

বা $\frac{1}{p} = \frac{\log y}{p} + \frac{1}{p} + \frac{p}{y^2} - \frac{dp}{dy}\left(\frac{y\log y}{p^2} + \frac{1}{y}\right)$

বা $0 = \frac{p}{y}\left(\frac{y\log y}{p^2} + \frac{1}{y}\right) - \frac{dp}{dy}\left(\frac{y\log y}{p^2} + \frac{1}{y}\right)$

বা $0 = \left(\frac{y\log y}{p^2} + \frac{1}{y}\right)\left(\frac{p}{y} - \frac{dp}{dy}\right)$

প্ৰথম উৎপাদকটো বাদ দি আমি পাওঁ $\frac{p}{y} - \frac{dp}{dy} = 0$

$$\text{বা } \frac{dp}{p} = \frac{dy}{y}$$

অনুকলন কৰি, $\log p = \log y + \log C$

বা $p = Cy$ ... (2)

p ৰ এই মান (1) অত বহুৱাই আমি পাওঁ

$$x = \frac{\log y}{C} - C$$

বা $\log y = Cx + C^2$.

(ii) x অৰ বাবে সমাধান কৰি আমি পাওঁ $x = \tan^{-1} p + \frac{p}{1+p^2}$ ... (1)

উভয় পক্ষক y সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{p} = \frac{1}{1+p^2}.\frac{dp}{dy} + \frac{\left(1+p^2\right)-2p^2}{\left(1+p^2\right)^2}.\frac{dp}{dy}$$

$$\text{বা } \frac{1}{p} = \frac{2\left(1+p^2\right)-2p^2}{\left(1+p^2\right)^2}.\frac{dp}{dy}$$

$$\text{বা } dy = \frac{2p}{\left(1+p^2\right)^2}dp$$

অনুকলন কৰি, $y = C - \frac{1}{1+p^2}$ ... (2)

(1) আৰু (2) সমীকৰণে একেলগে সাধাৰণ সমাধান গঠন কৰে।

(iii) দিয়া আছে, $p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0$ য'ত $p = \frac{dy}{dx}$ ... (1)

x অৰ বাবে সমাধান কৰি আমি পাওঁ $x = \left(\frac{1}{4y}\right)p^2 + \left(\frac{1}{p}\right)(2y)$ ... (2)

(2) ক y সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{1}{p} = -\frac{p^2}{4y^2} + \frac{2p}{4y}\frac{dp}{dy} + \frac{2}{p} - \frac{2y}{p^2}\frac{dp}{dy}$$

$$\text{বা } \frac{p^2}{4y^2} - \frac{1}{p} - \frac{dp}{dy}\left(\frac{p}{2y} - \frac{2y}{p^2}\right) = 0$$

$$\text{বা } \left(\frac{p^2}{4y^2} - \frac{1}{p}\right) - \frac{2y}{p}\frac{dp}{dy}\left(\frac{p^2}{4y^2} - \frac{1}{p}\right) = 0$$

বা $\left(\frac{p^2}{4y^2}-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{2y}{p}\frac{dp}{dy}\right)=0$ ... (3)

$\frac{dp}{dy}$ নথকা প্ৰথম পদটো বাদ দিয়াত, (3) হ'বগৈ

$$1-\frac{2y}{p}\frac{dp}{dy}=0$$

বা $\left(\frac{2}{p}\right)dp=\left(\frac{1}{y}\right)dy$

অনুকলন কৰি, $2\log p=\log y+\log C'$

বা $p^2=C'y$ ... (4)

(1)অৰ পৰা $p\left(p^2-4xy\right)=-8y^2$

বৰ্গ কৰি, $p^2\left(p^2-4xy\right)^2=64y^4$

বা $C'y\left(C'y-4xy\right)^2=64y^4$, (4) ব্যৱহাৰ কৰি

বা $4Cy\left(4Cy-4xy\right)^2=64y^4$ য'ত $C'=4C$

বা $C\left(C-x\right)^2=y$.

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৩

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) দিয়া আছে, $y=-px+x^4p^2$ ... (1)

উভয় পক্ষক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি, আমি পাওঁ

$$\frac{dy}{dx}=p=-p-x\frac{dp}{dx}+4x^3p^2+2x^4p\frac{dp}{dx}$$

বা $2p+x\frac{dp}{dx}-2px^3\left(2p+x\frac{dp}{dx}\right)=0$

বা $\left(2p+x\frac{dp}{dx}\right)\left(1-2px^3\right)=0$

বা $2p+x\frac{dp}{dx}=0$, $\left(1-2px^3\right)$ উৎপাদকটো বাদ দি

বা $\frac{dp}{p}+2\frac{dx}{x}=0$

অনুকলন কৰি, $\log p+2\log x=\log C$

বা $\log px^2=\log C$

বা $px^2=C$

বা $p = \frac{C}{x^2}$

(1) অত p ৰ এই মান বহুৰাই আমি পাওঁ $y = -\frac{C}{x} + C^2$ এইটোৱেই নিৰ্ণেয় সমাধান।

(ii) দিয়া আছে, $y = x + a\tan^{-1} p$ ... (1)

উভয় পক্ষক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$p = 1 + \frac{a}{1+p^2}\frac{dp}{dx}$$

বা $p - 1 = \frac{a}{1+p^2}\frac{dp}{dx}$

বা $dx = \frac{a}{(p-1)(1+p^2)}dp$

বা $dx = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{p-1} - \frac{1+p}{1+p^2}\right]dp$, আংশিক ভগ্নাংশৰ সহায়ত

বা $dx = \frac{a}{2}\left[\frac{1}{p-1} - \frac{1}{1+p^2} - \frac{p}{1+p^2}\right]dp$

অনুকলন কৰি, $x = \frac{a}{2}\left[\log(p-1) - \tan^{-1} p - \frac{1}{2}\log(1+p^2) + \log C\right]$

বা $x = \frac{a}{2}\left[\log\left\{C(p-1)(1+p^2)^{-\frac{1}{2}}\right\} - \tan^{-1} p\right]$ ... (2)

(2) ৰ পৰা পোৱা x অৰ মান (1)অত বহুৰাই, আমি পাওঁ

$$y = \frac{a}{2}\left[\log\left\{C(p-1)(1+p^2)^{-\frac{1}{2}}\right\} + \tan^{-1} p\right] \quad \text{... (3)}$$

(2) আৰু (3) ৰ পৰা একেলগে প্ৰাচলিক ৰূপত নিৰ্ণেয় সমাধান পোৱা যায়, p হ'ল প্ৰাচল।

(iii) দিয়া আছে, $y = p\tan p + \log(\cos p)$ ... (1)

উভয় পক্ষক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি, আমি পাওঁ

$$p = \left[\tan p + p\sec^2 p + \left\{\frac{1}{\cos p}\right\}(-\sin p)\right]\left(\frac{dp}{dx}\right)$$

বা $\mathrm{p} = \left[\tan \mathrm{p} + \mathrm{p}\sec^2 \mathrm{p} - \tan \mathrm{p}\right]\left(\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{dx}}\right)$

বা $p = p\sec^2 p\left(\frac{dp}{dx}\right)$

বা $dx = \sec^2 pdp$

অনুকলন কৰি, $x = \tan p + C$ ... (2)

(1) আৰু (2) ৰ পৰা একেলগে প্ৰাচলিক ৰূপত নিৰ্ণেয় সমাধান পোৱা যায়, p হ'ল প্ৰাচল।

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৪

1 **নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** (i) দিয়া আছে $y = px + p - p^3$

এইটো ক্লায়ৰেটৰ আকাৰৰ সমীকৰণ।

p ৰ ঠাইত C বহুৱাই, নিৰ্ণেয় সমাধান $y = Cx + C - C^3$

(ii) দিয়া আছে, $y = xp + \sqrt{1 + p^2}$

এইটো ক্লায়ৰেটৰ আকাৰৰ সমীকৰণ।

p ৰ ঠাইত C বহুৱাই, নিৰ্ণেয় সমাধান $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$.

(iii) দিয়া আছে, $y = xp + ap(1 - p)$

এইটো ক্লায়ৰেটৰ আকাৰৰ সমীকৰণ।

p ৰ ঠাইত C বহুৱাই, নিৰ্ণেয় সমাধান $y = Cx + aC(1 - C)$.

(iv) দিয়া আছে, $y = xp + \sin^{-1} p$

এইটো ক্লায়ৰেটৰ আকাৰৰ সমীকৰণ।

p ৰ ঠাইত C বহুৱাই, নিৰ্ণেয় সমাধান $y = Cx + \sin^{-1} C$.

(v) দিয়া আছে, $y = xp + e^p$

এইটো ক্লায়ৰেটৰ আকাৰৰ সমীকৰণ।

p ৰ ঠাইত C বহুৱাই, নিৰ্ণেয় সমাধান $y = Cx + e^C$.

(vi) দিয়া আছে, $y = xp + p^2$

এইটো ক্লায়ৰেটৰ আকাৰৰ সমীকৰণ।

p ৰ ঠাইত C বহুৱাই, নিৰ্ণেয় সমাধান $y = Cx + C^2$.

(vii) দিয়া আছে, $y = px + \frac{p}{p-1}$.

এইটো ক্লায়ৰেটৰ আকাৰৰ সমীকৰণ।

p ৰ ঠাইত C বহুৱাই, নিৰ্ণেয় সমাধান $y = Cx + \frac{C}{C-1}$.

(viii) দিয়া আছে, $y = px + \sqrt{1-p^2}$

এইটো ক্লায়ৰেটৰ আকাৰৰ সমীকৰণ।

p ৰ ঠাইত C বহুৱাই, নিৰ্ণেয় সমাধান $y = Cx + \sqrt{1-C^2}$.

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৫

1 **নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** (i) দিয়া আছে, $xp^2 - 2yp + x + 2y = 0$ ... (1)

আকৌ, দিয়া আছে $y - x = v$ and $x^2 = u$ ... (2)

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি,

$\frac{dy}{dx} - 1 = \frac{dv}{dx}$ আৰু $2x = \frac{du}{dx}$

বা $p - 1 = \frac{dv}{du}$ আৰু $2x = \frac{du}{dx}$

$$\therefore \frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{dx}}{\frac{du}{dx}} = \frac{p-1}{2x}$$

বা $P = \frac{p-1}{2x}$

বা $p = 2xP + 1$

প্ৰদত্ত সমীকৰণত এই মান বহুৱাই আমি পালোঁ

$x(2xP+1)^2 - 2y(2xP+1) + x + 2y = 0$

বা $2x^2P^2 - 2(y-x)P + 1 = 0$

বা $2uP^2 - 2vP + 1 = 0$, (2) ব্যৱহাৰ কৰি

বা $v = uP + \frac{1}{2P}$ এইটো ক্লায়ৰেটৰ আকাৰৰ সমীকৰণ।

গতিকে ইয়াৰ সাধাৰণ সমাধান হ'ল $v = uC + \frac{1}{2C}$

বা $y - x = x^2C + \frac{1}{2C}$

বা $2C^2x^2 - 2C(y-x) + 1 = 0$.

(ii) দিয়া আছে, $(px - y)(py + x) = a^2p$

বা $p^2xy + p(x^2 - y^2 - a^2) - xy = 0$ ... (1)

$x^2 = u$ অৰ্থাৎ $2xdx = du$ আৰু $y^2 = v$ অৰ্থাৎ $2ydy = dv$ বহুৱাই আমি পাওঁ

$$\frac{dv}{du}=\frac{\frac{dv}{dx}}{\frac{du}{dx}}.\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du}\Rightarrow\ p=\frac{x}{y}\frac{dv}{du}\quad \text{... (2)}$$

(2) ৰ পৰা p ৰ মান (1) অত বহুৱাই, আমি পাওঁ

$$xy\frac{x^2}{y^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2+\frac{x}{y}\left(\frac{dv}{du}\right)\left(x^2-y^2-a^2\right)-xy=0$$

বা $x^2\left(\frac{dv}{du}\right)^2+\frac{dv}{du}\left(x^2-y^2-a^2\right)-y^2=0$

যদি আমি $\frac{dv}{du}=P$, আৰু $x^2=u\ \ y^2=v$ বহুৱাওঁ, তেনেহ'লে

$uP^2+\left(u-v-a^2\right)P-v=0$

বা $uP\left(P+1\right)-v\left(P+1\right)-Pa^2=0$

বা $v=uP-\frac{P}{P+1}a^2$, এইটো ক্লায়ৰেটৰ আকাৰ।

গতিকে ইয়াৰ সাধাৰণ সমাধান হ'ল $v=uC-\frac{C}{C+1}a^2$

বা $y^2=x^2C-\frac{C}{C+1}a^2$.

(iii) দিয়া আছে, $x^2\left(y-px\right)=p^2y$

বা $y-px=\frac{yp^2}{x^2}$

বা $y^2=pxy+\left(\frac{py}{x}\right)^2$

বা $y^2=\left(\frac{py}{x}\right)x^2+\left(\frac{py}{x}\right)^2\quad$ ... (1)

$x^2=u$ অর্থাৎ $2xdx=du$ আৰু $y^2=v$ অর্থাৎ $2ydy=dv$ ... (2) বহুৱাই আমি পাওঁ

$$\frac{dv}{du}=\frac{\frac{dv}{dx}}{\frac{du}{dx}}.\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}$$

বা $P = \frac{y}{x}p$ ... (3)

(2) আৰু (3)ৰ সহায়ত (1) অৰ পৰা আমি পাওঁ $v = Pu + P^2$, এইটো ক্লায়ৰেটৰ আকাৰ।

গতিকে, ইয়াৰ সাধাৰণ সমাধান হ'ব $v = Cu + C^2$

(iv) প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'ল $x^2p^2 + yp(2x + y) + y^2 = 0$ ... (1)

দিয়া আছে $y = u$ আৰু $xy = v$ ... (2)

(2)ক অৱকলন কৰি আমি পাওঁ $dy = du$ আৰু $xdy + ydx = dv$

$$\therefore \frac{xdy + ydx}{dy} = \frac{dv}{du}$$

বা $x + y\frac{dx}{dy} = \frac{dv}{du}$

বা $x + \frac{y}{p} = P$

বা $\frac{y}{p} = P - x$

বা $p = \frac{y}{P - x}$ য'ত $p = \frac{dy}{dx}$, $P = \frac{dv}{du}$.

(1)অত $p = \frac{y}{P - x}$ বহুৰাই আমি পাওঁ

$$\frac{x^2y^2}{(P - x)^2} + \frac{y^2}{P - x}(2x + y) + y^2 = 0$$

বা $x^2 + (P - x)(2x + y) + (P - x)^2 = 0$

বা $Py - xy + P^2 = 0$

বা $v = uP + P^2$, (2)ৰ সহায়ত, . . . (3), এইটো ক্লায়ৰেটৰ আকাৰ।

গতিকে, ইয়াৰ সাধাৰণ সমাধান হ'ল $v = uC + C^2$

বা $xy = yC + C^2$.

(v) প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'ল $xp^2 - 2yp + x + 2y = 0$ ... (1)

আকৌ, দিয়া আছে $y - x = v$ আৰু $x^2 = u$ ... (2)

(2)ক অৱকলন কৰি, আমি পাওঁ $dy - dx = dv$ আৰু $2xdx = du$

$$\therefore \frac{dy - dx}{2xdx} = \frac{dv}{du}$$

বা $\frac{dy}{dx}-1=2x\frac{dv}{du}$

বা $p-1=2xP$, য'ত $p=\frac{dy}{dx}$, $P=\frac{dv}{du}$

বা $p=1+2xP$

(1)অত $p=1+2xP$ বহুৱাই আমি পাওঁ

$x(1+2xP)^2-2(1+2xP)+x+2y=0$

বা $2x^2P^2-2(y-x)P+1=0$

বা $2uP^2-2vP+1=0$, (2)ৰ সহায়ত

বা $v=uP+\frac{1}{2P}$, এইটো ক্লায়ৰেটৰ আকাৰ।

গতিকে, ইয়াৰ সাধাৰণ সমাধান হ'ল $v=uC+\frac{1}{2C}$

বা $y-x=Cx^2+\frac{1}{2C}$.



১০.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ অধোলিখত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক ঃ

(a) $xyp^2+(x^2+xy+y^2)p+x^2+xy=0$

(b) $p^3(x+2y)+3p^2(x+y)+p(y+2x)=0$

(c) $4y^2p^2+2pxy(3x+1)+3x^3=0$

(d) $y=x\left\{p+(1+p^2)^{\frac{1}{2}}\right\}$

(e) $p^2+2xp-3x^2=0$

(f) $p^2-p(e^x+e^{-x})+1=0$

(g) $yp^2-(x-y)p-x=0$

(h) $xyp^2-(x^2-y^2)p-xy=0$

(i) $p(p+y)=x(x+y)$

(j) $y=x\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)$

(k) $xyp^2-(x^2+y^2)p+xy=0$

প্ৰশ্ন ২ ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক ঃ

(a) $4\left(xp^2+yp\right)=y^4$

(b) $xp^3=a+bp$

(c) $y=3px+4p^3$

(d) $\sqrt{1+p^2}x+p=\sqrt{1+p^2}a$

(e) $p^3y+2px-y=0$

(f) $x-yp-ap^2=0$

প্ৰশ্ন ৩ ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক ঃ

(a) $y-px+x-\left(\frac{y}{b}\right)=a$

(b) $e^{p-y}=p^2-1$

(c) $p-y=\log\left(p^2-1\right)$

(d) $4p^3+3xp=yp$

(e) $y=p\sin p+\cos p$

(f) $y=xp^2+p$

(g) $x-yp=ap^2$

(h) $xp^2-2yp+ax=0$

প্ৰশ্ন ৪ ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক ঃ

(a) $px-y+p^3=\frac{m^3}{p^3}$

(b) $p^2\left(x^2-a^2\right)-2pxy+y^2+a^4=0$

(c) $y^2-2pxy+p^2\left(x^2-1\right)=m^2$ s

(d) $\left(x^2-1\right)p^2-2xyp+y^2=1$

(e) $xp^2-yp+a=0$

(f) $4yp^2+2xp-y=0$

(g) $y=xp+p^3$

প্ৰশ্ন ৫ ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক ঃ

(a) $(px-y)(x-py)=2p\ \left(u=x^2,v=y^2\right)$

(b) $y=2px+6y^2p^2\ (y^3=v\ )$

*** ***** ***