অধ্যায় ১২ ঃ ৰৈখিক সুষম অৱকল সমীকৰণ (HOMOGENOUS LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION)

অধ্যায় গাঁথনি

12.1 উদ্দেশ্য

12.2 পৰিচয়

12.3 ৰৈখিক সুষম অৱকল সমীকৰণ

12.4 প্ৰাচল পৰিৱৰ্তন পদ্ধতি

12.5 অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

12.6 অধিক জানিবলৈ

12.7 অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

12.8 আৰ্হি প্ৰশ্ন

১২.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- ৰৈখিক সুষম অৱকল সমীকৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- প্ৰাচল পৰিৱৰ্তন পদ্ধতি সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

১২.২ পৰিচয়

একাদশ অধ্যায়ত, ধ্ৰুৱক গ্ৰহণবিশিষ্ট উচ্চতৰ ক্ৰমৰ ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিব। এই অধ্যায়ত, ৰৈখিক, সুষম অৱকল সমীকৰণৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব। শেহত আমি প্ৰাচল পৰিৱৰ্তন পদ্ধতিৰ সহায়ত ধ্ৰুৱক সহগবিশিষ্ট ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ সমাধানৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

১২.৩ ৰৈখিক সুষম অৱকল সমীকৰণ

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = X \quad \ldots (1)$$

আকাৰৰ অৱকল সমীকৰণক ৰৈখিক সুষম সমীকৰণ (linear homogeneous equation) বোলা হয়। ইয়াত $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ ধ্ৰুৱক আৰু X হ'ল এটা x অৰ ফলন।

$x = e^z$ প্ৰতিষ্ঠানৰ দ্বাৰা ইয়াক ধ্ৰুৱক সহগবিশিষ্ট সমীকৰণলৈ ৰূপান্তৰিত কৰিব পাৰি। তাৰ পাছত ১১.৩.২ বৰ্ণনা কৰা পদ্ধতিৰে ইয়াৰ সমাধান উলিয়াব পাৰি।

ধৰা হ'ল $x = e^z$ অর্থাৎ, $z = \log x$, তেনেহ'লে

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz}$ so that $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} = Dy$ য'ত $D = \frac{d}{dz}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dz}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x}\frac{d^2y}{dz^2}\frac{dz}{dx}$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dz^2}$$

বা $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dy}{dz} + \frac{d^2y}{dz^2} = \left(D^2 - D\right)y = D(D-1)y$

সেইদৰে, $x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \left(D^2 - D\right)y = D(D-1)(D-2)y$

আৰু সাধাৰণভাৱে, $x^n\frac{d^ny}{dx^n} = D(D-1)(D-2)\cdots(D-n+1)y$

$x\frac{dy}{dx}$, $x^2\frac{d^2y}{dx^2}$,... অৰ বাবে প্ৰতিস্থাপন কৰাত (1) সমীকৰণটো ৰৈখিক সমীকৰণ হ'ল।
ইয়াক আগেয়ে বর্ণনা কৰা পদ্ধতি অনুযায়ী সমাধান কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ ১ ঃ সমাধান কৰক $x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = \log x$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $x = e^z$ অর্থাৎ, $z = \log x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz}$ আৰু $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} = Dy$ য'ত $D = \frac{d}{dz}$

গতিকে, $x^2\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dy}{dz} + \frac{d^2y}{dz^2} = \left(D^2 - D\right)y = D(D-1)y$

প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'লগৈ

$$\left(D(D-1) - D + 1\right)y = z$$

বা $(D-1)^2 = y$

C.F $= (Az + B)e^z = (A\log x + B)x$

P.I $= \frac{1}{(D-1)^2}z$

$= (1-D)^{-2}z$

$= (1+2D)z$

$= z + 2$

$= \log x + 2$

সাধাৰণ সমাধান হ'ল $y = (A\log x + B)x + \log x + 2$.

উদাহৰণ ২ ঃ সমাধান কৰক $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} = x^3 \log x$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $x = e^z$ অর্থাৎ, $z = \log x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dz}$ আৰু $x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} = Dy$ য'ত $D = \frac{d}{dz}$

গতিকে, $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dy}{dz} + \frac{d^2y}{dz^2} = (D^2 - D)y = D(D-1)y$

প্রদত্ত সমীকৰণটো হ'লগৈ

$[D(D-1)(D-2) + 3D(D-1) + D)]y = e^{3z}z$

বা $D^3y = e^{3z}z$

C.F $= (A + Bz + Cz^2)e^{0.z} = A + B\log x + C(\log x)$

P.I $= \frac{1}{D^3}(e^{3z}z)$

$= e^{3z}\frac{1}{(D+3)^3}z$

$= e^{3z}\left(1 + \frac{D}{3}\right)^{-3} z$

$= \frac{e^{3z}}{27}(1 - D)z$

$= \frac{e^{3z}}{27}(z - 1)$

$= \frac{x^3}{27}(\log x - 1)$

সাধাৰণ সমাধান হ'ল $y = A + B\log x + C(\log x)^2 + \frac{x^3}{27}(\log x - 1)$.

১২.৩.১ সুষম আকাৰলৈ ৰূপান্তৰ কৰিব পৰা সমীকৰণ

$a + bx = e^z$ প্রতিষ্ঠাপনৰ দ্বাৰা

$(a+bx)^n \frac{d^ny}{dx^n} + P_1(a+bx)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(a+bx)\frac{dy}{dx} + P_ny = X$

আকাৰৰ সমীকৰণক সুষম ৰৈখিক আকাৰলৈ ৰূপান্তৰিত কৰিব পাৰি। ইয়াত $P_1, P_2, \cdots, P_n$ ধ্ৰুৱক। 7.4 অত বৰ্ণনা কৰা পদ্ধতিৰে এতিয়া সমাধান উলিয়াব পাৰি।

উদাহৰণ ৩ ঃ সমাধান কৰক

$$(1+x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (1+x)\frac{dy}{dx} + y = 2\sin\log(1+x)$$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $1+x = e^z$ i.e., $z = \log(1+x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{1}{1+x} \text{ বা } (1+x)\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} = Dy$$

সেইদৰে $(1+x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} = D(D-1)y$

প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'লগৈ

$$D(D-1)y + Dy + y = 2\sin z$$

বা $(D^2+1)y = 2\sin z$

সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2 + 1 = 0$

বা $m = \pm i$

C.F $= A\cos z + B\sin z = A\cos\log(1+x) + B\sin\log(1+x)$

$$\text{P.I} = \frac{1`}{D^2+1}(2\sin z)$$

$$= 2\text{Im}\left(\frac{1`}{D^2+1}e^{iz}\right)$$

$$= 2\text{Im}\left(e^{iz}\frac{1`}{(D+i)^2+1}1\right)$$

$$= 2\text{Im}\left(e^{iz}\frac{1`}{D^2+2iD}1\right)$$

$$= 2\text{Im}\left(e^{iz}\frac{1}{2iD}\left(1+\frac{D}{2i}\right)^{-1}1\right)$$

$$= 2\text{Im}\left(e^{iz}\frac{1}{2iD}1\right)$$

$$= 2\text{Im}\left(e^{iz}\frac{z}{2i}\right)$$

$$= \text{Im}\left(\frac{z\cos z + 2i\sin z}{i}\right)$$

$$= -z\cos z$$

$$= -\log(1+x)\cos\log(1+x)$$

সাধাৰণ সমাধান হ'ল

$$y = A\cos\log(1+x) + B\sin\log(1+x) - \log(1+x)\cos\log(1+x).$$



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ১

প্ৰশ্ন নং 1ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(a) $x^3\frac{d^3y}{dx^3} + 2x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 10\left(x + \frac{1}{x}\right)$

(b) $\left(x^2D^2 - 3xD + 4\right)y = 2x^2$

(c) $\left(x^2D^2 - xD + 4\right)y = \cos(\log x) + x\sin(\log x)$

(d) $(x+a)^2\frac{d^2y}{dx^2} - 4(x+a)\frac{dy}{dx} + 6y = x$

১২.৪ প্ৰাচল পৰিৱৰ্তন পদ্ধতি



হ'ন ৰনস্কিৰ (1776-1853) এজন বিখ্যাত গণিতজ্ঞ আৰু দাৰ্শনিক।

$y'' + Py' + Qy = X$ সমীকৰণৰ বাবে P. I হ'ল $-y_1\int\frac{y_2X}{W}dx + y_2\int\frac{y_1X}{W}dx$ ইয়াত P, Q আৰু X হ'ল x অৰ ফলন। আকৌ y_1 আৰু y_2 হ'ল $y'' + Py' + Qy = 0$ ৰ সমাধান আৰু $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$, (প'লিশ্ব গণিতজ্ঞ আৰু দাৰ্শনিক হ'ন ৰনস্কিৰ (Hoene Wronsky নাম অনুসৰি) y_1, y_2 ৰ ৰনস্কিয়ান (Wronskian) ।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল $y'' + Py' + Qy = X$ অৰ পূৰণ ফলন $y = c_1y_1 + c_2y_2$. ইয়াত c_1 আৰু c_2 ক $u(x)$, $v(x)$ অৰ প্ৰাচলিক ফলন হিচাপে ল'ব পাৰি।

ধৰা হ'ল P. I হ'ল $y = u(x)y_1 + v(x)y_2$

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$y' = uy_1' + u'y_1 + vy_2' + v'y_2$$

u আৰু v এনেদৰে লোৱা হ'ল যাতে $u'y_1 + v'y_2 = 0$.

গতিকে $y' = uy_1' + vy_2'$

আৰু $y'' = u'y_1' + uy_1'' + v'y_2' + vy_2''$

যিহেতু $y'' + Py' + Qy = 0$ ৰ y_1, y_2 মূল, গতিকে

$$y_1'' + Py_1' + Qy_1 = 0$$

আৰু $y_2'' + Py_2' + Qy_2 = 0$

প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'বগৈ

$$u'y_1' + uy_1'' + v'y_2' + vy_2'' + P\left(uy_1' + vy_2'\right) + Qy = X$$

বা $u(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + v(y_2'' + Py_2' + Qy_2)$

$$-Q\left(uy_1 + vy_2\right) + u'y_1' + v'y_2' + Qy = X$$

বা $u'y_1' + v'y_2' - Q\left(uy_1 + vy_2\right) + Qy = X$

বা $u'y_1' + v'y_2' - Qy + Qy = X \quad (\ y = uy_1 + vy_2)$

বা $u'y_1' + v'y_2' - X = 0 \qquad \ldots (1)$

আকৌ $u'y_1 + v'y_2 + 0.X = 0 \quad \ldots (2)$

(1) আৰু (2) সমাধান কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{u'}{y_2} = \frac{v'}{-y_1} = \frac{X}{y_1'y_2 - y_1y_2'} = \frac{X}{-W}$$

সেয়ে $u' = \frac{X}{-W}y_2$ and $v' = \frac{X}{W}y_1$

অৰ্থাৎ, $u = -\int \frac{y_2X}{W}dx$ and $v = \int \frac{y_1X}{W}dx$

আৰু P. I $= -y_1\int \frac{y_2X}{W}dx + y_2\int \frac{y_1X}{W}dx$

প্ৰমাণিত হ'ল।

উদাহৰণ ৪ ঃ সমাধান কৰক $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \tan 2x$

সমাধান ঃ সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2 + 4 = 0$

বা $m = \pm 2i$

C.F $= A\cos 2x + B\sin 2x$

$= Ay_1 + By_2$ য'ত $y_1 = \cos 2x$ আৰু $y_2 = \sin 2x$ আৰু $X = \tan 2x$.

ৰনস্কিয়ান, $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2$.

$$\text{P. I} = -y_1 \int \frac{y_2 X}{W} dx + y_2 \int \frac{y_1 X}{W} dx$$

$$= -\cos 2x \int \frac{\sin 2x \tan 2x}{2} dx + \sin 2x \int \frac{\cos 2x \tan 2x}{2} dx$$

$$= -\frac{\cos 2x}{2} \int \frac{1-\cos^2 2x}{\cos 2x} dx + \sin 2x \int \frac{\sin 2x}{2} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2x \int (\sec 2x - \cos 2x) dx - \frac{1}{4}\sin 2x \cos 2x$$

$$= -\frac{1}{2}\cos 2x \left\{ \frac{1}{2}\log(\sec 2x + \tan 2x) - \frac{1}{2}\sin 2x \right\} - \frac{1}{4}\sin 2x \cos 2x$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x \left\{ \frac{1}{2}\log(\sec 2x + \tan 2x) - \sin 2x \right\} - \frac{1}{4}\sin 2x \cos 2x$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x \log(\sec 2x + \tan 2x)$$

সাধাৰণ সমাধান হ'ল

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x \log(\sec 2x + \tan 2x).$$

উদাহৰণ ৫ ঃ সমাধান কৰক $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = \sec ax$

সমাধান ঃ সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2 + a^2 = 0$

বা $m = \pm ia$

C.F $= A\cos ax + B\sin ax$

ধৰা হ'ল $y_1 = \cos ax$ আৰু $y_2 = \sin ax$

ৰনস্কিয়ান, $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos ax & \sin ax \\ -a\sin ax & a\cos ax \end{vmatrix} = a$ আৰু $X = \sec ax$.

$$\text{P. I} = -y_1 \int \frac{y_2 \sec ax}{a} dx + y_2 \int \frac{y_1 \sec ax}{a} dx$$

$$= -\frac{1}{2}\cos ax \int \frac{\sin ax}{\cos ax} dx + \frac{\sin ax}{a} \int dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\cos ax \log\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax$$

সাধাৰণ সমাধান হ'ল

$$y = A\cos ax + B\sin ax + \frac{1}{a^2}\cos ax \log\cos ax + \frac{x}{a}\sin ax .$$

উদাহৰণ ৬ ঃ প্ৰাচল পৰিৱৰ্তন পদ্ধতিৰ সহায়ত সমাধান কৰক ঃ

$$y'' - 2y' + y = e^x \log x$$

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত সমীকৰণটোক এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$\left(D^2 - 2D + 1\right)y = e^x \log x$$

সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2 - 2m + 1 = 0$

বা $(m-1)^2 = 0$

বা $m = 1,1$

C. F $= (Ax + B)e^x$

ধৰা হ'ল $y_1 = e^x, y_2 = xe^x$, $X = e^x$ আৰু $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix}$

$$= e^{2x}\begin{vmatrix} 1 & x \\ 1 & 1+x \end{vmatrix} = e^{2x}$$

P. I $= -y_1\int \frac{y_2 X}{W}dx + y_2\int \frac{y_1 X}{W}dx$

$$= -e^x\int \frac{xe^{2x}\log x}{e^{2x}}dx + xe^x\int \frac{e^x . e^x \log x}{e^{2x}}dx$$

$$= -e^x\int x\log x dx + xe^x\int \log x dx$$

$$= -e^x\left\{\log x . \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x}.\frac{x^2}{2}dx\right\} + xe^x\left\{x\log x - \int dx\right\}$$

$$= -e^x\left\{\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\right\} + xe^x(\log x - 1)$$

$$= \frac{1}{4}x^2e^x\{2\log x + 1 + 4(\log x - 1)\}$$

$$= \frac{1}{4}x^2e^x(2\log x - 3)$$

সাধাৰণ সমাধান হ'ল

$$y = (Ax + B)e^x + \frac{1}{4}x^2e^x(2\log x - 3).$$

উদাহৰণ 21 ঃ প্ৰাচল পৰিৱৰ্তন পদ্ধতিৰ সহায়ত সমাধান কৰক ঃ

$$\frac{d^2y}{dx^2} - y = \frac{2}{1+e^x}$$

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $\frac{d^2y}{dx^2} - y = \frac{2}{1+e^x}$

সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2 - 1 = 0$

বা $m^2 = 1$

বা $m = \pm 1$

C.F $= C_1e^x + C_2e^{-x}$

আৰু $y^1.y_2^{/} - y_1^{/}.y_2 = -e^x.e^{-x} - e^x.e^{-x} = -2$

$$u = \int \frac{-y^2X}{y_1.y_2^{/} - y_1^{/}.y_2}dx = -\int \frac{e^{-x}}{-2} \times \frac{2}{1+e^x}dx$$

$$= \int \frac{e^{-x}}{1+e^x}dx$$

$$= \int \frac{dx}{e^x\left(1+e^x\right)}$$

$$= \int \left(\frac{1}{e^x} - \frac{1}{1+e^x}\right)dx$$

$$= \int e^{-x}dx - \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}dx$$

$$= -e^{-x} + \log\left(e^{-x}+1\right)$$

$$v = \int \frac{y_1X}{y_1.y_2^{/} - y_1^{/}.y_2}dx = \int \frac{e^{-x}}{-2} \times \frac{2}{1+e^x}dx$$

$$= \int \frac{e^x}{e^x+1}dx$$

$$= -\log\left(e^x+1\right)$$

P.I $= u.y_1 + v.y_2$

$$= \left[-e^{-x} + \log\left(e^{-x}+1\right)\right]e^x - e^{-x}\log\left(1+e^x\right)$$

$$= -1 + e^x\log\left(e^{-x}+1\right) - e^{-x}\log\left(1+e^x\right)$$

সাধাৰণ সমাধান হ'ল

$$y = C_1e^x + C_2e^{-x} - 1 + e^x\log\left(e^{-x}+1\right) - e^{-x}\log\left(1+e^x\right).$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

প্রশ্ন নং 1 ঃ প্রাচল পৰিৱর্তন পদ্ধতিৰ সহায়ত সমাধান কৰক।

(i) $y_2 + a^2 y = \cot ax$

(ii) $y_2 - 2y_1 + y = xe^x \log x, x > 0$

(iii) $\left(D^2 - 2D + 2\right)y = e^x \tan x$

(iv) $y^{//} + 3y^{/} + 2y = x + \cos x$



১২.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- $a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2 x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = X$ ... (1)

আকাৰৰ অৱকল সমীকৰণক ৰৈখিক সুষম সমীকৰণ বোলা হয়। ইয়াত $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n$ ধ্রুৱক আৰু X হ'ল এটা x অৰ ফলন।

$x = e^z$ প্রতিষ্ঠাপনৰ দ্বাৰা ইয়াক ধ্রুৱক সহগবিশিষ্ট সমীকৰণলৈ ৰূপান্তৰিত কৰিব পাৰি। তাৰ পাছত 7.3 ত বর্ণনা কৰা পদ্ধতিৰে ইয়াত সমাধান উলিয়াব পাৰি।

ধৰা হ'ল $x = e^z$ অর্থাৎ, $z = \log x$

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} = Dy$$

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{dy}{dz} + \frac{d^2 y}{dz^2} = \left(D^2 - D\right)y = D(D-1)y$$

সেইদৰে, $x^3 \frac{d^3 y}{dx^3} = \left(D^2 - D\right)y = D(D-1)(D-2)y$

আৰু সাধাৰণভাৱে $x^n \frac{d^n y}{dx^n} = D(D-1)(D-2)\cdots(D-n+1)y$

এই মানবোৰ প্রতিষ্ঠাপন কৰাত সমীকৰণটো ধ্রুৱক সহগবিশিষ্ট অৱকল সমীকৰণ হ'ল।

- $P\frac{d^2 y}{dx^2} + Q\frac{dy}{dx} + Ry = X$ অৰ বিশেষ অনুকল উলিয়াবৰ বাবে প্রাচল পৰিৱর্তনৰ পদ্ধতি এনেধৰণৰ

ধৰা হ'ল পূৰক ফলন (C.F) $= Ay_1 + By_2$

তেনেহ'লে বিশেষ অনুকল (P.I) $= uy_1 + vy_2$

যি'ত $u = \int \frac{-y_2 X}{W} dx$ আৰু $v = \int \frac{y_1 X}{W} dx$, $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.

সাধাৰণ সমাধান = C.F + P.I.



১২.৬ অধিক জানিবলৈ

1) Tenenbaum, Morris and Pollard, Harry. Ordinary Differential Equations, Dover Publications, Inc, N.Y 11501.

2) Differential Equations: An Introduction with Mathematica. Clay C.Ross, second Edition, Springer.

3) Differential Equations: Linear, Nonlinear, ordinary, partial. A.C. King, J.Billinggham and S. R. Otto, Cambridge-2003.

4) Differential equations with Application and Programs. S. Balachandra Rao and H.R. Anuradha, University Press (India) Limited 1996.



১২.৭ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ (b) দিয়া আছে $\left(x^2 D^2 - 3xD + 4\right)y = 2x^2$ ... (1)

ধৰা হ'ল $x = e^z$ বা $z = \log x$ আৰু $D_1 = \frac{d}{dz}$.

গতিকে (1) হ'বগৈ

$\{D_1(D_1 - 1) - 3D_1 + 4\}y = 2e^{2z}$

বা $(D_1 - 2)^2 y = 2e^{2z}$

সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $(m-2)^2 = 0$

বা $m = 2,2$

C. F $= (C_1 + C_2 z)e^{2z} = (C_1 + C_2 z)(e^z)^2 = (C_1 + C_2 \log x)x^2$

P. I $= \frac{1}{(D_1 - 2)^2} 2e^{2z}$

$$= 2\frac{z^2}{2!}e^{2z} = z^2\left(e^z\right)^2$$

$$= (\log x)^2 x^2$$

সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল

$$y = (C_1 + C_2 \log x)x^2 + (\log x)^2 x^2.$$

(c) $x = e^z$ বহুওৱা হ'ল আৰু $\frac{d}{dz}$ অক D_1 এৰে বুজোৱা হ'ল। প্ৰদত্ত সমীকৰণটো

হ'বগৈ $[D_1(D_1 - 1) - D_1 + 4]y = \cos z + e^z \sin z$

বা $\left[D_1^{\,2} - 2D_1 + 4\right]y = \cos z + e^z \sin z$

সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2 - 2m + 4 = 0$

বা $m = 1 \pm \sqrt{3}i$

C.F $= e^z\left[C_1 \cos \sqrt{3}z + C_2 \sin \sqrt{3}z\right]$

$$= x\left[C_1 \cos \sqrt{3}(\log x) + C_2 \sin \sqrt{3}(\log x)\right]$$

P.I $= \frac{1}{D_1^{\,2} - 2D_1 + 4}\cos z + \frac{1}{D_1^{\,2} - 2D_1 + 4}e^z \sin z$

$$= \frac{1}{-1^2 - 2D_1 + 4}\cos z + e^z \frac{1}{(D_1 + 1)^2 - 2(D_1 + 1) + 4}\sin z$$

$$= \frac{1}{3 - 2D_1}\cos z + e^z \frac{1}{D_1^{\,2} + 4}\sin z$$

$$= \frac{(3 + 2D_1)}{9 - 4D_1^{\,2}}\cos z + e^z \frac{1}{-1^2 + 3}\sin z$$

$$= \frac{3\cos z - 2\sin z}{9 + 4} + \frac{e^z \sin z}{2}$$

$$= \frac{1}{13}[3\cos(\log x) - 2\sin(\log x)] + \frac{x}{2}\sin(\log x)$$

সেয়ে, সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল

$$y = x\left[C_1 \cos\sqrt{3}(\log x) + C_2 \sin\sqrt{3}(\log x)\right] + \frac{1}{13}[3\cos(\log x) - 2\sin(\log x)] + \frac{x}{2}\sin(\log x)$$

(d) $x + a = e^z$ বহুৰাই আৰু $\frac{d}{dx}$ অক D ৰে বুজোৱা হ'ল। প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'ল

$[D(D - 1) - 4D + 6]y = e^z - a$

বা $\left[D^2 - 5D + 6\right]y = e^z - a$

সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2 - 5m + 6 = 0$

বা $m = 3,2$

C.F $= C_1 e^{3z} + C_2 e^{2z} = C_1 (x+a)^3 + C_2 (x+a)^2$

$$\text{P.I} = \frac{1}{D^2 - 5D + 6}.e^z - \frac{1}{D^2 - 5D + 6}.a$$

$$= \frac{1}{(D-3)(D-2)}.e^z - \frac{1}{(D-3)(D-2)}.a$$

$$= \frac{e^z}{(1-3)(1-2)} - a\frac{1}{(D-3)(D-2)}e^{0z}$$

$$= \frac{1}{3}e^z - a\frac{1}{(0-3)(0-2)}e^{0z}$$

$$= \frac{1}{3}e^z - a\frac{1}{6}e^{0z}$$

$$= \frac{1}{3}e^z - \frac{1}{6}a$$

$$= \frac{1}{3}(x+a) - \frac{1}{6}a$$

সেয়ে, সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল

$$y = C_1 (x+a)^3 + C_2 (x+a)^2 + \frac{1}{3}(x+a) - \frac{1}{6}a$$

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) দিয়া আছে, $y_2 + a^2 y = \cot ax$ ... (1)

সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2 + a^2 = 0$

বা $m = \pm ia$

C.F $= C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$

ইয়াত $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos ax & \sin ax \\ -a\sin ax & a\cos ax \end{vmatrix} = a \neq 0$

গতিকে P. I $= u.y_1 + v.y_2$

য'ত $u = -\int \frac{y_2.X}{W}dx = -\int \frac{\sin ax \cot ax}{a}dx = -\frac{1}{a}\int \cos ax dx = -\frac{\sin ax}{a^2}$

আৰু $v = \int \frac{y_1.X}{W}dx = \int \frac{\cos ax \cot ax}{a}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1-\sin^2 ax}{\sin ax}dx$

$$= \frac{1}{a}\int (\cos ecax - \sin ax)dx$$

$$= \frac{1}{a}\int (\cos ecax - \sin ax)dx = \frac{1}{a^2}\left(\log \tan \frac{ax}{2} + \cos ax\right)$$

$$\text{P. I} = \cos ax \times \left(-\frac{1}{a^2}\right) \times \frac{1}{a^2} \times \sin ax + \sin ax \times \frac{1}{a^2} \times \left(\log \tan \frac{ax}{2} + \cos ax\right)$$

$$= \frac{1}{a^2} \times \log \tan\left(\frac{ax}{2}\right)$$

গতিকে, (1) অৰ সাধাৰণ সমাধান হ'ল y = C.F+P.I.

অর্থাৎ, $y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax + \frac{1}{a^2} \times \log \tan\left(\frac{ax}{2}\right)$.

(ii) দিয়া আছে, $\left(D^2 - 2D + 1\right)y = xe^x \log x, x > 0$, $D = \frac{d}{dx}$

সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $(m-1)^2 = 0$

বা $m = 1,1$

$\text{C.F} = (C_1 + C_2 x)e^x = C_1 e^x + C_2 x e^x$

ধৰা হ'ল $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$. আকৌ, $X = xe^x \log x$

ইয়াত, $W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x} \neq 0$

তেনেহ'লে, $\text{P. I} = u.y_1 + v.y_2$

য'ত $u = -\int \frac{y_2.X}{W} dx = -\int \frac{xe^x.xe^x \log x}{e^{2x}} dx = -\int x^2 \log x dx$

$$= -\left[\log x.\frac{x^3}{3} - \int \frac{1}{x}.\frac{x^3}{3} dx\right]$$

$$= -\left[\log x.\frac{x^3}{3} - \frac{1}{9}x^3\right]$$

আৰু $v = \int \frac{y_1.X}{W} dx = \int \frac{e^x.xe^x \log x}{e^{2x}} dx = \int x \log x dx$

$$= \frac{x^2}{2}\log x - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}$$

$$\text{P.I} = -e^x\left\{\frac{x^3}{3}\log x - \frac{x^3}{9}\right\} + xe^x\left\{\frac{x^2}{2}\log x - \frac{x^2}{4}\right\}$$

$$= x^3e^x\log x\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) - x^3e^x\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{6}\right)\times x^3e^x\log x - \left(\frac{5}{36}\right)\times x^3e^x$$

গতিকে, সাধাৰণ সমাধান হ'ল y = C.F+P.I.

$$\therefore\ y = C_1e^x + C_2xe^x + \left(\frac{1}{6}\right)\times x^3e^x\log x - \left(\frac{5}{36}\right)\times x^3e^x.$$

(iii) নিজে চেষ্টা কৰক।

নির্ণেয় সমাধান হ'ল

$$y = e^x\left(C_1\cos x + C_2\sin x\right) - e^x\cos x\log\left(\sin x + \tan x\right)$$

(iv) নিজে চেষ্টা কৰক।

নির্ণেয় সমাধান হ'ল

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \frac{x}{2} - \left(\frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{10}\right)\times\left(3\sin x - \cos x\right).$$



১২.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ৩ঃ তলৰ অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(a) $(3x+2)^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + 5(3x+2)\dfrac{dy}{dx} - 3y = x^2 + x + 1$

(b) $x^3\dfrac{d^3y}{dx^3} + 3x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} + x\dfrac{dy}{dx} + y = \log x + x$

(c) $\left(x^3D^3 - 3x^2D^2 + 6xD - 6\right)y = (\log x)^2$

(d) $(x+1)^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3(x+1) + 4y = x$

(e) $\left\{(1+2x)^2D^2 - 6(1+2x)D + 16\right\}y = 8(1+2x)^2$

প্ৰশ্ন ৪ ঃ প্ৰাচল পৰিৱৰ্তন পদ্ধতিৰ সহায়ত তলৰ অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(a) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = 2x$

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \cos ecx \cot x$

(c) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 3y = x + \sin x$

(d) $\left(D^2 - 9\right)y = e^{2x} + x$

(e) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin^2 x$

*** ***** ***