অধ্যায় ১৩ ঃ আংশিক অৱকল সমীকৰণ (PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION)

অধ্যায় গাঁথনি

13.1 উদ্দেশ্য
13.2 পৰিচয়
13.3 আংশিক অৱকল সমীকৰণ গঠন
13.3.1 স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক অপনয়ন কৰি আংশিক অৱকল সমীকৰণ গঠন
13.3.2 স্বেচ্ছ ফলন অপনয়ন কৰি আংশিক অৱকল সমীকৰণ গঠন
13.5 অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
13.6 অধিক জানিবলৈ
13.7 অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান
13.8 আৰ্হি প্ৰশ্ন

১৩.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- আংশিক অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰিব পাৰিব।

১৩.২ পৰিচয়

বিদ্যার্থীসকলে ইতিমধ্যে আংশিক অৱকলজ পাই আহিছে। ইয়াত আমি স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক বা স্বেচ্ছ ফলন অপনয়ন কৰি কেনেদৰে আংশিক অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰে সেই বিষয়ে আলোচনা কৰিম। তাৰ পাছত আমি প্ৰথম ক্ৰমৰ বিশেষ ধৰণৰ কিছুমান সমীকৰণ সমাধান কৰিম।

আংশিক অৱকলজযুক্ত এটা অৱকল সমীকৰণক আংশিক অৱকল সমীকৰণ বুলি কোৱা হয়। গতিকে আংশিক অৱকল সমীকৰণত এটাতকৈ বেছি স্বতন্ত্ৰ চলক থাকে।

উদাহৰণ ঃ

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1 \qquad \text{... (1)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0 \qquad \text{... (2)}$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z \qquad \text{... (3)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xy^2 \qquad \ldots (4)$$

আংশিক অৱকল সমীকৰণৰ ক্ৰম আৰু মাত্ৰা ঃ

এটা আংশিক অৱকল সমীকৰণৰ ক্ৰম (order) হ'ল সমীকৰণটোত থকা উচ্চতম ক্ৰমৰ অৱকলজৰ ক্ৰম।

এটা আংশিক অৱকল সমীকৰণৰ মাত্ৰা (degree) হ'ল সমীকৰণটোত থকা উচ্চতম ক্ৰমৰ অৱকলজৰ মাত্ৰা।

উদাহৰণ ঃ (1) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = xy^2$ দ্বিতীয় ক্ৰম আৰু প্ৰথম মাত্ৰাৰ।

(2) $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = y^2$ প্ৰথম ক্ৰম আৰু প্ৰথম মাত্ৰাৰ।

সাধাৰণতে, x আৰু y অক স্বতন্ত্ৰ চলক হিচাপে লোৱা হয় আৰু z অক পৰতন্ত্ৰ চলক হিচাপে লোৱা হয়, $z = f(x, y)$.

$\frac{\partial z}{\partial x}$ অৰ অৰ্থ হ'ল y ক ধ্ৰুৱক হিচাপে লৈ x সাপেক্ষে z অৰ অৱকলজ।

উদাহৰণস্বৰূপে যদি $z = ax^2 + 2hxy + by^2$, তেনেহ'লে $\frac{\partial z}{\partial x} = 2ax + 2hy$.

$\frac{\partial z}{\partial y}$ ৰ অৰ্থ হ'ল x অক ধ্ৰুৱক হিচাপে লৈ y সাপেক্ষে z অৰ অৱকলজ।

টোকা ঃ আমি সততে তলৰ প্ৰতীকবোৰ ব্যৱহাৰ কৰিম।

$$p = \frac{\partial z}{\partial x},\ q = \frac{\partial z}{\partial y},\ r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

ৰৈখিক আৰু অৰৈখিক আংশিক অৱকল সমীকৰণ ঃ

এটা আংশিক অৱকল সমীকৰণক ৰৈখিক আংশিক অৱকল সমীকৰণ (linear partial differential equation) বুলি কোৱা হয়। যদি z ৰ (পৰতন্ত্ৰ চলক) আৰু ইয়াৰ সকলো আংশিক অৱকলজ প্ৰথম মাত্ৰাত প্ৰকাশ পায় আৰু z আৰু ইয়াৰ অৱকলজৰ পুৰণফল সমীকৰণটোও নাথাকে।

এটা আংশিক অৱকল সমীকৰণক অৰৈখিক আংশিক অৱকল সমীকৰণ (nonlinear partial differential equation) বুলি কোৱা হয় যদি ই ৰৈখিক নহয়।

১৩.৩ আংশিক ধ্ৰুৱক অপনয়ন কৰি সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰিব পাৰি

স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক অপনয়ন কৰি সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰিব পাৰি। স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক বা স্বেচ্ছ ফলন অপনয়ন কৰি আংশিক অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰিব পাৰি।

১৩.৩.১ স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক অপনয়ন কৰি আংশিক অৱকল সমীকৰণ গঠন

ধৰা হ'ল $f(x,y,z,a,b)=0$ ... (1) এটা সমীকৰণ আৰু ইয়াত দুটা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক a আৰু b নিহিত হৈ আছে।

(1) অক x আৰু y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

বা $$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}p=0 \qquad \text{... (2)}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

বা $$\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}q=0 \qquad \text{... (3)}$$

(1), (2) আৰু (3) ৰ পৰা a, b অপনয়ন কৰি আমি

$$F(x,y,z,p,q)=0$$

আকাৰৰ এটা সমীকৰণ পাম। এইটো এটা প্ৰথম ক্ৰমৰ আংশিক অৱকল সমীকৰণ।

টোকা ঃ

(1) যদি অপনয়ন কৰিব লগীয়া স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱকৰ সংখ্যা স্বতন্ত্ৰ চলকৰ সংখ্যাতকৈ কম হয়, তেনেহ'লে স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক অপনয়ন কৰাৰ পাছত প্ৰথম ক্ৰমৰ একাধিক আংশিক অৱকল সমীকৰণ পোৱা যাব।

(2) যদি অপনয়ন কৰিবলগীয়া স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱকৰ সংখ্যা স্বতন্ত্ৰ চলকৰ সংখ্যাৰ সমান হয়, তেনেহ'লে গঠিত আংশিক অৱকল সমীকৰণটো প্ৰথম ক্ৰমৰ হ'ব।

(3) যদি অপনয়ন কৰিবলগীয়া স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱকৰ সংখ্যা স্বতন্ত্ৰ চলকৰ সংখ্যাতকৈ বেছি হয়, তেনেহ'লে গঠিত আংশিক অৱকল সমীকৰণটো দ্বিতীয় বা তাতকৈ উচ্চ ক্ৰমৰ হ'ব।

উদাহৰণ 1 ঃ অধোলিখিত সমীকৰণৰ পৰা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক অপনয়ন কৰি আংশিক অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

(a) $z=a(x+y)+b$ (b) $z=ax+a^2y^2+b$

সমাধান ঃ (a) দিয়া আছে $z=a(x+y)+b$ ... (1)

(1) অক x আৰু y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$\frac{\partial z}{\partial x}=a$ ... (2) আৰু $\frac{\partial z}{\partial y}=a$ ... (3)

ইয়াৰ পৰা a অপনয়ন কৰি আমি পাওঁ

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$, এইটোৱেই নির্ণেয় আংশিক অৱকল সমীকৰণ।

(b) দিয়া আছে, $z = ax + a^2y^2 + b$ ... (1)

(1)অক x আৰু y, সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$\frac{\partial z}{\partial x} = a$ ... (2) আৰু $\frac{\partial z}{\partial y} = 2a^2y$ ... (3)

a ৰ মান (2) ৰ পৰা (3) ত বহুৱাই আমি পাওঁ

$\frac{\partial z}{\partial y} = 2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 y$, এইটোৱেই নির্ণেয় আংশিক অৱকল সমীকৰণ

উদাহৰণ 2 ঃ $(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = r^2$ সম্বন্ধৰ পৰা আংশিক অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক। (a, b স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক)

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত সমীকৰণটোক x আৰু y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

দিয়া আছে $2(x-a) + 2zp = 0$ ... (1)

আৰু $2(y-b) + 2zq = 0$ ... (2)

(1)অৰ পৰা, $x - a = -zp$

(2)ৰ পৰা, $y - b = -zq$

প্ৰদত্ত সমীকৰণটোত $(x-a)$ আৰু $(y-b)$ ৰ মান বহুৱাই আমি পাওঁ

$$(-zp)^2 + (-zq)^2 + z^2 = r^2$$

বা $z^2(p^2 + q^2 + 1) = r^2$

এইটোৱেই নির্ণেয় সমীকৰণ

উদাহৰণ 3 ঃ $z = axe^y + \frac{1}{2}a^2e^{2y} + b$ ৰ পৰা a আৰু b অপনয়ন কৰক আৰু এটা আংশিক অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $z = axe^y + \frac{1}{2}a^2e^{2y} + b$ ... (1)

(1)অক x আৰু y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = ae^y \quad \text{... (2)}$$

আৰু $\frac{\partial z}{\partial y} = axe^y + a^2e^{2y} = x(ae^y) + (ae^y)^2$ ... (3)

(2) ৰ পৰা ae^{y} ৰ মান (3)ত বহুৱাই আমি পাওঁ

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{2},$$ এইটোৱেই নির্ণেয় সমীকৰণ।

উদাহৰণ 4 ঃ $\log(az-1)=x+ay+b$ ৰ পৰা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক a আৰু b অপনয়ন কৰি এটা আংশিক অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $\log(az-1)=x+ay+b$ ... (1)

(1) অক x সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{a}{az-1}\frac{\partial z}{\partial x}=1 \quad \text{... (2)}$$

(1)অক y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{a}{az-1}\frac{\partial z}{\partial y}=a \quad \text{... (3)}$$

(3)ৰ পৰা, $az-1=\frac{\partial z}{\partial y} \Rightarrow a=\frac{1+\frac{\partial z}{\partial y}}{z}$ ... (4)

$az-1$ আৰু a ৰ মান (2)ত বহুৱাই আমি পাওঁ

$$\frac{1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}.\frac{\partial z}{\partial x}=1$$

অর্থাৎ $1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial z}{\partial x}=z\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ এইটোৱেই নির্ণেয় সমীকৰণ।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

প্রশ্ন নং 1ঃ অধোলিখিতবোৰৰ পৰা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক অপনয়ন কৰি আংশিক অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

(i) $z=ax+by+a^{2}+b^{2}$

(ii) $z=a(x+y)+b(x-y)+abt+c$

(iii) $z=(x+a)(y+b)$

(iv) $2z=\frac{x^{2}}{a^{2}}+\frac{y^{2}}{b^{2}}$

প্রশ্ন নং 2 ঃ xy-সমতলত কেন্দ্র থকা আৰু নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধৰ সকলোবোৰ গোলকৰ আংশিক অৱকল সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং 3 ঃ z-অক্ষয় কেন্দ্র থকা সকলোবোৰ গোলকৰ আংশিক অৱকল সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

১৩.৩.২ স্বেচ্ছ ফলন অপনয়ন কৰি আংশিক অৱকল সমীকৰণ গঠন

(a) এটা স্বেচ্ছ ফলন

ধৰা হ'ল $z = f(u)$ ... (1) য'ত $f(u)$ হ'ল u ৰ এটা স্বেচ্ছ ফলন আৰু u হ'ল x, y, z অৰ এটা প্রদত্ত ফলন, অর্থাৎ, $u = u(x, y, z)$.

(1) অক x আৰু y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \qquad \text{... (2)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \qquad \text{... (3)}$$

(1), (2) আৰু (3)ৰ পৰা স্বেচ্ছ ফলন $f(u)$ অপনয়ন কৰি আমি এটা প্রথম ক্রমৰ আংশিক অৱকল সমীকৰণ পাম।

(b) দুটা স্বেচ্ছ ফলন

দুবাৰ বা ততোধিক অৱকলন কৰি, অপনয়ন প্রক্রিয়াৰ পৰা দ্বিতীয় বা তাতোকৈ উচ্চ ক্রমৰ আংশিক অৱকল সমীকৰণ পাব পাৰি।

টোকা ঃ

(1) স্বেচ্ছ ফলন অপনয়ন কৰি যদি আংশিক অৱকল সমীকৰণ পোৱা যায়, তেনেহ'লে আংশিক অৱকল সমীকৰণৰ ক্রম সাধাৰণতে অপনীত স্বেচ্ছ ফলনৰ সংখ্যাৰ সমান।

(2) যদি স্বেচ্ছ ফলনৰ সংখ্যা n হয়, তেনেহ'লে বহুতো আংশিক অৱকল সমীকৰণ পাব পাৰি।

উদাহৰণ 5 ঃ অধোলিখিতবোৰৰ পৰা স্বেচ্ছ ফলন অপনয়ন কৰি আংশিক অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

(i) $z = f(x^2 - y^2)$

সমাধান ঃ z অক x আৰু y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = f'(x^2 - y^2)2x \qquad \text{... (1)}$$

আৰু $q = \frac{\partial z}{\partial y} = f'(x^2 - y^2)(-2y)$ ... (2)

(1) অক (2)ৰে কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{p}{q} = -\frac{x}{y}$$

বা $py + qx = 0$, এইটোৱেই নিৰ্ণেয় সমীকৰণ।

(ii) $z = yf(x) + xg(y)$

z অক x আৰু y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$p = \frac{\partial z}{\partial x} = yf'(x) + g(y)$$

$$q = \frac{\partial z}{\partial y} = f(x) + xg'(y)$$

$$s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(x) + g'(y)$$

$\therefore \quad xys = xy\left(f'(x) + g'(y)\right)$ ... (1)

আকৌ $px + qy - z = \left(yf'(x) + g(y)\right)x + \left(f(x) + xg'(y)\right)y - z$

$= xyf'(x) + xg(y) + yf(x) + xyg'(y) - yf(x) - xg(y)$

$= xy\left(f'(x) + g'(y)\right)$ ... (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা $xys = px + qy - z$

এইটোৱেই নিৰ্ণেয় অৱকল সমীকৰণ।

উদাহৰণ 6 ঃ $z = f(x + at) + g(x - at)$ ... (i)

সম্বন্ধৰ পৰা আংশিক অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

সমাধান ঃ (i) অক x আৰু t সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(x + at) + g'(x - at) \quad \text{.... (ii)}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(x + at) + g''(x - at) \quad \text{... (iii)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = af'(x + at) - ag'(x - at)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\left\{f''(x + at) + g''(x - at)\right\} \quad \text{... (iv)}$$

$$= a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

$\therefore$ নির্ণেয় অৱকল সমীকৰণটো হ'ল

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

উদাহৰণ 7 ঃ $z = f\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ অৰ পৰা স্বেচ্ছ ফলন অপনয়ন কৰি আংশিক অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

সমাধান ঃ x আৰু y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \times \left(2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}\right) \quad \text{... (i)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'\left(x^2 + y^2 + z^2\right) \times \left(2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y}\right) \quad \text{... (ii)}$$

(i) অক (ii)ৰে হৰণ কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{\left(2x + 2z\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\left(2y + 2z\frac{\partial z}{\partial y}\right)}$$

বা $\frac{\partial z}{\partial x} 2\left(y + z\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 2\left(x + z\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial z}{\partial y}$

বা $\frac{\partial z}{\partial x}\left(y + z\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial z}{\partial y}\left(x + z\frac{\partial z}{\partial x}\right)$

বা $y\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = x\frac{\partial z}{\partial y} + z\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}$

বা $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, এইটোৱেই নির্ণেয় সমীকৰণ।

স্বেচ্ছ ফলন F অৰ অপনয়ন

ধৰা হ'ল $F(u, v) = 0$ ... (1)

য'ত $u = u(x, y, z)$ আৰু $v = v(x, y, z)$ হ'ল x, y, z অৰ প্রদত্ত ফলন।

শৃংকল বিধিৰ সহায়ত (1) অক x সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0 \quad \text{... (2)}$$

সেইদৰে, শৃংখল বিধিৰ সহায়ত (1) অক y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0 \quad \text{... (3)}$$

(2) আৰু (3)ৰ পৰা $\frac{\partial F}{\partial u}$ আৰু $\frac{\partial F}{\partial v}$ অপনয়ন কৰি আমি পাওঁ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} \end{vmatrix}=0 \quad \text{.... (4)}$$

(4)অক প্ৰসাৰণ কৰি আমি স্বেচ্ছ ফলন F বিহীন আংশিক অৱকল সমীকৰণ এটা পাওঁ

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0$$

বা $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}\right)p+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial x}\right)q=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\right)$

এইটো এটা প্ৰথম ক্ৰমৰ ৰৈখিক আংশিক অৱকল সমীকৰণ।

উদাহৰণ 8 ঃ $f\left(x^2+y^2, z-xy\right)=0$ ৰ পৰা স্বেচ্ছ ফলন অপনয়ন কৰি আংশিক অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $u=x^2+y^2$ আৰু $v=z-xy$ $\therefore f(u,v)=0$

x আৰু y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলজ কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}p\right)=0$$

বা $\frac{\partial f}{\partial u}(2x)+\frac{\partial f}{\partial v}(-y+p)=0$ ... (1)

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right)+\frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}q\right)=0$$

বা $\frac{\partial f}{\partial u}(2y)+\frac{\partial f}{\partial v}(-x+q)=0$ ....(2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা $\frac{\partial f}{\partial u}$ আৰু $\frac{\partial f}{\partial v}$ অপনয়ন কৰি আমি পাওঁ

$$\begin{vmatrix} 2x & -y+p \\ 2y & -x+q \end{vmatrix}=0$$

বা $2x(-x+q)-2y(-y+p)=0$

বা $xq-yp=x^2-y^2$, এইটোৱেই নিৰ্ণেয় আংশিক অৱকল সমীকৰণ।

উদাহৰণ 9 ঃ $F\left(xy+z^2, x+y+z\right)=0$ ৰ পৰা স্বেচ্ছ ফলন অপনয়ন কৰি আংশিক অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $u = xy + z^2$ আৰু $v = x+y+z$ $\therefore F(u,v)=0$.

x আৰু y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি, আমি পাওঁ

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}p\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial z}p\right)=0$$

বা $\frac{\partial F}{\partial u}(y+2zp)+\frac{\partial F}{\partial v}(1+p)=0$ ... (1)

$$\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}q\right)+\frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}q\right)=0$$

বা $\frac{\partial F}{\partial u}(x+2zq)+\frac{\partial F}{\partial v}(1+q)=0$ ....(2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা $\frac{\partial F}{\partial u}$ আৰু $\frac{\partial F}{\partial v}$ অপনয়ন কৰি আমি পাওঁ

$$\begin{vmatrix} y+2zp & 1+p \\ x+2zq & 1+q \end{vmatrix}=0$$

বা $(1+q)(y+2zp)-(1+p)(x+2zq)=0$

বা $(2z-x)p+(y-2z)q=x-y$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

প্রশ্ন ঃ অধোলিখিতবোৰৰ পৰা স্বেচ্ছ ফলন অপনয়ন কৰি আংশিক অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

(i) $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (ii) $z = f(xy)$

(iii) $e^x f(y-x)=z$ (iv) $z = f\left(x^2-y\right)+g\left(x^2+y\right)$

(v) $z = f_1(2x+y)+f_2(x-2y)$ (vi) $f\left(xyz, x+y+z\right)=0$



১৩.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- দুটা বা ততোধিক স্বতন্ত্র চলকৰ এটা অজ্ঞাত ফলনৰ এটা বা ততোধিক আংশিক অৱকলজযুক্ত সমীকৰণক আংশিক অৱকল সমীকৰণ বুলি কোৱা হয়।

- এটা আংশিক অৱকল সমীকৰণৰ ক্রম (order) হ'ল সমীকৰণটোত থকা উচ্চতম ক্রমৰ অৱকলজৰ ক্রম।
- এটা আংশিক অৱকল সমীকৰণৰ মাত্রা (degree) হ'ল সমীকৰণটোত থকা উচ্চতম ক্রমৰ অৱকলজৰ মাত্রা।
- এটা আংশিক অৱকল সমীকৰণক ৰৈখিক আংশিক অৱকল সমীকৰণ বুলি কোৱা হয় যদি পৰতন্ত্র চলক z আৰু ইয়াৰ সকলো আংশিক অৱকলজ প্রথম মাত্রাত প্রকাশ পায় আৰু z ইয়াৰ অৱকলজৰ পূৰণফল সমীকৰণটোত নাথাকে।
- (i) এটা প্রদত্ত সমীকৰণৰ পৰা স্বেচ্ছ ধ্রুৱক অপনয়ন কৰি,
  (ii) চলকসমূহৰ স্বেচ্ছ ফলন অপনয়ন কৰি আংশিক অৱকলজ সমীকৰণ গঠন কৰিব পাৰি।
- যদি অপনয়ন কৰিব লগীয়া স্বেচ্ছ ধ্রুৱকৰ সংখ্যা স্বতন্ত্র চলকৰ সংখ্যাৰ সমান হয়, তেনেহ'লে গঠিত আংশিক অৱকল সমীকৰণটো প্রথম মাত্রাৰ হ'ব।
- যদি অপনয়ন কৰিবলগীয়া স্বেচ্ছ ধ্রুৱকৰ সংখ্যা স্বতন্ত্র চলকৰ সংখ্যাতকৈ বেছি হয়, তেনেহ'লে গঠিত আংশিক অৱকল সমীকৰণটো দ্বিতীয় বা তাতকৈ উচ্চ ক্রমৰ হ'ব।
- স্বেচ্ছ ফলন অপনয়ন কৰি যদি আংশিক অৱকল সমীকৰণ পোৱা যায়, তেনেহ'লে আংশিক অৱকল সমীকৰণৰ ক্রম সাধাৰণতে অপনীত স্বেচ্ছ ফলনৰ সংখ্যাৰ সমান।



১৩.৬ অধিক জানিবলৈ

(a) Bhamra. K. S. Partial Differential Equations : An Introductory Treatment with Applications. PHL Learning Private Limited, New Delhi - 110001.

(b) Amaranasth, T. Partial Differential Equations, 2nd edition, Jones and Bartlett Publishers.

(c) C. Evans, Lawrence. Partial Differential Equations, 2nd edition, American Mathematical Society.

(d) Ioannis P Stavroulakis and Stepan A Tersia. Partial differential Equations : An Introduction with Mathematica and Maple, 2nd edition, World scientific Publishing Co. Pt. Ltd, 2004.

(e) Donald Greenspan. Introduction to Partial Differential Equation, Mc Graw Hill, Inc.

১৩.৭ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ (i) দিয়া আছে $z = ax + by + a^2 + b^2$ ... (1)

(1) অক x , y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$\frac{\partial z}{\partial x} = a$ ... (2) আৰু $\frac{\partial z}{\partial y} = b$ ... (3)

(2), (3)ৰ পৰা a আৰু b ৰ মান (1)অত বহুৱাই আমি পাওঁ

$z = px + qy + p^2 + q^2$ য'ত $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ আৰু $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

এইটোৱেই নির্ণেয় আংশিক অৱকল সমীকৰণ।

(ii) দিয়া আছে, $z = a(x + y) + b(x - y) + abt + c$ ... (1)

(1)অক x , y আৰু t সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$\frac{\partial z}{\partial x} = a + b$, $\frac{\partial z}{\partial y} = a - b$, $\frac{\partial z}{\partial t} = ab$ ... (2)

যিহেতু $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$ s

গতিকে $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 4\frac{\partial z}{\partial t}$ (2) ৰ সহায়ত

এইটোৱেই নির্ণেয় অৱকল সমীকৰণ।

(iii) দিয়া আছে, $z = (x + a)(y + b)$ ... (1)

$\frac{\partial z}{\partial x} = y + b$ আৰু $\frac{\partial z}{\partial y} = x + a$

(1)অত বহুৱাই আমি পাওঁ $z = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$ এইটোৱেই নির্ণেয় সমীকৰণ।

(iv) দিয়া আছে, $2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ ... (1)

(1) অক x আৰু y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$2\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{a^2}$

বা $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{a^2}$

বা $\frac{1}{a^2}=\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{p}{x}$ ... (2)

আৰু $2\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{b^2}$

বা $\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{b^2}$

বা $\frac{1}{b^2}=\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{q}{y}$ ... (3)

(2) আৰু (3)ৰ পৰা $\frac{1}{a^2}$ আৰু $\frac{1}{b^2}$ ৰ মান (1)অত বহুৱাই আমি পাওঁ $2z=px+qy$

এইটোৱেই নিৰ্ণেয় আংশিক অৱকল সমীকৰণ।

২ নং **প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ** ধৰা হ'ল গোলকটোৰ কেন্দ্ৰ $(h,k,0)$ আৰু নিৰ্দিষ্ট ব্যাসাৰ্ধ λ.

$(x-h)^2+(y-k)^2+(z-0)^2=\lambda^2$

বা $(x-h)^2+(y-k)^2+z^2=\lambda^2$ ... (1), য'ত h আৰু k স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক

(1)অক x আৰু y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ।

$2(x-h)+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0$

বা $(x-h)=-z\frac{\partial z}{\partial x}$ ... (2)

আৰু $2(y-k)+2z\frac{\partial z}{\partial y}=0$

বা $(y-k)=-z\frac{\partial z}{\partial y}$ ... (3)

(2) আৰু (3)ৰ পৰা $(x-h)$ আৰু $(y-k)$ ৰ মান (1)অত বহুৱাই আমি পাওঁ

$z^2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+z^2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+z^2=\lambda^2$

বা $z^2\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+1\right]=\lambda^2$, এইটোৱেই নিৰ্ণেয় আংশিক অৱকল সমীকৰণ।

৩ নং **প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ** ধৰা হ'ল গোলকটোৰ কেন্দ্ৰ $(0,0,k)$ আৰু নিৰ্দিষ্ট ব্যাসাৰ্ধ λ.

$\therefore$ গোলকটোৰ সমীকৰণ হ'ল

$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-k)^2=\lambda^2$

বা $x^2 + y^2 + (z-k)^2 = \lambda^2$ ... (1) য'ত k এটা স্বেচ্ছ ধ্রুৱক।

(1)অক আংশিকভাৱে x আৰু y সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$2x + 2(z-k)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

বা $$x + (z-k)\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

বা $$x + (z-k)p = 0$$

বা $z - k = -\frac{x}{p}$ ... (2)

আৰু $$2y + 2(z-k)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

বা $$y + (z-k)\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

বা $$y + (z-k)q = 0$$

বা $$z - k = -\frac{y}{q}$$ ... (3)\

(2) আৰু (3)ৰ পৰা $-\frac{x}{p} = -\frac{y}{q}$

বা $xq - yp = 0$, এইটোৱেই নিৰ্ণেয় আংশিক অৱকল সমীকৰণ।

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) দিয়া আছে $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ... (1)

(1) অক x আৰু y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'\left(\frac{y}{x}\right) \times \left(-\frac{y}{x^2}\right)$$

বা $$f'\left(\frac{y}{x}\right) = -\left(\frac{x^2}{y}\right) \times \frac{\partial z}{\partial x}$$ ... (2)

আৰু $$\frac{\partial z}{\partial y} = f'\left(\frac{y}{x}\right) \times \left(\frac{1}{x}\right)$$

বা $$f'\left(\frac{y}{x}\right) = x\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$ ... (3)

(2) আৰু (3)ৰ পৰা $f'\left(\frac{y}{x}\right)$ অপনয়ন কৰি আমি পাওঁ

$$-\frac{x^2}{y}\frac{\partial z}{\partial x} = x\frac{\partial z}{\partial y}$$

বা $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, এইটোৱেই নিৰ্ণেয় আংশিক অৱকল সমীকৰণ।

(ii) দিয়া আছে, $z = f(xy)$ ... (1)

(1)অক x আৰু y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(xy)y \quad \text{... (2)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(xy)x \quad \text{... (3)}$$

(2) ক (3)ৰে হৰণ কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{y}{x}$$

বা $\frac{p}{q} = \frac{y}{x}$

বা $xp - yq = 0$.

(iii) দিয়া আছে, $e^x f(y-x) = z$ ... (1)

(1)অক x সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$e^x f(y-x) - e^x f'(y-x) = \frac{\partial z}{\partial x}$$

বা $z - e^x f'(y-x) = p$, (1)অৰ সহায়ত

বা $z - p = e^x f'(y-x)$ ... (2)

আকৌ (1)অক y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$e^x f(y-x) + e^x f'(y-x) = \frac{\partial z}{\partial y}$$

বা $z + z - p = q$, (1) আৰু (2) ৰ সহায়ত

বা $p + q = 2z$.

(iv) দিয়া আছে, $z = f(x^2 - y) + g(x^2 + y)$ ... (1)

(1)অক x আৰু y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'\left(x^2 - y\right) + 2xg'\left(x^2 + y\right)$$

বা $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\left\{f'2\left(x^2 - y\right) + g'\left(x^2 + y\right)\right\}$ ... (2)

আৰু $\frac{\partial z}{\partial y} = -f'\left(x^2 - y\right) + g'\left(x^2 + y\right)$ ... (3)

(2) আৰু (3) যথাক্রমে x আৰু y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\left\{f'\left(x^2 - y\right) + g'\left(x^2 + y\right)\right\} + 4x^2\left\{f''\left(x^2 - y\right) + g''\left(x^2 + y\right)\right\} \quad ...(4)$$

আৰু $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''\left(x^2 - y\right) + g''\left(x^2 + y\right)$ ... (5)

আকৌ (2) $\Rightarrow f'\left(x^2 - y\right) + g'\left(x^2 + y\right) = \frac{1}{2x} \times \frac{\partial z}{\partial x}$ ... (6)

(4) অত (5) আৰু (6) ব্যৱহাৰ কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2 \times \frac{1}{2x}\frac{\partial z}{\partial x} + 4x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

বা $x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial x} + 4x^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

এইটোৱেই নির্ণেয় আংশিক অৱকল সমীকৰণ।

(v) নিজে চেষ্টা কৰক।

(vi) ধৰা হ'ল $u = x+y+z$ আৰু $v = xyz$ $\therefore f(u,v) = 0$.

x আৰু y সাপেক্ষে আংশিকভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}p\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}p\right) = 0$$

বা $\frac{\partial f}{\partial u}(1+p) + \frac{\partial f}{\partial v}(yz + xyp) = 0$ ... (1)

$$\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}q\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}q\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(1+q) + \frac{\partial f}{\partial v}(xz + xyq) = 0 \qquad ....(2)$$

(1) আৰু (2)ৰ পৰা $\frac{\partial f}{\partial u}$ আৰু $\frac{\partial f}{\partial v}$ অপনয়ন কৰি আমি পাওঁ

$$\begin{vmatrix} 1+p & yz+xyp \\ 1+q & xz+xyq \end{vmatrix} = 0$$

বা $(xz+xyq)(1+p)-(1+q)(yz+xyp)=0$

বা $x(z-y)p+(x-z)yq+z(x-y)=0.$



১৩.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ অধোলিখিত সমীকৰণবোৰৰ পৰা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক অপনয়ন কৰি আংশিক অৱকলজ সমীকৰণ গঠন কৰক।

(a) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (b) $(x-a)^2+(y-b)^2=z^2-c$

প্ৰশ্ন ২ ঃ অধোলিখিত সমীকৰণবোৰৰ পৰা স্বেচ্ছ ফলন অপনয়ন কৰি আংশিক অৱকলজ সমীকৰণ গঠন কৰক।

(a) $z=F\left(x^2+y^2\right)$

(b) $z=e^{my}\phi(x-y)$

(c) $lx+my+nz=\phi\left(x^2+y^2+z^2\right)$

প্ৰশ্ন ৩ ঃ $y=f(x-at)+xF(x-at)+x^2\phi(x-at)$সম্বন্ধৰ পৰা স্বেচ্ছ ফলন অপনয়ন কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ ঃ মূল বিন্দুৰ পৰা p নিৰ্দিষ্ট দূৰত্বত থকা সকলো সমতলৰ আংশিক অৱকলজ সমীকৰণ গঠন কৰক।

প্ৰশ্ন ৫ ঃ $z=x+y+f(xy)$ সম্বন্ধৰ পৰা স্বেচ্ছ ফলন অপনয়ন কৰি আংশিক অৱকলজ সমীকৰণ গঠন কৰক।

*** ***** ***