অধ্যায় ১৪ ঃ প্রথম ক্রম আৰু প্রথম মাত্রাৰ আংশিক অৱকল সমীকৰণ সমাধান (PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION)

অধ্যায় গাঁথনি

14.1 উদ্দেশ্য

14.2 পৰিচয়

14.3 প্রথম ক্রম আৰু প্রথম মাত্রাৰ আংশিক অৱকল সমীকৰণৰ সমাধান

14.4 অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

14.5 অধিক জানিবলৈ

14.6 অগ্রগতিৰ খতিয়ান

14.7 আৰ্হি প্রশ্ন

১৪.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- প্রথম ক্রম আৰু প্রথম মাত্রাৰ আংশিক অৱকল সমীকৰণ সমাধান কৰিব পাৰিব

১৪.২ পৰিচয়

ত্রয়োদশ অধ্যায়ত, আমি আংশিক অৱকল সমীকৰণৰ বিষয়ে জানিব পাৰিলো। আংশিক অৱকল সমীকৰণৰ গঠন পদ্ধতিৰ বিষয়েও আগৰ অধ্যায়ত অধ্যয়ন কৰা হ'ল। এতিয়া এই অধ্যায়ত প্রথম ক্রম আৰু প্রথম মাত্রাৰ আংশিক অৱকল সমীকৰণৰ সমাধানৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব।

১৪.৩ প্রথম ক্রম আৰু প্রথম মাত্রাৰ আংশিক অৱকল সমীকৰণৰ সমাধান

এটা অৱকল সমীকৰণত মাত্র $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ আৰু $q = \frac{\partial z}{\partial y}$ নিহিত হৈ থাকিলে আৰু ইয়াতকৈ উচ্চ ক্রমৰ নাথাকিলে, সমীকৰণটোক প্রথম মাত্রাৰ বুলি কোৱা হয়। যদি p আৰু q ৰ মাত্রা এক হয়, তেনেহ'লে ইয়াক প্রথম ক্রমৰ ৰৈখিক আংশিক অৱকল সমীকৰণ বুলি কোৱা হয়।

$Pp + Qq = R$ লোৱা হ'ল, য'ত P, Q আৰু R হ'ল x, y আৰু পৰতন্ত্র চলক z অৰ ফলন।

$Pp + Qq = R$ সমাধানৰ কার্যকৰী বিধি

প্রথম সোপান ঃ আমি পোনতে প্রদত্ত প্রথম ক্রমৰ ৰৈখিক আংশিক অৱকল সমীকৰণটোক প্রামাণিক আকাৰ $Pp + Qq = R$ ... (1)

দ্বিতীয় সোপান ঃ আমি লাগ্রাঞ্জৰ সহায়ক সমীকৰণবোৰ লিখিম

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} \qquad \text{... (2)}$$

তৃতীয় সোপান ঃ আমি জনা পদ্ধতিৰে (2) সমাধান কৰিম।

ধৰা হ'ল $u(x, y, z) = c_1$ আৰু $v(x, y, z) = c_2$, (2)ৰ দুটা স্বতন্ত্র সমাধান।

চতুর্থ সোপান ঃ (1)অৰ সাধাৰণ সমাধানটো তলৰ সমার্থক আকাৰ তিনিটাৰ যিকোনো এটাৰ সহায়ত প্রকাশ কৰা হয়।

$\phi(u, v) = 0, u = \phi(v)$ আৰু $v = \phi(u), \phi$ এটা স্বেচ্ছ ফলন।

উদাহৰণ 10 ঃ সমাধান কৰক $(x^2 - yz)p + (y^2 - zx)q = z^2 - xy$

সমাধান ঃ ইয়াত সহায়ক সমীকৰণকেইটা হ'ল

$$\frac{dx}{x^2 - yz} = \frac{dy}{y^2 - zx} = \frac{dz}{z^2 - xy} \qquad \text{... (1)}$$

প্রত্যেকটো সমীকৰণ =

$$\frac{dx - dy}{x^2 - y^2 - z(y - x)} = \frac{dy - dz}{y^2 - z^2 - x(z - y)} = \frac{dz - dx}{z^2 - xy - x^2 + yz}$$

বা $\dfrac{d(x - y)}{(x - y)(x + y + z)} = \dfrac{d(y - z)}{(y - z)(y + z + x)} = \dfrac{d(z - x)}{(z - x)(x + y + z)}$

বা $\dfrac{d(x - y)}{(x - y)} = \dfrac{d(y - z)}{(y - z)} = \dfrac{d(z - x)}{(z - x)}$

এতিয়া $\dfrac{d(x - y)}{(x - y)} = \dfrac{d(y - z)}{(y - z)}$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $\log(x - y) = \log(y - z) + \log C_1$

বা $\dfrac{x - y}{y - z} = C_1 \qquad \text{... (2)}$

আকৌ $\dfrac{d(y - z)}{y - z} = \dfrac{d(z - x)}{z - x}$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $\log(y - z) - \log(z - x) = \log C_2$

বা $\dfrac{y - z}{z - x} = C_2 \quad \text{... (3)}$

$\therefore$ সমাধানটো হ'ল $f\left(\frac{x-y}{y-z}, \frac{y-z}{z-x}\right)=0$.

উদাহৰণ 11 ঃ সমাধান কৰক $y^2 p - xyq = x(z-2y)$

সমাধান ঃ সহায়ক সমীকৰণকেইটা হ'ল

$$\frac{dx}{y^2} = \frac{dy}{-xy} = \frac{dz}{x(z-2y)}$$

প্ৰথম দুটাৰ পৰা আমি পাওঁ

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}$$

বা $xdx + ydy = 0$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \frac{C_1}{2}$

আৰু $x^2 + y^2 = C_1$

আৰু $\frac{dy}{-y} = \frac{dz}{z-2y}$

বা $-2ydy + zdy + ydz = 0$

বা $-y^2 + yz = C_2$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সমাধান হ'ল $yz - y^2 = f\left(x^2 + y^2\right)$

উদাহৰণ 12 ঃ সমাধান কৰক $xzp + yzq = xy$

সমাধান ঃ সহায়ক সমীকৰণকেইটা হ'ল $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{xy}$

প্ৰথম দুটাৰ পৰা $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $\log x = \log y + \log C_1$

বা $\frac{x}{y} = C_1$

সেইদৰে শেহৰ দুটাৰ পৰা $\frac{y}{z} = C_2$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সমাধান হ'ল $\phi\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{z}\right)=0$.

উদাহৰণ 13 ঃ সমাধান কৰক $\frac{y^2 z}{x} p + xzq = y^2$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকৰণটো এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$y^2zp + x^2zq = xy^2$$

সহায়ক সমীকৰণকেইটা হ'ল

$$\frac{dx}{y^2z} = \frac{dy}{x^2z} = \frac{dz}{xy^2}$$

প্রথম দুটাৰ পৰা $x^2dx = y^2dy$,অর্থাৎ $x^3 - y^3 = C_1$

প্রথম আৰু তৃতীয়টোৰ পৰা $xdx = zdz$,অর্থাৎ $x^2 - z^2 = C_2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হ'ল $\phi\left(x^3 - y^3, x^2 - z^2\right) = 0$

উদাহৰণ 14 ঃ সমাধান কৰক $yzp + xzq = xy$

সমাধান ঃ সহায়ক সমীকৰণ হ'ল

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{xy} \quad \text{... (1)}$$

(1)অৰ পৰা, $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$

$$\Rightarrow xdx = ydy$$

$$\Rightarrow x^2 - y^2 = C_1$$

আকৌ, (1)অৰ পৰা $\frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}$

$$\Rightarrow ydy = zdz$$

$$\Rightarrow y^2 - z^2 = C_2$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হ'ল $\phi\left(x^2 - y^2, y^2 - z^2\right) = 0$

গুণনীয়ক পদ্ধতি

ধৰা হ'ল প্রদত্ত সমীকৰণটোৰ সহায়ক সমীকৰণ

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$$

ধৰা হ'ল l, m, n ধ্রুৱক বা x, y, z অৰ ফলন। তেনেহ'লে আমি পাম

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{ldx + mdy + ndz}{lP + mQ + nR}$$

l, m, n এনেদৰে লোৱা হ'ল যাতে $lP + mQ + nR = 0$

গতিকে, আমি পালোঁ $ldx + mdy + ndz = 0$

এই অৱকল সমীকৰণটো সমাধান কৰি আমি পালোঁ $u = C_1$

সেইদৰে আমি গুণনীয়কৰ আন এটা সংগ্ৰহ (l_1, m_1, n_1) লওঁ। ইয়াৰ পৰা পাম, $v = C_2$.

গতিকে নিৰ্ণেয় সমাধান হ'ল $f(u, v) = 0$.

উদাহৰণ 15 ঃ সমাধান কৰক $\frac{y-z}{yz}p + \frac{z-x}{zx}q = \frac{x-y}{xy}$

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত সমীকৰণটো এনেদৰে লিখিব পাৰি

$(xy - zx)p + (yz - xy)q = xz - yz$

সহায়ক সমীকৰণ হ'ল

$$\frac{dx}{xy-zx} = \frac{dy}{xy-zx} = \frac{dz}{yz-xy} = \frac{dx+dy+dz}{0}$$

$$= \frac{\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy + \frac{1}{z}dz}{0}$$

এতিয়া, $dx + dy + dz = 0 \Rightarrow x + y + z = C_1$

আৰু $\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy + \frac{1}{z}dz = 0 \Rightarrow \log x + \log y + \log z = \log C_2$

$$\Rightarrow xyz = C_2$$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সমাধান হ'ল $\phi(x + y + z, xyz) = 0$

উদাহৰণ 16 ঃ সমাধান কৰক $(mz - ny)\frac{\partial z}{\partial x} + (nx - lz)\frac{\partial z}{\partial y} = (ly - mx)$

সমাধান ঃ দিয়া আছে $(mz - ny)\frac{\partial z}{\partial x} + (nx - lz)\frac{\partial z}{\partial y} = (ly - mx)$

ইয়াত সহায়ক সমীকৰণ হ'ল

$$\frac{dx}{mz-ny} = \frac{dy}{nx-lz} = \frac{dz}{ly-mx}$$

x, y, z গুণনীয়কৰ সহায়ত আমি পাওঁ

প্ৰত্যেক ভগ্নাংশ $= \frac{xdx + ydy + zdz}{x(mz-ny) + y(nx-lz) + z(ly-mx)} = \frac{xdx + ydy + zdz}{0}$

$$\therefore xdx + ydy + zdz = 0 \quad \ldots (1)$$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $x^2 + y^2 + z^2 = C_1 \quad \ldots (2)$

আকৌ l, m, n গুণনীয়কৰ সহায়ত আমি পাওঁ

প্রত্যেক ভগ্নাংশ

$$= \frac{ldx + mdy + ndz}{l(mz - ny) + m(nx - lz) + n(ly - mx)} == \frac{ldx + mdy + ndz}{0}$$

$\therefore ldx + mdy + ndz = 0$ ... (3)

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $lx + my + nz = C_2$ ... (4)

গতিকে (2) আৰু (4)অৰ পৰা, নির্ণেয় সমাধান হ'ল

$x^2 + y^2 + z^2 = f(lx + my + nz)$.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৩

প্রশ্ন নং 1 ঃ অধোলিখিত আংশিক অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(a) $yq - xp = z$ (b) $p + q = \frac{z}{a}$

(c) $x^2(y - z)p + (z - x)y^2q = z^2(x - y)$

(d) $z(xp - yq) = y^2 - x^2$

(e) $x(y^2 + z)p - y(x^2 + z)q = z(x^2 - y^2)$



১৪.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- $Pp + Qq = R$, (য'ত P, Q আৰু R হ'ল x, y, zঅৰ ফলন) আকাৰৰ আংশিক অৱকল সমীকৰণক ৰৈখিক আংশিক অৱকল সমীকৰণৰ প্রামাণিক ৰূপ বুলি কোৱা হয় ইয়াক লাগ্রাঞ্জৰ প্রথম ক্রমৰ ৰৈখিক আংশিক অৱকল সমীকৰণ বোলা হয়।
- $Pp + Qq = R$ সমীকৰণ সমাধান কৰিবলৈ আমি তলৰ সোপানকেইটা প্রয়োগ কৰোঁ।

  (i) আমি $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$ সহায়ক সমীকৰণ গঠন কৰোঁ।

  (ii) সহায়ক সমীকৰণকেইটা আমি সংঘীকৰণ পদ্ধতি বা গুণনীয়ক পদ্ধতি বা দুয়োটাৰে সমাধান কৰোঁ। ইয়াৰ পৰা আমি দুটা স্বতন্ত্র সমাধান $u = a$ আৰু $v = b$ পাওঁ, য'ত a, b স্বেচ্ছ ধ্রুৱক।

  (iii) তেনেহ'লে $Pp + Qq = R$ সমীকৰণৰ সাধাৰণ সমাধান হ'ল $\phi(u, v) = 0$ বা $u = f(v)$।



১৪.৫ অধিক জানিবলৈ

(a) Bhamra. K. S. Partial Differential Equations : An Introductory Treatment with Applications. PHL Learning Private Limited, New Delhi - 110001.

(b) Amaranasth, T. Partial Differential Equations, 2nd edition, Jones and Bartlett Publishers.

(c) C. Evans, Lawrence. Partial Differential Equations, 2nd edition, American Mathematical Society.

(d) Ioannis P Stavroulakis and Stepan A Tersia. Partial differential Equations : An Introduction with Mathematica and Maple, 2nd edition, World scientific Publishing Co. Pt. Ltd, 2004.

(e) Donald Greenspan. Introduction to Partial Differential Equation, Mc Graw Hill, Inc.



১৪.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৩

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (a) ইয়াত সহায়ক সমীকৰণকেইটা হ'ল

$$\frac{dx}{-x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z} \quad \ldots \ (1)$$

(1) অৰ শেহৰ দুটাৰ পৰা $\frac{dx}{-x}=\frac{dy}{y}$

বা $-\log x=\log y-\log C_1$

বা $\log x+\log y=\log C_1$

বা $\log xy=\log C_1$

বা $xy=C_1 \quad \ldots (2)$

(1) অৰ শেহৰ দুটাৰ পৰা $\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$

বা $\log y = \log z + \log C_2$

বা $\log y - \log z = \log C_2$

বা $\log\left(\frac{y}{z}\right) = \log C_2$

বা $\frac{y}{z} = C_2$ ... (3)

(2) আৰু (3)ৰ পৰা আমি পাম $f\left(xy, \frac{y}{z}\right) = 0$

এইটোৱেই নির্ণেয় সমাধান।

(b) ইয়াত সহায়ক সমীকৰণকেইটা হ'ল

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{z/a}$$

প্রথম দুটাৰ পৰা আমি পাওঁ $dx = dy$

উভয় পক্ষক অনুকলন কৰি আমি পাওঁ

$$x - y = c_1$$

শেহৰ দুটাৰ পৰা আমি পাওঁ $\frac{dy}{a} = \frac{dz}{z}$

উভয় পক্ষক অনুকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{y}{a} = \log z + \log c_2$$

বা $\frac{y}{a} = \log(zc_2)$

বা $e^{\frac{y}{a}} = zc_2$

বা $z = ce^{\frac{y}{a}}$

$\therefore$ সাধাৰণ সমাধান হ'ল $z = e^{\frac{y}{a}} f(y - x)$

(c) ইয়াত সহায়ক সমীকৰণকেইটা হ'ল

$$\frac{dx}{x^2(y-z)} = \frac{dy}{(z-x)y^2} = \frac{dz}{z^2(x-y)}$$

$\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}, \frac{1}{z^2}$ গুণনীয়কৰ সহায়ত আমি পাওঁ

প্রত্যেক ভগ্নাংশ $= \dfrac{\dfrac{dx}{x^2}+\dfrac{dy}{y^2}+\dfrac{dz}{z^2}}{0}$

$\therefore \dfrac{dx}{x^2}+\dfrac{dy}{y^2}+\dfrac{dz}{z^2}=0$

অনুকলন কৰি, আমি পাওঁ $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=C_1$ ... (1)

আকৌ $\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y},\dfrac{1}{z}$ গুণনীয়ক ব্যৱহাৰ কৰি আমি পাওঁ

প্রত্যেক ভগ্নাংশ $= \dfrac{\dfrac{dx}{x}+\dfrac{dy}{y}+\dfrac{dz}{z}}{0}$

$\therefore \dfrac{dx}{x}+\dfrac{dy}{y}+\dfrac{dz}{z}=0$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $\log x+\log y+\log z=\log C_2$

বা $\log xyz=\log C_2$

বা $xyz=C_2$ ... (2)

(1) আৰু (2) ৰ পৰা,

$f\left(xyz,\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=0$ এইটোৱেই নির্ণেয় সমাধান।

(d) প্রদত্ত সমীকৰণটোক এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$zxp-zyq=y^2-x^2$$

ইয়াত সহায়ক সমীকৰণকেইটা হ'ল $\dfrac{dx}{zx}=\dfrac{dy}{-zy}=\dfrac{dz}{y^2-x^2}$ ... (1)

x,y,z গুণনীয়ক ব্যৱহাৰ কৰি আমি পাওঁ

প্রত্যেক ভগ্নাংশ $= \dfrac{xdx+ydy+zdz}{0}$

$\therefore xdx+ydy+zdz=0$

অনুকলন কৰি, আমি পাওঁ $x^2+y^2+z^2=C_1$ ... (2)

প্রথম দুটাৰ পৰা $ydx+xdy=0$

বা $d(xy)=0$

বা $xy=C_2$ ... (3)

(2) আৰু (3)ৰ পৰা আমি পাওঁ

$f\left(xy, x^2+y^2+z^2\right)=0$ এইটোৱেই নির্ণেয় সমাধান

(e) ইয়াত সহায়ক সমীকৰণকেইটা হ'ল

$$\frac{dx}{x\left(y^2+z\right)}=\frac{dy}{-y\left(x^2+z\right)}=\frac{dz}{z\left(x^2-y^2\right)}$$

$\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}$ গুণনীয়কৰ সহায়ত আমি পাওঁ

$$\text{প্রত্যেক ভগ্নাংশ}=\frac{\frac{1}{x}dx+\frac{1}{y}dy+\frac{1}{z}dz}{0}$$

$$\therefore \frac{1}{x}dx+\frac{1}{y}dy+\frac{1}{z}dz=0$$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $\log x+\log y+\log z=\log c_1$

বা $\log xyz=\log c_1$

বা $xyz=c_1$

আকৌ $x, y, -1$ গুণনীয়কৰ সহায়ত আমি পাওঁ

$$\text{প্রত্যেক ভগ্নাংশ}=\frac{xdx+ydy-dz}{0}$$

$\therefore 2xdx+2ydy-2dz=0$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $x^2+y^2-2z=c_2$

$\therefore$ সাধাৰণ সমাধান হ'ল

$$f\left(x^2+y^2-2z, xyz\right)=0.$$



১৪.৭ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্রশ্ন ৬ ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(a) $p\tan x+q\tan y=\tan z$

(b) $px^2+qy^2=z^2$

(c) $(x+2z)p+(4zx-y)q=2x^2+y$

(d) $p+q=1$

(e) $\left(y^2+z^2\right)p-xyq=-3x$

(f) $y^2p-xyq=x\left(z-2y\right)$

(g) $p+3q=5z+\tan\left(y-3x\right)$

(h) $x^2p+y^2q=nxy$

(i) $\left(x^2-y^2-z^2\right)p+2xyq=2xz$

(j) $\left(z^2-2yz-y^2\right)p+\left(xy+zx\right)q=xy-zx$.

*** ***** ***



প্রসঙ্গ পুথি

- *Integral Calculus,* B. C. Das and B. N. Mukherjee, U. N. Dhur & Sons Pvt. Ltd., Kolkata.
- *Integral Calculus*, K. C. Maity & Ram Krishna Ghosh, New Central Book Agency (P) Ltd., Kolkata.
- *Integral Calculus*, P. N. Chatterji, Rajhans Prakashan Mandir, Meerut.
- Ordinary and partial differential equation, Raisinghania, M. D. S.Chand & company Ltd,New Delhi - 110055
- Advanced differential Equations, Sharma, A. K. Discovery Publishing House, New Delhi - 110002
- Ramana, B. V. Higher Engineering Mathematics,11th edition,Tata McGraw Hill Education private Ltd, New Delhi.
- Ordinary and partial differential equation - Theory and Application, Shah, Nita H. PHL learning Pvt. Ltd. New Delhi, 2010.