অধ্যায় ১ ঃ অনুকলন আৰু অনুকলনৰ পদ্ধতি (INTEGRATION AND METHODS OF INTEGRATION)

অধ্যায় গাঁথনি

1.1 উদ্দেশ্য
1.2 পৰিচয়
1.3 সৰল ফলনৰ অনুকলন
1.4 অনিশ্চিত অনুকলনৰ ধর্ম
1.5 অনুকলনৰ পদ্ধতি
  1.5.1 প্রতিষ্ঠাপনৰ সহায়ত অনুকলন
  1.5.2 খণ্ডশঃ অনুকলন
  1.5.3 আংশিক ভগ্নাংশৰ সহায়ত অনুকলন
1.6 অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
1.7 অধিক জানিবলৈ
1.8 অগ্রগতিৰ খতিয়ান
1.9 আৰ্হি প্রশ্ন

১.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- অৱকলনৰ বিপৰীত প্রক্রিয়া হিচাপে সৰল ফলনৰ অনুকলন সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- অনিশ্চিত অনুকলনৰ ধর্ম সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- অনুকলনৰ বিভিন্ন পদ্ধতি, যথা, প্রতিষ্ঠাপন পদ্ধতি, খণ্ডশঃ অনুকলন, আংশিক ভগ্নাংশৰ সহায়ত অনুকলন সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

১.২ পৰিচয়

অনুকলনৰ ব্যাখ্যা দুই ধৰণে কৰিব পাৰি। অধোলিখিত দুই ধৰণৰ সমস্যা সমাধানৰ লগত ই জড়িত।

(i) কোনো ফলনৰ অৱকলজ জনা থাকিলে, ফলনটো নির্ণয়,

(ii) নির্দিষ্ট চর্তৰ অধীনত কোনো বক্ৰই আগুৰা অংশৰ কালি নির্ণয়।

প্রথম ক্ষেত্রৰ পৰা অনিশ্চিত অনুকলনৰ ক্রমবিকাশ হৈছে আৰু দ্বিতীয় ক্ষেত্রৰ পৰা নিশ্চিত অনুকলনৰ ক্রমবিকাশ হৈছে।

ইংৰাজী integration শব্দৰ অর্থ হ'ল summation (সংকলন)। দৰাচলতে ই এটা যোগফলৰ সীমা।

এই অধ্যায়ত আমি অনিশ্চিত অনুকলন আৰু অনুকলনৰ কিছুমান পদ্ধতি সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম।

১.৩ সৰল ফলনৰ অনুকলন

কোনো নির্দিষ্ট অন্তৰালত সংজ্ঞাৱদ্ধ কোনো ফলনৰ অৱকলজ কেনেদৰে নির্ণয় কৰিব লাগে সেয়া আমি জানো। $y = f(x)$ এটা ফলন হ'লে, ইয়াৰ অৱকলজক সাধাৰণতে $f'(x)$ বা $\frac{dy}{dx}$ এৰে বুজোৱা হয়। f' দিয়া থাকিলে, f কেনেদৰে উলিয়াব লাগে, সেই সম্বন্ধে এই অধ্যায়ত আলোচনা কৰা হ'ব। অনুকলন হ'ল অৱকলনৰ বিপৰীত প্রক্রিয়া, অর্থাৎ, অৱকলজ দিয়া থাকিলে ফলনটো নির্ণয় কৰিব লাগে।

আমি জানো যে (i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}\right) = x^3$

আৰু (ii) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

(i) অৰ ক্ষেত্রত $\frac{x^4}{4}$ হ'ল x^3 অৰ এটা প্রতিঅৱকলজ (antiderivative) [বা অনুকল (integral) বা পূর্বগ (primitive)]। সেইদৰে (ii) ৰ ক্ষেত্রত $\cos x$ হ'ল $\sin x$ অৰ এটা প্রতিঅৱকলজ।

আন দুটা উদাহৰণ লোৱা হ'ল—

(iii) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4} + C\right) = x^3$

আৰু (iv) $\frac{d}{dx}(\sin x + C) = \cos x$

ইয়াত C এটা বাস্তৱ সংখ্যা।

স্পষ্টতঃ, $\frac{x^4}{4} + C$ হ'ল x^3 অৰ এটা প্রতি অৱকলজ আৰু $\sin x + C$ হ'ল $\cos x$ অৰ এটা প্রতি অৱকলজ। গতিকে দেখা গ'ল যে ফলনৰ প্রতি অৱকলজ অদ্বিতীয় (unique) নহয়।

সংজ্ঞা ঃ যি ফলন এটা প্রদত্ত ফলনৰ অৱকলজ, সেইটো ফলনটোৰ প্রতি অৱকলজ (বা অনুকল বা পূর্বগ)।

অন্তৰাল I ত সংজ্ঞাৱদ্ধ $\phi(x)$ ফলনৰ বাবে $\frac{d}{dx}[\phi(x)] = f(x),$ হ'লে যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা C $\frac{d}{dx}[\phi(x) + C] = f(x), x \in I.$ গতিকে $\phi(x) + C$ এ $f(x)$ অৰ অৱকলজ বুজায়, $\int f(x)dx$ এ প্রতি অৱকলজ বুজায়, অর্থাৎ $\int f(x)dx = \phi(x) + C.$

$\int f(x)dx$ অক x সাপেক্ষে $f(x)$ অৰ প্ৰতি অৱকলজ বুলি কোৱা হয়। প্ৰতি অৱকলজ উলিওৱা উপায়ক অনুকলন (integration) বুলি কোৱা হয়। 'ʃ' হ'ল অনুকলন চিহ্ন। 'ʃ' চিহ্নটো হ'ল প্ৰসাৰিত (elongated) S. 'sum' শব্দৰ আদি আখৰৰ পৰা এইটো লোৱা হৈছে।

কিছুমান প্ৰাথমিক ফল

উপৰিউক্ত সংজ্ঞা আৰু কিছুমান প্ৰামাণিক অৱকলজৰ সহায়ত আমি তলৰ অনুকলন সূত্ৰবোৰ পাওঁ।

	অৱকলজ	অনুকল (বা প্ৰতিঅৱকলজ)
1.	$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n$	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ (n\neq -1)$
2.	$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$	$\int \cos x dx=\sin x+C$
3.	$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$	$\int \sin x dx=-\cos x+C$
4.	$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$	$\int \sec^2 x dx=\tan x+C$
5.	$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$	$\int \sec x\tan x dx=\sec x+C$
6.	$\frac{d}{dx}(\cot x)=-\text{cosec}^2 x$	$\int \text{cosec}^2 x dx=-\cot x+C$
7.	$\frac{d}{dx}(\text{cosec}x)=-\text{cosec}x\cot x$	$\int \text{cosec}x\cot x dx=-\text{cosec}x+C$
8.	$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$	$\int e^x dx=e^x+C$
9.	$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log_e a}\right)=a^x$	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\log_e a}+C$
10.	$\frac{d}{dx}(\log x)=\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}dx=\log\lvert x\rvert+C$
11.	$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x+C$
12.	$\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	বা, $-\cos^{-1}x+C$
13.	$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+C$

14. $\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1}x\right)=\frac{-1}{1+x^2}$ বা, $-\cot^{-1}x + C$

15. $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1}x\right)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ $\int\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx=\sec^{-1}x+C$

16. $\frac{d}{dx}\left(\text{cosec}^{-1}x\right)=\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$ বা, $-\text{cosec}^{-1}x + C$

উদাহৰণ ঃ

ëÅãÝÃí 1 ঃ মান নির্ণয় কৰক (i) $\int x^4dx$ (ii) $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ (iii) $\int 3^x dx$

সমাধান ঃ (i) $\int x^4dx=\frac{x^{4+1}}{4+1}+C=\frac{x^5}{5}+C$ (সূত্ৰ 1 অৰ সহায়ত)

(ii) $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-½}dx=\frac{x^{-½+1}}{-½+1}+C=2\sqrt{x}+C$

(iii) $\int 3^x dx=\frac{3^x}{\log_e 3}+C$ (সূত্ৰ 9 অৰ সহায়ত)

১.৪ অনিশ্চিত অনুকলৰ ধর্ম

P–1 অধোলিখিত ফলৰ আধাৰত অৱকলজ আৰু অনুকলন পৰস্পৰ বিপৰীত প্ৰক্ৰিয়া।

$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$ আৰু $\int f'(x)dx=f(x)+C$, C এটা ধ্ৰুৱক।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল $f(x)$ অৰ $\phi(x)$ এটা প্ৰতি অৱকলজ, অর্থাৎ $\frac{d}{dx}[\phi(x)]=f(x)$

তেনেহ'লে $\int f(x)dx=\phi(x)+C$

$\therefore\frac{d}{dx}\int f(x)dx=\frac{d}{dx}[\phi(x)+C]=\frac{d}{dx}[\phi(x)]+\frac{d}{dx}(C)=f(x)$

(প্ৰথম অংশ প্ৰমাণিত হ'ল)

সেইদৰে আমি জানো যে $f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)$

$\therefore\int f'(x)dx=f(x)+C$, য'ত C এটা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক।

P-2 একে অৱকলজ থকা দুটা অভিন্ন অনুকলে একে বক্ৰৰ কুল বুজায় আৰু সিহঁত সমতুল্য হয়।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল $\frac{d}{dx}\int f(x)dx=\frac{d}{dx}\int g(x)dx$

গতিকে $\frac{d}{dx}\int f(x)dx - \frac{d}{dx}\int g(x)dx = 0$

বা, $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx - \int g(x)dx\right] = 0$

বা, $\int f(x)dx - \int g(x)dx = C$

বা, $\int f(x)dx = \int g(x)dx + C$

অনুকলন ধ্ৰুৱক নিলিখাকৈ সাধাৰণতে এইটো $\int f(x)dx = \int g(x)dx$ হিচাপে প্ৰকাশ কৰা হয়।

P-3 $\int[f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

প্ৰমাণ ঃ P-1 ধৰ্মৰ পৰা আমি পাওঁ

$$\frac{d}{dx}\int[f(x)+g(x)]dx = f(x)+g(x) \quad \text{... (a)}$$

আকৌ আমি জানো যে

$$\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx + \int g(x)dx\right] = \frac{d}{dx}\int f(x)dx + \frac{d}{dx}\int g(x)dx$$
$$= f(x)+g(x) \quad \text{... ... ...(b)}$$

গতিকে আমি পালোঁ

$$\int[f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

অনুসিদ্ধান্ত

(A) $\int[f(x)-g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$

(B) P-3 টো এনেধৰণে সাধাৰণীকৰণ কৰিব পাৰি

$$\int[f(x)+g(x)+h(x)+....+\phi(x)]dx$$
$$= \int f(x)dx + \int g(x)dx + \int h(x)dx + ... + \int \phi(x)dx$$

P-4 যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা K ৰ বাবে

$$\int K f(x)dx = K\int f(x)dx$$

প্ৰমাণ ঃ আমি জানো যে $\frac{d}{dx}\int K f(x)dx = K f(x)$, P-1 ধৰ্মৰ সহায়ত

আকৌ $\frac{d}{dx}\left[K\int f(x)dx\right] = K\frac{d}{dx}\int f(x)dx = K f(x)$

গতিকে P-2 ধৰ্মৰ সহায়ত

$$\int K f(x)dx = K\int f(x)dx$$

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ

উদাহৰণ 1 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক (i) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

(ii) $\int\left(x^{-3/2}-4e^x+\cos x\right)dx$ (iii) $\int\left(2x^2+4\sec^2 x-\sqrt[3]{x}\right)dx$

সমাধান ঃ (i) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

$=\int\left(x+2+\frac{1}{x}\right)dx$

$=\int x\,dx+\int 2\,dx+\int\frac{1}{x}dx$ (P-3 ধর্মৰ সহায়ত)

$=\frac{x^{1+1}}{1+1}+C_1+2\int dx+\log x+C_2$

$=\frac{x^2}{2}+C_1+2x+C_3+\log x+C_2$

$=\frac{x^2}{2}+2x+\log x+C$ (ইয়াত $C_1+C_2+C_3=C$)

(ii) $\int\left(x^{-3/2}-4e^x+\cos x\right)dx$

$=\int x^{-3/2}-dx-\int 4e^x dx+\int\cos x\,dx$

$=\frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{\frac{-3}{2}+1}+C_1-4\int e^x+\sin x+C_2$

$=\frac{x^{-1/2}}{\frac{-1}{2}}+C_1-4e^x+C_3+\sin x+C_2$

$=-2x^{-1/2}-4e^x+\sin x+C$

(iii) $\int\left(2x^2+4\sec^2 x-\sqrt[3]{x}\right)dx$

$=\int 2x^2dx+\int 4\sec^2 x\,dx-\int\sqrt[3]{x}\,dx$

$=2\int x^2dx+4\int\sec^2 x\,dx-\int x^{1/3}\,dx$

$=\frac{2}{3}x^3+C_1+4\tan x+C_2-\frac{x^{4/3}}{4/3}+C_3$

$=\frac{2}{3}x^3+4\tan x-\frac{3}{4}x^{4/3}+C$

উদাহৰণ 2 ঃ মান নির্ণয় কৰক– (i) $\int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}\, dx$

(ii) $\int \frac{3x^4 + 7x + 5}{2\sqrt{x}}\, dx$ (iii) $\int \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}\, dx$

সমাধান ঃ (i) $\int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}\, dx$

$$= \int \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)} dx$$

$$= \int (x^2 + 1) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + x + C$$

(ii) $\int \frac{3x^4 + 7x + 5}{2\sqrt{x}}\, dx$

$$= \int \left(\frac{3}{2} x^{7/2}\, dx + \frac{7}{2} x^{1/2} + \frac{5}{2} x^{-1/2} \right) dx$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{9} x^{9/2} + \frac{7}{2} \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{1} x^{1/2} + C$$

$$= \frac{1}{3} x^{9/2} + \frac{7}{3} x^{3/2} + 5\sqrt{x} + C$$

(iii) $\int \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}\, dx$

$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx + \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, dx$$

$$= \int \sec^2 dx + \int \tan x \sec x\, dx$$

$$= \tan x + \sec x + C$$

উদাহৰণ 3 ঃ $\cos 2x$ অৰ এটা প্রতি অৱকলজ লিখক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে $\frac{d}{dx}(\sin 2x) = 2\cos 2x$

বা, $\cos 2x = \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(\sin 2x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} \sin 2x \right)$

$\therefore \cos 2x$ অৰ প্রতি অৱকলজ হ'ল $\frac{1}{2} \sin 2x + C$.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

প্রশ্ন নং ১ ঃ অধোলিখিতবোৰৰ প্রতিটোৰে প্রতি অৱকলজ নির্ণয় কৰক।

(i) $\frac{1}{x},(x\neq 0)$ (ii) $\sin 3x$ (iii) $(ax-b)^2$

প্রশ্ন নং ২ ঃ তলৰ অনুকলবোৰ নির্ণয় কৰক।

(i) $\int x^3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$ (ii) $\int(\cos x+\sin x)^2 dx$

(iii) $\int\left(\frac{2\cos x}{5\sin^2 x}+\frac{1}{3\cos^2 x}\right)dx$ (iv) $\int\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$

(v) $\int\left(e^{x\log a}+e^{a\log x}+e^{a\log a}\right)dx$ (vi) $\int\sqrt{1+\cos 2x}\,dx$

(vii) $\int\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx$ (viii) $\int\left(\frac{x}{m}+\frac{m}{x}+x^m+m^x\right)dx$

প্রশ্ন নং ৩ ঃ মান নির্ণয় কৰক (i) $\int\left(x^4+x^2+1\right)d\left(x^2\right)$ (ii) $\int\frac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}dx$

(iii) $\int\frac{x^{-1/3}+\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}}dx$

প্রশ্ন নং ৪ ঃ যদি x সাপেক্ষে $f(x)$ অৰ অৱকলজ $\frac{1}{x}+\frac{1}{1+x^2}$ আৰু $f(1)=\pi/4$, $f(x)$ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ ঃ এটা বক্ৰৰ (x, y) বিন্দুত প্রৱণতা $3x^2-12$ আৰু বক্ৰটো (2,–7) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়। বক্ৰটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

১.৫ অনুকলনৰ পদ্ধতি

আগৰ আলোচনাত আমি কিছুমান ফলনৰ অনুকলৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিছোঁ। এইবোৰ কিছুমান প্রামাণিক ফলনৰ অৱকলজৰ পৰা অনায়াসে পাব পাৰি। ফলনটো নিৰীক্ষণ কৰি এইটো পাব পাৰি। কিন্তু কিছুমান ফলনৰ অনুকল অনায়াসে পাব নোৱাৰি। অনুকল নির্ধাৰণ কৰিবলৈ প্রদত্ত ফলনসমূহক প্রামাণিক আকাৰলৈ নিবলৈ কিছুমান পদ্ধতিৰ প্রয়োজন। তেনে কেইটামান পদ্ধতি হ'ল— (i) প্রতিষ্ঠাপনৰ সহায়ত অনুকলন, (ii) খণ্ডশঃ অনুকলন, (iii) আংশিক ভগ্নাংশৰ সহায়ত অনুকলন।

১.৫.১ প্রতিষ্ঠাপনৰ সহায়ত অনুকলন

যথাযথ প্রতিষ্ঠাপনৰ দ্বাৰা অনুকলটোক প্রামাণ্য আকাৰলৈ নিয়া পদ্ধতিক 'প্রতিষ্ঠাপনৰ সহায়ত অনুকলন' বুলি কোৱা হয়।

ধৰা হ'ল $\phi(x)$ এটা অৱকলনীয় ফলন। $\int f(\phi(x))\phi'(x)dx$ আকাৰৰ অনুকলৰ মান নিৰ্ণয় কৰিবলৈ $\phi(x)=t$ বহুওৱা হয়। ইয়াৰ পৰা আমি পাওঁ $\phi'(x)dx=dt$ এই প্ৰতিষ্ঠাপনৰ ফলত উপৰিউক্ত অনুকলটোৰ আকাৰ $\int f(t)dt$ হয়।

যদি এতিয়া $\int f(t)dt$ এটা প্ৰামাণিক আকাৰ হয় আমি অনুকলটোৰ মান উলিয়াব পাৰিম। শেষত আমি t ৰ ঠাইত পুনৰ x বহুৱাম।

যথাযথ প্ৰতিষ্ঠাপননো কি হয়, সেয়া আমি নিৰীক্ষণ কৰি ল'ব লাগিব। তলত কিছুমান উদাহৰণ দিয়া হ'ল। কেনেধৰণৰ প্ৰতিষ্ঠাপন ল'ব লাগে তাৰ আভাস ইয়াৰ পৰা পোৱা যাব।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ

উদাহৰণ 1 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক $\int (ax+b)^n dx$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $ax+b=t$, গতিকে $a\ \dfrac{dx}{dt}=1$

$$\text{বা} \quad dx=\frac{1}{a}dt$$

$$\therefore \int (ax+b)^n dx=\int t^n \frac{1}{a}dt=\frac{1}{a}\int t^n dt=\frac{1}{a}\frac{1}{n+1}t^{n+1}+C$$

$$=\frac{1}{a(n+1)}(ax+b)^{n+1}+C$$

উদাহৰণ 2 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক $\int \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $\sqrt{x}=t,\ \therefore \dfrac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt,$ বা $\dfrac{1}{\sqrt{x}}dx=2dt$

এতিয়া $\int \dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int 2\sin t\,dt=2(-\cos t)+C=-2\cos\sqrt{x}+C$

উদাহৰণ 3 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক $\int \tan^4\theta\sec^2\theta\,d\theta$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $\tan\theta=t,\ \therefore \sec^2\theta\,d\theta=dt$

এতিয়া $\int \tan^4\theta\sec^2\theta\,d\theta=\int t^4dt=\dfrac{1}{5}t^5+C=\dfrac{1}{5}\tan^5\theta+C$

উদাহৰণ 4 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক $\int \dfrac{10x^9+10^x\log_e^{10}}{10^x+x^{10}}\,dx$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $10^x+x^{10}=t,\ \therefore (10^x\log_e 10+10x^9)dx=dt$

এতিয়া $\int \dfrac{10x^9+10^x\log_e 10}{10^x+x^{10}}dx=\int\dfrac{1}{t}dt=\log t+C=\log(10^x+x^{10})+C$

কেইটামান বিশেষ ফল

1. $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|f(x)| + C$

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল $f(x) = z,\ \therefore f'(x)dx = dz$

$$\therefore \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{dz}{z} = \log|z| + C = \log|f(x)| + C$$

অধোলিখিতবোৰৰ বাবে এই ফলটো প্ৰয়োগ কৰিব পাৰি।

(a) $\int \tan x\ x = \log|\sec x| + C$ (b) $\int \cot x\,dx = \log|\sin x| + C$

(c) $\int \sec x\,dx = \log|\sec x + \tan x| + C$

(d) $\int \operatorname{cosec} x\,dx = \log|\operatorname{cosec} x - \cot x| + C$

প্ৰমাণ (a) : $\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$

$$= -\log|\cos x| + C = \log|\sec x| + C$$

প্ৰমাণ (c) : $\int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x}dx$

$$= \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}dx$$

$$= \log|\sec x + \tan x| + C$$

টোকা ঃ (b) আৰু (d) বিদ্যাৰ্থীসকলৰ অনুশীলনীৰ বাবে এৰা হ'ল।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

প্ৰশ্ন ঃ অধোলিখিত অনুকলবোৰ নিৰ্ণয় কৰক।

1. $\int \frac{x}{9-4x^2}\,dx$
2. $\int (4x+2)\sqrt{x^2+x+1}\,dx$
3. $\int e^{\tan^{-1}x}\frac{1}{1+x^2}dx$
4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}$
5. $\int x\sqrt{x^2+5}\,dx$
6. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$
7. $\int \frac{\cos x\,dx}{(a+b\sin x)^2}$
8. $\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\,dx$
9. $\int \frac{\sin(\tan^{-1}x)}{1+x^2}dx$
10. $\int \frac{(x+1)(x+\log x)^2}{x}\,dx$
11. $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$
12. $\int \frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x+7}}\,dx$
13. $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}\,dx$

14. $\int \frac{1}{x^2\left(x^4+1\right)^{3/4}}\,dx$

15. $\int \frac{x^2+5x+2}{x+2}\,dx$ 16. $\int \frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}}\,dx$ 17. $\int \cos^4 x\,dx$

18. $\int \sin^3 x\,dx$ 19. $\int \cos^2 x\,dx$ 20. $\int \frac{2x+5}{x^2+5x-7}\,dx$

21. $\int \frac{1}{\sin(x-a)\sin(x-b)}\,dx$ 22. $\int \frac{dx}{\sin(x-a)\cos(x-b)}$

23. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x\,dx$ 24. $\int \frac{x+2}{(x+1)^2}\,dx$

25. $\int \frac{3x+1}{\left(3x^2+2x+1\right)^3}\,dx$

কিছুমান প্ৰামাণিক অনুকল

(A) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C,\ (a\neq 0)$

(B) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,\ (|x|>|a|)$

(C) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C,\ (|x|<|a|)$

(D) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C$

(E) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$

(F) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$

প্ৰমাণ (A) : ধৰা হ'ল $x = a\tan\theta,\ \therefore dx = a\sec^2\theta d\theta$

এতিয়া $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \int \frac{a\sec^2\theta d\theta}{a^2\tan^2\theta+a^2} = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}d\theta = \frac{1}{a}\int d\theta$

$= \frac{1}{a}\theta + C = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$

প্ৰমাণ (B) : $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \int \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx$, আংশিক ভগ্নাংশৰ সহায়ত

$= \frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{x-a}dx - \int \frac{1}{x+a}dx\right]$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log|x-a| - \log|x+a|\right] + C$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

প্ৰমাণ (C) : আংশিক ভগ্নাংশত ভাঙি লৈ (B)ৰ দৰে কৰি যাওক।

প্ৰমাণ (D) : ধৰা হ'ল $x = a\tan\theta$, $\therefore dx = a\sec^2\theta d\theta$

এতিয়া $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int \frac{a\sec^2\theta d\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta + a^2}} = \int \sec\theta d\theta$

$$= \log|\sec\theta + \tan\theta| + C_1 = \log\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \frac{x}{a}\right| + C_1$$

$$= \log\left|\sqrt{x^2+a^2} + x\right| - \log|a| + C_1$$

$$= \log\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C$$

প্ৰমাণ (E) : $x = a\sec\theta$ বহুৰাই আগৰ দৰে কৰি যাওক।

প্ৰমাণ (F) : $x = a\sin\theta$ বহুৰাই আগৰ দৰে কৰি যাওক।

কেইটামান বেলেগ ধৰণৰ অনুকল

অধোলিখিত ধৰণৰ অনুকলকেইটা নিৰ্ণয় কৰিবলৈ আমি উপৰিউক্ত প্ৰামাণিক অনুকলকেইটা ব্যৱহাৰ কৰিম।

(A) $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ (B) $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (C) $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}$

(D) $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ (E) $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{cx+d}}$

(F) $\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}}$

(ইয়াত a, b, c, d, p, q, r ধ্ৰুৱক)

সমাধান ঃ (A) আমি এনেদৰে লিখিব পাৰোঁ ax^2+bx+c

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$$

$$= a\left\{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)\right\}$$

ধৰা হ'ল $x + \frac{b}{2a} = t$ $\therefore dx = dt$

$$\therefore \int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^2 \pm \mathrm{K}^2}$$

$$\text{য'ত } \mathrm{K}^2 = \frac{4ac-b^2}{4a^2}$$

এতিয়া প্ৰামাণিক সূত্ৰৰ সহায়ত এইটো নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।

(B) ওপৰৰ (A) ৰ দৰে আমি লিখিব পাৰোঁ

$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 \pm \mathrm{K}^2}}$ প্ৰামাণিক সূত্ৰৰ সহায়ত ইয়াৰ মান নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।

(C) এই ক্ষেত্ৰত আমি বাস্তৱ সংখ্যা A আৰু B উলিয়াব লাগে যাতে

$$px+q = \mathrm{A}\frac{d}{dx}\left(ax^2+bx+c\right)+\mathrm{B} = \mathrm{A}\left(2ax+b\right)+\mathrm{B}\,.$$

x অৰ সহগ আৰু ধ্ৰুৱক পদ তুলনা কৰি A আৰু B ৰ মান নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।

গতিকে আমি লিখিব পাৰোঁ

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx = \mathrm{A}\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx + \mathrm{B}\int \frac{1}{f(x)}dx \quad \text{য'ত}$$

$$f(x) = ax^2+bx+c\,.$$

আগৰ পদ্ধতি অনুযায়ী সোঁপক্ষ অনায়াসে অনুকলন কৰিব পাৰি।

(D) এই ক্ষেত্ৰত আমি $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ অক

$\mathrm{A}\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx + \mathrm{B}\int \frac{1}{\sqrt{f(x)}}\,dx$ হিচাপে লিখিব পাৰোঁ আৰু (C) ত বৰ্ণনা কৰা পদ্ধতিৰ সহায়ত সমাধান কৰিব পাৰোঁ।

(E) ধৰা হ'ল $cx+d = t^2$, তেনেহ'লে $cdx = 2t\,dt$

$$\text{এতিয়া } \int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{(cx+d)}} = \frac{2}{c}\int \frac{t\,dt}{\left(a\frac{t^2-d}{c}+b\right)t}$$

$$= 2\int \frac{dt}{at^2+(bc-ad)}$$

প্ৰামাণিক অনুকলনৰ সহায়ত এইটোৰ মান নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।

(F) ধৰা হ'ল $px+q = \frac{1}{t}$, $\therefore pdx = -\frac{1}{t^2}dt$. গতিকে প্ৰদত্ত অনুকলটোৰ আকাৰ

$-\int \frac{dt}{\sqrt{At^2+Bt+C}}$ হ'বগৈ। (B)ত বৰ্ণনা কৰা পদ্ধতিৰে এইটোৰ মান নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ

ëÅãÝÃí 1 ঃ $\int \frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\,dx$

সমাধান ঃ $\int \frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}\,dx = \int \frac{1+\tan x}{1-\tan x}dx$, (ল'ব আৰু হৰক $\cos x$ এৰে হৰণ কৰি)

$$= \int \tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)dx = \log\left|\sec\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\right| + C$$

উদাহৰণ 2 ঃ $\int \frac{3x^2}{x^6+1}\,dx$

সমাধান ঃ $\int \frac{3x^2}{x^6+1}\,dx = \int \frac{3x^2}{\left(x^3\right)^2+1}dx$

$x^3 = t$ বহুৱাই

$= \int \frac{dt}{t^2+1}$ $\therefore 3x^2dx = dt$

$= \tan^{-1}(t)+C = \tan^{-1}\left(x^3\right)+c$

উদাহৰণ 3 ঃ $\int \frac{1}{2x^2+8x+20}\,dx$

সমাধান ঃ $\int \frac{1}{2x^2+8x+20}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+4x+10}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x^2+4x+4\right)+6}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+2)^2+\left(\sqrt{6}\right)^2}$

$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{6}}\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)+C$

উদাহৰণ 4 ঃ $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+4}}$

সমাধান ঃ $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+3x+4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+\frac{3}{2}x+2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2.\frac{3}{4}.x + \frac{9}{16} + \frac{23}{16}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{23}}{4}\right)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left|\left(x+\frac{3}{4}\right) + \sqrt{x^2 + \frac{3}{2}x + 2}\right| + C$$

উদাহৰণ 5 ঃ $\int \frac{4x+3}{3x^2+3x+1}\,dx$

সমাধান ঃ আমি লিখোঁ

$$4x + 3 = A\frac{d}{dx}\left(3x^2 + 3x + 1\right) + B$$

$$\Rightarrow 4x + 3 = A(6x + 3) + B$$

$$\Rightarrow 4x + 3 = 6Ax + 3A + B$$

উভয় পক্ষৰ পৰা x অৰ সহগ আৰু ধ্ৰুৱক পদ তুলনা কৰি আমি পাওঁ—

$6A = 4$ আৰু $3A + B = 3$

$\therefore A = \frac{2}{3}$ আৰু $B = 3 - 3A = 3 - 3.\frac{2}{3} = 1$

$\therefore$ প্ৰদত্ত অনুকল

$$\int \frac{\frac{2}{3}(6x+3)+1}{3x^2+3x+1}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\int \frac{6x+3}{3x^2+3x+1}\,dx + \int \frac{1}{3x^2+3x+1}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\log\left|3x^2+3x+1\right| + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x^2 + x + \frac{1}{3}}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\log\left|3x^2+3x+1\right| + \frac{1}{3}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{12}}\right)^2}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\log|3x^2+3x+1| + \frac{\sqrt{12}}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{12}}}\right) + C$$

$$= \frac{2}{3}\log|3x^2+3x+1| + \frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left[\sqrt{3}(2x+1)\right] + C$$

উদাহৰণ 6 ঃ $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$

সমাধান ঃ ধৰাহ'ল $1+x=\frac{1}{t}, \quad \therefore dx=-\frac{1}{t^2}dt$

$$\therefore \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t}\sqrt{1+2\left(\frac{1}{t}-1\right)-\left(\frac{1}{t}-1\right)^2}}$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{t}dt}{\sqrt{-2+\frac{4}{t}-\frac{1}{t^2}}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{-2t^2+4t-1}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{-t^2+2t-\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-(t-1)^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{t-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left[\sqrt{2}\left(\frac{1}{1+x}-1\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{-x\sqrt{2}}{x+1}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sin^{-1}\left(\frac{x\sqrt{2}}{x+1}\right)$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৩

প্রশ্ন ঃ অধোলিখিতবোৰৰ মান উলিয়াওক।

1. $\int \frac{1}{4x^2+9}\,dx$

2. $\int \frac{e^x}{e^{2n}+6e^n+5}\,dx$

3. $\int \frac{dx}{x(x^5+1)}$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$

5. $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$

6. $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5x+6}}\,dx$

7. $\int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}}$ 8. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}$

১.৫.২ খণ্ডশঃ অনুকলন

দুটা ফলনৰ পূৰণফলৰ অৱকলজৰ পৰা এটা প্ৰয়োজনীয় অনুকলন সূত্ৰ নিগমন কৰিব পাৰি।

অৱকলন গণিতৰ পৰা আমি জানো যে $f(x)$ আৰু $q(x)$,

$$\frac{d}{dx}\{f(x).q(x)\} = f(x).\frac{d}{dx}\{q(x)\} + q(x).\frac{d}{dx}\{f(x)\}$$

উভয়পক্ষক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$f(x).q(x) = \int\left[f(x).\frac{d}{dx}\{q(x)\} + q(x).\frac{d}{dx}\{f(x)\}\right]dx$$

$$= \int f(x)\frac{d}{dx}\{q(x)\}dx + \int q(x).\frac{d}{dx}\{f(x)\}dx$$

বা, $$\int f(x)\frac{d}{dx}\{q(x)\}dx = f(x).q(x) - \int q(x).\frac{d}{dx}\{f(x)\}dx \quad \text{... ... ...(1)}$$

ধৰা হ'ল $f(x) = u$ আৰু $\frac{d}{dx}\{q(x)\} = v$.

গতিকে $q(x) = \int v dx$

(1) অত বহুৱাই আমি পাওঁ

$$\int uvdx = u\int vdx - \int\left\{\frac{d}{dx}(u).\int vdx\right\}dx$$

উপৰিউক্ত সূত্ৰটো এনেধৰণে লিখিব পাৰি ঃ

দুটা ফলনৰ পূৰণফলৰ অনুকল Ô প্ৰথম ফলন × দ্বিতীয় ফলনৰ অনুকল — (প্ৰথম ফলনৰ অৱকলজ × দ্বিতীয় ফলনৰ অনুকল)ৰ অনুকল।

টোকা ঃ খণ্ডশঃ অনুকলনৰ সহায়ত অনুকল কৰোঁতে প্ৰথম ফলন আৰু দ্বিতীয় ফলন অতি সাৱধানে বাছি ল'ব লাগে। বিদ্যাৰ্থীসকলৰ সহায়ৰ বাবে উনুকিয়াব পাৰি যে "ILATE"ৰ প্ৰথমতে যিটো আখৰ আহে, সেইটো প্ৰথম ফলন হিচাবে ল'ব লাগে। বৰ্ণসমূহৰ বাবে নিৰ্ধাৰিত ফলনবোৰ হ'ল—

I – Inverse trigonometric function (প্ৰতিলোম ত্ৰিকোণমিতীয় ফলন)

L – Logarithmic function (ঘাতাংকীয় ফলন)

A – Algebraic function (বীজগণিতীয় ফলন)

T – Trigonometic function (ত্রিকোণমিতীয় ফলন)

E – Exponential function (সূচকীয় ফলন)

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ

উদাহৰণ 1 ঃ মান নির্ণয় কৰক $\int x^2 e^x dx$

সমাধান ঃ $\int x^2 e^x dx = x^2 \int e^x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x^2) \int e^x dx \right\} dx$

$= x^2 e^x - \int 2x e^x dx$ (ইয়াত x^2 = প্রথম ফলন, e^x = দ্বিতীয় ফলন)

$= x^2 e^x - 2\left[x \int e^x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x) . \int e^x dx \right\} dx \right]$

$= x^2 e^x - 2\left\{ xe^x - \int 1 . e^x dx \right\} = x^2 e^x - 2\left(xe^2 - e^x \right) + C$

$= e^x \left(x^2 - 2x + 2 \right) + C$

উদাহৰণ 2 ঃ মান নির্ণয় কৰক $\int x \sin 3x \, dx$

সমাধান ঃ $\int x \sin 3x \, dx = x \int \sin 3x \, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}(x) . \int \sin 3x \, dx \right\} dx$

$= x\left(-\frac{\cos 3x}{3} \right) - \int 1 . \left(-\frac{\cos 3x}{3} \right) dx$

$= -\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{3} \int \cos 3x \, dx$

$= -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{3} \frac{\sin 3x}{3} + C$

$= -\frac{1}{3} x \cos 3x + \frac{1}{9} \sin 3x + C$

উদাহৰণ 3 ঃ মান নির্ণয় কৰক $\int x \tan^{-1} x \, dx$

সমাধান ঃ $\int x \tan^{-1} x \, dx$ (ইয়াত প্রথম ফলন Ô $\tan^{-1} x$,
দ্বিতীয় ফলন Ô x)

$= \tan^{-1} x \int x \, dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x \right) . \int x \, dx \right\} dx$

$= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \int \frac{1}{1+x^2} \frac{x^2}{2} dx = \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} dx$

$$= \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 \tan^{-1} x - \frac{1}{2}\left(x - \tan^{-1} x\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(x^2+1\right)\tan^{-1} x - x\right\} + C$$

উদাহৰণ 4 ঃ $\int \log x\, dx$

সমাধান ঃ $\int \log x\, dx = \int \log x.1\, dx$

প্ৰথম ফলন = $\log\ x$

দ্বিতীয় ফলন = 1 আৰু আগৰটোৰ দৰে কৰি যাওক।

সেইদৰে $\int \sin^{-1} x\, dx$ অৰ ক্ষেত্ৰত $\sin^{-1} x$ অক প্ৰথম ফলন হিচাপে লওক আৰু 1 অক দ্বিতীয় ফলন হিচাপে লওক।

প্ৰামাণিক অনুকল

A. $\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{1}{a^2+b^2} e^{ax}\left(a \sin bx - b \cos bx\right)$

B. $\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{1}{a^2+b^2} e^{ax}\left(a \cos bx + b \sin bx\right)$

প্ৰমাণ A : ধৰা হ'ল $I = \int e^{ax} \sin bx\, dx$

তেনেহ'লে $I = e^{ax}\int \sin bx\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\left(e^{ax}\right)\int \sin bx\, dx\right\}dx$

$$= -\frac{1}{b}e^{ax} \cos bx - \int ae^{ax}\left(-\frac{1}{b}\cos bx\right)dx$$

$$= -\frac{1}{b}e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax} \cos bx\, dx$$

$$= -\frac{1}{b}e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b}\left[e^{ax}\int \cos bx\, dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\left(e^{ax}\right)\int \cos bx\, dx\right\}dx\right]$$

$$= -\frac{1}{b}e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b}\left[e^{ax}\frac{\sin bx}{b} - \int ae^{ax}\frac{\sin bx}{b}\, dx\right]$$

$$= -\frac{1}{b}e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b}\left[\frac{1}{b}e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax} \sin bx\, dx\right]$$

$$= -\frac{1}{b}e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2}I$$

$$\therefore I + \frac{a^2}{b^2}I = -\frac{1}{b}e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2}e^{ax} \sin bx$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2}{b^2} I = \frac{1}{b^2}\left(ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx\right)$$

$$\therefore I = \frac{1}{a^2+b^2} e^{ax}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)$$

প্ৰমাণ B : বিদ্যার্থীসকলৰ বাবে এৰা হ'ল।

কেইটামান প্ৰামাণিক সূত্ৰ

1. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$

2. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|$

3. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} - \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

প্ৰমাণ 1: ধৰা হ'ল $I = \int 1.\sqrt{x^2+a^2}\,dx$

$$\Rightarrow I = \sqrt{x^2+a^2}\int 1.dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2+a^2}\right).\int 1dx\right\}dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}.x\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx = x\sqrt{x^2+a^2} - \int \frac{x^2+a^2-a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - \int\sqrt{x^2+a^2}\,dx + a^2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}dx$$

$$= x\sqrt{x^2+a^2} - I + a^2\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$$

$$\Rightarrow 2I = x\sqrt{x^2+a^2} + a^2\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$$

$$\therefore I = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|$$

টোকা ঃ (1) (2) আৰু (3) ৰ প্ৰমাণ বিদ্যার্থীসকলৰ বাবে এৰা হ'ল।

(2) উপৰিউক্ত ফলকেইটাত আমি অনুকলন ধ্ৰুৱক যোগ দিয়া নাই। বিদ্যার্থীসকলে যোগ দিবলৈ নাপাহৰে যেন।

আন কেইটামান বিশেষ ৰূপ

(a) $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ য'ত $a \neq 0$

এই ক্ষেত্ৰত ax^2+bx+c ক $a\left\{(x+\alpha)^2 \pm \beta^2\right\}$ বা $b\left\{\beta^2-(x+\alpha)^2\right\}$ আকাৰত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

এতিয়া যদি $(x+\alpha)$ ৰ ঠাইত t বহুওৱা হয়, তেনেহ'লে অনুকলটোৱে আগেয়ে আলোচনা কৰা এটা জ্ঞাত ৰূপ ল'ব।

(b) $\int (px+q)\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx, \quad a \neq 0$

$px+q = \mathrm{A}\dfrac{d}{dx}\left(ax^2+bx+c\right)+\mathrm{B}$ লোৱা হ'ল। গণনাৰ সহায়ত

$px+q = \dfrac{p}{2q}(2ax+b)+\left(q-\dfrac{bp}{2a}\right)$ পোৱা গ'ল

এতিয়া প্ৰদত্ত অনুকলটোক দুটা অংশত ভাগ কৰিব পাৰি। প্ৰথম অংশৰ বাবে $ax^2+bx+c=t$ ধৰা হ'ল। দ্বিতীয় অংশটো আগেয়ে আলোচনা কৰা এটা ৰূপ হ'ব।

(c) $\int e^x\left\{f(x)+f'(x)\right\}dx$

$\mathrm{I} = \int e^x f(x)dx$ লোৱা হ'ল। খণ্ডশঃ অনুকলনৰ সহায়ত অনুকলন কৰা হ'ল।

আমি পাম যে $\int e^x\left\{f(x)+f'(x)\right\}dx = e^x f(x)$.

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ

উদাহৰণ 1 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক $\int e^x \cos x\,dx$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $\mathrm{I} = \int e^x \cos x\,dx$

$$= e^x \int \cos x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\left(e^x\right).\int \cos x\,dx\right\}dx$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$$

$$= e^x \sin x - \left[e^x \int \sin x\,dx - \int\left\{\frac{d}{dx}\left(e^x\right).\int \sin x\,dx\right\}dx\right]$$

$$= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\,dx$$

$$= e^x(\sin x+\cos x) - \mathrm{I}$$

$$\Rightarrow 2\mathrm{I} = e^x(\sin x+\cos x)$$

$$\therefore\ \mathrm{I} = \frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+\mathrm{C}$$

উদাহৰণ 2 ঃ $\int \sqrt{4-3x-2x^2}\,dx$

সমাধান ঃ $\int \sqrt{4-3x-2x^2}\,dx = \sqrt{2}\int \sqrt{2-\frac{3}{2}x-x^2}\,dx$

$$= \sqrt{2}\int \sqrt{2+\frac{9}{16}+\left\{-\left(\frac{3}{4}\right)^2-2.\frac{3}{4}.x-x^2\right\}}\,dx$$

$$= \sqrt{2}\int \sqrt{\frac{41}{16}-\left(x+\frac{3}{4}\right)^2}\,dx \quad \Big| \text{ ধৰা হ'ল } \begin{matrix} x+\frac{3}{4}=t \\ \therefore dx=dt \end{matrix}$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{t\sqrt{\frac{41}{16}-t^2}}{2}+\frac{41/16}{2}\sin^{-1}\left(\frac{t}{\frac{\sqrt{41}}{4}}\right)\right]+C$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{3}{4}\right)\sqrt{\frac{41}{16}-\left(x+\frac{3}{4}\right)^2}+\frac{41}{32}\sin^{-1}\left(\frac{x+3/4}{\sqrt{41/4}}\right)\right]+C$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{8}(4x+3)\frac{\sqrt{4-3x-2x^2}}{\sqrt{2}}+\frac{41\sqrt{2}}{32}\sin^{-1}\left(\frac{4x+3}{\sqrt{41}}\right)+C$$

$$= \frac{1}{8}(4x+3)\sqrt{4-3x-2x^2}+\frac{41\sqrt{2}}{32}\sin^{-1}\left(\frac{4x+3}{\sqrt{41}}\right)+C$$

উদাহৰণ 3 ঃ $\int (3x-2)\sqrt{1-x+x^2}\,dx$

সমাধান ঃ আমি এনেদৰে লিখিব পাৰোঁ $3x-2=\frac{3}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}$

$$\therefore I=\frac{3}{2}\int (2x-1)\sqrt{x^2-x+1}\,dx-\frac{1}{2}\int \sqrt{x^2-x+1}\,dx$$

সোঁপক্ষৰ প্ৰথম অংশৰ বাবে আমি $x^2-x+1=t$ বহুৱাওঁ।

তেনেহ'লে $\int (2x-1)\sqrt{x^2-x+1}\,dx=\int \sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}t^{3/2}=\frac{2}{3}\left(x^2-x+1\right)^{3/2}$

দ্বিতীয় অংশৰ বাবে

$$\int \sqrt{x^2 - x + 1}\, dx = \int \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\, dx$$

$$= \int \sqrt{z^2 + \left(\sqrt{3}/2\right)^2}\, dt \quad \left(x - \frac{1}{2} = z \text{ বহুৰাই}\right)$$

$$= \frac{z\sqrt{z^2 + 3/4}}{2} + \frac{3}{4}.\frac{1}{2}\log\left|z + \sqrt{z^2 + \frac{3}{4}}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{3}{8}\log\left|\left(x - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{x^2 - x + 1}\right|$$

$$\therefore I = \left(x^2 - x + 1\right)^{3/2} - \frac{1}{8}(2x - 1)\sqrt{x^2 - x + 1} - \frac{3}{16}\log\left|\left(x - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{x^2 - x + 1}\right| + C$$

উদাহৰণ 4 ঃ মান নির্ণয় কৰক $\int e^x\left(\frac{1 - \sin x}{1 - \cos x}\right)dx$

সমাধান ঃ $\int e^x\left(\frac{1 - \sin x}{1 - \cos x}\right)dx$

$$= \int e^x \frac{1 - 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\sin^2 x/2}\, dx = \int e^x\left(\frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}\right)dx - \int e^x \cot\frac{x}{2}dx$$

$$= -\int e^x \cot\frac{x}{2}dx + \frac{1}{2}\int e^x \operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}dx$$

ইয়াত $f(x) = -\cot\frac{x}{2}$

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{2}\operatorname{cosec}^2\frac{x}{2}$$

$$= -e^x \cot\frac{x}{2} + c \qquad \left[\int e^x\left[f(x) + f'(x)\right]dx = e^x f(x)\right]$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৪

প্রশ্ন ঃ অধোলিখিতবোৰৰ মান নির্ণয় কৰক।

1. $\int x^2 \cos x\, dx$ 2. $\int x^3 \log 2x\, dx$

3. $\int x^3 \tan^{-1} x\, dx$ 4. $\int x^2 e^{-x} dx$

5. $\int \sin^{-1} x\, dx$ 6. $\int \cos\sqrt{x}\, dx$

7. $\int \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) dx$ 8. $\int e^x \sin x\, dx$

9. $\int e^x \sin x \sin 2x\, dx$ 10. $\int e^x(\cos x + \sin x)dx$

11. $\int e^x \sec x(1+\tan x)dx$ 12. $\int \sin(\log x)dx$

13. $\int (3x-2)\sqrt{x^2+x+1}\, dx$ 14. $\int \sqrt{7x-10-x^2}\, dx$

১.৫.৩ আংশিক ভগ্নাংশৰ সহায়ত অনুকলন

a, b, c ধ্রুৱক হ'লে $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\, dx$ আকাৰৰ অনুকল নির্ণয় কৰিব আমি জানো। কিন্তু $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ আকাৰৰ পৰিমেয় ফলন অনুকলন কৰিবলৈ হ'লে আমি অন্য উপায় ব্যৱহাৰ কৰিম। যদি $f(x)$ অৰ মাত্রা $\phi(x)$ অৰ মাত্রাতকৈ কম হয়, তেনেহ'লে প্রদত্ত ফলনটোক আংশিক ভগ্নাংশত ভাঙিব লাগে। তাক পাছত প্রতিটো ভগ্নাংশক যথাযথ নিয়মেৰে পৃথকে পৃথকে অনুকলন কৰিব লাগে। যদি $f(x)$ অৰ মাত্রা $\phi(x)$ অৰ মাত্রাতকৈ কম নহয়, তেনেহ'লে বহুপদৰ বিভাজনৰ সহায়ত $f(x)$অক $\phi(x)$ এৰে হৰণ কৰি $a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \ldots\ldots\ldots + a_0 + \frac{g(x)}{\phi(x)}$ আকাৰ পাব পাৰি। ইয়াত $g(x)$ হ'ল ভাগশেষ। স্পষ্টতঃ $g(x)$অৰ মাত্রা $\phi(x)$অৰ মাত্রাতকৈ কম। তাৰ পাছত $\frac{g(x)}{\phi(x)}$ অক আংশিক ভগ্নাংশত ভাঙিব লাগে আৰু পদবোৰত পৃথকে পৃথকে অনুকলন কৰিব লাগে।

ইয়াত আমি আংশিক ভগ্নাংশৰ বিভিন্ন পদ্ধতি সম্বন্ধে বিস্তাৰিতভাৱে আলোচনা নকৰোঁ। বীজগণিতৰ পাঠত সেই বিষয়ে আলোচনা কৰা হয়।

আমি $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ আকাৰৰ সেইবোৰ পৰিমেয় ফলনৰ অনুকলন সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম য'ত হৰত

(i) বাস্তৱ, ৰৈখিক অপুনৰাবৃত্ত (non-repeated) উৎপাদক আছে,

(ii) বাস্তৱ, ৰৈখিক আৰু কিছুমান পুনৰাবৃত্ত উৎপাদক আছে,

(iii) বাস্তৱ, দ্বিঘাত আৰু অপুনৰাবৃত্ত উৎপাদক আছে,

(iv) বাস্তৱ, দ্বিঘাত আৰু পুনৰাবৃত্ত উৎপাদক আছে।

হৰত বাস্তৱ, ৰৈখিক আৰু অপুনৰাবৃত্ত উৎপাদক থকা পৰিমেয় ফলনৰ অনুকলন।

অধোলিখিত উদাহৰণকেইটাৰ পৰা পদ্ধতিটো হৃদয়ংগম কৰিব পৰা যাব।

উদাহৰণ 1 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক $\int \frac{x^2 dx}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল

$\frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-2)} + \frac{C}{x-3}$ য'ত A, B, C ধ্ৰুৱককেইটা নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।

তেনেহ'লে $x^2 = A(x-2)(x-3) + B(x-1)(x-3) + C(x-1)(x-2)$

যদি $x = 1$, তেনেহ'লে $1 = A(-1)(-2) \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$x = 2$, তেনেহ'লে $4 = B(1)(-1) \Rightarrow B = -4$

আৰু $x = 3$, তেনেহ'লে $9 = C(2)(1) \Rightarrow C = \frac{9}{2}$

$$\therefore \frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \frac{-4}{x-2} + \frac{\frac{9}{2}}{x-3}$$

$$\therefore \int \frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)}\,dx = \int \left\{ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right) - 4\left(\frac{1}{x-2}\right) + \frac{9}{2}\left(\frac{1}{x-3}\right) \right\} dx$$

$$= \frac{1}{2}\log|x-1| - 4\log|x-2| + \frac{9}{2}\log|x-3| + c$$

উদাহৰণ 2 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক $\int \frac{2x+3}{x^3 + x^2 - 2x}\,dx$

সমাধান ঃ ইয়াত $x^3 + x^2 - 2x = x(x^2 + x - 2) = x(x+2)(x-1)$

এতিয়া $\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}=\frac{2x+3}{x(x+2)(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x-1)}$ (ধৰা হ'ল)

$$\therefore 2x+3=A(x+2)(x-1)+Bx(x-1)+Cx(x+2)$$

ধৰা হ'ল $x=0$, তেনেহ'লে $3=A(2)(-1)\Rightarrow A=-\frac{3}{2}$

$x=-2$, তেনেহ'লে $-1=B(-2)(-3)\Rightarrow B=-\frac{1}{6}$

আৰু $x=1$, তেনেহ'লে $5=C(1)(3)\Rightarrow C=\frac{5}{3}$

$$\therefore \int\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}\,dx=\int\left(-\frac{3}{2}\frac{1}{x}-\frac{1}{6}\frac{1}{x+2}+\frac{5}{3}\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$=-\frac{3}{2}\log|x|-\frac{1}{6}\log|x+2|+\frac{5}{3}\log|x-1|+C$$

হৰত বাস্তৱ, ৰৈখিক আৰু কিছুমান পুনৰাবৃত্ত উৎপাদক থকা পৰিমেয় ফলনৰ অনুকলন

উদাহৰণ 3 ঃ মাণ নির্ণয় কৰক $\int\frac{x^2dx}{(x+1)(x+2)^2}$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$

$$\therefore x^2=A(x+2)^2+B(x+1)(x+2)+C(x+1)$$

$$\Rightarrow 1.x^2+0.x+0=(A+B)x^2+(4A+3B+C)x+4A+2B+C$$

উভয় পক্ষৰ পৰা x^2, x অৰ সহগ আৰু ধ্ৰুৱক পদ তুলনা কৰি আমি পাওঁ

$A+B=1$, $4A+3B+C=0$, $4A+2B+C=0$

সমাধান কৰি আমি পাওঁ

$$A=1, B=0, C=-4$$

$$\therefore \int\frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x+1}+\frac{-4}{(x+2)^2}\right)dx$$

$$=\log|x+1|+\frac{4}{x+2}+c$$

উদাহৰণ 4 ঃ মান নির্ণয় কৰক $\int\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+3)}\,dx$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+3}$ ... ...(i)

তেনেহ'লে, $x^2+1=A(x-1)(x+3)+B(x+3)+C(x-1)^2$ ... ...(ii)

যদি $x=1$, তেনেহ'লে $B=\frac{1}{2}$

যদি $x=-3$, তেনেহ'লে $C=\frac{5}{8}$

(ii) ৰ উভয় পক্ষৰপৰা x^2 অৰ সহগ তুলনা কৰি আমি পাওঁ

$I=A+C \quad \Rightarrow A=1-\frac{5}{8}=\frac{3}{8}$

(i) অৰ পৰা $\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+3)}=\frac{\frac{3}{8}}{x-1}+\frac{\frac{1}{2}}{(x-2)^2}+\frac{\frac{5}{8}}{x+3}$

$$\therefore \int \frac{x^2+1}{(x-1)^2(x+3)}\,dx=\frac{3}{8}\int\frac{1}{x-1}\,dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx+\frac{5}{8}\int\frac{1}{x+3}\,dx$$

$$=\frac{3}{8}\log|x-1|-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{5}{8}\log|x+3|+C$$

হৰত বাস্তৱ, দ্বিঘাত আৰু অপুনৰাবৃত্ত উৎপাদক থকা পৰিমেয় ফলনৰ অনুকলন

উদাহৰণ 5 ঃ $\int\frac{x}{(x-1)(x^2+4)}dx$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $\frac{x}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}$

$$\Rightarrow x=A(x^2+4)+(Bx+C)(x-1)$$

যদি $x=1$, তেনেহ'লে $1=5A\Rightarrow A=\frac{1}{5}$

যদি $x=0$, তেনেহ'লে $0=4A-C\Rightarrow C=\frac{4}{5}$

যদি $x=-1$, তেনেহ'লে $-1=5A+2B-2C$ য'ত $B=-\frac{1}{5}$

$$\therefore \int\frac{x}{(x-1)(x^2+4)}dx=\int\left(\frac{\frac{1}{5}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{5}x+\frac{4}{5}}{x^2+4}\right)dx$$

$$=\frac{1}{5}\int\frac{1}{x-1}dx-\frac{1}{5}\int\frac{x-4}{x^2+4}\,dx$$

$$=\frac{1}{5}\log|x-1|-\frac{1}{10}\int\frac{2x}{x^2+4}dx+\frac{4}{5}\int\frac{1}{x^2+4}\,dx$$

$$= \frac{1}{5}\log|x-1| - \frac{1}{10}\log|x^2+4| + \frac{4}{5}\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$= \frac{1}{5}\log|x-1| - \frac{1}{10}\log|x^2+4| + \frac{2}{5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

হৰত বাস্তৱ, দ্বিঘাত আৰু কিছুমান পুনৰাবৃত্ত উৎপাদক থকা পৰিমেয় ফলনৰ অনুকলন

উদাহৰণ 6 ঃ মান নির্ণয় কৰক $\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}\,dx$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $\frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{(Cx+D)}{(x^2+1)^2}$

তেনেহ'লে $x^3+x^2+2x+1 = (Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)$

$\Rightarrow x^3+x^2+2x+1 = Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)$

তুলনা কৰি আমি পাওঁ A=1, B=1, C=1, D=0.

$$\therefore \int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}dx = \int\left\{\frac{x+1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}\right\}dx$$

$$= \int \frac{x}{x^2+1} + \int \frac{1}{x^2+1} + \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log|x^2+1| + \tan^{-1}x - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + C$$

উদাহৰণ 7 ঃ মান নির্ণয় কৰক $\int \frac{x^2+1}{(x^2+2)(2x^2+1)}\,dx$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $x^2 = y$, তেনেহ'লে

$$\frac{x^2+1}{(x^2+2)(2x^2+1)} = \frac{y+1}{(y+2)(2y+1)} = \frac{A}{y+2} + \frac{B}{2y+1} \text{ ... ...(i) (ধৰা হ'ল)}$$

$$\therefore y+1 = A(2y+1)+B(y+2)$$

যদি $y=-2$, $-1 = -3A$ অর্থাৎ $A = \frac{1}{3}$

যদি $y = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} = B\left(\frac{3}{2}\right)$ অর্থাৎ $B = \frac{1}{3}$

$\therefore$ (i) অৰ পৰা $\frac{y+1}{(y+2)(2y+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{y+2} + \frac{\frac{1}{3}}{2y+1}$

y ৰ ঠাইত x^2 বহুৰাই আৰু x সাপেক্ষে অনুকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\int \frac{x^2+1}{(x^2+2)(2x^2+1)}dx = \frac{1}{3}\left[\int \frac{1}{x^2+2}dx + \int \frac{1}{2x^2+1}dx\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\int \frac{1}{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}dx + \int \frac{1}{\left(\sqrt{2}x^2\right)+(1)^2}dx\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}x}{1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}}\left\{\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + \tan^{-1}\left(\sqrt{2}x\right)\right\} + C$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৫

প্রশ্ন ঃ মান নির্ণয় কৰক—

1. $\int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}dx$ 2. $\int \frac{x\,dx}{x^2-12x+35}$

3. $\int \frac{3x}{x^2-x-2}dx$ 4. $\int \frac{1}{x(x+1)^2}dx$ 5. $\int \frac{x^3-2x+3}{x^2+x-2}dx$

6. $\int \frac{x^2}{(x+1)^2(x+2)}dx$ 7. $\int \frac{(x-1)(x-5)}{(x-2)(x-4)}dx$ 8. $\int \frac{x}{(x-2)^2}dx$

9. $\int \frac{1}{x^3+x}dx$ 10. $\int \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}dx$ 11. $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}dx$

12. $\int \frac{x+5}{x^3(x+1)}dx$ 13. $\int \frac{1}{1-x^3}dx$ 14. $\int \frac{x^2}{(x-1)^3(x+1)}dx$

15. $\int \frac{1}{(x^2-1)^2}dx$ 16. $\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$ 17. $\int \frac{dx}{x^3-x^2-x+1}$

18. $\int \frac{x^2}{x^4+x^2-2}dx$ 19. $\int \frac{1-3x^2}{3x-x^3}dx$ 20. $\int \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

21. $\int \frac{\sin 2x\,dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}$ 22. $\int \frac{\cos x\,dx}{(2+\sin x)(3+4\sin x)}$

23. $\int \frac{dx}{x\left(x^4+1\right)}$ 24. $\int \frac{\sin 2x\, dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}$ 25. $\int \frac{\left(x^2+1\right)\left(x^2+2\right)}{\left(x^2+3\right)\left(x^2+4\right)}dx$



১.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- অৱকলন আৰু অনুকলন দুটা পৰস্পৰ বিপৰীত প্ৰক্ৰিয়া।
- সংকলন এটাৰ সীমা উলিওৱাৰ পদ্ধতি হিচাপেও অনুকলনৰ সংজ্ঞা দিব পাৰি। (এই বিষয়ে পাছৰ অধ্যায়ত আলোচনা কৰা হৈছে।)
- যি ফলন এটা প্ৰদত্ত ফলনৰ অৱকলজ, সেইটো ফলনটোৰ প্ৰতি অৱকলজ (বা অনুকল বা পূৰ্বগ)।
- কিছুমান প্ৰামাণিক অৱকলজৰ সহায়ত আমি কিছুমান প্ৰামাণিক অনুকল পাওঁ।
- অনুকলন কৰিবলৈ কিছুমান পদ্ধতি আছে। কেইটামান পদ্ধতি হ'ল (i) প্ৰতিষ্ঠাপনৰ সহায়ত অনুকলন, (ii) খণ্ডশঃ অনুকলন, (iii) আংশিক ভগ্নাংশৰ সহায়ত অনুকলন।
- অনুকলৰ কেইটামান দৰকাৰী ৰূপ হ'ল

  (i) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$

  (ii) $\int \{f(x)\}^n f'(x)dx = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} + C, \quad n \neq -1$

  (iii) $\int f'(ax+b)dx = \frac{1}{a}f(ax+b) + C$

- দুটা ফলনৰ পূৰণফলৰ বাবে এটা প্ৰয়োজনীয় সূত্ৰ হ'ল

  $$\int uv\,dx = u\int vdx - \int\left\{\frac{d}{dx}(u).\int vdx\right\}dx$$

- $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ আকাৰৰ পৰিমেয় ফলন অনুকলন কৰিব লাগিলে আৰু $f(x)$ অৰ মাত্ৰা $\phi(x)$ অৰ মাত্ৰাতকৈ কম হ'লে প্ৰদত্ত ফলনটোক আংশিক ভগ্নাংশত ভাঙিব লাগে। তাৰ পাছত প্ৰতিটো ভগ্নাংশক যথাযথ নিয়মেৰে পৃথকে অনুকলন কৰিব লাগে।
- $\frac{f(x)}{\phi(x)}$ আকাৰৰ পৰিমেয় ফলন অনুকলন কৰিব লাগিলে আৰু $f(x)$ অৰ মাত্ৰা $\phi(x)$ অৰ মাত্ৰাতকৈ কম নহ'লে, বহুপদৰ বিভাজনৰ সহায়ত $f(x)$ অক $\phi(x)$ এৰে হৰণ কৰি

$a_p x^p + a_{p-1}x^{p-1} + \ldots\ldots\ldots + a_0 + \dfrac{g(x)}{\phi(x)}$ আকাৰ পাব পাৰি। ইয়াত $g(x)$ হ'ল অৱশেষ। স্পষ্টতঃ $g(x)$অৰ মাত্ৰা $\phi(x)$ অৰ মাত্ৰাতকৈ কম। তাৰ পাছত $\dfrac{g(x)}{\phi(x)}$ অক আংশিক ভগ্নাংশত ভাঙিব লাগে আৰু পদবোৰৰ পৃথকে পৃথকে অনুকলন কৰিব লাগে।



১.৭ অধিক জানিবলৈ

1) *Integral Calculus,* B.C. Das and B.N. Mukherjee, U.N. Dhur & Sons Pvt. Ltd., Kolkata.

2) *Integral Calculus*, K.C. Maity & Ram Krishna Ghosh, New Central Book Agency (P) Ltd., Kolkata.

3) *Integral Calculus*, P.N. Chatterji, Rajhans Prakashan Mandir, Meerut.



১.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) আমি জানো যে $\dfrac{d}{dx}(\log x) = \dfrac{1}{x}, x > 0$

আৰু $\dfrac{d}{dx}(\log(-x)) = \dfrac{1}{-x}(-1), x < 0$

একে লগ কৰি আমি পাওঁ $\dfrac{d}{dx}(\log|x|) = \dfrac{1}{x}, x \neq 0$

$\therefore \dfrac{1}{x}$ অৰ প্রতি অৱকলজ $\hat{O}\int \dfrac{1}{x}dx = \log|x|$

(ii) আমি জানো যে $\dfrac{d}{dx}(\cos 3x) = -3\sin 3x$

$$\Rightarrow \sin 3x = -\frac{1}{3}\frac{d}{dx}(\cos 3x)$$

$$\therefore \sin 3x = \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)$$

গতিকে, $\sin 3x$ অৰ প্ৰতি-অৱকলজ $-\frac{1}{3}\cos 3x$.

(iii) আমি জানো যে $\frac{d}{dx}(ax-b)^3 = 3a(ax-b)^2$

$$\Rightarrow (ax-b)^2 = \frac{1}{3a}\frac{d}{dx}(ax-b)^3$$

$$\therefore (ax-b)^2 = \frac{d}{dx}\left\{\frac{1}{3a}(ax-b)^3\right\}$$

$\therefore (ax-b)^2$ অৰ প্ৰতি অৱকলজ $\frac{1}{3a}(ax-b)^3$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ

(i) $\int x^3\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2x.\frac{1}{x}\right)dx = \int\left(x^5+x+2x^3\right)dx$

$$= \frac{x^6}{6}+\frac{x^2}{2}+2\frac{x^4}{4}+C.$$

$$= \frac{x^6}{6}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2}+C.$$

(ii) $\int(\cos x+\sin x)^2 dx = \int\left(\cos^2 x+\sin^2 x+2\sin x\cos x\right)dx$

$$= \int(1+\sin 2x)dx$$

$$= x-\frac{\cos 2x}{2}+C.$$

(iii) $\int\left(\frac{2\cos x}{5\sin^2 x}+\frac{1}{3\cos^2 x}\right)dx = \int\left(\frac{2}{5}\cot x\cos ecx+\frac{1}{3}\sec^2 x\right)dx$

$$= \frac{2}{5}\int\cot x\cos ecxdx+\frac{1}{3}\int\sec^2 xdx$$

$$= \frac{2}{5}(-\cos ecx)+\frac{1}{3}\tan x+C.$$

(iv) $\int\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\left(\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}-\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}\right)dx$

$$= \int\left(\sec^2 x-\cos ec^2 x\right)dx$$

$$= \tan x+\cot x+C$$

(v) $\int\left(e^{x\log a}+e^{a\log x}+e^{a\log a}\right)dx=\int\left(e^{\log a^x}+e^{\log x^a}+e^{\log a^a}\right)dx$

$=\int\left(a^x+x^a+a^a\right)dx$

$=\int a^x dx+\int x^a dx+\int a^a dx$

$=\frac{a^x}{\log a}+\frac{x^{a+1}}{a+1}+a^a.x+C$.

(vi) $\int\sqrt{1+\cos 2x}\,dx=\int\sqrt{2\cos^2 x}dx$, $\cos 2x=2\cos^2 x-1$

$=\sqrt{2}\int\cos x dx$

$=\sqrt{2}\sin x+C$ ·

(vii) $\int\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{1+2x+x^2}{\sqrt{x}}dx$

$=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}}\right)dx$

$=\int x^{-\frac{1}{2}}dx+2\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{\frac{3}{2}}dx$

$=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+2.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$

$=2x^{\frac{1}{2}}+\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$

(viii) $\int\left(\frac{x}{m}+\frac{m}{x}+x^m+m^x\right)dx=\frac{1}{m}\int xdx+m\int\frac{1}{x}dx+\int x^m dx+\int m^x dx$

$=\frac{1}{m}.\frac{x^2}{2}+m\log|x|+\frac{x^{m+1}}{m+1}+\frac{x^m}{\log m}+C$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) ধৰাহ'ল $x^2=t$. গতিকে $\int\left(x^4+x^2+1\right)d\left(x^2\right)=\int\left(t^2+t+1\right)dt$

$=\frac{t^3}{3}+\frac{t^2}{2}+t+C$

$=\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{2}+x^2+C$

(ii) $\int \frac{x^4+x^2+1}{x^2-x+1}dx = \int \frac{\left(x^2+1\right)^2-x^2}{x^2-x+1}dx$

$= \int \frac{\left(x^2+1+x\right)\left(x^2+1-x\right)}{x^2-x+1}dx$

$= \int \left(x^2+x+1\right)dx = \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x+C$.

(iii) $\int \frac{x^{-1/3}+\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{x^{-\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{2}}+2}{x^{\frac{1}{3}}}dx$

$= \int \left(\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} \right) dx$

$= \int \left(x^{-\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{1}{3}} \right) dx$

$= \int \left(x^{-\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{6}} + 2x^{-\frac{1}{3}} \right) dx$

$= \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + \frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1} + 2\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C$

$= \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + \frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + 2\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C$

$= 3x^{\frac{1}{3}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + 3x^{\frac{2}{3}} + C$.

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f(x) = \int f'(x)dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x^2} \right) dx$

$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x^2+1}dx = \log|x| + \tan^{-1}x + C$

যেতিয়া $x=1$, $f(x) = \frac{\pi}{4}$

$$\therefore \frac{\pi}{4} = \log|1| + \tan^{-1} 1 + C$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + C$$

$$\Rightarrow C = 0$$

$$\therefore f(x) = \log|x| + \tan^{-1} x .$$

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে, $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12$

$$\therefore f'(x) = 3x^2 - 12$$

$$\therefore f(x) = \int f'(x)dx = \int (3x^2 - 12)dx$$

$$= 3.\frac{x^3}{3} - 12x + C$$

$$f(x) = x^3 - 12x + C \quad \ldots (1)$$

বক্ৰ (1) (2,-7) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়।

$$\therefore -7 = 2^3 - 12.2 + C$$

$$\Rightarrow C = 9$$

$\therefore$ বক্ৰটোৰ সমীকৰণ হ'ল $f(x) = x^3 - 12x + 9$.

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $9 - 4x^2 = t$

$$\therefore -8xdx = dt$$

$$\int \frac{x}{9 - 4x^2} dx = -\frac{1}{8}\int \frac{1}{t} dt$$

$$= -\frac{1}{8}\log|t| + C$$

$$= -\frac{1}{8}\log|9 - 4x^2| + C$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $x^2 + x + 1 = t \quad \therefore (2x + 1)dx = dt$

$$\int (4x + 2)\sqrt{x^2 + x + 1}dx$$

$$= \int 2\sqrt{t}dt = 2\int \sqrt{t}dt = 2\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{3}(x^2 + x + 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $\tan^{-1} x = t$

$$\therefore \frac{1}{1+x^2}dx = dt$$

$$\int \frac{e^{\tan^{-1}x}dx}{1+x^2} = \int e^t dt$$

$$= e^t + C$$

$$= e^{\tan^{-1}x} + C$$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $x = a\sec\theta \Rightarrow \frac{x}{a} = \sec\theta \Rightarrow \theta = \sec^{-1}\frac{x}{a}$

$$dx = a\sec\theta\tan\theta d\theta$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta \mathrm{d}\theta}{a\sec\theta\sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2}}$$

$$= \int \frac{a\sec\theta\tan\theta d\theta}{a\sec\theta\sqrt{a^2\tan^2\theta}}$$

$$= \frac{1}{a}\int d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\theta + C$$

$$= \frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{x}{a} + C$$

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $x^2 + 5 = t$

$$\Rightarrow 2xdx = dt$$

$$\Rightarrow xdx = \frac{1}{2}dt$$

$$\int x\sqrt{x^2+5}\ dx = \frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}}dt = \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{1}{3}\left(x^2+5\right)^{\frac{3}{2}} + C$$

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $x = \sin\theta \Rightarrow dx = \cos\theta d\theta$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos\theta d\theta}{\sin^2\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}}$$

$$= \int \frac{\cos\theta d\theta}{\sin^2\theta\cos\theta}$$

$$= \int \cos ec^2\theta d\theta$$

$$= -\cot\theta + C$$

$$= -\cot\left(\sin^{-1}x\right) + C$$

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $a + b\sin x = t \Rightarrow b\cos x dx = dt$

$$\cos x dx = \frac{1}{b}dt$$

$$\int \frac{\cos x\, dx}{(a+b\sin x)^2} = \int \frac{\frac{1}{b}dt}{t^2} = \frac{1}{b}\int \frac{dt}{t^2}$$

$$= \frac{1}{b}.\frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$$= -\frac{1}{b}.\frac{1}{t} + C$$

$$= -\frac{1}{b}.\frac{1}{a+b\sin x} + C$$

৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ লৱ আৰু হৰক e^x এৰে হৰণ কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{\frac{e^{2x}-1}{e^x}}{\frac{e^{2x}+1}{e^x}} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

ধৰা হ'ল $e^x + e^{-x} = t$

$\therefore \left(e^x - e^{-x}\right)dx = dt$

$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}dx = \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx$$

$$= \int \frac{dt}{t}$$

$$= \log|t| + C$$

$$= \log\left|e^{x} + e^{-x}\right| + C$$

৯ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $\tan^{-1} x = t \Rightarrow \frac{1}{1+x^2}dx = dt$

$$\int \frac{\sin\left(\tan^{-1} x\right)}{1+x^2}dx = \int \sin t dt = -\cot t + C$$

$$= -\cot\left(\tan^{-1} x\right) + C$$

১০ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ

$$\frac{(x+1)(x+\log x)^2}{x} = \left(\frac{x+1}{x}\right)(x+\log x)^2 = \left(1+\frac{1}{x}\right)(x+\log x)^2$$

ধৰা হ'ল $x + \log x = t \qquad \therefore \left(1+\frac{1}{x}\right)dx = dt$

$$\int \left(1+\frac{1}{x}\right)(x+\log x)^2 dx = \int t^2 dt$$

$$= \frac{t^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{3}(x+\log x)^3 + C$$

১১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $I = \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$= \sin^{-1} x + I_1 + C$$

I_1 অত, আমি বহুৰাওঁ $1 - x^2 = t^2 \Rightarrow -2xdx = 2tdt \Rightarrow xdx = -tdt$

$$I_1 = -\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2}} = -\int dt = -t = -\sqrt{1-x^2}$$

$$\therefore I = \sin^{-1} x - \sqrt{1-x^2} + C \cdot$$

১২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $3x^2 - 2x + 7 = t \Rightarrow (6x-2)dx = dt$

$$\Rightarrow 2(3x-1)dx = dt$$

$$\Rightarrow (3x-1)dx = \frac{1}{2}dt$$

$$\int \frac{3x-1}{\sqrt{3x^2-2x+7}}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{2}\int t^{-\frac{1}{2}}dt$$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= \sqrt{t} + C$$

$$= \sqrt{3x^2-2x+7} + C$$

১৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $e^x x = t \Rightarrow \left(e^x x + e^x.1\right)dx = dt$

$$\Rightarrow e^x(x+1)dx = dt$$

$$\therefore \int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2\left(e^x x\right)}dx = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \int \sec^2 t\,dt$$

$$= \tan t + C$$

$$= \tan\left(e^x x\right) + C$$

১৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ x^{-3} ৰে পূৰণ আৰু হৰণ কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{x^{-3}}{x^2.x^{-3}\left(x^4+1\right)^{\frac{3}{4}}} = \frac{x^{-3}\left(x^4+1\right)^{-\frac{3}{4}}}{x^2.x^{-3}} = \frac{\left(x^4+1\right)^{-\frac{3}{4}}}{x^5\left(.x^4\right)^{-\frac{3}{4}}}$$

$$= \frac{1}{x^5}\left(\frac{x^4+1}{x^4}\right)^{-\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{x^5}\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{-\frac{3}{4}}$$

ধৰা হ'ল $\frac{1}{x^4} = t \Rightarrow -\frac{4}{x^5}dx = dt \Rightarrow \frac{1}{x^5}dx = -\frac{dt}{4}$

$$\therefore \int \frac{1}{x^2\left(x^4+1\right)^{\frac{3}{4}}}dx = \int \frac{1}{x^5}\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{-\frac{3}{4}}dx$$

$$= -\frac{1}{4}\int (1+t)^{-\frac{3}{4}} dt$$

$$= -\frac{1}{4}\left[\frac{(1+t)^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}}\right] + C$$

$$= -\frac{1}{4}\frac{\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + C$$

$$= -\left(1+\frac{1}{x^4}\right)^{\frac{1}{4}} + C$$

১৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\int \frac{x^2+5x+2}{x+2}\,dx = \int \frac{(x+3)(x+2)}{x+2} dx = \int (x+3) dx$

$$= \frac{x^2}{2} + 3x + C$$

১৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}} = \frac{\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}\right)}{\left(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}\right)\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}\right)}$

$$= \frac{\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}\right)}{\left(\sqrt{x+a}\right)^2 - \left(\sqrt{x+b}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}}{(x+a)-(x+b)} = \frac{1}{a-b}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x+b}\right)$$

$$\therefore \int \frac{1}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}} dx = \frac{1}{a-b}\left\{\int \sqrt{x+a}\,dx - \int \sqrt{x+b}\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{a-b}\left\{\int \sqrt{u}\,du - \int \sqrt{v}\,dv\right\}$$ যাতে $x+a=u$ আৰু $x+b=v$

$$\therefore dx = du \text{ আৰু } dx = dv$$

$$= \frac{1}{a-b}\left\{\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{v^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right\} + C$$

$$= \frac{1}{a-b}\left\{\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}v^{\frac{3}{2}}\right\} + C$$

$$= \frac{2}{3(a-b)}\left\{(x+a)^{\frac{3}{2}} - (x+b)^{\frac{3}{2}}\right\} + C$$

১৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + \cos^2 2x + 2\cos 2x\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + \left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right) + 2\cos 2x\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{\cos 4x}{2} + 2\cos 2x\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2} + \frac{\cos 4x}{2} + 2\cos 2x\right]$$

$$\therefore \int \cos^4 x dx = \int\left(\frac{3}{8} + \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$= \frac{3}{8}x + \frac{\sin 4x}{32} + \frac{\sin 2x}{4} + C$$

১৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ অভেদটোৰ পৰা

$$\sin^3 x = \frac{3\sin x - \sin 3x}{4}$$

$$\therefore \int \sin^3 x dx = \frac{3}{4}\int \sin x dx - \frac{1}{4}\int \sin 3x dx$$

$$= -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C$$

১৯ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ অভেদটোৰ পৰা

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

২০ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $x^2 + 5x - 7 = t \Rightarrow (2x+5)dx = dt$

$$\int \frac{2x+5}{x^2+5x-7}\, dx = \int \frac{dt}{t} = \log t + C$$

$$= \log\left(x^2 + 5x - 7\right) + C$$

২১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ

$$\int \frac{1}{\sin(x-a)\sin(x-b)} dx = \frac{1}{\sin(a-b)}\int \frac{\sin\{(x-b)-(x-a)\}}{\sin(x-a)\sin(x-b)} dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\int \{\cot(x-a) - \cot(x-b)\} dx$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\{\log|\sin(x-a)| - \log|\sin(x-b)|\} + C$$

$$= \cos ec(a-b)\left\{\log\left|\frac{\sin(x-a)}{\sin(x-b)}\right|\right\} + C\,.$$

২২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ

$$\int \frac{1}{\sin(x-a)\cos(x-b)} dx = \frac{1}{\cos(a-b)}\int \frac{\cos(a-b)}{\sin(x-a)\cos(x-b)} dx$$

$$= \frac{1}{\cos(a-b)}\int \frac{\cos\{(x-b)-(x-a)\}}{\sin(x-a)\cos(x-b)} dx$$

$$= \frac{1}{\cos(a-b)}\int \frac{\cos(x-a)\cos(x-b) + \sin(x-a)\sin(x-b)}{\sin(x-a)\cos(x-b)} dx$$

$$= \frac{1}{\cos(a-b)}\int \{\cot(x-a) + \tan(x-b)\} dx$$

$$= \frac{1}{\cos(a-b)}\left[\log|\sin(x-a)| - \log|\cos(x-b)|\right] + C$$

$$= \frac{1}{\cos(a-b)}\log\left|\frac{\sin(x-a)}{\cos(x-b)}\right| + C\,.$$

২৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int (2\sin 2x \sin x)\sin 3x dx$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos x - \cos 3x)\sin 3x dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (2\sin 3x \cos x - 2\sin 3x \cos 3x) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (\sin 4x + \sin 2x - \sin 6x) dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{\cos 4x}{4} - \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 6x}{6} \right] + C .$$

২৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\int \frac{x+2}{(x+1)^2} dx = \int \frac{(x+1)+1}{(x+1)^2} dx$

$$= \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{1}{(x+1)^2} dx$$

$$= \int \frac{1}{z} dz + \int \frac{1}{z^2} dz \text{ put } x+1 = z \ \therefore dx = dz$$

$$= \log|z| + \frac{z^{-2+1}}{-2+1} + C$$

$$= \log|z| - \frac{1}{z} + C$$

$$= \log|x+1| - \frac{1}{x+1} + C$$

২৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $3x^2 + 2x + 1 = t \Rightarrow (6x+2)dx = dt$

$$\Rightarrow (3x+1)dx = \frac{1}{2} dt$$

$$\int \frac{3x+1}{(3x^2+2x+1)^3} dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2}\int t^{-3} dt$$

$$= \frac{1}{2}\frac{t^{-3+1}}{-3+1} + C$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{t^{-2}}{-2} + C$$

$$= -\frac{1}{4}.\frac{1}{t^2} + C$$

$$= -\frac{1}{4}.\frac{1}{\left(3x^2+2x+1\right)^2} + C .$$

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৩

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ $I = \int \frac{dx}{4x^2+9} = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{(2x)^2+(3)^2} = \frac{1}{6}\tan^{-1}\frac{2x}{3} + C$

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\int \frac{e^x}{e^{2x}+6e^x+5}dx = \int \frac{e^x}{\left(e^x\right)^2+6e^x+5}dx$

ধৰা হ'ল $e^x = t \ \therefore \ e^x dx = dt$

$$\int \frac{1}{t^2+6t+5}dt = \int \frac{1}{(t+3)^2-2^2}dt$$

$$= \frac{1}{2\times 2}\log\left|\frac{t+3-2}{t+3+2}\right| + C$$

$$= \frac{1}{4}\log\left|\frac{e^x+1}{e^x+5}\right| + C .$$

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\int \frac{1}{x\left(x^5+1\right)}dx = \int \frac{x^4}{x^5\left(x^5+1\right)}dx$ ...(1)

ধৰা হ'ল $x^5+1 = t$

$$5x^4 dx = dt$$

(1) অৰ পৰা, $\int \frac{1}{x\left(x^5+1\right)}dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{t(t-1)}dt$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{1}{t^2-t}dt$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{1}{t^2-t+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}dt$$

$$= \frac{1}{5}\int \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}dt$$

$$= \frac{1}{5}.\frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)}\log\left|\frac{t-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right| + C$$

$$= \frac{1}{5}\log\left|\frac{t-1}{t}\right| + C$$

$$= \frac{1}{5}\log\left|\frac{x^5}{x^5+1}\right| + C$$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\int \frac{1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{\left\{1-\left(x^2+x\right)\right\}}}$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left\{1-\left(x^2+2x\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)\right\}}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left\{1-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\right\}}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{\left\{\frac{5}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2\right\}}}$$

$$= \sin^{-1}\left\{\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{5}}\right\} + C$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{5}}\right) + C\,.$$

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ আমি জানো $\frac{d}{dx}\left(x^2+x+1\right) = 2x+1$

এতিয়া $2x+3 = \left(2x+1\right)+2$

$$\therefore \int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx = \int \frac{\left(2x+1\right)}{\sqrt{x^2+x+1}}dx + \int \frac{2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$$

$$= 2\sqrt{x^2+x+1} + \int \frac{2}{\sqrt{\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1-\frac{1}{4}\right\}}}dx$$

$$= 2\sqrt{x^2+x+1} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right\}}}$$

$$= 2\sqrt{x^2+x+1} + 2\sinh^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) + C$$

$$= 2\sqrt{x^2+x+1} + 2\sinh^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C .$$

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $x+2 = A\frac{d}{dx}\left(x^2+5x+6\right)+B$

$\Rightarrow x+2 = A(2x+5)+B$

তুলনা কৰি আমি পাওঁ

$1 = 2A$ আৰু $5A+B=2$

$\Rightarrow A = \frac{1}{2}$ আৰু $B = -\frac{1}{2}$

$$\therefore \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5x+6}}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+5)-\frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+5x+6}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+5)}{\sqrt{x^2+5x+6}}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{x^2+5x+6}}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}}dx \quad \text{য'ত } t = x^2+5x+6$$

$$= \sqrt{t} - \frac{1}{2}\log\left|\left(x+\frac{5}{2}\right) + \sqrt{x^2+5x+6}\right| + C$$

$$= \sqrt{x^2+5x+6} - \frac{1}{2}\log\left|\left(x+\frac{5}{2}\right) + \sqrt{x^2+5x+6}\right| + C$$

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $x+1=t^2,\ \therefore dx=2tdt$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x+2)\sqrt{x+1}} = \int \frac{2tdt}{(t^2+1)t}$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2+1}$$

$$= 2\tan^{-1} t + C$$

$$= 2\tan^{-1}\left[\sqrt{x+1}\right] + C$$

৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $1+x=\frac{1}{t},\ \therefore dx=-\frac{1}{t^2}dt$. Also, $x=\frac{1}{t}-1$

$$\therefore \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{-\left(\frac{1}{t^2}\right)dt}{\frac{1}{t}\sqrt{\left[1-\left\{\left(\frac{1}{t}\right)-1\right\}^2\right]}}$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{\left[t^2-(1-t)^2\right]}}$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{(2t-1)}}$$

$$= -\frac{1}{2}\int (2t-1)^{-\frac{1}{2}}.2dt$$

$$= -\sqrt{2t-1}+C$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{1+x}-1}+C$$

$$= -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$$

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৪

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\int x^2\cos x dx = x^2\sin x - \int 2x\sin x dx$

$$= x^2\sin x - 2\left[x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx\right]$$

$$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x$$

$$= (x^2-2)\sin x + 2x\cos x$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\int x^3\log 2x dx = \log 2x\int x^3 dx - \int\left(\frac{d}{dx}\log 2x.\int x^3 dx\right)dx$

$$= \log 2x \frac{x^4}{4} - \int \frac{1}{2x}.2.\frac{x^4}{4}dx$$

$$= \frac{x^4 \log 2x}{4} - \frac{1}{4}\int x^3 dx$$

$$= \frac{x^4 \log 2x}{4} - \frac{1}{4}.\frac{x^4}{4} + C$$

$$= \frac{x^4 \log 2x}{4} - \frac{x^4}{16} + C .$$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\int x^3 \tan^{-1} x dx = \frac{x^4}{4}\tan^{-1} x - \int \frac{x^4}{4}.\frac{1}{1+x^2}dx$

$$= \frac{x^4}{4}\tan^{-1} x - \frac{1}{4}\int\left[x^2 - 1 + \frac{1}{1+x^2}\right]dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[x^4 \tan^{-1} x - \frac{x^3}{3} + x - \tan^{-1} x\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(x^4 - 1\right)\tan^{-1} x - \frac{x^3}{3} + x\right]$$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\int x^2 e^{-x} dx = x^2 \int e^{-x} dx - \int\left(\frac{d}{dx}x^2 \int e^{-x} dx\right)dx$

$$= x^2\left(-e^{-x}\right) - \int 2x\left(-e^{-x}\right)dx$$
$$= -x^2 e^{-x} + 2\int x e^{-x} dx$$
$$= -x^2 e^{-x} + 2\left[x\left(-e^{-x}\right) - \int 1.\left(-e^{-x}\right)dx\right]$$
$$= -x^2 e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} + e^{-x}\right)$$
$$= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} + 2e^{-x}$$

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $\sin^{-1} x = t$, $\therefore x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt$

$$\therefore \int \sin^{-1} x dx = \int t \cos t dt$$

$$= t \sin t - \int 1.(\sin t)dt$$

$$= t \sin t + \cos t + C$$

$$= x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - \sin^2 t} + C$$

$$= x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} + C$$

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $x = t^2$, $\therefore dx = 2tdt$

$$\therefore \int \cos\sqrt{x}dx = 2\int t\cos tdt$$
$$= 2\left[t\sin t - \int \sin tdt\right]$$
$$= 2\left[t\sin t + \cos t\right] + C$$
$$= 2\left[\sqrt{x}\sin\sqrt{x} + \cos\sqrt{x}\right] + C$$

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $x = \tan\theta$, $\therefore dx = \sec^2\theta d\theta$

$$\int \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)dx = \int \cos^{-1}\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\sec^2\theta d\theta$$
$$= \int \cos^{-1}(\cos 2\theta)\sec^2\theta d\theta$$
$$= 2\int \theta\sec^2\theta d\theta$$
$$= 2\left[\theta\tan\theta - \int 1.\tan\theta d\theta\right]$$
$$= 2\left[\theta\tan\theta - \log\sec\theta\right] + C$$
$$= 2\left[x\tan^{-1}x - \log\sqrt{1+x^2}\right] + C.$$

৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $I = \int e^x \sin x dx = e^x(-\cos x) + \int e^x \cos x dx$

$$= -e^x\cos x + e^x\sin x - \int e^x\sin x dx$$

$$\Rightarrow I = -e^x\cos x + e^x\sin x - I$$
$$\Rightarrow 2I = e^x(\sin x - \cos x)$$

$$\therefore I = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x)$$

৯ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $I = \int e^x \sin x\sin 2x dx$

$$= \frac{1}{2}\int e^x(\cos x - \cos 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int e^x\cos x dx - \int e^x\cos 2x dx$$

$$= \frac{1}{2}e^x\frac{(\cos x + \sin x)}{1^2+1^2} - \frac{1}{2}e^x\frac{(\cos 3x + 3\sin 3x)}{1^2+3^2} + C$$

$$= \frac{1}{4}e^x(\cos x + \sin x) - \frac{1}{20}e^x(\cos 3x + 3\sin 3x) + C$$

১০ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $\int e^x(\sin x + \cos x)dx = \int e^x\sin x dx + \int e^x\cos x dx$

$$= \sin x e^x - \int \cos x e^x dx + \int \cos x e^x dx$$
$$= \sin x e^x + C$$

১১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $I = \int e^x \sec x(1+\tan x)dx = \int e^x (\sec x + \sec x \tan x)dx$

আকৌ, ধৰা হ'ল $\sec x = f(x) \Rightarrow \sec x \tan x = f'(x)$

আমি জানো যে $\int e^x \{f(x) + f'(x)\}dx = e^x f(x) + C$

$\therefore I = e^x \sec x + C$ ·

১২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $\log x = t$,then $x = e^t \Rightarrow dx = e^t dt$

$$\therefore I = \int (\sin t)e^t dt = -e^t \cos t - \int e^t(-\cos t)dt$$

$$= -e^t \cos t + \int e^t \cos t dt$$

$$= -e^t \cos t + \left[e^t \sin t - \int e^t \sin t dt\right]$$

$$\Rightarrow I = -e^t \cos t + e^t \sin t - I$$

$$\Rightarrow 2I = -e^t \cos t + e^t \sin t$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^t}{2}(\sin t - \cos t) + C$$

গতিকে $\int \sin(\log x)dx = \frac{x}{2}\{\sin(\log x) - \cos(\log x)\} + C$

১৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $3x - 2 = A\frac{d}{dx}(x^2 + x + 1) + B$, A আৰু B ধ্ৰুৱক

$$\Rightarrow 3x - 2 = A(2x+1) + B$$

তুলনা কৰি আমি পাওঁ $3 = 2A \Rightarrow A = \frac{3}{2}$

আকৌ $-2 = A + B \Rightarrow B = -2 - \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow B = -\frac{7}{2}$$

$$\therefore \int (3x-2)\sqrt{x^2+x+1}\,dx = \int \left[\frac{3}{2}(2x+1) - \frac{7}{2}\right]\sqrt{x^2+x+1}dx$$

$$= \frac{3}{2}\int (2x+1)\sqrt{x^2+x+1}dx - \frac{7}{2}\int (x^2+x+1)dx$$

$$= \frac{3}{2}\int (x^2+x+1)^{\frac{1}{2}}(2x+1)dx - \frac{7}{2}\int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}dx$$

$$= \frac{3}{2}.\frac{2}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{7}{2}\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right\}} + \frac{1}{2}.\frac{3}{4}\sinh^{-1}\left\{\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right\}\right]$$

$$= \left(x^2+x+1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{7}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}} - \frac{21}{16}\sinh^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+C$$

১৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৫

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $I = \int \frac{x-1}{(x-2)(x-3)}dx$

$$\frac{x-1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$\therefore x-1 = A(x-3)+B(x-2)$

উভয় পক্ষত $x=3$ বহুৰাই আমি পাওঁ $B=2$. আকৌ উভয় পক্ষত $x=2$ বহুৰাই আমি পাওঁ $1 = A(2-3) \therefore A=-1$.

$$\therefore I = -\int\frac{dx}{x-2}+2\int\frac{dx}{x-3}$$

$$= -\log(x-2)+2\log(x-3)+C$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $I = \int \frac{x}{x^2-12x+35}dx = \int \frac{x}{(x-7)(x-5)}dx$

এতিয়া, $\frac{x}{(x-7)(x-5)} = \frac{A}{x-7}+\frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)+B(x-7)}{(x-7)(x-5)}$

$\therefore x = A(x-5)+B(x-7)$

উভয় পক্ষত ক্ৰমাগতভাৱে $x=7$ আৰু $x=5$ বহুৰাই, আমি পাওঁ $A=\frac{7}{2}, B=-\frac{5}{2}$.

$$\therefore I = \frac{7}{2}\int\frac{1}{x-7}dx - \frac{5}{2}\int\frac{1}{x-5}dx$$

$$= \frac{7}{2}\log(x-7)-\frac{5}{2}\log(x-5)+C.$$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $I = \int \frac{3xdx}{x^2-x-2} = \int \frac{3xdx}{(x-2)(x+1)}$

$$\frac{3x}{(x-2)(x-1)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1} = \frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$\therefore 3x = A(x+1)+B(x-2)$

উভয় পক্ষত $x=2$ বহুৰাই আমি পাওঁ $6=3A \quad \therefore A=2$.

আকৌ $x=-1$, বহুৰাই আমি পাওঁ $-3=-3B \quad \therefore B=1$

$$\therefore I = 2\int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{1}{x+1}dx$$

$$= 2\log(x-2) + \log(x+1) + C$$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $\frac{1}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$

$$= \frac{A(x+1)^2 + B(x^2+x) + Cx}{x(x+1)^2}$$

$$\therefore 1 = A(x+1)^2 + B(x^2+x) + Cx$$

উভয় পক্ষত $x = 0$ বহুৰাই আমি পাওঁ $A = 1$ আৰু $x = -1$ বহুৰাই আমি পাওঁ $1 = -C$, বা $C = -1$.

উভয় পক্ষত x^2 অৰ সহগ তুলনা কৰি আমি পাওঁ

$$A + B = 0$$

বা $$B = -A = -1$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x(x+1)^2} = \int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1}{x+1}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2}dx$$

$$= \log x - \log(x+1) + \frac{1}{x+1} + C.$$

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৯ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

x^2, x অৰ সহগ আৰু ধ্ৰুৱক পদ তুলনা কৰি আমি পাওঁ—

$A + B = 0, C = 0, A = 1$

$\therefore A = 1, B = -1, C = 0$.

$$\therefore \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x(x^2+1)}dx = \int \left\{\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right\}dx = \log|x| - \frac{1}{2}\log|x^2+1| + C$$

১০ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

১১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

১২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

১৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $I = \int \frac{1}{1-x^3} dx$

$$= \int \frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)} dx$$

$$\frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{Bx+C}{1+x+x^2}$$

$$\therefore 1 = A(1+x+x^2) + (Bx+C)(1-x) \quad \ldots (1)$$

(1) অত $x = 1$ বহুৰাই আমি পাওঁ $A = \frac{1}{3}$ আৰু $x = 0$ বহুৰাই আমি পাওঁ

$$A + C = 1 \ \therefore C = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

উভয় পক্ষত x^2 অৰ সহগ তুলনা কৰি আমি পাওঁ

$$A - B = 0 \ \therefore B = \frac{1}{3}$$

$$\therefore I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{1-x} dx + \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{1+x+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1-x} dx + \frac{1}{3}.\frac{1}{2}\int \frac{2x+1+3}{1+x+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{1-x} dx + \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{1+x+x^2} dx + \frac{1}{6}.3\int \frac{1}{1+x+x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{3}\log(1-x) + \frac{1}{6}\log(1+x+x^2) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} dx$$

$$= -\frac{1}{3}\log(1-x) + \frac{1}{6}\log(1+x+x^2) + \frac{1}{2}.\frac{2}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

$$= -\frac{1}{3}\log(1-x) + \frac{1}{6}\log(1+x+x^2) + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

১৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

১৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

১৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $I = \int \frac{xdx}{\left(x^2 + a^2\right)\left(x^2 + b^2\right)}$

ধৰা হ'ল $x^2 = z \quad \therefore 2xdx = dz$

$$\therefore I = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{\left(z + a^2\right)\left(z + b^2\right)}$$

ধৰা হ'ল $\frac{1}{\left(z + a^2\right)\left(z + b^2\right)} = \frac{A}{z + a^2} + \frac{B}{z + b^2}$

$$\therefore 1 = A\left(z + a^2\right) + B\left(z + b^2\right) \quad \ldots (1)$$

(1) অত ক্ৰমাগতভাৱে $z = -a^2$ আৰু $z = -b^2$ বহুৱাই, আমি পাওঁ

$A = \frac{1}{a^2 - b^2}$ আৰু $B = -\frac{1}{a^2 - b^2}$

$$\therefore I = \frac{1}{2\left(a^2 - b^2\right)}\int \frac{1}{z + a^2}dz - \frac{1}{2\left(a^2 - b^2\right)}\int \frac{dz}{z + b^2}$$

$$= \frac{1}{2\left(a^2 - b^2\right)}\log\left(z + a^2\right) - \frac{1}{2\left(a^2 - b^2\right)}\log\left(z + b^2\right) + C$$

$$= \frac{1}{2\left(a^2 - b^2\right)}\log\frac{z + a^2}{z + b^2} + C$$

$$= \frac{1}{2\left(a^2 - b^2\right)}\log\frac{x^2 + a^2}{x^2 + b^2} + C$$

১৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $I = \int \frac{dx}{x^3 - x^2 - x + 1} = \int \frac{dx}{(x+1)\left(x^2 - 1\right)}$

এতিয়া, $\frac{1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x+1}$

$$\therefore 1 = A(x-1)(x+1) + B(x+1) + C(x-1)^2 \ \ldots (1)$$

(1) অত $x = 1$ বহুৱাই আমি পাওঁ $2B = 1$ বা $B = \frac{1}{2}$

আকৌ (1) $x = -1$ বহুৱাই আমি পাওঁ $4C = 1$ বা $C = \frac{1}{4}$

উভয় পক্ষত x^2অৰ সহগ তুলনা কৰি আমি পাওঁ

$A + C = 0$, $A = -C = -\frac{1}{4}$ বা $A = -\frac{1}{4}$

$$\therefore I = -\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{(x-1)^2} + \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}$$

$$= -\frac{1}{4}\log(x-1) + \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\log(x+1) + C$$

১৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

১৯ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

২০ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $x^2 = y$, $\therefore \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{y}{(y+1)(y+4)}$

ধৰা হ'ল $\frac{y}{(y+1)(y+4)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y+4}$ ... (1)

$\Rightarrow y = A(y+4) + B(y+1)$ ... (2)

(2) ত $y = -1$ আৰু $y = -4$ বহুৰাই আমি পাওঁ $A = -\frac{1}{3}$ আৰু $B = \frac{4}{3}$

(1) অত A আৰু B ৰ মান বহুৰাই আমি পাওঁ

$$\frac{y}{(y+1)(y+4)} = -\frac{1}{3(y+1)} + \frac{4}{3(y+4)}$$

y ৰ ঠাইত x^2 বহুৰাই আমি পাওঁ

$$\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} = -\frac{1}{3(x^2+1)} + \frac{4}{3(x^2+4)}$$

$$\therefore \int\frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)}dx = -\frac{1}{3}\int\frac{1}{(x^2+1)}dx + \frac{4}{3}\int\frac{1}{(x^2+4)}dx$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{4}{3}\times\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{3}\tan^{-1}x + \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

২১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

২২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $\sin x = t$ আৰু $\cos x dx = dt$, আমি পালোঁ

$$I = \int\frac{dt}{(2+t)(3+4t)}$$

ধৰা হ'ল $\frac{1}{(2+t)(3+4t)} = \frac{A}{2+t} + \frac{B}{3+4t}$ ... (i)

$\Rightarrow 1 = A(3+4t) + B(2+t)$ ... (ii)

(ii) ত $3+4t=0$ অর্থাৎ $t=-\frac{3}{4}$ বহুৰাই, আমি পাওঁ $1=B\left(2-\frac{3}{4}\right)\Rightarrow B=\frac{4}{5}$

(ii) ত $2+t=0$ অর্থাৎ $t=-2$ বহুৰাই, আমি পাওঁ $1=A(3-8)\Rightarrow A=-\frac{1}{5}$

(i) অত A আৰু B ৰ মান বহুৰাই আমি পাওঁ

$$\frac{1}{(2+t)(3+4t)}=-\frac{1}{5}\frac{1}{(2+t)}+\frac{4}{5}\frac{1}{3+4t}$$

$$\therefore I=\int\frac{1}{(2+t)(3+4t)}dt=-\frac{1}{5}\int\frac{1}{2+t}dt+\frac{4}{5}\int\frac{1}{3+4t}dt$$

$$=-\frac{1}{5}\log|2+t|+\frac{4}{5}.\frac{1}{4}\log|3+4t|+C$$

$$=-\frac{1}{5}\log|2+\sin x|+\frac{1}{5}\log|3+4\sin x|+C$$

২৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

২৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

২৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $x^2=t$ আমি পালোঁ

$$\frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}=\frac{(t+1)(t+2)}{(t+3)(t+4)}=1+\frac{(t+1)(t+2)}{(t+3)(t+4)}-1$$

$$=1+\frac{(t+1)(t+2)-(t+3)(t+4)}{(t+3)(t+4)}$$

ধৰা হ'ল $\frac{(t+1)(t+2)-(t+3)(t+4)}{(t+3)(t+4)}=\frac{A}{t+3}+\frac{B}{t+4}$

$\Rightarrow(t+1)(t+2)-(t+3)(t+4)=A(t+4)+B(t+3)$

যথাক্ৰমে $t=-3,-4$ বহুৰাই, আমি পালোঁ $A=2,B=-6$

$$\therefore\frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}=1+\frac{2}{t+3}-\frac{6}{t+4}$$

$$=1+\frac{2}{x^2+3}-\frac{6}{x^2+4}$$

$$\Rightarrow\int\frac{(x^2+1)(x^2+2)}{(x^2+3)(x^2+4)}dx=\int dx+2\int\frac{1}{x^2+3}dx-6\int\frac{1}{x^2+4}dx$$

$$=x+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3}}-3\tan^{-1}\frac{x}{2}+C.$$



১.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন

A. মান নিৰ্ণয় কৰক ঃ

1. $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$ 2. $\int\left(1+\frac{1}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{5}{x\sqrt{x^2-1}}+3^x\right)dx$

3. $\int \tan^{-1}\left(\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)dx$ 4. $\int \frac{4^x+3^x}{5^x}dx$

B. অধোলিখিতবোৰ অনুকলন কৰক ঃ

1. $\int \frac{\cos 2x + x + 1}{x^2+2x+\sin 2x}dx$ 2. $\int \frac{1-\sin 2x}{x+\cos^2 x}dx$ 3. $\int \frac{x+1}{x\left(x+\log^x\right)}dx$

4. $\int (4x+2)\sqrt{x^2+x+1}\,dx$ 5. $\int \cos^5 x\,dx$ 6. $\int \sin^3 x \cos^5 x\,dx$

7. $\int \frac{1}{\sqrt{16x^2+25}}dx$ 8. $\int \frac{5}{x^2-8x+25}dx$ 9. $\int \frac{1}{3-2x-x^2}dx$

10. $\int \frac{1}{x\left(x^n+1\right)}dx$ 11. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+2}}dx$ 12. $\int \frac{1}{\sqrt{6+x-x}}dx$

13. $\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5}dx$ 14. $\int \frac{x^2+2}{x^2-5x+6}dx$ 15. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}dx$

16. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5-2x-x^2}}dx$ 17. $\int \frac{1}{5+4\cos x}dx$ 18. $\int \frac{1}{5-4\sin x}dx$

C. মান নিৰ্ণয় কৰক ঃ

1. $\int \tan^{-1} x\,dx$ 2. $\int x \sin^{-1} x\,dx$ 3. $\int x^2 e^{-x}\,dx$ 4. $\int x^2 \sin^2 x\,dx$

5. $\int \log_{10}^x dx$ 6. $\int \log_e^x dx$ 7. $\int \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)dx$ 8. $\int e^{-x}dx \cos x\,dx$

9. $\int e^{ax}dx \cos x\,dx$ 10. $\int \sqrt{1+x-2x^2}\,dx$ 11. $\int (3x-2)\sqrt{x^2-x+1}\,dx$

12. $\int 2^x \sin x\,dx$ 13. $\int \sqrt{5x^2+8x+4}\,dx$

D. মান নির্ণয় কৰক

1. $\int \frac{3x+2}{x^3-6x^2+11x-6}dx$ 2. $\int \frac{x^2+x-1}{x^2+x-6}dx$ 3. $\int \frac{3x}{(x^2-4)(x+1)}dx$

4. $\int \frac{x}{(1+x)(1+x^2)}dx$ 5. $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x^2+3)}dx$ 6. $\int \frac{2x+1}{(x+2)(x-3)^2}dx$

7. $\int \frac{dx}{x(x^4+2)}$ 8. $\int \frac{dx}{1-x^3}$

*** ***** ***