অধ্যায় ৩ ঃ ৰূপান্তৰক সূত্ৰ (REDUCTION FORMULAE)

অধ্যায় গাঁথনি

3.1 উদ্দেশ্য

3.2 পৰিচয়

3.7 ৰূপান্তৰক সূত্ৰ

3.7.1. (i) $\int \sin^n x dx$, আৰু (ii) $\int \cos^n x dx$ অৰ বাবে ৰূপান্তৰক সূত্ৰ, n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

3.7.2 (i) $\int \tan^n x dx$ আৰু (ii) $\int \cot^n x dx$ অৰ বাবে ৰূপান্তৰক সূত্ৰ, n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

3.7.3 $\int x^n e^{ax} dx$ অৰ বাবে ৰূপান্তৰক সূত্ৰ, n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

3.7.4 $\int \cos^m x \sin x dx$ অৰ বাবে ৰূপান্তৰক সূত্ৰ

3.8 অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

3.9 অধিক জানিবলৈ

3.10 অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

3.11 আৰ্হি প্ৰশ্ন

৩.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- ৰূপান্তৰক সূত্ৰ বুজি পাব
- বিভিন্ন অনুকলনৰ বাবে ৰূপান্তৰক সূত্ৰ উলিয়াব পাৰিব।

৩.২ পৰিচয়

প্ৰথম অধ্যায়ত আমি অনুকুলন আৰু অনুকলনৰ পদ্ধতি বিষয়ে আলোচনা কৰিলো। আকৌ, দ্বিতীয় অধ্যায়ত নিশ্চিত অনুকলনৰ বিষয়ে আলোকপাত কৰা হ'ল। এই অধ্যায়ত আমি বিভিন্ন ৰূপান্তৰক সূত্ৰৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব।

৩.৭ ৰূপান্তৰক সূত্ৰ

কিছুমান জটিল ফলনৰ অনুকলনৰ ক্ষেত্ৰত খণ্ডশঃ অনুকলনৰ সহায়ত সহজ আকাৰলৈ নিয়া হয়। সাধাৰণতে ইয়াৰ ফলত প্ৰদত্ত অনুকলটোৰ দৰে এটা নতুন অনুকল পোৱা যায় আৰু ইয়াৰ সূচক প্ৰদত্ত অনুকলটোৰ সূচকতকৈ কম হয়। যি সূত্ৰৰ সহায়ত এটা জটিল ফলনক এটা সহজ আকাৰলৈ ৰূপান্তৰিত কৰা হয়, তেনে সূত্ৰক ৰূপান্তৰক সূত্ৰ (Reduction Formula) বুলি কোৱা হয়।

তলত কেইটামান প্ৰয়োজনীয় ৰূপান্তৰক সূত্ৰৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ল।

৩.৭.১ (i) $\int \sin^n x\,dx$ আৰু (ii) $\int \cos^n x\,dx$, অৰ বাবে ৰূপান্তৰক সূত্ৰ, n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

(i) $\int \sin^n x\,dx = \int \sin^{n-1} x . \sin x\,dx$

$$= \sin^{n-1} x \int \sin x\,dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}\left(\sin^{n-1} x\right) \int \sin x\,dx \right\} dx$$

(খণ্ডশঃ অনুকলনৰ সহায়ত)

$$= \sin^{n-1} x(-\cos x) - \int (n-1)\sin^{n-2} x . \cos x(-\cos x)\,dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\,dx$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x - (n-1)\int \sin^n x\,dx$$

সোঁপক্ষৰ শেষৰ অনুকলটো বাওঁপক্ষলৈ পক্ষান্তৰ কৰি আমি পাওঁ

$$n\int \sin^n x\,dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\,dx$$

$$\therefore \int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx.$$

এইটোৱেই উলিয়াবলগীয়া $\int \sin^n x\,dx$ অৰ ৰূপান্তৰক সূত্ৰ।

(ii) $\int \cos^n x\,dx = \int \cos^{n-1} x \cos x\,dx$

এতিয়া $\cos x$ অক দ্বিতীয় ফলন হিচাপে লৈ খণ্ডশঃ অনুকলনৰ বিধি প্ৰয়োগ কৰি আমি পাম

$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx$$

এইটো $\int \cos^n x\,dx$ অৰ ৰূপান্তৰক সূত্ৰ।

টোকা ঃ বিদ্যাৰ্থীসকলে $\int \cos^n x\,dx$ অৰ বাবে ৰূপান্তৰক সূত্ৰটো নিজে উলিয়ায় যেন।

দুটা প্ৰয়োজনীয় নিগমন

যদি n এটা 1 অতকৈ ডাঙৰ ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তেনেহ'লে

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\,dx$$

$$= \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\frac{n-5}{n-4}\cdots\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \quad (n \text{ যুগ্ম})$$

$$= \frac{n-1}{n}\frac{n-3}{n-2}\frac{n-5}{n-4}\ldots\ldots\ldots\frac{4}{5}.\frac{2}{3}.1 \qquad (n \text{ অযুগ্ম})$$

প্ৰমাণ ঃ আমি ইতিমধ্যে প্ৰমাণ কৰিছোঁ যে

$$\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1} x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x dx$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \left[-\frac{\sin^{n-1} x\cos x}{n}\right]_o^{\frac{\pi}{2}} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx$$

$$= 0 + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx$$

$$= \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx \quad \ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ ধৰা হ'ল। গতিকে (i) অৰ পৰা

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \ldots\ldots\ldots\text{(ii)}$$

এতিয়া যদি n অৰ ঠাইত আমি $n-2$, $n-4$ আদি ক্ৰমাগতভাৱে সলনি কৰোঁ, আমি পাম

$$I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}, \qquad I_{n-4} = \frac{n-5}{n-4} I_{n-6} \text{ ইত্যাদি}$$

$\therefore$ (ii) ৰ পৰা আমি পাম

$$I_n = \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}.\frac{n-5}{n-4}\ldots\ldots\ldots\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.I_o$$

বা $$I_n = \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}.\frac{n-5}{n-4}\ldots\ldots\ldots\frac{4}{5}.\frac{2}{3}.I_1$$

যদি ক্ৰমান্বয়ে n যুগ্ম বা অযুগ্ম

এতিয়া $I_0 = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^0 dx = \int_0^{\pi/2} dx = [x]_0^{\pi/2} = \pi/2$

আৰু $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = -[\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$

$\therefore$ আমি পালোঁ

$$I_n = \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}.\frac{n-5}{n-4}\ldots\ldots\ldots\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\pi/2, \text{ যেতিয়া } n \text{ যুগ্ম}$$

আৰু $$I_n = \frac{n-1}{n}.\frac{n-3}{n-2}.\frac{n-5}{n-4}\ldots\ldots\ldots\frac{4}{5}.\frac{2}{3}.1, \text{ যেতিয়া } n \text{ অযুগ্ম}$$

আকৌ আমি দেখুৱাব পাৰোঁ যে

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx = \int_0^{\pi/2} \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]^n dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos x)^n dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$$

গতিকে আমি পালোঁ যে $\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots\cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \frac{n-5}{n-4} \cdots\cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

যদি ক্ৰমান্বয়ে n যুগ্ম বা অযুগ্ম।

৩.৭.২ (a) $\int \tan^n x dx$, (b) $\int \cot^n x dx$, অৰ বাবে ৰূপান্তৰক সূত্ৰ, n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

(a) $\int \tan^n x dx = \int \tan^{n-2} x . \tan^2 x dx$

$$= \int \tan^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \int \tan^{n-2} x \sec^2 x dx - \int \tan^{n-2} x dx$$

সোঁহাতৰ প্ৰথম অনুকলটোৰ বাবে

$\tan x = t$, বা $\sec^2 x dx = dt$.

$\therefore \int \tan^{n-2} x \sec^2 x dx = \int t^{n-2} dt = \frac{t^{n-2}}{n-1} = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x$

$\therefore$ প্ৰদত্ত অনুকল

$$\int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx$$

এইটোৱেই $\int \tan^n x dx$ অৰ বাবে ৰূপান্তৰক সূত্ৰ।

(b) $\int \cot^n x dx = \int \cot^{n-2} x . \cot^2 x dx$

$$= \int \cot^{n-2} x (\operatorname{cosec}^2 x - 1) dx$$

$$= \int \cot^{n-2} x \operatorname{cosec}^2 x dx - \int \cot^{n-2} x dx$$

$$= -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x dx$$

এইটোৱে $\int \cot^n x dx$ অৰ বাবে ৰূপান্তৰক সূত্ৰ।

(a) $\int \sec^n x dx$, (b) $\int \operatorname{cosec}^n x dx$, অৰ বাবে ৰূপান্তৰক সূত্ৰ, n এটা ধ াত্মক অখণ্ড সংখ্যা

(a) ধৰা হ'ল $I_n = \int \sec^n x dx$

তেনেহ'লে $I_n = \int \sec^n x dx = \int \sec^{n-2} x . \sec^2 x dx$

$$= \sec^{n-2} x . \tan x - \int (n-2) \sec^{n-3} x . \sec x \tan x . \tan x dx$$

(খণ্ডশঃ অনুকলনৰ সহায়ত। ইয়াত $\sec^2 x$ হ'ল দ্বিতীয় ফলন)

$$I_n = \sec^{n-2} x . \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x (\sec^2 x - 1) dx$$

$$= \sec^{n-2} x . \tan x - (n-2) \left[\int \sec^n x dx - \int \sec^{n-2} x dx \right]$$

$$= \sec^{n-2} x . \tan x - (n-2)(I_n - I_{n-2})$$

এতিয়া পক্ষান্তৰ কৰি আমি পাওঁ

$$I_n = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x . \tan x + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$$

(b) ইয়াত $I_n = \int \operatorname{cosec}^n x dx$

$$= \int \operatorname{cosec}^{n-2} x . \operatorname{cosec}^2 x$$

এতিয়া খণ্ডশঃ অনুকলনৰ সহায়ত বিদ্যাৰ্থীসকলে দেখুৱাব পাৰিব যে

$$I_n = \frac{1}{n-1} \operatorname{cosec}^{n-2} x . \cot x + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$$

৩.৭.৩ $\int x^n e^{ax} dx$ অৰ বাবে ৰূপান্তৰক সূত্ৰ n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

ইয়াত $I_n = \int x^n e^{ax} dx$.

গতিকে $I_n = \int x^n e^{ax} dx$

$$= x^n . \frac{e^{ax}}{a} - \int n x^{n-1} \frac{e^{ax}}{a} dx$$

$$= \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$$

$$= \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} I_{n-1}$$

এইটোৱেই $\int x^n e^{ax} dx$ অৰ ৰূপান্তৰক সূত্ৰ।

$\int \sin^m x \cos^n x dx$ অৰ বাবে ৰূপান্তৰক সূত্ৰ, *m, n* ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

ধৰা হ'ল $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx = \int \cos^{n-1} x \left(\sin^m x \cos x\right) dx$

খণ্ডশঃ অনুকলনৰ সহায়ত

$$I_{m,n} = \cos^{n-1} x \int \sin^m x \cos x dx - \int \left\{ \frac{d}{dx}\left(\cos^{n-1} x\right) \int \sin^m x \cos x dx \right\} dx$$

$$I_{m,n} = \cos^{n-1} x . \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} - \int (n-1)\cos^{n-2} x(-\sin x) . \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} dx$$

$$= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \cos^{n-2} x . \sin^m x . \sin^2 x dx$$

$$= \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \cos^{n-2} x \sin^m x \left(1 - \cos^2 x\right) dx$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \left(\cos^{n-2} x \sin^m x - \sin^m x \cos^n x\right) dx$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \int \cos^{n-2} x \sin^m x dx - \frac{n-1}{m+1} I_{m,n}$$

পক্ষান্তৰ কৰি আৰু সৰল কৰি আমি পাওঁ

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \cos^{n-2} x \sin^m x dx$$

অৰ্থাৎ $I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$ ... ...(A), এইটোৱেই $\int \sin^m x \cos^n x dx$ অৰ ৰূপান্তৰক সূত্ৰ।

টোকা ঃ আমি $I_{m,n}$ অক তলত দিয়া ধৰণে লিখিলোঁ

$$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x dx$$

$$= \int \sin^{m-1} x \left(\cos^n x \sin x\right) dx .$$

খণ্ডশঃ অনুকলনৰ সহায়ত দেখুৱাব পাৰিম যে

$$I_{m,n} = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} I_{m-2,n} \text{ ... ...(B)}$$

প্ৰয়োজনীয় নিগমন

(i) $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx$, অৰ ৰূপান্তৰক সূত্ৰ, *m, n* হ'ল 1 অতকৈ ডাঙৰ ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

ধৰা হ'ল $J_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx$

(A) ৰ পৰা আমি পাম

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \left[\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} \right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{m+n} \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^{n-2} x dx$$

$$= 0 + \frac{n-1}{m+n} \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^{n-2} x dx$$

$$\therefore J_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} J_{m,n-2} \quad \ldots \ldots \ldots (C)$$

সেইদৰে (B) ৰ পৰা আমি পাম

$$J_{m,n} = \frac{m-1}{m+n} J_{m-2,n} \quad \ldots \ldots \ldots (D)$$

(ii) $\int \sin^m x \cos^n x dx$, অৰ ৰূপান্তৰক সূত্ৰ, য'ত m বা n বা m আৰু n উভয়ে ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

(A) ৰ পৰা আমি পালোঁ

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2}$$

n অৰ ঠাইত $n+2$ লিখি আমি পাওঁ

$$I_{m,n+2} = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+n+2} + \frac{n+1}{m+n+2} I_{m,n}$$

পক্ষান্তৰ কৰি আমি পাওঁ

$$I_{m,n} = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1} I_{m,n+2}, \quad (n+1 \neq 0) \ldots \ldots \ldots (E)$$

সেইদৰে (B) ৰ পৰা আমি পাওঁ

$$I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} \cos^{n+1}}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1} I_{m+2,n}, \quad (m+1 \neq 0) \qquad \ldots \ldots \ldots (F)$$

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ

উদাহৰণ 1 ঃ $\int \sin^6 x dx$ অৰ মান নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে

$$\int \sin^n x dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx$$

$n = 6$ বহুৱাই আমি পাওঁ

$$\int \sin^6 x dx = -\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x + \frac{5}{6} \int \sin^4 x dx$$

$$= -\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x + \frac{5}{6} \left[-\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} \int \sin^2 x dx \right]$$

$$= -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos - \frac{5}{24}\sin^3 x\cos x + \frac{15}{24}\int \sin^2 x dx$$

$$= -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x\cos x + \frac{5}{8}\int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx$$

$$= -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x\cos x + \frac{5}{16}\left(x - \frac{\sin 2x}{2}\right) + C$$

উদাহৰণ 2 ঃ $\int_0^{\pi/2} \cos^{10} x dx$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ইয়াত $n = 10$ এটা যুগ্ম সংখ্যা

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \cos^{10} x dx = \frac{9}{10}.\frac{7}{8}.\frac{5}{6}.\frac{3}{4}.\frac{1}{2}.\frac{\pi}{2} = \frac{63\pi}{512}$$

উদাহৰণ 3 ঃ $\int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$ অৰ এটা সূত্ৰ উলিয়াওক আৰু ইয়াৰ সহায়ত $\int_0^{\pi/4} \tan^6 x dx$ অৰ মান নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে

$$\int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx$$

$$\therefore \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx = \left[\frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan^{n-2} x dx$$

$$= \left[\frac{1}{n-1}\left(\tan \pi/4\right)^{n-1} - \frac{1}{n-1}(\tan 0)^{n-1}\right] - \int_0^{\pi/2} \tan^{n-2} x dx$$

$$= \frac{1}{n-1} - \int_0^{\pi/4} \tan^{n-1} x dx \quad \ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

(i) অত $n = 6$ বহুৰাই আমি পাওঁ

$$\int_0^{\pi/4} \tan^6 x dx = \frac{1}{5} - \int_0^{\pi/4} \tan^4 x dx$$

$$= \frac{1}{5} - \left[\frac{1}{3} - \int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx\right] \qquad \text{[(i) অৰ সহায়ত]}$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \int_0^{\pi/4} \tan^2 x dx$$

$$= \frac{-2}{15} + 1 - \int_0^{\pi/4} \tan^0 x dx = \frac{13}{15} - \int_0^{\pi/4} dx$$

$$= \frac{13}{15} - [(x)]_0^{\pi/4} = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}$$

উদাহৰণ 3 ঃ যদি $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\,dx$ দেখুওৱাক যে $n(I_{n-1} + I_{n+1}) = 1$.

সমাধান ঃ আমি এনেদৰে লিখিব পাৰোঁ

$$\int \tan^{n+1} x\,dx = \int \tan^{n-1} x.\tan^2 x\,dx$$

$$= \int \tan^{n-1} x.(\sec^2 x - 1)dx$$

$$= \int \tan^{n-1} x \sec^2 x\,dx - \int \tan^{n-1} x\,dx$$

$$= \frac{\tan^n x}{n} - \int \tan^{n-1} x\,dx$$

$$\therefore \int_0^{\pi/4} \tan^{n+1} x\,dx = \left[\frac{\tan^n x}{n}\right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \tan^{n-1} x\,dx$$

$$= \frac{1}{n} - \int_0^{\pi/4} \tan^{n-1} x\,dx$$

$$\therefore \quad I_{n+1} = \frac{1}{n} - I_{n-1}$$

$$\Rightarrow I_{n-1} + I_{n+1} = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow n(I_{n-1} + I_{n+1}) = 1$$

উদাহৰণ 4 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^4 x \cos 2x\,dx$

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^4 x \cos 2x\,dx$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^4 x(2\cos^2 x - 1)dx$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^6 x\,dx - \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^4 x\,dx$$

$$= 2\frac{6-1}{3+6}\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^4 x\,dx - \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^4 x\,dx$$

$$= \frac{10}{9}\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^4 x\,dx - \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^4 x\,dx$$

$$= \frac{1}{9}\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^4 x\,dx$$

$$= \frac{1}{9}\left[\frac{4-1}{3+4}\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{21}\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^2 x\,dx$$

$$= \frac{1}{21}\left[\frac{2-1}{3+2}\right]\int_0^{\pi/2}\sin^3 x dx$$

$$= \frac{1}{21}\left[\frac{2-1}{3+2}\int_0^{\pi/2}\sin^3 x dx\right]$$

$$= \frac{1}{105}\int_0^{\pi/2}\sin^3 x dx$$

$$= \frac{1}{105}.\frac{2}{3}.1$$

$$= \frac{2}{315}$$

৩.৭.৪ $\int \cos^m x \sin nx dx$ অৰ ৰূপান্তৰক সূত্ৰ

ধৰা হ'ল $I_{m,n} = \int \cos^m x \sin x dx$

খণ্ডশঃ অনুকলনৰ সহায়ত আমি পাওঁ $\cos^m x$ অক প্ৰথম ফলন হিচাপে লোৱা হৈছে।

$$I_{m,n} = \cos^m x.\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) - \int m\cos^{m-1} x(-\sin x).\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)dx$$

$$= -\frac{\cos^m x \cos nx}{n} - \frac{m}{n}\int \cos^{m-1} x \sin x \cos nx dx \quad \ldots\ldots\ldots\text{(i)}$$

কিন্তু আমি জানো যে

$$\sin(nx - x) = \sin nx \cos x - \cos nx \sin x$$

$$\therefore \cos nx \sin x = \sin nx \cos x - \sin(n-1)x$$

(i) অত বহুৰাই আমি পাওঁ

$$I_{m,n} = -\frac{\cos^m x \cos nx}{n} - \frac{m}{n}\int \cos^{m-1} x\{\sin nx \cos x - \sin(n-1)x\}dx$$

$$= -\frac{\cos^m x \cos nx}{n} - \frac{m}{n}\int \cos^m x \sin nx dx + \frac{m}{n}\int \cos^{m-1} x \sin(n-1)x dx$$

$$= -\frac{\cos^m x \cos nx}{n} - \frac{m}{n}I_{m,n} + \frac{m}{n}I_{m-1,\ n-1}$$

পক্ষান্তৰ কৰি আমি পাওঁ

$$(m+n)I_{m,n} = -\cos^m x \cos nx + mI_{m-1,n-1}$$

$$\Rightarrow I_{m,n} = -\frac{\cos^m x \cos nx}{m+n} + \frac{m}{m+n} I_{m-1,n-1}$$

টোকা ঃ একেদৰে বিদ্যাৰ্থীসকলে তলৰ অনুকলকেইটাৰ বাবে ৰূপান্তৰক সূত্ৰ উলিয়াব পাৰিব।

(i) $\int \cos^m x \cos nx dx$ (ii) $\int \sin^m x \cos nx dx$ (iii) $\int \sin^m x \sin nx dx$

উদাহৰণ ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 3x dx$

সমাধান ঃ আমি জানো যে যদি $I_{m,n} = \int \cos^m x \sin nx dx$ তেনেহ'লে

$$I_{m,n} = -\frac{\cos^m x \cos nx}{m+n} + \frac{m}{m+n} I_{m-1,n-1}$$

এতিয়া $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 3x dx = \left[-\frac{\cos^5 x \cos 3x}{5+3} \right]_0^{\pi/2} + \frac{5}{5+3} \int_0^{\pi/2} \cos^4 x \sin 2x . dx$

$$= -\frac{1}{8}(-1) + \frac{5}{8} \int_0^{\pi/2} \cos^4 x . 2 \sin x \cos x dx$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{5}{8} . 2 \int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin x dx$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{5}{4} \left[\left(-\frac{\cos^6 x}{6} \right) \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{5}{24}(0-1) \frac{1}{8} - \frac{5}{24} \left[\cos^6 x \right]_0^{\pi/2} \Big|$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{5}{24}$$

$$= \frac{1}{3}$$



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং 1 ঃ দেখুওৱাক যে $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx = \frac{5\pi}{32}$

প্ৰশ্ন নং 2 ঃ দেখুওৱাক যে $\int_0^a x^2 \left(a^2 - x^2\right)^{3/2} dx = \frac{\pi a^6}{32}$

প্ৰশ্ন নং 3 ঃ দেখুওৱাক যে $\int_0^a \frac{x^4}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{3\pi a^4}{16}$

প্ৰশ্ন নং 4 ঃ যদি $I_n = \int \sin^n(2\theta) d\theta$ তেনেহ'লে দেখুওৱাক যে I_n অৰ বাবে এটা ৰূপান্তৰক সূত্ৰ হ'ল

$$I_n = -\frac{1}{2n}\sin^{n-1} 2\theta.\cos 2\theta + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

প্ৰশ্ন নং 5 ঃ যদি $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx$, দেখুওৱাক যে

$I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$ আৰু ইয়াৰ সহায়ত দেখুওৱাক যে I_5 অৰ মান হ'ল

$\frac{1}{2}\left(\log 2 - \frac{1}{2}\right)$.

প্ৰশ্ন নং 6 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক

(a) $\int \cot^5 x dx$ (b) $\int_0^{\pi/4} \tan^7 \theta d\theta$

(c) $\int \operatorname{cosec}^3 x dx$

প্ৰশ্ন নং 7 ঃ দেখুওৱাক যে

$$\int \sec^5 x dx = \frac{1}{4}\sec^3 x \tan x + \frac{3}{8}\sec x \tan x + \frac{3}{8}\log\left|\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)\right|$$

প্ৰশ্ন নং 8 ঃ দেখুওৱাক যে $\int_0^{\pi/2} \sin^7 x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^7 x dx = \frac{16}{35}$

প্ৰশ্ন নং 9 ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $\int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x dx = \frac{(2m)!}{\{2^m.(m)!\}^2}.\frac{\pi}{2}$

প্ৰশ্ন নং 10 ঃ দেখুওৱাক যে

$$\int \sin^8 x \cos^2 x dx = \frac{1}{512}\left\{\frac{1}{10}\sin 10x - \frac{3}{4}\sin 8x + \frac{13}{6}\sin 6x - 2\sin 4x - 7\sin 2x + 14x\right\}$$

প্ৰশ্ন নং 11 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin 5x dx$.

প্ৰশ্ন নং 12 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক (a) $\int_0^{\pi/4} \sin^2 x \cos^4 x dx$

(b) $\int_0^1 x^{3/2}(1-x)^{3/2} dx$

প্ৰশ্ন নং 13 ঃ যদি $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x dx$ য'ত $n > 1$,

দেখুওৱাক যে $I_n + n(n-1)I_{n-2} = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}$

প্ৰশ্ন নং 14 ঃ দেখুওৱাক যে $\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^n x dx$

$$= \frac{1.3.5.\ldots\ldots\ldots(m-1).1.3.5.\ldots\ldots\ldots(n-1)}{2.4.6.\ldots\ldots\ldots(m+n)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

যেতিয়া m আৰু n অভয় যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা, আৰু

$$= \frac{2.4.6.\ldots\ldots\ldots(m-1)}{(n+1)(n+3)\ldots\ldots\ldots(n+m)}$$

যেতিয়া সূচক দুটাৰ এটা সূচক (ধৰা হ'ল m) অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।

প্ৰশ্ন নং 15 ঃ দেখুওৱাক যে $\int x^3 e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a^4}\left(a^3x^3 - 3a^2x^2 + 6ax - 6\right)$

প্ৰশ্ন নং 16 ঃ দেখুওৱাক যে

$$\int \sin^m x \cos nx dx = \frac{\sin^m x \cos nx}{m+n} - \frac{m}{m+n}\int \sin^{m-1} x \cos(n-1)x dx$$

প্ৰশ্ন নং 17 ঃ যদি $I_n = \int x^n e^{-ax} dx, \left(n \neq -1\right)$, দেখুওৱাক যে

$$aI_n = -x^n e^{-ax} + nI_{n-1}$$



৩.৮ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- 2.7 অত কেইটামান ৰূপান্তৰক সূত্ৰ দিয়া হৈছে।



৩.৯ অধিক জানিবলৈ

1) *Integral Calculus,* Kishan,Hari,Atlantic Publishers & Distributors.New Delhi -110027.
2) *Integral Calculus*, Dhami, H.S. New age International Publishers,New Delhi - 110002.
3) *Text book of Integral Calculus*, Sharma, A.K. Discovery Publishing House, New Delhi -110002.



৩.১০ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx = \frac{5\times3\times1}{6\times4\times2}\times\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}$

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $x = a\sin\theta$, $\therefore dx = a\cos\theta d\theta$

আকৌ, যেতিয়া $x = 0, \sin\theta = 0$ অর্থাৎ $\theta = 0$

আৰু যেতিয়া $x = a, \sin\theta = 1$ অর্থাৎ $\theta = \frac{\pi}{2}$.

তেনেহ'লে $\int_0^a x^2\left(a^2 - x^2\right)^{3/2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2\theta\left(a^2 - a^2\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}} a\cos\theta d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2\theta\left(a^2\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}} a\cos\theta d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2\theta a^3\cos^3\theta a\cos\theta d\theta$$

$$= a^6\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^4\theta d\theta$$

$$= a^6\frac{3.1.1}{6.4.2}.\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi a^6}{32}.$$

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে $x = a\sin\theta$, $\therefore dx = a\cos\theta d\theta$

যেতিয়া $x = 0, \sin\theta = 0$ অর্থাৎ $\theta = 0$

আৰু যেতিয়া $x = a, \sin\theta = 1$ অর্থাৎ $\theta = \frac{\pi}{2}$.

তেনেহ'লে $\int_0^a \frac{x^4 dx}{\sqrt{\left(a^2 - x^2\right)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^4\sin^4\theta a\cos\theta d\theta}{\sqrt{\left(a^2 - a^2\sin^2\theta\right)}}$

$$= a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \theta d\theta$$

$$= a^4 \frac{3.1}{4.2} . \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{3\pi a^4}{16} .$$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে $I_n = \int \sin^n (2\theta) d\theta = \int \sin^{n-1}(2\theta) \sin 2\theta d\theta$

$\sin 2\theta$ ক দ্বিতীয় ফলন হিচাপে লৈ খণ্ডশঃ অনুকলনৰ সহায়ত অনুকলন কৰি আমি পাওঁ।

$$I_n = \sin^{n-1} 2\theta \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right] - \int \left\{ (n-1) \sin^{n-2} 2\theta . \cos 2\theta . 2 \right\} \left(-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \sin^{n-1} 2\theta \cos 2\theta + (n-1) \int \sin^{n-2} 2\theta . \cos^2 2\theta d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \sin^{n-1} 2\theta \cos 2\theta + (n-1) \int \sin^{n-2} 2\theta . (1 - \sin^2 2\theta) d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \sin^{n-1} 2\theta \cos 2\theta + (n-1) \int \sin^{n-2} 2\theta d\theta - (n-1) \int \sin^n 2\theta d\theta$$

$$= -\frac{1}{2} \sin^{n-1} 2\theta \cos 2\theta + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$$

$$\Rightarrow I_n + (n-1) I_n = -\frac{1}{2} \sin^{n-1} 2\theta \cos 2\theta + (n-1) I_{n-2}$$

$$\Rightarrow n I_n = -\frac{1}{2} \sin^{n-1} 2\theta \cos 2\theta + (n-1) I_{n-2}$$

$$\Rightarrow I_n = -\frac{\sin^{n-1} 2\theta \cos 2\theta}{2n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2},$$

এইটোৱেই উলিয়াবলগীয়া ৰূপান্তৰক সূত্ৰ।

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x dx,$

আমি জানো যে $\int \tan^n x dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x dx$

$$\therefore I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx = \left[\frac{\tan^{n-1} x}{n-1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x dx$$

$$= \frac{1}{n-1} - I_{n-2} \qquad \left[I_{n-2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n-2} x dx \right]$$

বা $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1}$ ... (1)

ৰূপান্তৰক সূত্ৰ $I_n = \frac{1}{n-1} - I_{n-2}$ ত $n = 5$ বহুৰাই আমি পাওঁ

$$I_5 = \frac{1}{4} - I_3 = \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{2} - I_1 \right] = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + I_1$$

$$\therefore I_5 = -\frac{1}{4} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$$

$$= -\frac{1}{4} + \left[\log \sec x \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\frac{1}{4} + \left[\log \sec \frac{\pi}{4} - \log \sec 0 \right]$$

$$= -\frac{1}{4} + \left[\log \sqrt{2} - \log 1 \right]$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log 2$$

$$= \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{4}.$$

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ (a) আমি জানো যে

$$\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x dx$$

উপৰিউক্ত ৰূপান্তৰক সূত্ৰটোত $n = 5$ বহুৰাই আমি পাওঁ

$$\int \cot^5 x dx = -\frac{1}{4} \cot^4 x dx - \int \cot^3 x dx$$

$$= -\frac{1}{4} \cot^4 x dx - \left[-\frac{1}{2} \cot^2 x - \int \cot x dx \right]$$

$$= -\frac{1}{4} \cot^4 x + \frac{1}{2} \cot^2 x + \log \sin x$$

৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x dx = \frac{6.4.2}{7.5.3.1} = \frac{16}{35}.$$

৯ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত $2m$ এটা যুগ্ম সংখ্যা

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx = \frac{(2m-1)(2m-3)\cdots 3.1}{(2m)(2m-2)\cdots 4.2}.\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{2m(2m-1)(2m-2)(2m-3)\cdots 3.2.1}{\{(2m)(2m-2)\cdots 4.2\}^2}.\frac{\pi}{2}$$

[লব আৰু হৰ উভয়কে $2m(2m-2)(2m-4)\cdots 4.2$ ৰে পূৰণ কৰি]

$$= \frac{(2m)!}{\{2^m m(m-1)(m-2)\cdots 2.1\}^2}.\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(2m)!}{\{2^m m!\}^2}.\frac{\pi}{2}$$

১৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ আমি জানো যে $I_n = \int_0^{\pi/2} x^n \sin x dx$

$$= \left[x^n.(-\cos x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} n.x^{n-1}.(-\cos x)dx$$

[খণ্ডশঃ অনুকলনৰ সহায়ত]

$$= 0 + n\int_0^{\frac{\pi}{2}} .x^{n-1}\cos x.dx$$

$$= n\left[\left[x^{n-1}.\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1).x^{n-2}.\sin x.dx\right]$$,আকৌ খণ্ডশঃ অনুকলনৰ সহায়ত

$$= n\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{n-1} - n(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} .x^{n-2}.\sin x.dx$$

$$\therefore I_n = n\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}$$

$$\therefore I_n + n(n-1)I_{n-2} = n\left(\frac{1}{2}\pi\right)^{n-1}$$

১৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $I_n = \int x^n e^{-ax}\,dx$

$$= x^n \int e^{-ax}dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} x^n \int e^{-ax}dx \right\} dx$$

$$= x^n \frac{e^{-ax}}{-a} - \int nx^{n-1} \left(\frac{e^{-ax}}{-a} \right) dx$$

$$= -\frac{x^n e^{-ax}}{a} + \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{-ax}dx$$

$$= -\frac{x^n e^{-ax}}{a} + \frac{n}{a} I_{n-1}$$

$$\Rightarrow I_n = -\frac{x^n e^{-ax}}{a} + \frac{n}{a} I_{n-1}$$

$$\therefore aI_n = -x^n e^{-ax} + nI_{n-1}$$



২.১১ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ৭ ঃ (i) দেখুওৱাক যে $\int x^3 e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^3 - \frac{3x^2}{a} + \frac{6x}{a^2} - \frac{6}{a^3} \right)$

(ii) যদি $I_n = \int e^{-x} x^n dx$ দেখুওৱাক যে $I_n = e^{-x}x^n + nI_{n-1}$

প্ৰশ্ন ৮ ঃ (i) দেখুওৱাক যে $\int_0^{\pi/2} \cos^6 x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx = \frac{5\pi}{32}$

(ii) দেখুওৱাক যে $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^5 x dx = \frac{8}{315}$

(iii) দেখুওৱাক যে $\int_0^1 x^2 \left(1 - x^2\right)^{3/2} dx = \frac{\pi}{32}$

প্ৰশ্ন ৯ ঃ দেখুওৱাক যে $\int \frac{dx}{\sin^4 \frac{x}{2}} = \frac{4}{3}\cot\frac{x}{2}$

প্ৰশ্ন ১০ ঃ যদি $I_n = \int x^n \cos bx dx$ আৰু $J_n = \int x^n \sin bx dx$ দেখুওৱাক যে

$bI_n = x^n \sin bx - nJ_{n-1}$.

*** ***** ***