# অধ্যায় ৪ ঃ সামতলিক বক্রই আওৰা অংশৰ কালি (QUADRATURE)

## অধ্যায় গাঁথনি


4.1 উদ্দেশ্য

4.2 পৰিচয়

4.3 সামতলিক বক্রই আগুৰা অংশৰ কালি

4.3.1 দুটা প্রদত্ত বক্রৰ মাজৰ কালি

4.4 অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

4.5 অধিক জানিবলৈ

4.6 অগ্রগতিৰ খতিয়ান

4.7 আর্হি প্রশ্ন


## ৪.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- সামতলিক বক্রই আগুৰা অংশৰ কালি উলিয়াব পাৰিব
- দুটা প্রদত্ত বক্রৰ মাজৰ কালি উলিয়াব পাৰিব।

## ৪.২ পৰিচয়

বিজ্ঞান, প্রযুক্তিবিদ্যা আৰু অধ্যয়নৰ বিভিন্ন শাখাত অনুকলনৰ বহুল প্রয়োগ পৰিলক্ষিত হয়। অনুকলনৰ এটা অতি প্রয়োজনীয় প্রয়োগ হ'ল কোনো অংশৰ কালি নিৰূপণ। দৰাচলতে কালি নির্ধাৰণ কৰিবলৈ অনুকলন গণিত চর্চা কৰা হৈছিল। অংশটোক কিছুমান সৰু সৰু ভাগত ভগাই তাৰ কালি উলিয়াই পাছত এই ভাগবোৰৰ যোগফল উলিওৱা হৈছিল। বক্রৰদ্বাৰা আগুৰা অংশৰ কালি উলিওৱা এই পদ্ধতিক ইংৰাজীত Quadrature বুলি কয়।

## ৪.৩ সামতলিক বক্রই আগুৰা অংশৰ কালি

ধৰা হ'ল $[a, b]$ অন্তৰালত $y = f(x)$ এটা অবিচ্ছিন্ন ফলন। PQ বক্রৰ দ্বাৰা $y=f(x)$ অক লৈখিকভাৱে বুজোৱা হৈছে। $x = a$ আৰু $x = b$ বিন্দুৰ অনুৰূপে কোটি ক্রমে AC আৰু BD. চিত্র 3.1 অৰ পৰা $OA = a$ আৰু $OB = b$.

$\therefore$ $AB = b - a$

AB ক $n$ টা সমান অংশত (উপ-অন্তৰাল) ভাগ কৰা হ'ল।

ধৰা হ'ল প্রত্যেক ভাগৰ দৈর্ঘ্য $h$.

$\therefore$ $b = a + nh$

ধৰা হ'ল AB ৰ বিভাজনৰ বিন্দুবোৰ A, $A_1$, $A_2$, $A_3$... ,B.

ধৰা হ'ল AB ৰ বিভাজন বিন্দুৰ কোটিবোৰে PQ বক্ৰক C, $C_1$, $C_2$,... ... ..,D বিন্দুত কাটে।

গতিকে C, $C_1$, $C_2$... ... ...D বিন্দুৰ ভুজ আৰু কোটিবোৰ হ'ব—

| বিন্দু | ভুজ | কোটি |
|---|---|---|
| C | a | f(a) |
| $C_1$ | a + h | f(a + h) |
| $C_2$ | a + 2h | f(a + 2h) |

আৰু শেষত

| | | |
|---|---|---|
| D | a + nh | f(a + nh) |

এতিয়া চিত্ৰ 4.1 অত দেখুওৱাৰ দৰে PQ বক্ৰৰ তলত অন্তঃ আয়তবোৰ (inner rectangles) অংকন কৰা হ'ল। এনেদৰে অংকন কৰা আয়তবোৰ হ'ল $ACP_1A_1$, $A_1C_1P_2A_2$... ইত্যাদি।

ধৰা হ'ল $y = f(x)$ বক্ৰ, কোটিদ্বয় $x = a$ আৰু $x = b$ আৰু $x$- অক্ষই আগুৰা অংশৰ কালি S.

ধৰা হ'ল অন্তঃ আয়ত ক্ষেত্ৰবোৰৰ কালিৰ যোগফল $S_1$

$$S_1 = hf(a) + hf(a+h) + ..... + hf(a+\overline{n-1}h)$$

$$= h\left[f(a) + f(a+h) + ..... + f(a+\overline{n-1}h)\right]$$

$$= h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh)$$

আকৌ আমি বক্ৰৰ ওপৰত বহিঃ আয়ত (outer rectangles) অংকন কৰিলোঁ। যদি $S_2$ এ সকলো বহিঃ আয়ত ক্ষেত্ৰৰ কালিৰ যোগফল বুজায়, তেনেহ'লে

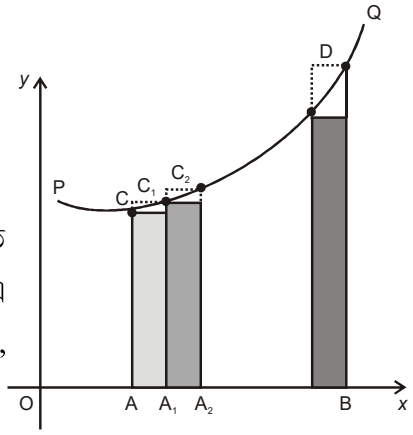



Fig. 4.1

$$S_2 = hf(a+h) + hf(a+2h) + ..... + hf(a+nh)$$

$$= hf(a) + hf(a+h) + ..... + hf(a+\overline{n-1}h) + hf(a+nh) - hf(a)$$

$$= h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh) + hf(a+nh) - hf(a)$$

$$= h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh) + hf(b) - hf(a)$$

এতিয়া স্পষ্টত ঃ

$$S_1 < S < S_2$$

বা $\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh) < S < \sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh) + hf(b) - hf(a)$

যদি $n \to \infty$, তেনেহ'লে $h \to 0$ আৰু সেয়েহে

$$\lim_{h\to 0} \sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh) < S < \lim_{h\to 0} h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh) + \lim_{h\to 0} h[f(b) - f(a)]$$

অর্থাৎ $\int_a^b f(x)dx < S < \int_a^b f(x)dx$

$\therefore S = \int_a^b f(x)dx$

গতিকে, দেখা গ'ল যে জ্যামিতীয়ভাৱে নিশ্চিত অনুকল $\int_a^b f(x)dx$ এ $y = f(x)$ বক্র, কোটিদ্বয় $x = a$ আৰু $x = b$ আৰু $x$-অক্ষই আগুৰা অংশৰ কালি বুজায়।

$\therefore$ ABCD ৰ কালি $= \int_a^b f(x)dx = \int_a^b ydx$

**টোকা ঃ** (i) দেখুৱাব পাৰি যে $x = f(y)$ বক্র, ভুজদ্বয় $y = a$ আৰু $y = b$ আৰু $y$- অক্ষই আগুৰা অংশৰ কালি $\int_a^b xdy$ or $\int_a^b f(y)dy$.

**ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ**

**উদাহৰণ 1 ঃ** অনুকলনৰ সহায়ত $x$-অক্ষ, $y$-অক্ষ আৰু $y - x = 2$ ৰেখাই আগুৰা অংশৰ কালি নির্ণয় কৰক।

**সমাধান ঃ** $y - x = 2$ ৰেখাডালে $y$-অক্ষক B(0, 2) বিন্দুত আৰু $x$-অক্ষক A (–2, 0) বিন্দুত কাটে। গতিকে আমি চিত্র 3.2 ত দেখুওৱাৰ দৰে AOB অংশৰ কালি উলিয়াব লাগে।

$\therefore$ নির্ণেয় কালি

$$= \int_{-2}^{0} ydx = \int_{-2}^{0} (x+2)dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{0}$$

$$= [0] - [2 - 4] = 2 \quad \text{ব গ}^{\prime}\text{একক}$$

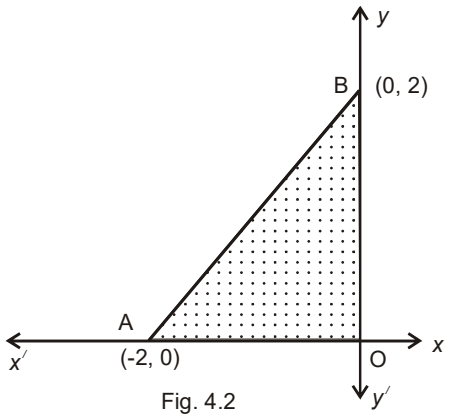


Fig. 4.2

**উদাহৰণ 2 ঃ** অনুকলনৰ সহায়ত $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তৰ কালি নির্ণয় কৰক।

**সমাধান ঃ** বক্রটোৰ সমীকৰণ হ'ল

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

অর্থাৎ $y^2 = \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)$

বক্রডাল দুয়োডাল অক্ষ সাপেক্ষে প্রতিসম। গতিকে গোটেই উপবৃত্তটোৰ কালি প্রথম চোকৰ কালিৰ চাৰিগুণ হ'ব। প্রথম চোকৰ কালি হ'ল OAB অংশৰ কালি।

গতিকে উলিয়াবলগীয়া কালি

$= 4\int_0^a y\,dx$

$= 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{4b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

$= \frac{4b}{a}\left[\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$

$= \frac{4b}{a}\left[\frac{a^2}{2}\sin^{-1}(1) - \frac{a^2}{2}\sin^{-1}(0)\right] = \frac{4ab}{2}.\frac{\pi}{2} = \pi ab$

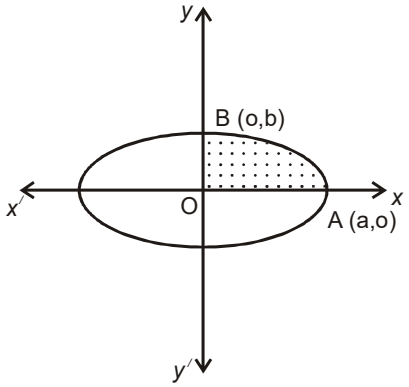


Fig. 4·3

**উদাহৰণ 3 ঃ** অনুকলনৰ সহায়ত $y = \sin x$ বক্র, x- অক্ষই $x = 0$ ৰ পৰা $x = 2\pi$ৰ ভিতৰত আগুৰি থকা অংশৰ কালি নির্ধাৰণ কৰক।

**সমাধান ঃ** চিত্র 3.4 অত $x = 0$ৰ পৰা $x = 2\pi$ অৰ ভিতৰত $y = \sin x$ অৰ লেখ দেখুওৱা হৈছে।

চিত্রৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে $x = 0$ আৰু $x = \pi$ ৰ মাজত বক্রটো $x$-অক্ষৰ ওপৰত থাকে আৰু কোটিবোৰ ধনাত্মক। কিন্তু $x = \pi$ আৰু $x = 2\pi$ ৰ মাজত বক্রটো $x$-অক্ষৰ তলত থাকে আৰু সেইবাবে কোটিবোৰ ঋণাত্মক। গতিকে সম্পূর্ণ কালি উলিয়াবলৈ আমি পৰম মান লওঁ।

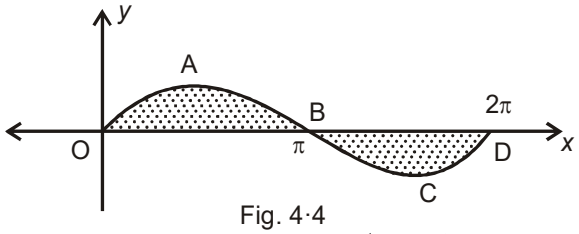


Fig. 4·4

$\therefore$ নির্ণেয় কালি

= |কালি OAB|+|কালি BCD|

$= \left|\int_0^{\pi} \sin x\,dx\right| + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx\right|$

$= \left|\left[-\cos x\right]_0^{\pi}\right| + \left|\left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}\right| \quad = |2| + |-2| \quad = 2 + 2 = 4$

**উদাহৰণ 4 ঃ** প্রমাণ কৰক যে এটা অধিবৃত্তক কোনো দ্বিকোটিয়ে কটা অংশৰ কালি, দ্বিকোটি আৰু শীর্ষ বিন্দুৰ পৰা ইয়াৰ দূৰত্বৰ দ্বাৰা গঠিত আয়ত ক্ষেত্রটোৰ কালিৰ দুই-তৃতীয়াংশ।

**সমাধান ঃ** ধৰা হ'ল অধিবৃত্তটো $y^2 = 4ax$ আৰু দ্বিকোটি হ'ল $x = h$. ইয়াত ACB দ্বিকোটি।

গতিকে দ্বিকোটিয়ে আগুৰা অধিবৃত্তটোৰ অংশটোৰ কালি = AOBCA ৰ কালি
= 2 x AOC অংশৰ কালি (যিহেতু অধিবৃত্তটো $x$ অক্ষৰ সাপেক্ষে প্রতিসম)

$$= 2\int_{x=0}^{x=h} y\,dx$$

$$= 2\int_0^h \sqrt{4ax}\,dx$$

$$= \sqrt{a}\left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^h = \frac{8}{3}\sqrt{a}.h^{3/2} \quad \text{.....(i)}$$

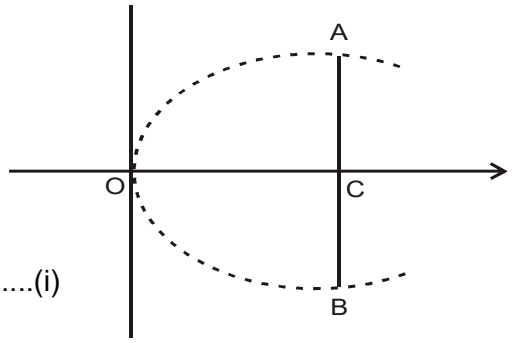


Fig. 4·5

শীর্ষ বিন্দুৰ পৰা দ্বিকোটি ACB ৰ দূৰত্ব $= OC = h$.

ধৰা হ'ল $AC = y_1$

$\therefore$ A ৰ স্থানাংক $(h, y_1)$.

যিহেতু A বিন্দুটো অধিবৃত্তটোৰ আছে, গতিকে ইয়াৰ স্থানাংকই $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তৰ সমীকৰণ সিদ্ধ কৰিব।

$\therefore y_1^{\,2} = 4ah \quad \Rightarrow y_1 = 2\sqrt{ah}$

$\therefore$ দ্বিকোটি ACBৰ দৈর্ঘ্য $= 2y_1 = 4\sqrt{ah}$

$\therefore$ $\frac{2}{3}\times$দ্বিকোটি ACB আৰু OC দূৰত্বই গঠন কৰা আয়তক্ষেত্রৰ কালি

$$= \frac{2}{3} \times AB \times OC$$

$$= \frac{2}{3} \times 4\sqrt{ah} \times h = \frac{8}{3}\sqrt{a}h^{3/2} \quad \text{... ... ...(ii)}$$

দেখা গ'ল যে (i) আৰু (ii) একে।

## ৩.৩.১ দুটা প্রদত্ত বক্র আৰু দুটা প্রদত্ত কোটিৰ মাজৰ অংশৰ কালি

ধৰা হ'ল AB আৰু CD বক্র দুটাৰ সমীকৰণ ক্রমে $y = f_1(x)$ আৰু $y = f_2(x)$.

ধৰা হ'ল দ্বিকোটি দুটা $x = a$ আৰু $x = b$ আৰু ইয়াক ক্রমে $P_1M_1$ আৰু $P_2M_2$ৰ দ্বাৰা বুজোৱা হৈছে।

$\therefore OM_1 = a$ and $OM_2 = b$.

$y = f_1(x)$ আৰু $y = f_2(x)$ বক্র আৰু $x = a$ আৰু $x = b$ দ্বিকোটি দুডালে আগুৰা অংশৰ কালি চিত্র 4.6 অত দেখুওৱা হৈছে।

$\therefore$ নির্ণেয় কালি

= $P_1M_1M_2P_2$ৰ কালি –
$Q_1M_1M_2Q_2$ৰ কালি

$$= \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx$$

$$= \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$$

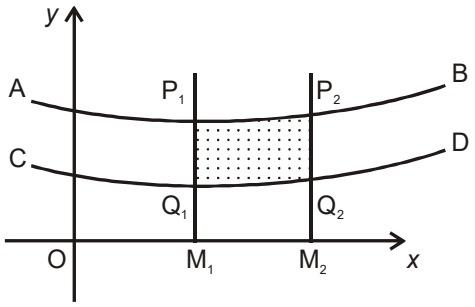


Fig. 4·6

**উদাহৰণ 5 ঃ** $y^2 = 4ax$ বক্ৰ আৰু $y = mx$ এ আগুৰা অংশৰ কালি নির্ণয় কৰক।

**সমাধান ঃ** এই ক্ষেত্ৰত $y^2 = 4ax$ এটা অধিবৃত্ত আৰু ইয়াৰ শীৰ্ষবিন্দু (0, 0). আকৌ $y = mx$ হ'ল এডাল ৰেখা। ই মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যায়। যদি ই $x$-অক্ষৰ ধনাত্মক দিশৰ লগত $\theta$ কোণ কৰে, তেনেহ'লে $\tan\theta = m$.

$y^2 = 4ax$ আৰু $y = mx$ সমাধান কৰি আমি পাওঁ $(mx)^2 = 4ax$

$$\Rightarrow x(xm^2 - 4a) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ বা } x = \frac{4a}{m^2}$$

$\therefore$ বক্ৰ দুটাই $x = 0$ আৰু $x = \frac{4a}{m^2}$ বিন্দুত কাটে।

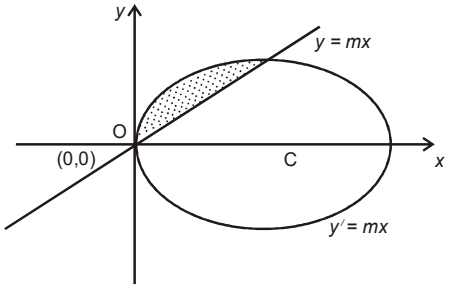


Fig. 4·7

দুয়োটা বক্ৰই আগুৰা অংশ চিত্ৰত দেখুওৱা হৈছে।

$\therefore$ নির্ণেয় কালি নির্ধাৰণ কৰিব লাগে।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় কালি } = \int_0^{4a/m^2} \left(\sqrt{4ax} - mx\right)dx$$

$$= \left[2\sqrt{a}\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^{4a/m^2} - \left[m\frac{1}{2}x^2\right]_0^{4a/m^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{a}}{3}\left(\frac{4a}{m^2}\right)^{3/2} - \frac{m}{2}\left(\frac{4a}{m^2}\right)^2$$

$$= \frac{32a^2}{3m^3} - \frac{8a^2}{m^3} = \frac{8a^2}{3m^3}$$

**উদাহৰণ 6 ঃ** $x^2 + y^2 = 1$ আৰু $(x-1)^2 + y^2 = 1$ বৃত্ত দুটাই আগুৰা অংশৰ কালি নির্ণয় কৰক।

**সমাধান ঃ** $x^2 + y^2 = 1$ বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ O (0, 0) আৰু ব্যাসার্ধ 1.

দ্বিতীয় বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ B (1, 0) আৰু ব্যাসার্ধ (BO) = 1.

বৃত্ত দুটাই $A\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ আৰু $E\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ বিন্দুত কটাকটি কৰে।

নির্ণেয় কালি হ'ল OEBAO অংশৰ কালি (পাতল অংশ আৰু ডাঠ অংশ)। ইয়াৰে ডাঠ অংশ (প্ৰথম চোকত থকা অংশ), পাতল অংশৰ (চতুৰ্থ চোকত থকা অংশ) সৈতে প্ৰতিসম।

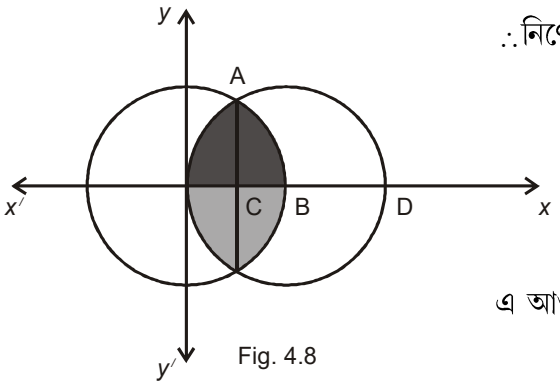


Fig. 4.8

$\therefore$ নির্ণেয় কালি

= 2(OCBA অংশৰ কালি)

= 2(OCBA) অংশৰ কালি + CBAC অংশৰ কালি) ... ... ...(i)

OCAO অংশৰ কালি

= $(x-1)^2+y^2=1$ বক্ৰ, $x$-অক্ষ, আৰু কোটিদ্বয় $x=0$ আৰু $x=½$ এ আগুৰা অংশৰ কালি

$$=\int_0^{½}\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$$

CBAC অংশৰ কালি

= $x^2+y^2=1$ বক্ৰ $x$-অক্ষ আৰু কোটিদ্বয় $x=½$ আৰু $x=1$ এ আগুৰা অংশৰ কালি

$$=\int_{½}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$\therefore$ (i) অৰ পৰা, অংশটোৰ সম্পূৰ্ণ কালি

$$=2\left[\int_0^{½}\sqrt{1-(x-1)^2}\,dx+\int_{½}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\right]$$

$$=2\left[\frac{(x-1)\sqrt{1-(x-1)^2}}{2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{1}\right)\right]_0^{½}$$

$$+2\left[\frac{x\sqrt{1-x^2}}{2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}(x)\right]_{½}^{1}$$

$$=\left\{-\frac{\sqrt{3}}{4}+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)-\sin^{-1}(-1)\right\}$$

$$+\left\{\sin^{-1}(1)-\frac{\sqrt{3}}{4}-\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$= \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{4} + \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) - \sin^{-1}(-1) \right\}$$
$$+ \left\{ \sin^{-1}(1) - \frac{\sqrt{3}}{4} - \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \right\}$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$



### অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

প্রশ্ন নং 1ঃ $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্ত আৰু ইয়াৰ নাভিলম্বই আওৰা অংশৰ কালি নির্ধাৰণ কৰক।

প্রশ্ন নং 2 ঃ $x^2 + y^2 = 25$ বৃত্তৰ ওপৰৰ অংশ, $x$-অক্ষ আৰু $x = -3$, $x = 4$ কোটিদ্বয়ে আওৰা অংশৰ কালি নির্ধাৰণ কৰক।

প্রশ্ন নং 3 ঃ $x = y^3$, $y$-অক্ষ আৰু $y = 3$, $y = 6$ ৰেখাই আওৰা অংশৰ কালি নির্ধাৰণ কৰক।

প্রশ্ন নং 4 ঃ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তৰ কালি নির্ধাৰণ কৰক।

প্রশ্ন নং 5 ঃ $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তৰ কালি নির্ধাৰণ কৰক।

প্রশ্ন নং 6 ঃ $y^2 = 4x$ বক্র আৰু $y = x$ ৰেখাই আওৰি থকা অংশৰ কালি নির্ধাৰণ কৰক।

প্রশ্ন নং 7 ঃ $y^2 = 4ax$ আৰু $x^2 = 4by$ অধিবৃত্ত দুটাই আওৰি থকা অংশৰ কালি নির্ধাৰণ কৰক।

প্রশ্ন নং 8 ঃ $4y = 3x^2$ অধিবৃত্ত আৰু $3x - 2y + 12 = 0$ ৰেখাই আওৰি থকা অংশৰ কালি নির্ধাৰণ কৰক।

প্রশ্ন নং 9 ঃ বৃত্ত $x^2 + y^2 = 16a^2$ আৰু অধিবৃত্ত $y^2 = 6ax$ অৰ উমৈহতীয়া অংশৰ কালি নির্ধাৰণ কৰক।

প্রশ্ন নং 10 ঃ দেখুওৱাক যে $y^2 = 16x$ বক্র আৰু $x = 4$ ৰেখাই আওৰা অংশৰ কালি $\frac{128}{3}$ বর্গ একক।

প্রশ্ন নং 11 ঃ $x^2 = 4y$ আৰু $x - 4y + 2 = 0$. ৰেখাই আগুৰা অংশৰ কালি নির্ধাৰণ কৰক।

প্রশ্ন নং 12 ঃ দেখুওৱাক যে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্ত আৰু $y = 2a$ আৰু $x = 0$ ৰেখাই আগুৰা অংশৰ কালি $\frac{2}{3}a^2$ বর্গ একক।

প্রশ্ন নং 13 ঃ $y = x^3$ বক্র আৰু $y = x$ ৰেখাই আগুৰা অংশৰ কালি নির্ধাৰণ কৰক।

প্রশ্ন নং 14 ঃ $x^2 = 16y$, $y = 1$, $y = 4$ আৰু $y$-অক্ষই আগুৰা প্রথম চোকৰ অংশৰ কালি নির্ধাৰণ কৰক।

প্রশ্ন নং 15 ঃ $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্ত আৰু $x^2 + 4y^2 = 9$ উপবৃত্তৰ উমৈহতীয়া অংশৰ কালি নির্ধাৰণ কৰক।

প্রশ্ন নং 16 ঃ দেখুওৱাক যে $x^2 + y^2 = (8a)^2$ বৃত্তক $y^2 = 12ax$ অধিবৃত্তই দুভাগ কৰা অংশ দুটাৰ ডাঙৰ অংশটোৰ কালি $\frac{16a^2}{3}\left(8\pi - \sqrt{3}\right)$.

প্রশ্ন নং 17 ঃ দেখুওৱাক যে $x^2 - 4ax + y^2 = 0$ আৰু $y^2 = ax$ বক্র দুটাৰ উমৈহতীয়া অংশৰ কালি $\left(3\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi\right)a^2$.

প্রশ্ন নং 18 ঃ $x^2 - 8x + y^2 = 0$ বৃত্ত আৰু $4x = y^2$ অধিবৃত্তই আগুৰি থকা $x$-অক্ষৰ ওপৰৰ অংশৰ কালি নির্ধাৰণ কৰক।



## ৪.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- $y = f(x)$ বক্র, $x = a$ আৰু $x = b$ কোটিদ্বয়, আৰু $x$-অক্ষই আগুৰা অংশৰ কালি $\int_a^b f(x)dx$ or $\int_a^b ydx$.
- $x = f(y)$ বক্র, $y$-অক্ষ, $y = a$ আৰু $y = b$ ভুজদ্বয়ে আগুৰা অংশৰ কালি $\int_a^b xdy$ of $\int_a^b f(y)dy$ .
- $y = f_1(x)$ আৰু $y = f_2(x)$ বক্র দুটা, আৰু $x = a$ আৰু $x = b$ কোটি দুটাই আগুৰা অংশৰ কালি $\int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$ .

- $y = f(x)$ বক্রৰ $x = a$ আৰু $x = b$ বিন্দু দুটাৰ মাজত থকা চাপৰ দৈর্ঘ্য $S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx,\ b > a$.



## ৪.৫ অধিক জানিবলৈ


1) *Integral Calculus,* Kishan, Hari, Atlantic Publishers & Distributors. New Delhi -110027.

2) *Integral Calculus*, Dhami, H.S. New age International Publishers, New Delhi - 110002.

3) *Text book of Integral Calculus*, Sharma, A.K. Discovery Publishing House, New Delhi -110002.




## ৪.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

**১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ** অধিবৃত্তৰ অক্ষৰ ওপৰত নাভিলম্ব লম্ব আৰু ই নাভি S(a, 0) ৰ মাজেৰে যায়। অধিবৃত্তটো x-অক্ষ সাপেক্ষে প্রতিসম। বক্রটোৰ ওপৰৰ অংশৰ বাবে সীমা $x = 0$ ৰপৰা $x = a$.

উলিয়াবলগীয়া কালি AOBSA = 2 x কালি AOSA

$$= 2\int_0^a y\,dx$$

$$= 2\int_0^a 2\sqrt{ax}\,dx$$

$$= 4\sqrt{a}\,\frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

$$= \frac{8}{3}\sqrt{a}a^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{8}{3}a^2.$$

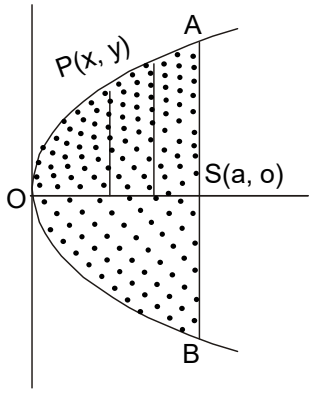



Fig. 4.9

**২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ** নিজে চেষ্টা কৰক।

**৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ** নিজে চেষ্টা কৰক।

**৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ** কালি BPAO $= \int_0^a y dx$

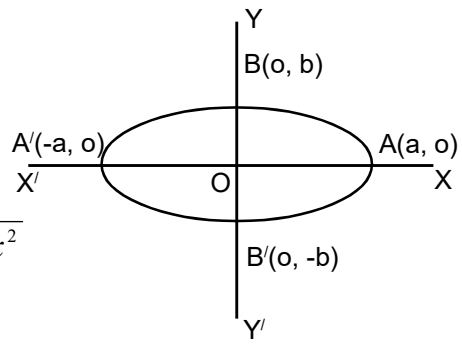


Fig. 4.10

কিন্তু $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ বা $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

$$= \int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{b}{a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{b}{a}\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$= \frac{b}{a}.\frac{a^2}{2}\sin^{-1}1$$

$$= \frac{1}{2}ab.\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4}ab$$

$\therefore$ উপবৃত্তটোৰ মুঠ কালি $= 4\times\frac{\pi}{4}ab = \pi ab$.

**৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ** OAB অংশৰ কালি $= \int_0^a y dx$

$$= \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx \qquad \left(y^2 = a^2 - x^2\right)$$

[$y=+\sqrt{a^2-x^2}$, প্রথম আৰু দ্বিতীয় চোকত $y$ ধনাত্মক]

$$= \left[\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{a}\right]_0^a$$

$$= \frac{a^2}{2}.\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4}a^2$$

$\therefore$ বৃত্তটোৰ কালি $= 4\times\frac{\pi}{4}a^2 = \pi a^2$.

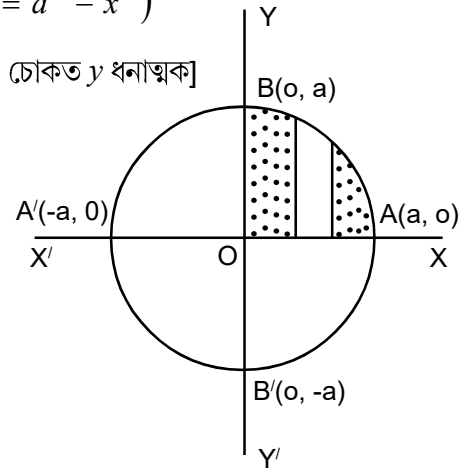


Fig. 4.11

**৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ** নিজে চেষ্টা কৰক।

**৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ** প্ৰদত্ত বক্ৰ দুটাৰ সমীকৰণ সমাধান কৰি আমি পাওঁ

$$y^4 = 16a^2(4by) = 64a^2by$$

$$\therefore y(y^3 - 64a^2b) = 0$$

$$\Rightarrow y = 0, 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}$$

যেতিয়া $y = 0, x = 0$ আৰু যেতিয়া $y = 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}, x = 4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}$.

গতিকে প্ৰদত্ত বক্ৰ দুটাৰ ছেদ বিন্দুৰ স্থানাংক O(0, 0) আৰু

$$A\left(4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}, 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}\right).$$

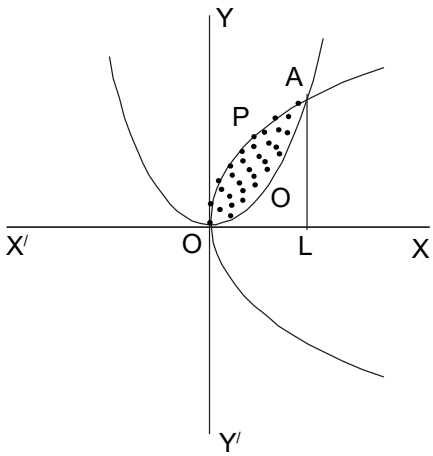


Fig. 4.12

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া কালি = OPAL কালি — OQAL কালি

$$= \int_0^{4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}} y\,dx \text{ , } (y^2 = 4ax \text{ বক্ৰৰ পৰা}) - \int_0^{4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}} y\,dx \text{ } (x^2 = 4by \text{ বক্ৰৰ পৰা})$$

$$= \int_0^{4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}} \sqrt{4ax}\,dx - \int_0^{4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}} \left(\frac{x^2}{4b}\right)dx$$

$$= 2\sqrt{a}\left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^{4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}} - \frac{1}{4b}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{4a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}$$

$$= 2\sqrt{a}\left[8\sqrt{a}.b\right] - \frac{1}{12b}\left(64ab^2\right)$$

$$= \frac{32}{3}ab - \frac{16}{3}ab$$

$$= \frac{16}{3}ab.$$

**৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ** নিজে চেষ্টা কৰক।

**৯ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ** সমীকৰণ দুটা সমাধান কৰি আমি পাওঁ $x = 2a$, $y = \pm 2\sqrt{3}a$

উলিয়াবলগীয়া কালি = 2 কালি OPR + কালি RAP

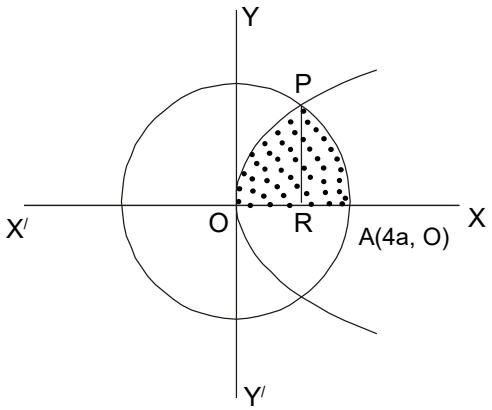



Fig. 4.13

$$= 2\int_0^{2a}\sqrt{6ax}dx + 2\int_{2a}^{4a}\sqrt{(4a)^2 - x^2}\,dx$$

$$= 2\sqrt{6a}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{2a} + 2\left[\frac{x}{2}\sqrt{16a^2 - x^2} + \frac{16a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x}{4a}\right]_{2a}^{4a}$$

$$= 2\sqrt{6a}.(2a)^{\frac{3}{2}} + 2\left[8a^2.\frac{\pi}{2} - a.2\sqrt{3}a - 8a^2\frac{\pi}{6}\right]$$

$$= \frac{4a^2}{3}\left(4\pi + \sqrt{3}\right)$$

**১০ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ** নিজে চেষ্টা কৰক।

**১১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ** প্ৰদত্ত বক্ৰ দুটাৰ সমীকৰণ

$$x^2 = 4y \quad \text{... (1)}$$

আৰু $x = 4y - 2$ ...(2)

(1) সমীকৰণে এটা অধিবৃত্ত বুজায়। ইয়াৰ শীৰ্ষবিন্দু মূল বিন্দু আৰু অক্ষ হ'ল y-অক্ষৰ ধনাত্মক দিশ। (2) সমীকৰণে এডাল সৰল ৰেখা বুজায়। ই অক্ষদ্বয়ক (-2, 0) আৰু $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ বিন্দুত কাটে।

সমীকৰণ (1) আৰু (2) সমাধান কৰি অধিবৃত্ত আৰু ৰেখাডালৰ ছেদ বিন্দুৰ স্থানাংক (2,1) আৰু $\left(-1, \frac{1}{4}\right)$ পোৱা গ'ল।

উলিয়াবলগীয়া কালি $= \int_{-1}^{2}(y_2 - y_1)dx$

$= \int_{-1}^{2}\left(\frac{x+2}{4}-\frac{x^2}{4}\right)dx$ [ $P(x, y_2)$ আৰু $Q(x, y_1)$ ক্ৰমে (2) আৰু (1)অত আছে,

$\therefore\ y_2 = \frac{x+2}{4}$ আৰু $y_1 = \frac{x^2}{4}$]

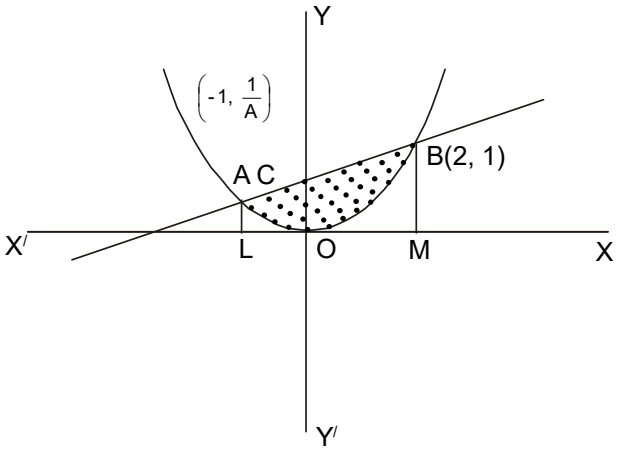


Fig. 4.14

$= \left[\frac{x^2}{8}+\frac{1}{2}x-\frac{x^3}{12}\right]_{-1}^{2}$

$= \left(\frac{4}{8}+\frac{2}{2}-\frac{8}{12}\right)-\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{12}\right)$

$= \frac{9}{8}$ বর্গ একক

**১২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** $y^2 = 4ax$ সমীকৰণে এটা অধিবৃত্তৰ সমীকৰণ বুজায়। ইয়াৰ শীৰ্ষবিন্দু (0, 0) আৰু অক্ষ হ'ল x-অক্ষ। $y = 2a$ এ x-অক্ষৰ পৰা 2a দূৰত্বত x-অক্ষ সমান্তৰাল এডাল ৰেখা বুজায়।

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া কালি $= \int_0^{2a} x\,dy$

$= \int_0^{2a} \frac{y^2}{4a}\,dy$

$= \frac{1}{4a}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{2a}$

$= \frac{1}{4a}\left[\frac{8a^3}{3}-0\right]$

$= \frac{2a^2}{3}$ বর্গ একক

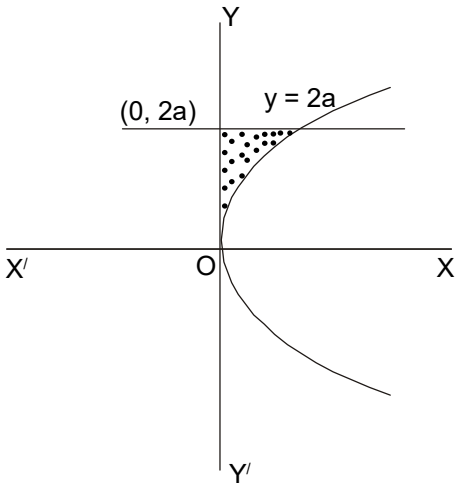


Fig. 4.15

**১৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** প্ৰদত্ত বক্ৰ দুটাৰ সমীকৰণ হ'ল $y = x$ ... (1)

আৰু $y = x^3$ ... (2)

(1) আৰু (2) সমাধান কৰি আমি পাওঁ যে বক্ৰ দুটাই O(0, 0), A(1,1) আৰু B(-1,-1) বিন্দু তিনিটাত কটাকটি কৰে।

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া কালি = BCOB কালি + ODAO কালি

BCOB কালি $= \left|\int_{-1}^{0}(y_4 - y_3)dx\right|$

$= \left| \int_{-1}^{0} (x - x^3) dx \right|$ [$\because R(x, y_3)$ আৰু $S(x, y_4)$ বিন্দু দুটা ক্রমে (2) আৰু (1) অত আছে।]

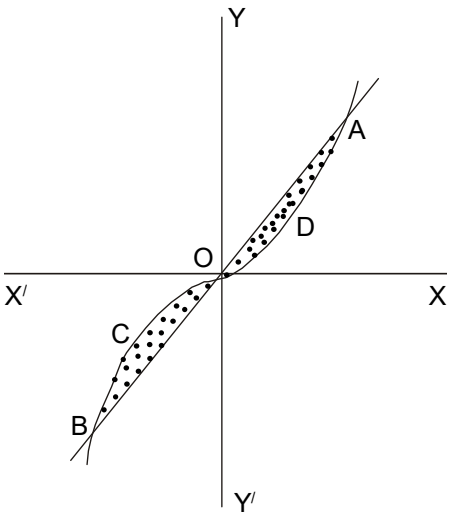


Fig. 4.16

ODAO কালি $= \int_{0}^{1} (y_2 - y_1) dx$

$= \int_{0}^{1} (x - x^3) dx$ [$\because P(x, y_1)$ আৰু $Q(x, y_2)$ বিন্দু দুটা ক্রমে (2) আৰু (1)অত আছে।]

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া কালি $= \left| \int_{-1}^{0} (x - x^3) dx \right| + \int_{0}^{1} (x - x^3) dx$

$$= \left| \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{-1}^{0} \right| + \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{0}^{1}$$

$$= \left| -\left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) \right| + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{2}$$ বর্গ একক

**১৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ** নিজে চেষ্টা কৰক।

**১৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ** বৃত্তটোৰ সমীকৰণ $x^2 + y^2 = 4$ ... (1)

আৰু উপবৃত্তটোৰ কালি $x^2 + 4y^2 = 9$ ... (2)

(1) আৰু (2) দুয়োটা বক্রই উভয় অক্ষ সাপেক্ষে প্রতিসম।

x অৰ বাবে (1) আৰু (2) সমাধান কৰি আমি পাওঁ

$x^2 + 4(4 - x^2) = 9$ or $3x^2 = 7$ or $x^2 = \frac{7}{3}$.

$\therefore$ প্রথম চোকত থকা ছেদ বিন্দু Pৰ x-স্থানাংক $\sqrt{\frac{7}{3}}$. $x^2 + y^2 = 4$ সমীকৰণত $y = 0$ বহুৱাই, আমি পাওঁ $x = 2$, C ত।

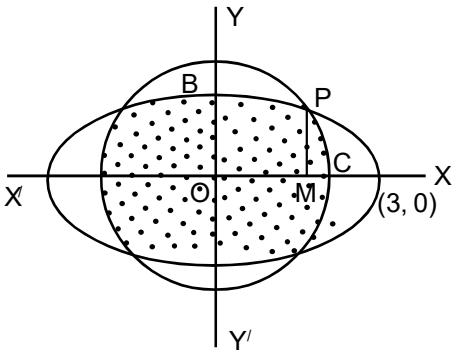


Fig. 4.17

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া কালি = 4 (প্রথম চোকত থকা উমৈহতীয়া কালি)

= 4 OCPB কালি

= 4[OBPM কালি + CPM কালি]

$$= 4\left[ \int_{0}^{\frac{7}{\sqrt{3}}} y dx, \quad + \int_{\frac{7}{\sqrt{3}}}^{2} y dx, \right]$$

$$= 4\left[\int_0^{\frac{7}{\sqrt{3}}} \frac{1}{2}\sqrt{9-x^2}\,dx + \int_{\frac{7}{\sqrt{3}}}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx\right]$$

$$= 2\left[\frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + \frac{9}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)\right]_0^{\frac{7}{\sqrt{3}}} + 4\left[\frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{\frac{7}{\sqrt{3}}}^{2}$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}\sqrt{\frac{20}{3}} + \frac{9}{2}\sin^{-1}\left\{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}\right\}\right] + 4\left[2\sin^{-1}(1) - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}\sqrt{\frac{5}{3}} - 2\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)\right]$$

$$= \frac{2\sqrt{35}}{3} + 9\sin^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} + 4\pi - \frac{2}{3}\sqrt{35} - 8\sin^{-1}\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$$

$$= 4\pi + 9\sin^{-1}\frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} - 8\sin^{-1}\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}$$

**১৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** $x^2 + y^2 = 64a^2$ এটা বৃত্ত। ইয়াৰ কেন্দ্ৰ (0, 0) আৰু ব্যাসার্ধ = 8a, $y^2 = 12ax$ এটা অধিবৃত্ত। ইয়াৰ শীৰ্ষবিন্দু (0, 0) আৰু নাভি লম্ব। 12a. দুয়োটা বক্রই x-অক্ষ সাপেক্ষে প্ৰতিসম। দুয়োটা সমীকৰণ সমাধান কৰি, উমৈহতীয়া বিন্দু P $\left(4a, 4a\sqrt{3}\right)$. পোৱা গ'ল। P বিন্দুৰ পৰা Y অক্ষৰ ওপৰত PM লম্ব টনা হ'ল।

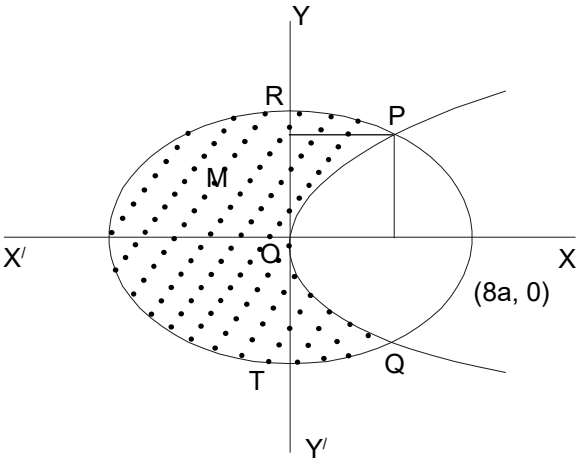



Fig. 4.18

বৃত্তটোৰ বৃহত্তৰ অংশৰ উলিয়াবলগীয়া কালি = PRSTQOP অংশৰ কালি

= RST অর্ধবৃত্তৰ কালি + 2 x OPR অৰ কালি

$= \frac{1}{2}.\pi.(8a)^2$ + 2[OPM অৰ কালি + MPR অৰ কালি ]

$= \frac{1}{2}.\pi.(8a)^2 + 2\int_0^{\frac{4a}{\sqrt{3}}} xdy,$ $y^2 = 12ax + 2\int_{\frac{4a}{\sqrt{3}}}^{8a} xdy,$ $x^2 + y^2 = 64a^2$

$$= \frac{1}{2}.\pi.(8a)^2 + 2\int_0^{\frac{4a}{\sqrt{3}}} \frac{y^2}{12a}dy + 2\int_{\frac{4a}{\sqrt{3}}}^{8a} \sqrt{64a^2 - y^2}\,dy$$

$$= 32\pi a^2 + \frac{1}{6a}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\frac{4a}{\sqrt{3}}} + 2\left[\frac{1}{2}y\sqrt{64a^2 - y^2} + \frac{64a^2}{2}\sin^{-1}\frac{y}{8a}\right]_{\frac{4a}{\sqrt{3}}}^{8a}$$

$$= 32\pi a^2 + \frac{1}{6a}\left[\frac{64\times 3\sqrt{3}a^3}{3}\right] + 2\left[\left\{0 - 8a^2\sqrt{2}\right\} + 32a^2\left\{\sin^{-1}1 - \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\right]$$

$$= 32\pi a^2 + \frac{32\sqrt{3}a^3}{3} - 16a^2\sqrt{3} + \frac{32}{3}a^2\pi$$

$$= \frac{128}{3}\pi a^2 - \frac{16}{3}a^2\sqrt{3}$$

$$= \frac{16}{3}a^2\left(8\pi - \sqrt{3}\right).$$

**১৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** $y^2 = ax$ এটা অধিবৃত্ত। ইয়াৰ শীৰ্ষ বিন্দু হ'ল মূল বিন্দু, অক্ষ হ'ল x-অক্ষ আৰু নাভিলম্ব a, $x^2 - 4ax + y^2 = 0$ এটা বৃত্ত। ইয়াৰ কেন্দ্ৰ (2a, 0) আৰু ব্যাসাৰ্ধ 2a.

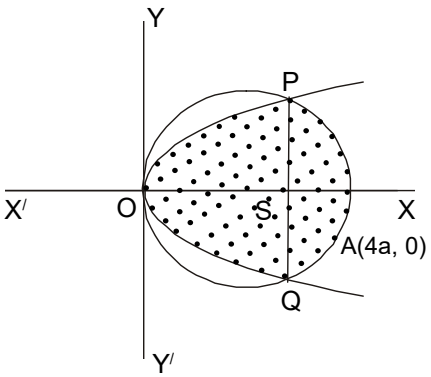


Fig. 4.19

দুয়োটা বক্রই x-অক্ষ সাপেক্ষে প্ৰতিসম।

$x$ অৰ বাবে দুয়োটা সমীকৰণ সমাধান কৰি আমি পাওঁ

$x^2 + ax = 4ax$ বা $x^2 - 3ax = 0$ বা $x(x-3a) = 0$

$\therefore x = 0, 3a$

গতিকে $x = 0$ আৰু $x = 3a$ বিন্দু দুটাত বক্র দুটাই পৰস্পৰ কটাকটি কৰে।

আকৌ A বিন্দুটো হ'ল $(4a, 0)$.

অধিবৃত্ত আৰু বৃত্তৰ উমৈহতীয়া অংশৰ কালি (অর্থাৎ বোলোৱা অংশ)

= 2[OPS কালি + PSA কালি]

$$= 2\left[\int_0^{3a} y\,dx, \qquad y^2 = ax + \int_{3a}^{4a} y\,dx, \qquad x^2 + y^2 = 4ax\right]$$

$$= 2\left[\int_0^{3a} \sqrt{ax}\,dx + \int_{3a}^{4a} \sqrt{4ax - x^2}\,dx\right]$$

$$= 2\sqrt{a}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{3a} + 2\left[\frac{1}{2}(x-2a)\sqrt{\left\{4a^2 - (x-2a)^2\right\}} + \frac{4a^2}{2}\sin^{-1}\frac{x-2a}{2a}\right]_{3a}^{4a}$$

$$= 4a^2\sqrt{3} + 2\left[\left\{0 - \frac{1}{2}a\sqrt{3}.a\right\} + 2a^2\left\{\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}\right]$$

$$= 4\sqrt{3}a^2 - a^2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi a^2$$

$$= 3\sqrt{3}a^2 + \frac{4}{3}\pi a^2$$

$$= a^2\left(3\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi\right).$$

**১৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ** নিজে চেষ্টা কৰক।



## ৪.৭ আৰ্হি প্ৰশ্ন

**প্ৰশ্ন ১ ঃ** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তটোৰ উপ মুখ্য অক্ষ আৰু উপ গৌণ অক্ষৰ মাজত থকা চোকটোৰ কালি নিৰ্ণয় কৰক।

**প্ৰশ্ন ২ ঃ** $y^2 = ax$ অধিবৃত্ত আৰু $x^2 + y^2 = 2ax$ বৃত্তই আগুৰা x-অক্ষৰ ওপৰৰ অংশৰ কালি নিৰ্ণয় কৰক।

**প্ৰশ্ন ৩ ঃ** $y^2 = ax$ আৰু $x^2 + y^2 = 4ax$ অৰ উমৈহতীয়া অংশৰ কালি নিৰ্ণয় কৰক।

**প্ৰশ্ন ৪ ঃ** $y^2 = 4ax$ আৰু $x^2 = 4ay$ অৰ উমৈহতীয়া অংশৰ কালি নিৰ্ণয় কৰক।

**প্ৰশ্ন ৫ ঃ** $y^2 = 8x$ অধিবৃত্ত আৰু $x = 2$ ৰেখাডালৰ মাজৰ অংশৰ কালি নিৰ্ণয় কৰক।

*** ***** ***