অধ্যায় ৭ ঃ অৱকল সমীকৰণ ঃ প্ৰাথমিক ধাৰণা (DIFFERENTIAL EQUATION : FUNDAMENTAL CONCEPTS)

অধ্যায় গাঁথনি

7.1 উদ্দেশ্য
7.2 পৰিচয়
7.3 সংজ্ঞা
7.4 সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণৰ ক্ৰম আৰু মাত্ৰা
7.5 ৰৈখিক আৰু অৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ
7.6 অৱকল সমীকৰণৰ গঠন
7.7 অৱকল সমীকৰণৰ সমাধান
7.8 অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
7.9 অধিক জানিবলৈ
7.10 অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান
7.11 আৰ্হি প্ৰশ্ন

৭.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- অৱকল সমীকৰণৰ সংজ্ঞা জানিব পাৰিব
- অৱকল সমীকৰণৰ ক্ৰম আৰু মাত্ৰা জানিব পাৰিব
- ৰৈখিক আৰু অৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰিব পাৰিব
- অৱকল সমীকৰণৰ সমাধান জানিব পাৰিব।

৭.২ পৰিচয়

অৱকল সমীকৰণে বিজ্ঞান, অভিযান্ত্ৰিক, অৰ্থবিজ্ঞান, বাণিজ্য আৰু সমাজবিজ্ঞানত এক গুৰুত্বপূৰ্ণ ভূমিকা পালন কৰে। অৱকল সমীকৰণ জানিবা গণিত আৰু বিজ্ঞানৰ মাজৰ এখন সাঁকো। বহুতো ভৌতিক সমস্যাক গাণিতিক ৰূপত প্ৰকাশ কৰিলে ই অৱকল সমীকৰণৰ ৰূপ লয়। বিভিন্ন ধৰণৰ প্ৰয়োগত অৱকল সমীকৰণৰ উদ্ভৱ হয়— পদাৰ্থবিজ্ঞানত, ৰসায়ন বিজ্ঞানত, প্ৰাণীবিজ্ঞানত, নৃতত্ত্বত, ভূবিজ্ঞানত, অৰ্থবিজ্ঞানত ইত্যাদি।

এই অধ্যায়ত আমি অৱকল সমীকৰণ সম্পৰ্কীয় মৌলিক ধাৰণা, অৱকল সমীকৰণৰ সাধাৰণ আৰু বিশেষ সমাধান, অৱকল সমীকৰণৰ গঠন সম্পৰ্কে অধ্যয়ন কৰিম।

৭.৩ সংজ্ঞা

অৱকল সমীকৰণ (differential equation) হ'ল স্বতন্ত্ৰ চলক, পৰতন্ত্ৰ চলক আৰু স্বতন্ত্ৰ চলক সাপেক্ষে পৰতন্ত্ৰ চলকৰ অৱকল সহগযুক্ত সমীকৰণ।

অৱকল সমীকৰণ দুই ধৰণৰ ঃ

(a) সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণ

(b) আংশিক অৱকল সমীকৰণ

(a) **সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণ ঃ** যদি এটা অৱকল সমীকৰণত মাত্ৰ এটা স্বতন্ত্ৰ চলক সাপেক্ষে সাধাৰণ অৱকল সহগ থাকে, তেনেহ'লে তেনে অৱকল সমীকৰণক সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণ (ordinary differential equation) বোলে।

(b) **আংশিক অৱকল সমীকৰণ ঃ** যদি এটা অৱকল সমীকৰণত দুটা বা ততোধিক স্বতন্ত্ৰ চলক থাকে আৰু ইহঁতৰ যিকোনো এটা সাপেক্ষে আংশিক অৱকলজ থাকে, তেনেহ'লে তেনে সমীকৰণক আংশিক অৱকল সমীকৰণ (partial differential equation) বোলে।

উদাহৰণ ঃ (i) $\frac{d^2y}{dx^2} + x = xe^{2x}$

(ii) $\frac{d^4x}{dt^4} + \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^5 = e^t$

(iii) $\frac{d^3y}{dx^3} + 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \frac{dy}{dx} = e^x$

(iv) $\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = k\left(\frac{\partial^3 v}{\partial t^3}\right)^2$

(v) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$

(vi) $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

সমীকৰণ (i), (ii) আৰু (iii) হ'ল সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণ। সমীকৰণ (iv), (v) আৰু (vi) হ'ল আংশিক অৱকল সমীকৰণ।

৭.৪ সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণৰ ক্ৰম আৰু মাত্ৰা

এটা সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণৰ ক্ৰম (order) হ'ল সমীকৰণটোত থকা সৰ্বোচ্চ অৱকলজৰ ক্ৰম।

ভগ্নাংশ আৰু মূল চিহ্নৰ পৰা মুক্ত হোৱাৰ পাছত এটা সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণৰ মাত্ৰা (degree) হ'ল সমীকৰণটোত থকা সৰ্বোচ্চ ক্ৰমৰ অৱকলজৰ মাত্ৰা।

টোকা ঃ (1) অৱকল সমীকৰণ এটাক অৱকল সহগৰ বহুপদ হিচাপে লিখাৰ পাছত সৰ্বোচ্চ ক্ৰমৰ ঘাতেই হ'ল অৱকল সমীকৰণৰ মাত্ৰা।

(2) অৱকল সমীকৰণৰ ক্ৰম আৰু মাত্ৰা (যদি সংজ্ঞাৱদ্ধ হয়) সদায় ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

উদাহৰণ ঃ

(i) $\frac{d^3y}{dx^3} - y = \sin x \cos x$ এটা সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণ। ইয়াৰ ক্ৰম 3 আৰু মাত্ৰা 1.

(ii) $\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = r$

মূল চিহ্ন আৰু ভগ্নাংশৰ পৰা মুক্ত কৰি ইয়াক এনেধৰণে লিখিব পাৰি

$\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^3 = r^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2$ ইয়াৰ ক্ৰম 2 আৰু মাত্ৰা 2.

(iii) তলৰ অৱকল সমীকৰণটো লোৱা হ'ল $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$

অৱকল সমীকৰণটোৰ সৰ্বোচ্চ ক্ৰমৰ অৱকলজ হ'ল $\frac{d^2y}{dx^2}$. গতিকে, ইয়াৰ ক্ৰম 2. যিহেতু অৱকল সমীকৰণটো অৱকল সহগৰ বহুপদ হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি, গতিকে ইয়াৰ মাত্ৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ নহয়।

উদাহৰণ 1 ঃ তলৰ প্ৰতিটো অৱকল সমীকৰণৰ ক্ষেত্ৰত ইয়াৰ মাত্ৰাটো, য'ত সম্ভৱ লিখক। প্ৰতিটোৰ ক্ৰমটোৱো লিখক।

(i) $\frac{dy}{dx} + \sin\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0$ (ii) $\frac{d^5y}{dx^5} + e^{\frac{dy}{dx}} + y^2 = 0$

সমাধান ঃ (i) অৱকল সমীকৰণটোত সৰ্বোচ্চ ক্ৰমৰ অৱকলজ হ'ল $\frac{dy}{dx}$. গতিকে, ইয়াৰ ক্ৰম 1. স্পষ্টতঃ অৱকল সমীকৰণটো $\frac{dy}{dx}$ অৰ বহুপদ হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি। গতিকে ইয়াৰ মাত্ৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ নহয়।

(ii) অৱকল সমীকৰণটোত সৰ্বোচ্চ ক্ৰমৰ অৱকলজ হ'ল $\frac{d^5y}{dx^5}$. গতিকে, ইয়াৰ ক্ৰম 5. স্পষ্টতঃ

অৱকল সমীকৰণটো $\frac{dy}{dx}$ অৰ বহুপদ হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি। গতিকে ইয়াৰ মাত্ৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ নহয়।

উদাহৰণ 2 ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণকেইটাৰ ক্ৰম আৰু মাত্ৰা নিৰ্ণয় কৰক।

(i) $\frac{d^3y}{dx^3}+\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+\left(\frac{dy}{dx}\right)^5+y=7$ (ii) $\frac{d^2y}{dx^2}=\left[4+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{4}}$

সমাধান ঃ (i) এই অৱকল সমীকৰণটোৰ সৰ্বোচ্চ অৱকলজৰ ক্ৰম 3. সৰ্বোচ্চ ক্ৰমৰ মাত্ৰা 1.

$\therefore$ ক্ৰম = 3, মাত্ৰা =1

(ii) অৱকল সমীকৰণটো হ'ল $\frac{d^2y}{dx^2}=\left[4+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{4}}$

$$\therefore \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^4=\left[4+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3.$$

$\therefore$ ক্ৰম = 2, মাত্ৰা =4

উদাহৰণ 3 ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰৰ ক্ৰম আৰু মাত্ৰা লিখক।

(i) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-4\left(\frac{dy}{dx}\right)+y=3e^x$ (ii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+7\left(\frac{dy}{dx}\right)^4=3\sin x$

(iii) $\frac{d^2x}{dy^2}+a^2x=0$ (iv) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-3\frac{d^3y}{dx^3}+7\frac{d^2y}{dx^2}+4\left(\frac{dy}{dx}\right)-\log x=0$

(v) $\frac{d^2y}{dx^2}-\sqrt{\frac{dy}{dx}}=0$ (vi) $\sqrt{1+x^2}=\frac{dy}{dx}$.

সমাধান ঃ ক্ৰম আৰু মাত্ৰা যথাক্ৰমে

(i) 1 ; 3 (ii) 2 ; 3 (iii) 2 ; 1

(iv) 3 ; 1 (v) 2 ; 2 (vi) 1 ; 1

মন্তব্য ঃ 1. প্ৰথম ক্ৰম আৰু প্ৰথম ঘাতৰ সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণ $y\frac{dy}{dx}-x=0$ ক এনেধৰণেও লিখিব পাৰি $ydy=xdx$.

2. সেইদৰে, $\cos\theta\frac{dr}{d\theta}+r\sin\theta=0$ অৱকল সমীকৰণটো $\cos\theta dr+r\sin\theta d\theta=0$ ৰ সমতুল্য।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ১

প্ৰশ্ন ঃ অধোলিখিত সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণবোৰৰ ক্ৰম আৰু মাত্ৰা নিৰ্ণয় কৰক।

(i) $\frac{d^2y}{dx^2}+4xy\frac{dy}{dx}=5x$ (ii) $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{1-y^2}{1+x^2}$

(iii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3-x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4=0$ (iv) $\frac{d^3y}{dx^3}-3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+4y^5=0$

(v) $x+\frac{d^2y}{dx^2}=\sqrt{1+\frac{dy}{dx}}$ (vi) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{1/3}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/2}$

(vii) $y=\sqrt{x}\left(\frac{dy}{dx}\right)+k\Big/\left(\frac{dy}{dx}\right)$ (viii) $y=x\left(\frac{dy}{dx}\right)+a\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$

(ix) $dy=(y+\sin x)dx$ (x) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^5+y=x^2$

(xi) $\frac{d^4y}{dx^4}+\sin\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)=0$ (xii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=x\sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

৭.৫ ৰৈখিক আৰু অৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ

এটা অৱকল সমীকৰণৰ অজ্ঞাত ফলন (অৰ্থাৎ পৰতন্ত্ৰ চলক) আৰু ইয়াৰ অৱকলজবোৰ যদি প্ৰথম ঘাতৰ হয় আৰু সমীকৰণটো ইহঁতৰ পূৰণফল মুক্ত হয়, তেনেহ'লে ইয়াক ৰৈখিক (linear) বুলি কোৱা হয়। যিবিলাক সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণ ৰৈখিক নহয়, তাক অৰৈখিক (non linear) বোলা হয়।

উদাহৰণ ঃ

(i) $\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=e^x$ এটা ৰৈখিক সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণ,

(ii) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+y^2=0$ এটা অৰৈখিক সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণ।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

প্ৰশ্ন নং 1 ঃ অধোলিখিত সমীকৰণবোৰ ৰৈখিক নে অৰৈখিক নিৰ্ধাৰণ কৰক আৰু সিহঁতৰ মাত্ৰা লিখক।

(a) $\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}.\frac{dy}{dx}+y=x$

(b) $x\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{d^2y}{dx^2}=e^x$ (c) $\frac{dy}{dx}+y^2=x^2$

৭.৬ অৱকল সমীকৰণৰ গঠন

এটা সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণত $y=\phi(x)$ বহুৰালে যদি ই এটা অভেদ হয়, তেনেহ'লে $y=\phi(x)$, অক সমীকৰণটোৰ এটা সমাধান বুলি কোৱা হয়। $\frac{d^2y}{dx^2}-y=0$ ৰ $y=e^x$ এটা সমাধান। অনায়াসে পৰীক্ষা কৰি চাব পাৰি যে Ae^x, e^{-x}, Be^{-x} আৰু Ae^x+Be^{-x} আদিও সমীকৰণটোৰ সমাধান। শেষৰ সমাধানটোক সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ সমাধান (general solution) বুলি কোৱা হয়, কিয়নো (A, B) ৰ ঠাইত ক্ৰমে (1, 0), (A, 0),(0,1), (0, B) বহুৰাই আগৰ সমাধানবোৰ পাব পাৰি। মন কৰিবলগীয়া যে এটা সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণৰ সাধাৰণ সমাধানত স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱকৰ সংখ্যা সমীকৰণটোৰ মাত্ৰাৰ সমান। সাধাৰণ সমাধানৰ পৰা যিবোৰ সমাধান পোৱা যায় তাক বিশেষ সমাধান (special solution) বোলা হয়। কিছুমান সমাধানত ধ্ৰুৱকো নাথাকে বা বিশেষ সমাধানো নহয়। এনেধৰণৰ সমাধানক অপ্ৰতিম সমাধান (singular solution) বুলি কোৱা হয়। এইদৰে

(i) এটা সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণৰ সমাধানক সাধাৰণ সমাধান বুলি কোৱা হয় যদি ইয়াৰ ধ্ৰুৱকৰ সংখ্যা সমীকৰণটোৰ মাত্ৰাৰ সমান।

(ii) এটা সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণৰ সমাধানক বিশেষ সমাধান বুলি কোৱা হয় যদি ইয়াক সাধাৰণ সমাধানৰ পৰা পাব পাৰি।

(iii) যি সমাধান বিশেষ সমাধান নহয়, বা যি সমাধানত ধ্ৰুৱক পদ নাই, তেনে সমাধানক অপ্ৰতিম সমাধান বোলে।

বিপৰীতক্ৰমে, $y=Ae^x+Be^{-x}$ সাধাৰণ সমাধানৰ পৰা, আমি অৱকল সমীকৰণটো উলিয়াব পাৰোঁ। যিহেতু দুটা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক আছে, আমি দুবাৰ অৱকলন কৰোঁ আৰু দুটা সমীকৰণ পাওঁ।

$\frac{dy}{dx} = Ae^{x} - Be^{-x}$ আৰু $\frac{d^2y}{dx^2} = Ae^{x} + Be^{-x}$

A আৰু B স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক দুটা অপনয়ন কৰি, আমি পাওঁ

$\frac{d^2y}{dx^2} = y$ বা $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$, এইটোৱেই অৱকল সমীকৰণ যাৰ সাধাৰণ সমাধান

$$y = Ae^{x} + Be^{-x}.$$

সাধাৰণ সমাধানৰ পৰা এনেধৰণে সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰা হয়।

উদাহৰণ 1 ঃ $x = a\cos nt + b\sin nt$ ৰ পৰা অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক (a, b স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক)।

সমাধান ঃ দিয়া আছে $x = a\cos nt + b\sin nt$ ... (1)

(1) অক t সাপেক্ষে দুবাৰ অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{dx}{dt} = -an\sin nt + bn\cos nt$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -an^2\cos nt - bn^2\sin nt$$

$$= -n^2(a\cos nt + b\sin nt)$$

$$= -n^2x \quad \text{(1)অৰ পৰা}$$

$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} + n = 0$ য়েই নিৰ্ণেয় সমীকৰণ।

উদাহৰণ 2 ঃ $y = e^{x}(A\cos x + B\sin x)$ সমীকৰণৰ পৰা ধ্ৰুৱক পদ অপনয়ন কৰক আৰু অৱকল সমীকৰণটো গঠন কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে $y = e^{x}(A\cos x + B\sin x)$ .... (1)

(1) অক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{dy}{dx} = e^{x}(A\cos x + B\sin x) + e^{x}(-A\sin x + B\cos x)$$

$$= y + e^{x}(-A\sin x + B\cos x) \quad \text{... (2)}$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + e^{x}(-A\sin x + B\cos x) + e^{-x}(-A\cos x - B\sin x)$$

বা, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} - y - y$, (1) আৰু (2)ৰ পৰা

বা, $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$, এইটোৱেই নিৰ্ণেয় অৱকল সমীকৰণ।

উদাহৰণ 3 ঃ $x^2 + (y-a)^2 = a^2$ অৰ পৰা এটা অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে $x^2+(y-a)^2=a^2$

বা $x^2+y^2-2ya+a^2=a^2$

বা $x^2+y^2-2ya=0$ ... (1)

উভয় পক্ষক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$2x+2y\frac{dy}{dx}-2a\frac{dy}{dx}=0$$

বা $x+y\frac{dy}{dx}-a\frac{dy}{dx}=0$

বা $x+y\frac{dy}{dx}-\frac{x^2+y^2}{2y}\frac{dy}{dx}=0$, (1)অৰ পৰা

বা $2yx+2y^2\frac{dy}{dx}-(x^2+y^2)\frac{dy}{dx}=0$

বা $2yx+(2y^2-x^2-y^2)\frac{dy}{dx}=0$

বা $2xy=(x^2-y^2)\frac{dy}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{2xy}{x^2-y^2}$, এইটোৱেই উলিয়াব লগীয়া অৱকল সমীকৰণ।

উদাহৰণ 4 ঃ তলৰ সম্বন্ধবোৰৰ পৰা অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

(i) $x=a\sin(y+b)$ (ii) $y=ax\cos\left(\frac{n}{x}+b\right)$

(iii) $y=a\left(\sin x+\frac{1}{x}\cos x\right)+b\left(\cos x-\frac{1}{x}\sin x\right)$

(iv) $y=ae^x+be^{3x}+ce^{5x}$

সমাধান ঃ (i) $x=a\sin(y+b)$

y সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{dx}{dy}=a\cos(y+b)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{1}{a}\sec(y+b)$$

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{a}\sec(y+b)\tan(y+b).\frac{dy}{dx}$$

$$\text{বা, } \frac{d^2y}{dx^2} = \tan(y+b)\frac{1}{a}\sec(y+b).\frac{dy}{dx}$$

$$\text{বা, } \frac{d^2y}{dx^2} = \tan(y+b)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\text{বা, } \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{a\sin(y+b)}{a\cos(y+b)}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x}{\frac{dx}{dy}}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

অৰ্থাৎ, $\frac{d^2y}{dx^2} = x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$ য়েই নিৰ্ণেয় অৱকল সমীকৰণ।

(ii) $y = ax\cos\left(\frac{n}{x}+b\right)$

x সাপেক্ষে অকলন কৰি আমি পাওঁ

$$y_1 = a\cos\left(\frac{n}{x}+b\right) + ax.\left(-\sin(\frac{n}{x}+b)\right)(-\frac{n}{x^2})$$

$$= a\cos\left(\frac{n}{x}+b\right) + \frac{an}{x}\sin(\frac{n}{x}+b)$$

বা, $xy_1 = y + an\sin(\frac{n}{x}+b)$

আকৌ x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$y_1 + xy_2 = y_1 + an\cos(\frac{n}{x}+b)\left(-\frac{n}{x^2}\right)$$

বা $xy_2 = -\frac{n^2}{x^3}y$

$\therefore x^4y_2 + n^2y = 0$ য়েই নিৰ্ণেয় অৱকল সমীকৰণ।

(iii) $y = a\left(\sin x + \frac{1}{x}\cos x\right) + b\left(\cos x - \frac{1}{x}\sin x\right)$

$$= a\sin x + b\cos x + \frac{1}{x}(a\cos x - b\sin x) \quad \text{... (1)}$$

(1) অক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$y_1 = a\cos x - b\sin x - \frac{1}{x^2}(a\cos x - b\sin x) + \frac{1}{x}(-a\sin x - b\cos x)$$

বা $xy_1 = x(a\cos x - b\sin x) - \frac{1}{x}(a\cos x - b\sin x) - (a\sin x + b\cos x)$

$= x(a\cos x - b\sin x) - y$

বা $xy_1 + y = x(a\cos x - b\sin x)$ .... (2)

আকৌ (2) ক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$y_1 + xy_2 + y_1 = a\cos x - b\sin x + x(-a\sin x - b\cos x)$

বা $x^2y_2 + 2xy_1 = x(a\cos x - b\sin x) - x^2(a\sin x - b\cos x)$

$= xy_1 + y - x^2\left[y - \frac{1}{x}(a\cos x - b\sin x)\right]$, (1) আৰু (2) ব্যৱহাৰ কৰি

$= xy_1 + y - \left[x^2y - (xy_1 + y)\right]$

বা $x^2y_2 - 2y + x^2y = 0$, এইটোৱেই নিৰ্ণেয় অৱকল সমীকৰণ।

(iv) $y = ae^x + be^{3x} + ce^{5x}$

ইয়াত তিনিটা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক a, b, c আছে।

ক্ৰমাগতভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$y_1 = ae^x + 3be^{3x} + 5ce^{5x}$$

$$y_2 = ae^x + 9be^{3x} + 25ce^{5x}$$

$$y_3 = ae^x + 27be^{3x} + 125ce^{5x}$$

গতিকে, $y_1 - y = 2be^{3x} + 4ce^{5x}$

$$y_2 - y_1 = 6be^{3x} + 20ce^{5x}$$

$$y_3 - y_2 = 18be^{3x} + 100ce^{5x}$$

b আৰু c অপনয়ন কৰি, আমি পাওঁ

$$\begin{vmatrix} y_1 - y & 1 & 1 \\ y_2 - y_1 & 3 & 5 \\ y_3 - y_2 & 9 & 25 \end{vmatrix} = 0$$

বা, $y_3 - 9y_2 + 23y_1 - 15y = 0$ (প্ৰসাৰ কৰি)

এইটোৱেই নিৰ্ণেয় অৱকল সমীকৰণ।

উদাহৰণ 5 ঃ (i) মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা এক সমতলীয় সৰলৰেখা কুলৰ অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

(ii) মূল বিন্দুৰ পৰা এক একক দূৰত্বত থকা সৰল ৰেখা কুলৰ অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

সমাধান ঃ (i) মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা সৰল ৰেখাকুলৰ সমীকৰণ হ'ল $y = mx$

ইয়াত m য়েই একমাত্ৰ স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক।

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{dy}{dx} = m = \frac{y}{x}$$

বা, $x\frac{dy}{dx} - y = 0$ য়েই নিৰ্ণেয় অৱকল সমীকৰণ।

(ii) মূল বিন্দুৰ পৰা এক একক দূৰত্বত থকা সৰল ৰেখাকুলৰ সমীকৰণ হ'ল $x\cos\alpha + y\sin\alpha = 1$.

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\cos\alpha + \frac{dy}{dx}\sin\alpha = 0$$

উপৰিউক্ত সম্বন্ধ দুটাৰ পৰা $\cos\alpha$ অপনয়ন কৰি, আমি পাওঁ

$$\sin\alpha = \frac{1}{\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)}$$

$$\therefore \cos\alpha = -\frac{\frac{dy}{dx}}{\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)}$$

বৰ্গ আৰু যোগ কৰি আমি পাওঁ $1 = \frac{1}{\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2}\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$

বা, $\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1$ এইটোৱেই নিৰ্ণেয় অৱকল সমীকৰণ।

উদাহৰণ 6 ঃ (i) r ব্যাসাৰ্ধৰ বৃত্তকুলৰ,

(ii) কেন্দ্ৰ x- অক্ষত থকা আৰু y-অক্ষক স্পৰ্শ কৰা বৃত্তকুলৰ অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

সমাধান ঃ (i) কেন্দ্ৰ (a, b) আৰু ব্যাসাৰ্ধ r হ'লে বৃত্তকুলৰ সমীকৰণ হ'ল $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ ... (1)

ইয়াত a, b স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক আৰু r স্থিৰ ধ্ৰুৱক। অৱকল সমীকৰণটো পাবলৈ আমি a, b অপনয়ন কৰিম, r নহয়।

(1)অক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$(x-a)+(y-b)\frac{dy}{dx}=0 \quad \ldots (2)$$

আকৌ, (2)ক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}=0 \quad \ldots (3)$$

(2)ৰ পৰা, $(y-b)=-\dfrac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$ ... (4)

(3)ৰ পৰা, $x-a=-(y-b)\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]\dfrac{dy}{dx}}{\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)}$ ... (5)

(4) আৰু (5) বৰ্গ আৰু যোগ কৰি আমি পাওঁ

$$r^2=(x-a)^2+(y-b)^2=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

বা, $r^2\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$, এইটোৱেই নিৰ্ণেয় অৱকল সমীকৰণ।

(ii) এটা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰ x-এক্ষত থাকিলে আৰু ব্যাসাৰ্ধ a ই y-অক্ষক মূল বিন্দুত স্পৰ্শ কৰিব।

গতিকে, বৃত্তৰ কেন্দ্ৰ (a, 0) আৰু ব্যাসাৰ্ধ a. এনে বৃত্তকুলৰ সমীকৰণ হ'ল

$(x-a)^2+y^2=a^2$, য'ত a এটা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক।

বা $x^2-2ax+y^2=0$ ... (1)

(1) অক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$2x-2a+2y\frac{dy}{dx}=0$$

বা $x-a+y\dfrac{dy}{dx}=0$

বা $a = x + y\frac{dy}{dx}$

(1)অত a ৰ মান বহুৱাই আমি পাওঁ

$$x^2 - 2\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)x + y^2 = 0$$

বা $x^2 - 2x^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + y^2 = 0$

বা $\left(y^2 - x^2\right)dx - 2xydy = 0$, এইটোৱেই নিৰ্ণেয় অৱকল সমীকৰণ।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৩

প্ৰশ্ন নং 1 ঃ তলৰ সম্বন্ধবোৰৰ পৰা অৱকল সমীকৰণ গঠন

(i) $y^2 = Ax^2 + Bx + C$ (ii) $c\left(y + c\right)^2 = x^2$

(iii) $y = ae^{bx}$ (iv) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(v) $y^2 = a\left(b - x\right)\left(b + x\right)$

Q 2 : (i) যিবিলাক অধিবৃত্তৰ নাভি লম্ব 4a আৰু অক্ষ, x -অক্ষৰ সমান্তৰাল, তেনেবোৰ অধিবৃত্তৰ বাবে অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

(ii) যিবিলাক বৃত্ত মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু কেন্দ্ৰ y-অক্ষত থাকে, তেনেবোৰ বৃত্তৰ বাবে অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

(iii) যিবিলাক অধিবৃত্তৰ অক্ষ y অক্ষৰ সমান্তৰাল, তেনেবোৰ অধিবৃত্তৰ বাবে অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

৭.৭ অৱকল সমীকৰণৰ সমাধান

এটা ফলনক এটা অৱকল সমীকৰণৰ সমাধান (solution) বুলি কোৱা হয় যদি ই অৱকল সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে।

যদি $y = f\left(x\right)$ এটা সমাধান হয়, তেনেহ'লে y ৰ ঠাইত f(x) আৰু x সাপেক্ষে ইয়াৰ অৱকলজ বহুৱালে, প্ৰদত্ত অৱকল সমীকৰণটো অভেদত পৰিণত হ'বগৈ।

উদাহৰণস্বৰূপে, (i) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ অৱকল সমীকৰণৰ $y = c_1\cos x + c_2\sin x$ এটা সমাধান,

কিয়নো $\frac{dy}{dx} = -c_1\sin x + c_2\cos x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -c_1\cos x - c_2\sin x = -y$$

(ii) $\frac{dy}{dx} = y$ সমীকৰণৰ $y = e^x$ এটা সমাধান,

কিয়নো $\frac{dy}{dx} = e^x = y$.

যিবোৰ সমাধানত পৰতন্ত্ৰ স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱকৰ সংখ্যা, অৱকল সমীকৰণটোৰ মাত্ৰাৰ সমান, তেনে সমাধানক সাধাৰণ বা সম্পূৰ্ণ (general or complete) সমাধান বুলি কোৱা হয়।

দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ অৱকল সমীকৰণ $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ ৰ সাধাৰণ সমাধান হ'ল $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. ইয়াত দুটা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক c_1, c_2 আছে।

সাধাৰণ সমাধানৰ স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱকত বিশেষ মান বহুৱাই যি সমাধান পোৱা যায় তাক বিশেষ সমাধান (particular solution) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ সমীকৰণৰ $y = c_1e^x + c_2e^{-x}$ সাধাৰণ সমাধান, আনহাতেদি $y = e^x - e^{-x}$ বা $y = e^x$ বিশেষ সমাধান।

উদাহৰণ 1 ঃ সত্যাপন কৰক যে $y = \cos \alpha t$ য়ে $\frac{d^2y}{dt^2} = -\alpha^2 y$ অৱকল সমীকৰণ সিদ্ধ কৰে।

সমাধান ঃ দিয়া আছে $y = \cos \alpha t$ ... (1)

আমি (1)অক x সাপেক্ষে দুবাৰ অৱকলন কৰোঁ।

$$\frac{dy}{dt} = -\alpha \sin \alpha t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\alpha^2 \cos \alpha t$$

কিন্তু $y = \cos \alpha t$

$$\therefore \frac{d^2y}{dt^2} = -\alpha^2 y$$

উদাহৰণ 2 ঃ সত্যাপন কৰক যে $\frac{dy}{dx} = y^2e^x$ অৱকল সমীকৰণৰ $y = -e^{-x}$ এটা সমাধান।

সমাধান ঃ দিয়া আছে $y = -e^{-x}$ ... (1)

(1) x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x}$$

এতিয়া $y = -e^{-x} \Rightarrow y^2 = e^{-2x}$ আৰু $y^2 = e^{-x} \times e^{-x} \Rightarrow e^{-x} = y^2e^x$.

অর্থাৎ $y=-e^{-x}$ য়ে $\frac{dy}{dx}=y^2e^x$, সিদ্ধ কৰে।

উদাহৰণ 3 ঃ দেখুওৱাক যে $y=x\frac{dy}{dx}+a\frac{dx}{dy}$ অৱকল সমীকৰণৰ $y=cx+\frac{a}{c}$ এটা সমাধান, c এটা ধ্ৰুৱক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে $y=cx+\frac{a}{c}$ ... (1)

(1) x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{dy}{dx}=c$$

বা $$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{c}$$

প্ৰদত্ত অৱকল সমীকৰণটোৰ সোঁপক্ষত $\frac{dy}{dx}$ আৰু $\frac{dx}{dy}$ ৰ মান বহুৱাই আমি পাওঁ

$$x(c)+a\left(\frac{1}{c}\right)=cx+\frac{a}{c}=y$$

$\therefore$ বাওঁপক্ষ = সোঁপক্ষ

উদাহৰণ 4 ঃ $\frac{dy}{dx}-6x=0$ সমীকৰণৰ $y=3x^2+C$ এটা সাধাৰণ সমাধান। বিশেষ সমাধান নির্ণয় কৰক যেতিয়া $y=3, x=2$.

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত অৱকল সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ সমাধান হ'ল $y=3x^2+C$.

$y=3, x=2$ বহুৱাই আমি পাওঁ $3=12+C$

বা $C=-9$.

$\therefore$ উলিয়াব লগীয়া বিশেষ সমাধান $y=3x^2-9$.



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ 8

প্ৰশ্ন নং 1 ঃ সত্যাপন কৰক যে $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ অৱকল সমীকৰণৰ $y=a\cos x+b\sin x$ ফলনটো সমাধান, $a,b\in R$.

প্ৰশ্ন নং 2 ঃ সত্যাপন কৰক যে $(y\sin y+\cos y+x)y'=y$ অৱকল সমীকৰণৰ $y-\cos y=x$ ফলন এটা সমাধান।

প্ৰশ্ন নং 3 ঃ সত্যাপন কৰক যে $y^2y' + y^2 + 1 = 0$ অৱকল সমীকৰণৰ $x + y = \tan^{-1} y$ এটা সমাধান।

প্ৰশ্ন নং 4 ঃ দেখুওৱাক যে $4x^2y'' + 12xy' + 3y = 0$ সমীকৰণৰ $y = x^{-\frac{3}{2}}$ এটা সমাধান, $x > 0$.



৭.৮ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- অৱকল সমীকৰণ হ'ল স্বতন্ত্ৰ চলক, পৰতন্ত্ৰ চলক আৰু স্বতন্ত্ৰ চলক সাপেক্ষে পৰতন্ত্ৰ চলকৰ অৱকল সহগযুক্ত সমীকৰণ।
  অৱকল সমীকৰণ দুই ধৰণৰ—
  (i) সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণ
  যদি এটা অৱকল সমীকৰণত মাত্ৰ এটা স্বতন্ত্ৰ চলক সাপেক্ষে সাধাৰণ অৱকল সহগ থাকে, তেনেহ'লে তেনে অৱকল সমীকৰণক সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণ বোলে।
  (ii) আংশিক অৱকল সমীকৰণ
  যদি এটা অৱকল সমীকৰণত দুটা বা ততোধিক স্বতন্ত্ৰ চলক থাকে আৰু ইহঁতৰ যিকোনো এটা সাপেক্ষে আংশিক অৱকলজ থাকে, তেনেহ'লে তেনে সমীকৰণক আংশিক অৱকল সমীকৰণ বোলে।
- এটা সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণৰ ক্ৰম হ'ল সমীকৰণটোত থকা সৰ্বোচ্চ অৱকলজৰ ক্ৰম।
- ভগ্নাংশ আৰু মূল চিহ্নৰ পৰা মুক্ত হোৱাৰ পাছত এটা সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণৰ মাত্ৰা হ'ল সমীকৰণটোত থকা সৰ্বোচ্চ ক্ৰমৰ অৱকলজৰ মাত্ৰা।
- এটা অৱকল সমীকৰণৰ অজ্ঞাত ফলন (অৰ্থাৎ পৰতন্ত্ৰ চলক) আৰু ইয়াৰ অৱকলজবোৰ যদি প্ৰথম ঘাতৰ হয় আৰু সমীকৰণটো ইহঁতৰ পূৰণফলমুক্ত হয়, তেনেহ'লে ইয়াক ৰৈখিক বুলি কোৱা হয়।
- x আৰু y চলক বিশিষ্ট আৰু n টা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱকযুক্ত এটা সমীকৰণ দিয়া আছে। ইয়াক আমি n বাৰ অৱকলন কৰিলোঁ। আমি n এটা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱকযুক্ত আৰু n টা সমীকৰণ পালোঁ। এই (n+1) টা সমীকৰণৰ পৰা আমি এই n স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক অপনয়ন কৰিলোঁ। ইয়াৰ পৰা আমি এটা n মাত্ৰাৰ অৱকল সমীকৰণ পাম।
- যি সমাধানত পৰতন্ত্ৰ স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱকৰ সংখ্যা, অৱকল সমীকৰণটোৰ মাত্ৰাৰ সমান, তেনে সমাধানক সাধাৰণ বা সম্পূৰ্ণ সমাধান বুলি কোৱা হয়।

- সাধাৰণ সমাধানৰ স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱকত বিশেষ মান বহুৰাই যি সমাধান পোৱা যায় তাক বিশেষ সমাধান বুলি কোৱা হয়।



৭.৯ অধিক জানিবলৈ

1) Tenenbaum, Morris and Pollard, Harry. Ordinary Differential Equations, Dover Publications, Inc, N. Y 11501.
2) Differential Equations : An Introduction with Mathematica. Clay C. Ross, second Edition, Springer.
3) Differential Equations :Linear, Nonlinear, ordinary, partial. A. C. King, J. Billinggham and S.R. Otto, Cambridge-2003.
4) Differential equations with Application and Programs. S. Balachandra Rao and H. R. Anuradha, University Press (India) Limited 1996.



৭.১০ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ (i) 2,1 (ii) 1,2 (iii) 2,3 (iv) 3,1 (v) 2,2 (vi) 3,2 (vii) 1,2 (viii)1,2 (ix) 1,1 (x) 2, 3. (xi) 4, সংজ্ঞাৱদ্ধ নহয় (xii) 2, সংজ্ঞাৱদ্ধ নহয়।

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ (a) অৰৈখিক, 3 (b) অৰৈখিক, 4 (c) ৰৈখিক, 1.

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৩

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ (i) দিয়া আছে $y^2 = Ax^2 + Bx + C$

অৱকলন কৰি, $2y\frac{dy}{dx} = 2Ax + B$

আকৌ অৱকলন কৰি, $2y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2A$

আকৌ অৱকলন কৰি, $y\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}=0$

বা $y\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{dy}{dx}.\frac{d^2y}{dx^2}=0$.

(ii) দিয়া আছে, $c(y+c)^2=x^2$ ... (1)

(1)অক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ $2c(y+c).\frac{dy}{dx}=2x$

বা $c(y+c).\frac{dy}{dx}=x$ ... (2)

বা $\frac{c(y+c)^2}{y+c}.\frac{dy}{dx}=x$

বা $\frac{x^2}{y+c}.\frac{dy}{dx}=x$ (1)অৰ পৰা

বা $x\frac{dy}{dx}=y+c$

বা $c=x\frac{dy}{dx}-y$.

(1) অত c ৰ এই মান বহুৰাই, আমি পাওঁ

$$\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)\left(y+x\frac{dy}{dx}-y\right)^2=x^2$$

বা $\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=x^2$

বা $\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1$.

এইটোৱেই নিৰ্ণেয় অৱকল সমীকৰণ।

(iii) দিয়া আছে, $y=ae^{bx}$ ... (1)

$\therefore \frac{dy}{dx}=abe^{bx}=by$ ... (2)

$\therefore \frac{d^2y}{dx^2}=b\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx}.\frac{dy}{dx}=\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ [(2)ৰ পৰা]

বা $y\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$, এইটোৱেই নিৰ্ণেয় অৱকল সমীকৰণ।

(iv) দিয়া আছে, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ... (1)

(1)অক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি, আমি পাওঁ $\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}.\frac{dy}{dx}=0$

বা, $\frac{y}{x}.\frac{dy}{dx}=\frac{-b^2}{a^2}$ ... (2)

উভয় পক্ষৰ x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\left(\frac{y}{x}\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)}{x^2}\frac{dy}{dx}=0$$

বা, $xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0$.

এইটোৱেই নিৰ্ণেয় অৱকল সমীকৰণ।

(v) দিয়া আছে, $y^2=a(b-x)(b+x)$ ... (1)

(1) অক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি, আমি পাওঁ

$$2y\frac{dy}{dx}=-2ax$$

বা $y\frac{dy}{dx}=-ax$ ... (2)

(2) ক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=-a \quad \text{... (3)}$$

(2) আৰু (3)ৰ পৰা

$$x\left\{y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}=y\frac{dy}{dx}$$

এইটোৱেই নিৰ্ণেয় অৱকল সমীকৰণ।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) অধিবৃত্তকুলৰ সমীকৰণ হ'ল

$(y-k)^2=4a(x-h)$ ইয়াত h আৰু k স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক।

এই সম্বন্ধটোক দুবাৰ অৱকলন কৰি আৰু h আৰু k অপনয়ন কৰি আমি নিৰ্ণেয় অৱকল সমীকৰণটো পাম।

(ii) বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্ধ a হ'লে ইয়াৰ কেন্দ্ৰ হ'ব $(0,a)$ আৰু ইয়াৰ সমীকৰণ হ'ব $x^2+(y-a)^2=a^2$

বা $x^2 + y^2 - 2ay = 0$ ... (1)

(1)অক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাম

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} - 2a\frac{dy}{dx} = 0$$

বা $x + y\frac{dy}{dx} = a\frac{dy}{dx}$ ... (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা a অপনয়ন কৰি আমি পাম

$$x + y\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2y}\frac{dy}{dx}$$

বা $2xy + 2y^2\frac{dy}{dx} = \left(x^2 + y^2\right)\frac{dy}{dx}$

বা $2xy + \left(y^2 - x^2\right)\frac{dy}{dx} = 0$

এইটোৱেই নিৰ্ণেয় অৱকল সমীকৰণ।

(iii) ধৰা হ'ল অধিবৃত্তৰ সমীকৰণ

$\left(x-h\right)^2 = 4a\left(y-k\right)$ ... (1)

ইয়াৰ অক্ষ, y-অক্ষৰ সমান্তৰাল। ইয়াত h, k আৰু a স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক।

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$2\left(x-h\right) = 4a\frac{dy}{dx}$$

আকৌ x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$2 = 4a\frac{d^2y}{dx^2}$$

আকৌ x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$0 = 4a\frac{d^3y}{dx^3}$$

$$\Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

এইটোৱেই নিৰ্ণেয় অৱকল সমীকৰণ।

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৪

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে $y = a\cos x + b\sin x$ ... (1)

(1) অৰ দুয়োপক্ষক x সাপেক্ষে ক্ৰমাগতভাৱে অৱকলন কৰি আমি পাম

$$\frac{dy}{dx} = -a\sin x + b\cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a\cos x - b\sin x$$

প্ৰদত্ত অৱকল সমীকৰণটোত $\frac{d^2y}{dx^2}$ আৰু y ৰ মান বহুৱাই আমি পাওঁ

বাওঁপক্ষ $= (-a\cos x - b\sin x) + (a\cos x + b\sin x) = 0$ = সোঁপক্ষ

$\therefore$ প্ৰদত্ত ফলনটো প্ৰদত্ত অৱকল সমীকৰণটোৰ এটা সমাধান।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে, $y - \cos y = x$ ... (1)

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাম

$$\frac{dy}{dx} - \frac{d}{dx}(\cos y) = \frac{d}{dx}(x)$$

$$\Rightarrow y' + \sin y.y' = 1$$

$$\Rightarrow y'(1 + \sin y) = 1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{1+\sin y}$$

x আৰু y' অৰ মান প্ৰদত্ত অৱকল সমীকৰণটোত বহুৱাই আমি পাম

বাওঁপক্ষ $= (y\sin y + \cos y + x)y'$

$$= (y\sin y + \cos y + y - \cos y) \times \frac{1}{1+\sin y}$$

$$= y(1+\sin y) \times \frac{1}{1+\sin y}$$

$= y$ = সোঁপক্ষ

$\therefore$প্ৰদত্ত ফলনটো প্ৰদত্ত অৱকল সমীকৰণৰ এটা সমাধান।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে, $x + y = \tan^{-1} y$ ... (1)

উভয় পক্ষক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাম

$$\frac{d}{dx}(x+y) = \frac{d}{dx}(\tan^{-1} y)$$

$$\Rightarrow 1 + y' = \left[\frac{1}{1+y^2}\right]y'$$

$$\Rightarrow y'\left[\frac{1}{1+y^2} - 1\right] = 1$$

$$\Rightarrow y'\left[\frac{1-\left(1+y^2\right)}{1+y^2}\right]=1$$

$$\Rightarrow y'\left[\frac{-y^2}{1+y^2}\right]=1$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-\left(1+y^2\right)}{y^2}$$

প্ৰদত্ত অৱকল সমীকৰণত y' ৰ মান বহুৱাই আমি পাম

বাওঁপক্ষ $= y^2y' + y^2 + 1 = y^2\left[\frac{-\left(1+y^2\right)}{y^2}\right] + y^2 + 1$

$= -1 - y^2 + y^2 + 1$

$= 0$ = সোঁপক্ষ

∴প্ৰদত্ত ফলনটো প্ৰদত্ত অৱকল সমীকৰণৰ এটা সমাধান।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $y = x^{-\frac{3}{2}}$

$\therefore y' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$ আৰু $y'' = \frac{15}{4}x^{-\frac{7}{2}}$.

y, y' আৰু y'' অৰ মান প্ৰদত্ত অৱকল সমীকৰণটোত বহুৱাই আমি পাওঁ

বাওঁপক্ষ $= 4x^2\left(\frac{15}{4}x^{-\frac{7}{2}}\right) + 12x\left(-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}\right) + 3\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)$

$= 15x^{-\frac{3}{2}} - 18x^{-\frac{3}{2}} + 3x^{-\frac{3}{2}}$

$= 0$ = সোঁপক্ষ

∴প্ৰদত্ত ফলনটো প্ৰদত্ত অৱকল সমীকৰণৰ এটা সমাধান।



৭.১১ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ অধোলিখিতবোৰৰ বাবে অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক

(a) $y = k\sin^{-1}x$, k প্ৰাচল

(b) $y = \alpha x + \beta x^2$, α, β প্ৰাচল

প্ৰশ্ন ২ ঃ A আৰু B ৰ বিভিন্ন মানৰ বাবে $y = Ae^{3x} + Be^{5x}$ বক্ৰকুলৰ অৱকল সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণৰ ক্ৰম আৰু মাত্ৰা নিৰ্ণয় কৰক।

(a) $y' = 3x^2 - 7$ (b) $\sqrt{y' + y} = \sin x$ (c) $y''' + xy'' + 2y\left(y'\right)^2 + xy = 0$

(d) $\left(y'''\right)^3 + \left(y''\right)^4 + y = 0$ (e) $y'' = \left[y + \left(y'\right)^2\right]^{\frac{1}{4}}$ (f) $\left[1 + \left(y'\right)^2\right]^3 = ky''$

প্ৰশ্ন ৪ ঃ তলৰ কোনবোৰ সমীকৰণ ৰৈখিক আৰু কোনবোৰ অৰৈখিক ঠিৰাং কৰক আৰু সিহঁতৰ মাত্ৰা লিখক।

(a) $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} + y = x$

(b) $x\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^2y}{dx^2} = e^x$

(c) $\frac{dy}{dx} + y^2 = x^2$

প্ৰশ্ন ৫ ঃ (a) $y = x^2$ অধিবৃত্তৰ সকলো স্পৰ্শক ৰেখাৰ অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

(b) মূল বিন্দু কেন্দ্ৰবিশিষ্ট সকলো উপবৃত্তৰ অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

(c) মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা সকলো বৃত্তৰ অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

(d) যিবোৰ বৃত্তৰ স্পৰ্শক y-অক্ষ, সেইবোৰ বৃত্তৰ অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

(e) যিবোৰ অধিবৃত্তৰ অক্ষ y -অক্ষৰ সমান্তৰাল, সেইবোৰ অধিবৃত্তৰ অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

(f) যিবোৰ অধিবৃত্তৰ নাভি মূল বিন্দু আৰু অক্ষ x-অক্ষ, সেইবোৰ অধিবৃত্তৰ অৱকল সমীকৰণ গঠন কৰক।

প্ৰশ্ন ৬ ঃ সত্যাপন কৰক যে

(a) $y = x^5 + 9$ এ $\frac{dy}{dx} = 5x^4$ অৱকল সমীকৰণ সিদ্ধ কৰে,

(b) $y = \cos 2x$ এ $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$ অৱকল সমীকৰণ সিদ্ধ কৰে,

(c) $y = \sqrt{x^2 + 1}$ এ $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ অৱকল সমীকৰণ সিদ্ধ কৰে,

(d) $y = x\log x$ এ $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + y = x\frac{dy}{dx}$ অৱকল সমীকৰণ সিদ্ধ কৰে,

(e) $y = xe^x$ এ $\frac{dy}{dx} - y = e^x$ অৱকল সমীকৰণ সিদ্ধ কৰে।

*** ***** ***