অধ্যায় ৮ ঃ প্রথম ক্রম আৰু প্রথম মাত্রাৰ অৱকল সমীকৰণ (DIFFERENTIAL EQUATION OF FIRST ORDER AND FIRST DEGREE)

অধ্যায় গাঁথনি

8.1 উদ্দেশ্য

8.2 পৰিচয়

8.3 প্রথম ক্রম আৰু প্রথম মাত্রাৰ অৱকল সমীকৰণ

8.4 চলক পৃথকীকৰণ পদ্ধতি

8.5 সুষম অৱকল সমীকৰণ

8.5.1 সুষম আকাৰলৈ পৰিৱর্তন কৰিব পৰা সমীকৰণ

8.6 ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ

8.7 বার্ণ'লিৰ সমীকৰণ

8.9 অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

8.10 অধিক জানিবলৈ

8.11 অগ্রগতিৰ খতিয়ান

8.12 আৰ্হি প্রশ্ন

৮.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- প্রথম ক্রম আৰু প্রথম মাত্রাৰ অৱকল সমীকৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- সহগ পৃথকীকৰণ পদ্ধতি সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- সুষম অৱকল সমীকৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- বার্ণ'লিৰ সমীকৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- যথার্থ অৱকল সমীকৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

৮.২ পৰিচয়

এই অধ্যায়ত আমি প্রথম ক্রম আৰু প্রথম মাত্রাৰ অৱকল সমীকৰণ সমাধান কৰাৰ বিভিন্ন পদ্ধতি সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম। এই সমীকৰণবোৰত স্বতন্ত্র চলক সাপেক্ষে পৰতন্ত্র

চলকৰ মাত্র প্রথম মাত্রাৰ অৱকলজবোৰ থাকে। সাধাৰণ সমাধানটোত মাত্র এটা স্বেচ্ছ ধ্রুৱক থাকে। এনেধৰণৰ সমীকৰণ সমাধান কৰাৰ বিভিন্ন পদ্ধতি আছে। ই সমীকৰণৰ আকাৰৰ ওপৰত নির্ভৰ কৰে।

৮.৩ প্রথম ক্রম আৰু প্রথম মাত্রাৰ অৱকল সমীকৰণ

এনেধৰণৰ সমীকৰণক চাৰি ভাগত ভগাব পাৰি।

1. যিবোৰ সমীকৰণত চলকবোৰ প্রত্যক্ষভাৱে বা বিশেষ প্রতিষ্ঠানৰ দ্বাৰা পৃথক কৰিব পাৰি।
2. সুষম অৱকল সমীকৰণ আৰু যিবোৰক এই আকাৰলৈ নিব পাৰি।
3. ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ আৰু যিবোৰক এই আকাৰলৈ নিব পাৰি।
4. যথার্থ অৱকল সমীকৰণ আৰু যিবোৰক এই আকাৰলৈ নিব পাৰি।

৮.৪ চলক পৃথকীকৰণ পদ্ধতি

এটা অৱকল সমীকৰণত চলকবোৰ পৃথক কৰা বুলি কোৱা হয় যদি x অৰ ফলন আৰু dx এটা পক্ষত থাকে আৰু y ৰ ফলন আৰু dy আনটো পক্ষত থাকে। এনেধৰণৰ সমীকৰণক $f(x)dx = f(y)dy$ আকাৰলৈ নিব পাৰি। উভয় পক্ষক অনুকলন কৰি সমীকৰণৰ সমাধান পোৱা যায়। নির্ণেয় সমাধান হ'ল

$$\int f(x)dx = \int f(y)y + C$$

টোকা ঃ (i) যেতিয়া y নাথাকে, সমীকৰণটোৰ আকাৰ $\frac{dy}{dx} = f(x)$ হ'বগৈ আৰু সেয়ে সমাধানটো হ'ল $y = \int f(x)dx + C$.

(ii) যেতিয়া x নাথাকে, সমীকৰণটোৰ আকাৰ $\frac{dy}{dx} = g(y)$ হ'বগৈ আৰু এই ক্ষেত্রত সমাধান হ'ব $\int \frac{dy}{g(y)} = \int dx + C$.

উদাহৰণ 1 ঃ সমাধান কৰক $\frac{dy}{dx} = e^{3x-2y} + x^2 e^{-2y}$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকৰণটোক এনেধৰণেও লিখিব পাৰি

$$\frac{dy}{dx} = e^{-2y}\left(e^{3x} + x^2\right)$$

বা $$e^{2y}dy = \left(e^{3x} + x^2\right)dx$$

উভয় পক্ষক অনুকলন কৰি, আমি পাওঁ $\int e^{2y}dy = \int \left(e^{3x} + x^2\right)dx$

বা, $\frac{1}{2}e^{2y} = \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{3}x^3 + C$

বা $3e^{2y} = 2\left(e^{3x} + x^3\right) + K$, এইটোৱেই নিৰ্ণেয় সমাধান।

উদাহৰণ 2 ঃ সমাধান কৰক $\left(e^y + 1\right)\cos x dx + e^y \sin x dy = 0$

সমাধান ঃ উভয়পক্ষক $\left(e^y + 1\right)\sin x$ এৰে হৰণ কৰি, আমি পাওঁ

$$\frac{\cos x dx}{\sin x} + \frac{e^y dy}{e^y + 1} = 0$$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $\log \sin x + \log\left(e^y + 1\right) = \log C$

or $\log\left(\sin x\left(e^y + 1\right)\right) = \log C$

or $\sin x\left(e^y + 1\right) = C$, এইটোৱেই নিৰ্ণেয় সমাধান।

টোকা ঃ যদি কেতিয়াবা চলকবোৰ পৃথক কৰিব নোৱাৰি, তেনেহ'লে পূৰ্ণ অৱকল (total differential) ৰূপে প্ৰকাশ কৰি সমাধান কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 3 ঃ সমাধান কৰক $y \sin 2x dx - \left(1 + y + \cos^2 x\right)dy = 0$

সমাধান ঃ ইয়াত চলকবোৰ পৃথক কৰিব নোৱাৰি। অলপ সালসলনি

$$\left(y \sin 2x dx - \cos^2 x dy\right) - \left(1 + y\right)dy = 0$$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ

$$-y\cos^2 x - \left(y + \frac{y^2}{2}\right) = -C$$

বা $y\cos^2 x + \left(y + \frac{y^2}{2}\right) = -C$, এইটোৱেই নিৰ্ণেয় সমাধান।

উদাহৰণ 4 ঃ সমাধান কৰক $x\frac{dy}{dx} = y + \left(\log x\right)\frac{dy}{dx}$

সমাধান ঃ এই সমীকৰণটোত চলকবোৰ পৃথক কৰিব পাৰি, কিন্তু অনুকলন সম্ভৱ নহয়।

প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'ল $\left(x - \log x\right)\frac{dy}{dx} = y$

বা $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x - \log x}$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x - \log x}$

বা $\log y + \log C = \int \frac{dx}{x - \log x}$

বা $\log\left(yC\right) = \int \frac{dx}{x - \log x}$

বা $yC = e^{\int \frac{dx}{x-\log x}}$ এইটোৱেই নির্ণেয় সমাধান।

প্রাৰম্ভিক মান সমস্যা ঃ এটা প্রাৰম্ভিক চর্তেৰে সৈতে এটা অৱকল সমীকৰণক প্রাৰম্ভিক মান সমস্যা (initial value problem) বুলি কোৱা হয়। প্রাৰম্ভিক চর্তৰ সহায়ত স্বেচ্ছ ধ্রুৱকৰ বিশেষ মান নির্ধাৰণ কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 5 ঃ তলৰ অৱকল সমীকৰণটোৰ বিশেষ সমাধান নির্ণয় কৰক

$$\cos y dx + \left(1+2e^{-x}\right)\sin y dy = 0 \text{ যেতিয়া } x = 0,\ y = \frac{\pi}{4}.$$

সমাধান ঃ চলকবোৰ পৃথক কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{dx}{1+2e^{-x}} + \frac{\sin y dy}{\cos y} = 0$$

$$\text{বা } \frac{e^x dx}{e^x+2} + \frac{\sin y dy}{\cos y} = 0$$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\log\left(e^x+2\right) - \log(\cos y) = \log c$$

$$\text{বা } e^x + 2 = c\cos y \ \ldots (1)$$

প্রাৰম্ভিক চর্তৰ সহায়ত, $e^0 + 2 = c\cos\frac{\pi}{4}$

$$\text{বা } 3 = c\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{বা } c = 3\sqrt{2}$$

(1) অত c ৰ মান বহুৱাই আমি পাওঁ $e^x + 2 = 3\sqrt{2}\cos y$

$$\text{বা } \sec y\left(e^x+2\right) = 3\sqrt{2}$$ এইটোৱেই নির্ণেয় সমাধান।

টোকা ঃ $\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$ আকাৰৰ সমীকৰণক $z = ax+by+c$ প্রতিষ্ঠাপনৰ দ্বাৰা ৰূপান্তৰ কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 6 ঃ সমাধান কৰক $\cos(x+y)dy = dx$

ধৰা হ'ল $z = x+y$ $\quad\therefore \frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}.$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকৰণটো হ'বগৈ $\cos z\left(\frac{dz}{dx} - 1\right) = 1$

$$\text{বা } \frac{dz}{dx}.\cos z = 1 + \cos z$$

বা $\frac{dz}{dx} = \frac{1+\cos z}{\cos z}$

বা $dx = \frac{\cos z}{1+\cos z}dz$

$= \left(1 - \frac{1}{1+\cos z}\right)dz$

$= \left(1 - \frac{1}{2}\sec^2\frac{z}{2}\right)dz$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ

$x = z - \tan\frac{z}{2} + C$

বা $0 = y - \tan\frac{(x+y)}{2} + C$

বা $y = -C + \tan\frac{(x+y)}{2}$ এইটোৱেই নিৰ্ণেয় সমাধান।

উদাহৰণ 7 ঃ সমাধান কৰক $\log\left(\frac{dy}{dx}\right) = ax + by$

সমাধান ঃ $z = ax + by$ বহুৱাই আমি পাওঁ $\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$

$\therefore \quad \frac{1}{b}\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = e^z$

বা $\frac{dz}{a+be^z} = dx$

বা $\frac{e^{-z}dz}{ae^{-z}+b} = dx$

বা $\frac{du}{-au} = dx$, where $u = ae^{-z} + b$ and $du = -ae^{-z}dz$

বা $\log u = -ax + \log C$

বা $\log\left(ae^{-z} + b\right) = -ax + \log C$

বা $ae^{-(ax+by)} + b = Ce^{-ax}$

বা $ae^{-ax}e^{-by} - Ce^{-ax} + b = 0$

বা $ae^{-by} - C + be^{ax} = 0$

বা $ae^{-by} + be^{ax} = C$, এইটোৱেই নিৰ্ণেয় সমাধান।

আন এটা প্ৰতিষ্ঠাপন ঃ যদি $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, তেনেহ'লে $x^2 + y^2 = r^2$ অৰ পৰা $xdx + ydy = rdr$.

$\tan\theta = \frac{y}{x}$, অৰ পৰা, আমি পাওঁ $\frac{xdy - ydx}{x^2} = \sec^2\theta d\theta$

বা $xdy - ydx = r^2 d\theta$

ইয়াৰ পৰা পোৱা যায় যে $x^2 + y^2$, $xdx + ydy$ আৰু $xdy - ydx$ পদবিশিষ্ট সাধাৰণ অৱকল সমীকৰণবোৰ সহজ আকাৰলৈ নিব পাৰি। তাৰ পাছত সমীকৰণটো সমাধান কৰিবলৈ চলক পৃথকীকৰণ পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 8 ঃ সমাধান কৰক $\frac{xdx + ydy}{xdy - ydx} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$

সমাধান ঃ $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ বহুৰাই আমি পাওঁ $xdx + ydy = rdr$, $xdy - ydx = r^2 d\theta$ আৰু $x^2 + y^2 = r^2$.

$$\therefore \frac{rdr}{r^2 d\theta} = \sqrt{\frac{a^2 - r^2}{r^2}}$$

বা $\frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = d\theta$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $\int \frac{dr}{\sqrt{a^2 - r^2}} = \int d\theta$

বা $\sin^{-1}\frac{r}{a} = \theta + C$

বা $\frac{r}{a} = \sin(\theta + C)$

বা $r = a(\sin\theta\cos C + \cos\theta\sin C)$

বা $r^2 = a(r\sin\theta\cos C + r\cos\theta\sin C)$

বা $x^2 + y^2 = a(y\cos C + x\sin C)$, এইটোৱেই নিৰ্ণেয় সমাধান।

$yf_1(xy) + xf_2(xy)dy = 0$ **আকাৰৰ সমীকৰণ ঃ**

$z = xy$ বহুৰাই আমি পাওঁ $dz = ydx + xdy$ আৰু $dy = \frac{xdz - zdx}{x^2}$

বা $xdz - zdx = x^2 dy$

$$\text{বা } dz - \frac{z}{x}dx = xdy$$

z আৰু x চলক দুটা পৃথক কৰিব পাৰি। অধোলিখিত উদাহৰণটোৰ সহায়ত ইয়াক বুজোৱা হৈছে।

উদাহৰণ 9 ঃ সমাধান কৰক $y(1+2xy)dx + x(1-xy)dy = 0$

সমাধান ঃ $z = xy$ বহুৱাই, আমি পাওঁ $xdy + ydx = z$ আৰু $xdy = dz - \frac{z}{x}dx$,

$\therefore$ সমীকৰণটো হ'বগৈ $\frac{z}{x}(1+2z)dx + (1-z)\left(dz - \frac{z}{x}dx\right) = 0$

$$\text{বা } \left\{\frac{z}{x}(1+2z) - (1-z)\frac{z}{x}\right\}dx + (1-z)dz = 0$$

$$\text{বা } \left\{z + 2z^2 - z + z^2\right\}\frac{dx}{x} + (1-z)dz = 0$$

$$\text{বা } 3z^2\frac{dx}{x} + (1-z)dz = 0$$

$$\text{বা } \frac{dx}{x} + \frac{1-z}{3z^2}dz = 0$$

$$\text{বা } \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}\right)dz = 0$$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\log x + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{z} - \log z\right) = \frac{C}{3}$$

$$\text{বা } \log x - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{xy} + \log xy\right) = \frac{C}{3}$$

$$\text{বা } \log\frac{x^3}{xy} - \frac{1}{xy} = C = \log k \text{, ধৰা হ'ল}$$

$$\text{বা } \log\frac{x^2}{ky} = \frac{1}{xy}$$

$$\text{বা } x^2 = kye^{\frac{1}{xy}} \text{, এইটোৱেই নিৰ্ণেয় সমাধান।}$$



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ১

প্ৰশ্ন নং 1 ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(i) $3e^x \tan y dx + (1-e^x)\sec^2 y dy = 0$

(ii) $\frac{dy}{dx} = e^{x+y} + x^2 e^{x^3+y}$

(iii) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$

প্ৰশ্ন নং 2 ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(i) $\frac{dy}{dx} = (4x+y+1)^2$

(ii) $\frac{dy}{dx} = \sin(x+y) + \cos(x+y)$

৮.৫ সুষম অৱকল সমীকৰণ

এটা ফলন $f(x,y)$ অক n মাত্ৰাৰ সুষম ফলন (homogeneous function) বুলি কোৱা হয় যদি ইয়াক

$x^n \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ বা $y^n \phi\left(\frac{x}{y}\right)$ আকাৰত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

উদাহৰণস্বৰূপে, $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 = x^2\left(1 + \frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}\right)$

বা $y^2\left(1 + \frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2}\right)$ এটা 2 মাত্ৰাৰ সুষম ফলন।

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ আকাৰৰ অৱকল সমীকৰণক সুষম সমীকৰণ (homogeneous equation) বুলি কোৱা হয় যদি $M(x,y)$ আৰু $N(x,y)$ একে মাত্ৰাৰ সুষম ফলন। সমীকৰণটোক এনে ধৰণেও প্ৰকাশ কৰিব পাৰি

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = -\frac{\phi\left(\frac{y}{x}\right)}{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ ৰৈখিক সুষম সমীকৰণ সমাধান কৰাৰ পদ্ধতি ঃ

ধৰা হ'ল $z = \frac{y}{x}$ বা $y = zx$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}x + z$.

$\therefore \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ অৰ আকাৰ হ'বৰ্গে $x\frac{dz}{dx} + z = f(z)$

$$\text{বা } \frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

অনুকলন কৰি সমীকৰণটোৰ সমাধান পাব পাৰি।

উদাহৰণ 1 ঃ অধোলিখিত সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(i) $(x^2 - y^2)dx - xydy = 0$

(ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$

(iii) $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$

(iv) $y^2 + x^2\frac{dy}{dx} = xy\frac{dy}{dx}$

সমাধান ঃ (i) প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'ল $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - y^2}{xy} = \frac{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

এইটো হ'ল ৰৈখিক সুষম সমীকৰণ।

ধৰা হ'ল $z = \frac{y}{x}$ বা $y = zx$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}x + z = \frac{1 - z^2}{z}$

$$\text{বা } \quad x\frac{dz}{dx} = \frac{1 - 2z^2}{z}$$

$$\text{বা } \quad \frac{zdz}{1 - 2z^2} = \frac{dx}{x}$$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $-\frac{1}{4}\log(1 - 2z^2) = \log x + \log C$

$$\text{বা } -\frac{1}{4}\log(1 - 2z^2) = \log Cx$$

$$\text{বা } (1 - 2z^2)^{-\frac{1}{4}} = Cx$$

$$\text{বা } 1-2\frac{y^2}{x^2}=C^{-4}x^{-4}$$

$$\text{বা } C^4\left(x^4-2x^2y^2\right)=1\text{, এইটোৱেই নির্ণেয় সমাধান।}$$

(ii) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}=\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\dfrac{y^2}{x^2}}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ এটা সুষম সমীকৰণ।

ধৰা হ'ল $z=\dfrac{y}{x}$ বা $y=zx\ \therefore \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}x+z$

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকৰণটো হ'লগৈ $x\dfrac{dz}{dx}+z=z+\sqrt{1+z^2}$

$$\text{বা } \frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}=\frac{dx}{x}$$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\log\left(z+\sqrt{1+z^2}\right)=\log x+\log C=\log(Cx)$$

$$\text{বা } \frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=Cx$$

$$\text{বা } y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2\text{, এইটোৱেই নির্ণেয় সমাধান।}$$

(iii) $\left(1+e^{\frac{x}{y}}\right)dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0$ সমীকৰণটোক এনেধৰণে লিখিব পাৰি

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)}{1+e^{\frac{x}{y}}}$$

ধৰা হ'ল $z=\dfrac{x}{y}$, $x=yz$ আৰু $\dfrac{dx}{dy}=z+y\dfrac{dz}{dy}$.

$\therefore$ সমীকৰণটো হ'বগৈ

$$z+y\frac{dz}{dy}=-\frac{e^z(1-z)}{1+e^z}$$

$$\text{বা } y\frac{dz}{dy}=-\frac{e^z(1-z)}{1+e^z}-z$$

$$\text{বা } y\frac{dz}{dy}=\frac{-e^z+ze^z-z-ze^z}{1+e^z}$$

বা $\dfrac{(1+e^z)dz}{z+e^z} = -\dfrac{dy}{y}$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $\log(z+e^z) = -\log y + \log C$

বা $\log(z+e^z) = \log\left(\dfrac{C}{y}\right)$

বা $z+e^z = \dfrac{C}{y}$

বা $\dfrac{x}{y} + e^{\frac{x}{y}} = \dfrac{C}{y}$, এইটোৱেই নিৰ্ণেয় সমাধান।

(iv) $y^2 + x^2\dfrac{dy}{dx} = xy\dfrac{dy}{dx}$ সমীকৰণটো এনদৰে লিখিব পাৰি

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy-x^2} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}-1} \quad \ldots (1)$$

ধৰা হ'ল $z = \dfrac{y}{x}$ বা $y = zx$ $\therefore \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx}x + z$

$\therefore$ (1) হ'বগৈ $x\dfrac{dz}{dx} + z = \dfrac{z^2}{z-1}$

বা $x\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z^2}{z-1} - z$

বা $x\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{z}{z-1}$

বা $\dfrac{(z-1)dz}{z} = \dfrac{dx}{x}$

বা $\left(1-\dfrac{1}{z}\right)dz = \dfrac{dx}{x}$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $\int\left(1-\dfrac{1}{z}\right)dz = \int\dfrac{dx}{x}$

বা $z - \log z = \log x + \log C$

বা $z = \log(Cxz)$

বা $\dfrac{y}{x} = \log\left(Cx\dfrac{y}{x}\right)$

বা $\frac{y}{x} = \log(Cy)$

বা $Cy = e^{\frac{y}{x}}$, এইটোৱেই নির্ণেয় সমাধান

৮.৫.১ সুষম আকাৰলৈ পৰিৱর্তন কৰিব পৰা সমীকৰণ

$\frac{dy}{dx} = \frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}$ $\left(c \neq 0, c' \neq 0\right)$ আকাৰৰ অসুষম সমীকৰণক তলত দিয়া ধৰণে সুষম আকাৰলৈ নিব পাৰি।

প্রথম ক্ষেত্র ঃ ধৰা হ'ল $\frac{a}{b} \neq \frac{a'}{b'}$. ধৰা হ'ল $x = X + h$ আৰু $y = Y + k$ য'ত h আৰু k ধ্রুৱক। তেনেহ'লে $dx = dX$ আৰু $dy = dY$. গতিকে অসুষম সমীকৰণটো হ'বগৈ

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY + (ah + bk + c)}{a'X + b'Y + (a'h + b'k + c')} \quad \ldots (1)$$

এইটো সুষম সমীকৰণ হ'বগৈ যদি h আৰু k এনেদৰে লোৱা হয় যাতে $ah + bk + c = 0$ আৰু $a'h + b'k + c' = 0$.

$$\frac{h}{bc' - b'c} = \frac{k}{a'c - ac'} = \frac{1}{ab' - a'b}$$

সমীকৰণ (1) হ'বগৈ $\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY}{a'X + b'Y}$ এইটো এটা সুষম সমীকৰণ আৰু $Z = \frac{Y}{X}$ বহুৰাই ইয়াক সমাধান কৰিব পাৰি।

দ্বিতীয় ক্ষেত্র ঃ যদি $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = m$ হয়, তেনেহ'লে সমীকৰণটো হ'বগৈ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{m(a'x + b'y) + c}{a'x + b'y + c'}$$

$z = a'x + b'y$ বহুৰাই, ইয়াক এনে এটা আকাৰলৈ নিব পাৰি য'ত চলক পৃথকীকৰণ সম্ভৱ। এই ক্ষেত্রত $\frac{dz}{dx} = a' + b'\frac{dy}{dx}$ আৰু সমীকৰণটো হ'বগৈ

$$\frac{1}{b'}\left(\frac{dz}{dx} - a'\right) = \frac{mz + c}{z + c'}$$

বা $$\frac{dz}{dx} = a' + \frac{mb'z + b'c}{z + c'}$$

$$= \frac{(a' + mb')z + (a'c' + b'c)}{z + c'}$$

চলক পৃথক কৰি আৰু অনুকলন কৰি, আমি পাওঁ

$$\int \frac{(z + c')dz}{(a' + mb')z + (a'c' + b'c)} = x + K.$$

উদাহৰণ 1 ঃ সমাধান কৰক $(2x + y)dx - (4x + 2y - 1)dy = 0$

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত সমীকৰণটো এনেধৰণে লিখিব পাৰি

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{4x + 2y - 1}$$ আৰু এই ক্ষেত্ৰত $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

ধৰা হ'ল $z = 2x + y$

$\therefore$ সমীকৰণটো হ'বগৈ

$$\frac{dz}{dx} - 2 = \frac{z}{2z - 1}$$

বা, $$\frac{dz}{dx} = \frac{5z - 2}{2z - 1}$$

বা, $$\frac{2z - 1}{5z - 2}dz = dx$$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $\int \frac{2z - 1}{5z - 2}dz = \int dx + C$

বা $$\int \frac{\frac{2}{5}(5z - 2) - \frac{1}{5}}{5z - 2}dz = \int dx + C$$

বা $$\frac{2z}{5} - \frac{1}{25}\log(5z - 2) = x + C$$

বা $\frac{2}{5}(2x + y) - \frac{1}{25}\log(10x + 5y - 2) = x + C$

বা $-\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y - \frac{1}{25}\log(10x + 5y - 2) = C$

বা $10y - 10x - \log(10x + 5y - 2) = 25C$, এইটোৱেই নিৰ্ণেয় সমাধান।

উদাহৰণ 2 ঃ সমাধান কৰক $\frac{dy}{dx} = \frac{y + x - 2}{y - x - 4}$

সমাধান ঃ এই ক্ষেত্রত $\frac{a}{a'}=1$ আৰু $\frac{b}{b'}=-1$, গতিকে $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$.

ধৰা হ'ল $x=X-h$ আৰু $y=Y-k$.য'ত h আৰু k ধ্রুৱক। গতিকে $dx=dX$ আৰু $dy=dY$. গতিকে প্রদত্ত সমীকৰণটো হ'বগৈ।

$$\frac{dY}{dX}=\frac{Y-k+X-h-2}{Y-k-X+h-4}=\frac{X+Y-(h+k+2)}{Y-X+(h-k-4)}$$

h আৰু k এনেদৰে লোৱা হ'ল যাতে

$h+k+2=0$

$h-k-4=0$

সমাধান কৰি, আমি পাওঁ $h=1$ আৰু $k=-3$

$\therefore$ সমীকৰণটো হ'বগৈ

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+Y}{Y-X}=\frac{1+\frac{Y}{X}}{\frac{Y}{X}-1}$$

ধৰা হ'ল $Y=ZX$ $\therefore \frac{dY}{dX}=Z+X\frac{dZ}{dX}$.

$\therefore$সমীকৰণটো হ'ল

$$Z+X\frac{dZ}{dX}=\frac{1+Z}{Z-1}$$

$$\text{বা } X\frac{dZ}{dX}=\frac{1+Z}{Z-1}-Z$$

$$\text{বা } X\frac{dZ}{dX}=\frac{1+Z-Z^2+Z}{Z-1}$$

$$\text{বা } \frac{Z-1}{1+Z-Z^2+Z}dZ=\frac{dX}{X}$$

$$\text{বা } \frac{-\frac{1}{2}(2-2Z)}{1+Z-Z^2+Z}dZ=\frac{dX}{X}$$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $\int\frac{-\frac{1}{2}(2-2Z)}{1+Z-Z^2+Z}dZ=\int\frac{dX}{X}$

$$\text{বা } -\frac{1}{2}\log(1+2Z-Z^2)=\log X+\log C$$

বা $\log\left(1+2Z-Z^2\right)^{-\frac{1}{2}} = \log XC$

বা $\frac{1}{\sqrt{1+2Z-Z^2}} = CX$

বা $1 = CX\sqrt{1+2\frac{Y}{X}-\frac{Y^2}{X^2}} = C\sqrt{X^2+2XY-Y^2}$

বা $\frac{1}{C^2} = X^2+2XY-Y^2$

বা $\frac{1}{C^2} = (x+1)^2+2(x+1)(y-3)-(y-3)^2$, এইটোৱেই নিৰ্ণেয় সমাধান।

উদাহৰণ 3 ঃ সমাধান কৰক $(2x+3y-6)\frac{dy}{dx} = 6x-2y-7$

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত সমীকৰণটো এনেধৰণে লিখিব পাৰি

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x-2y-7}{2x+3y-6} \quad \ldots (1)$$

এই ক্ষেত্ৰত $\frac{a}{a'} = \frac{6}{2} = \frac{3}{1}$ আৰু $\frac{b}{b'} = \frac{-2}{3}$, $\therefore \frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$.

ধৰা হ'ল $x = X+h$ আৰু $y = Y+k$.য'ত h আৰু k ধ্ৰুৱক।

$\therefore dx = dX$ আৰু $dy = dY$. তেনেহ'লে (1) হ'বগৈ

$$\frac{dY}{dX} = \frac{6(X+h)-2(Y+k)-7}{2(X+h)+3(Y+k)-6} = \frac{6X-2Y+6h-2k-7}{2X+3Y+2h+3k-6}$$

h আৰু k এনেদৰে লোৱা হ'ল যাতে

$6h-2k-7=0$

$2h+3k-6=0$

সমাধান কৰি আমি পালোঁ $h = \frac{3}{2}$ আৰু $k = 1$. সমীকৰণটো হ'লগৈ

$$\frac{dY}{dX} = \frac{6X-2Y}{2X+3Y}$$

ধৰা হ'ল $Y = ZX$, $\therefore \frac{dY}{dX} = Z+X\frac{dZ}{dX}$

$$\therefore Z+X\frac{dZ}{dX} = \frac{6-2Z}{2+3Z}$$

বা $X\frac{dZ}{dX} = \frac{6-2Z}{2+3Z} - Z$

বা $X\frac{dZ}{dX}=\frac{6-4Z-3Z^2}{2+3Z}$

বা $\int\frac{2+3Z}{6-4Z-3Z^2}dZ=\int\frac{dX}{X}$

বা $-\frac{1}{2}\int\frac{-6Z-4}{6-4Z-3Z^2}dZ=\int\frac{dX}{X}$

বা $-\frac{1}{2}\log\left(3Z^2+4Z-6\right)=\log X+\log C=\log CX$

বা $\log\left(3Z^2+4Z-6\right)=\log\left(CX\right)^{-2}$

বা $3\left(\frac{Y}{X}\right)^2+4\frac{Y}{X}-6=C^{-2}X^{-2}$

বা $3\left(\frac{y-1}{x-\frac{3}{2}}\right)^2+4\frac{y-1}{x-\frac{3}{2}}-6=C^{-2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^{-2}$, এইটোৱেই নিৰ্ণেয় সমাধান।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

প্ৰশ্ন ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(a) $\left(x^3+3xy^2\right)dx+\left(y^3+3x^2y\right)dy=0$

(b) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\tan\frac{y}{x}$

(c) $\left(x^2-4xy-2y^2\right)dx+\left(y^2-4xy-2x^2\right)dy=0$

(d) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+2y-3}{2x+y-3}$

৮.৬ ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ

$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ আকাৰৰ অৱকল সমীকৰণক প্ৰথম মাত্ৰাৰ ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ (linear differential equation) বুলি কোৱা হয়। ইয়াত $P(x)$ আৰু $Q(x)$ হ'ল x অৰ ফলন বা ধ্ৰুৱক। পৰতন্ত্ৰ চলক y আৰু ইয়াৰ অৱকলজ $\frac{dy}{dx}$ প্ৰথম মাত্ৰাত থাকে।

ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ সমাধান কৰাৰ পদ্ধতি ঃ

ধৰা হ'ল প্ৰামাণিক ৰৈখিক সমীকৰণ $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ অৰ $R(x)$ এটা অনুকলন গুণক (integrating factor)।

উভয় পক্ষক $R(x)$ এৰে পূৰণ কৰি, আমি পাওঁ

$$R(x)\frac{dy}{dx}+P(x)R(x)y=Q(x)R(x).$$

ইয়াক এনেধৰণে লিখিব পাৰি

$$\frac{d}{dx}(yR(x))+P(x)R(x)y-y\frac{dR(x)}{dx}=Q(x)R(x)$$

$R(x)$ অক আমি এনেদৰে লওঁ যাতে বাওঁপক্ষক পূৰ্ণ অৱকল হিচাপে ল'ব পাৰি। গতিকে আমি ল'লোঁ

$$P(x)R(x)y=y\frac{dR(x)}{dx}$$

বা $P(x)dx=\frac{dR(x)}{R(x)}$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $\log R=\int Pdx$ আৰু $R=e^{\int Pdx}$.

অৰ্থাৎ $e^{\int Pdx}$ হ'ল সমীকৰণটোৰ এটা অনুকলন গুণক (integrating factor, IF)।

গতিকে, সুষম সমীকৰণটো হ'বগৈ $\frac{d}{dx}\left(y.e^{\int pdx}\right)=Qe^{\int pdx}$

$$y.e^{\int pdx}=\int\left(Qe^{\int pdx}\right)dx+C$$

বা, $y=e^{-\int pdx}\left[\int\left(Qe^{\int pdx}\right)dx+C\right]$

মন্তব্য ঃ x আৰু y সালসলনি কৰি, আমি পাম যে

$\frac{dx}{dy}+P(y)x=Q(y)$ৰ সমাধান হ'ব

$$x=e^{-\int pdy}\left[\int\left(Qe^{\int pdy}\right)dy+C\right]$$

টোকা ঃ ঘাতাংকীয় আৰু সূচকীয় ফলনৰ অধোলিখিত ধৰ্মবোৰ সঘনে ব্যৱহাৰ কৰা হয় ঃ

(i) $e^{\log x}=x$ (ii) $e^{m\log x}=x^m$ (iii) $e^{-m\log x}=\frac{1}{x^m}$

উদাহৰণ 1 ঃ সমাধান কৰক $\frac{dy}{dx}+2y\cot x=3x^2\cos ec^2x$

সমাধান ঃ প্ৰামাণিক সমীকৰণ $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ৰ লগত তুলনা কৰি আমি পাওঁ

$P = 2\cot x$, $Q = 3x^2 \operatorname{cosec}^2 x$

অনুকলন গুণক (I.F) $= e^{\int p dx} = e^{\int 2\cot x dx} = e^{2\log \sin x} = \sin^2 x$

∴ সমাধানটো হ'ব

$$y \sin^2 x = \int 3x^2 \operatorname{cosec}^2 x \sin^2 x dx$$
$$= 3\int x^2 dx$$
$$= x^3 + C$$

বা $y = \operatorname{cosec}^2 x\left(x^3 + C\right)$.

উদাহৰণ 2 ঃ সমাধান কৰক $\frac{dy}{dx} - y\tan x = e^x$

সমাধান ঃ প্রামাণিক সমীকৰণ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ ৰ লগত তুলনা কৰি আমি পাওঁ

$P = -\tan x$, $Q = e^x$.

(I.F) $= e^{-\int \tan x dx} = e^{\log \cos x} = \cos x$

∴ সমাধানটো হ'ব

$$y.\cos x = \int \left(e^x.\cos x\right)dx + C$$
$$= \frac{1}{2}e^x\left(\sin x + \cos x\right) + C$$

বা $y = \frac{1}{2}e^x \sec x\left(\sin x + \cos x + 2C\right)$

উদাহৰণ 3 ঃ সমাধান কৰক $\cos^2 x\frac{dy}{dx} + y = \tan x$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকৰণটো প্রামাণিক ৰৈখিক সমীকৰণ হিচাপে এনেদৰে প্রকাশ কৰিব পাৰি

$$\frac{dy}{dx} + \sec^2 xy = \tan x \sec^2 x$$

$\frac{dy}{dx} + Py = Q$, দিয়া আছে

এই ক্ষেত্রত $P = \sec^2 x$, $Q = \tan x \sec^2 x$.

ইয়াত $\text{I.F} = e^{\int \sec^2 x dx} = e^{\tan x}$

∴প্রদত্ত অৱকল সমীকৰণটোৰ সমাধান হ'ল

$$y.e^{\tan x} = \int e^{\tan x}.\tan x \sec^2 x dx + C$$
$$= e^{\tan x}\left(\tan x - 1\right) + C$$

বা $y = \left(\tan x - 1\right) + Ce^{-\tan x}$.

উদাহৰণ 4 ঃ সমাধান কৰক $\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx}+2xy=x\sqrt{1-x^2}$

সমাধান ঃ সমীকৰণটোক প্ৰামাণিক আকাৰত এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$\frac{dy}{dx}+\frac{2x}{\left(1-x^2\right)}y=\frac{x\sqrt{1-x^2}}{\left(1-x^2\right)}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$\frac{dy}{dx}+Py=Q$,দিয়া আছে

এই ক্ষেত্ৰত $P=\frac{2x}{\left(1-x^2\right)}, Q=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

$$\text{I.F}=e^{\int\frac{2x}{1-x^2}dx}=e^{-\log\left(1-x^2\right)}=\frac{1}{1-x^2}$$

$$\therefore y.\frac{1}{1-x^2}=\int\frac{1}{1-x^2}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx+C$$

$$=\int\frac{x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}dx+C$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+C$$

বা $y=-\sqrt{1-x^2}+C\left(1-x^2\right)$.

উদাহৰণ 5 ঃ সমাধান কৰক $\left(1+y^2\right)dx=\left(\tan^{-1}y-x\right)dy$

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত সমীকৰণটোক এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$\frac{dx}{dy}+\frac{x}{1+y^2}=\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}$$

$$\text{I.F}=e^{\int\frac{dy}{1+y^2}}=e^{\tan^{-1}y}$$

$$\therefore \text{সমাধান হ'ল } x.e^{\tan^{-1}y}=\int\frac{\tan^{-1}y}{1+y^2}.e^{\tan^{-1}y}dy$$

$$=\int u.e^u du \text{ if } u=\tan^{-1}x.$$

$$=ue^u-e^u+C$$

$$=\left(\tan^{-1}y-1\right)e^{\tan^{-1}y}+C$$

বা $x=\tan^{-1}y-1+Ce^{-\tan^{-1}y}$.

উদাহৰণ 6 ঃ সমাধান কৰক $\left(x+\tan y\right)dy=\sin 2ydx$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকৰণটো এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$\frac{dx}{dy} - \cos ec2yx = \frac{\tan y}{\sin 2y} = \frac{1}{2}\sec^2 y$$

$$\text{I.F} = e^{\int pdy} = e^{-\int \cos ecydy} = e^{-\frac{1}{2}\log\tan y} = e^{\log\sqrt{\cot y}} = \sqrt{\cot y}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হ'ল

$$x\sqrt{\cot y} = \frac{1}{2}\int \sec^2 y\sqrt{\cot y}dy + C$$

$$= \frac{1}{2}\int (\tan y)^{-\frac{1}{2}} d(\tan y) + C$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(\tan y)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{\tan y} + C$$

বা $x = \tan y + C\sqrt{\tan y}$

উদাহৰণ 7 ঃ সমাধান কৰক $(x + y + a)\frac{dy}{dx} = y^2 + b$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকৰণটো এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + y + a}{y^2 + b}$$

বা $$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y^2 + b} + \frac{y + a}{y^2 + b}$$

বা $$\frac{dx}{dy} - \frac{x}{y^2 + b} = \frac{y + a}{y^2 + b}$$

$$\text{I.F} = e^{-\int \frac{1}{y^2+b}dy} = e^{-\frac{1}{\sqrt{b}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{b}}}$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হ'ল

$$x.e^{-\frac{1}{\sqrt{b}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{b}}} = \int \frac{y + a}{y^2 + b}.e^{-\frac{1}{\sqrt{b}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{b}}}dy + C.$$

$$= -\int (y + a).e^{-\frac{1}{\sqrt{b}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{b}}} d\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{b}}\right)y + C.$$

$$= -(y + a).e^{-\frac{1}{\sqrt{b}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{b}}} + \int e^{-\frac{1}{\sqrt{b}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{b}}} d\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{b}}\right)y + C.$$

$$= -(y+a)e^{-\frac{1}{\sqrt{b}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{b}}} + e^{-\frac{1}{\sqrt{b}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{b}}} + C$$

বা $x = -(y+a)+1+Ce^{\frac{1}{\sqrt{b}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{b}}}$

বা $x+y+a-1 = Ce^{\frac{1}{\sqrt{b}}\tan^{-1}\frac{y}{\sqrt{b}}}$



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৩

প্ৰশ্ন নং 1 ঃ তলৰ অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(a) $x\cos x\frac{dy}{dx} + y(x\sin x + \cos x) = 1$

(b) $x(1-x^2)dy + (2x^2y - y - ax^3)dx = 0$

(c) $(1+x+xy^2)dy + (y+y^3)dx = 0$

(d) $\left(\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - \frac{y}{\sqrt{x}}\right)\frac{dx}{dy} = 1$

(e) $(y\log y)dx + (x - \log y)dy = 0$

৮.৭ বাৰ্ণ'লিৰ সমীকৰণ

$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ আকাৰৰ সমীকৰণক বাৰ্ণ'লিৰ সমীকৰণ (Bernoulli's equation) বোলে। ইয়াত P আৰু Q হ'ল x ফলন।

$z = y^{1-n}$ প্ৰতিষ্ঠানৰ দ্বাৰা সমীকৰণটোক $\frac{dz}{dx} + P(1-n)z = Q(1-n)$, ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ আকাৰলৈ নিব পাৰি। এতিয়া অনায়াসে এইটো সমাধান কৰিব পাৰি।

$z = y^{1-n}$ অক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$.

$\therefore$ বাৰ্ণ'লিৰ সমীকৰণটো হ'বগৈ

$$\frac{1}{1-n}y^n\frac{dz}{dx} + P.y = Qy^n$$

বা $\frac{dz}{dx} + Pz(1-n) = Q(1-n)$, এইটো এটা ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ।

I.F $= e^{\int(1-n)Pdx}$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সমাধানটো হ'ল

$$z.e^{\int(1-n)Pdx} = \int e^{\int(1-n)Pdx}.Q(1-n)dx + C$$



জেমছ বাৰ্ণ'লিৰ (1655–1705) এজন চুইছ গণিতজ্ঞ আছিল।

টোকা ঃ জেমছ বার্ণলিৰ (1655–1705) নাম অনুসৰি সমীকৰণটোক বার্ণলিৰ সমীকৰণ বোলে।

উদাহৰণ 1 ঃ সমাধান কৰক $\cos x \frac{dy}{dx} = y \sin x + y^3 \cos^2 x$

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত সমীকৰণটোক এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$\frac{dy}{dx} - y \frac{\sin x}{\cos x} = y^3 \cos x$$

উভয় পক্ষক y^3 এৰে হৰণ কৰি আমি পাওঁ $y^{-3} \frac{dy}{dx} - y^{-2} \frac{\sin x}{\cos x} = \cos x$

ধৰা হ'ল $z = y^{-2}$ $\therefore \frac{dz}{dx} = -2y^{-3} \frac{dy}{dx}$

$\therefore$ সমীকৰণটো হ'লগৈ

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} - z \frac{\sin x}{\cos x} = \cos x$$

বা $\frac{dz}{dx} + 2z \frac{\sin x}{\cos x} = -2 \cos x$, এইটো ৰৈখিক সমীকৰণ।

$$\therefore \text{I. F} = e^{\int \frac{2 \sin x}{\cos x} dx} = \sec^2 x$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধানটো হ'ল

$z.\sec^2 x = \int \sec^2 x(-2 \cos x)dx = -2\int \sec x dx$

বা $z.\sec^2 x = -2 \log(\sec x + \tan x) + C$

বা $y^{-2} \sec^2 x = -2 \log(\sec x + \tan x) + C$

বা $\sec^2 x + 2y^2 \log(\sec x + \tan x) = Cy^2$

উদাহৰণ 2 ঃ সমাধান কৰক $\frac{dy}{dx} + x \sin 2y = x^3 \cos^2 y$

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত সমীকৰণটোক $\cos^2 y$ ৰে হৰণ কৰি আমি পাওঁ

$$\sec^2 y \frac{dy}{dx} + 2x \sin y \sec y = x^3$$

বা $\sec^2 y \frac{dy}{dx} + 2x \tan y = x^3$

ধৰা হ'ল $z = \tan y$ $\therefore \frac{dz}{dx} = \sec^2 y \frac{dy}{dx}$

$\therefore$ সমীকৰণটো হ'লগৈ

$\frac{dz}{dx} + 2xz = x^3$, এইটো এটা ৰৈখিক সমীকৰণ।

I.F $= e^{\int x dx} = e^{x^2}$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সমাধান হ'ল

$$z.e^{x^2} = \int e^{x^2}.x^3 dx$$

$$= \int e^u . u \frac{du}{2} \qquad (u = x^2)$$

$$= \frac{1}{2} u e^u - \frac{1}{2} \int e^u du$$

$$= \frac{1}{2}\left(ue^u - e^u\right) + C$$

বা $\tan y.e^{x^2} = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

বা $\tan y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} + Ce^{-x^2} = \frac{1}{2}\left(x^2 - 1\right) + Ce^{-x^2}$.

উদাহৰণ 3 ঃ সমাধান কৰক $\frac{dz}{dx} + \frac{z}{x}\log z = \frac{z}{x}(\log z)^2$

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত সমীকৰণটোক z এৰে হৰণ কৰি, আমি পাওঁ

$$\frac{1}{z}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}\log z = \frac{1}{x}(\log z)^2$$

$v = \log z$, $\frac{dv}{dx} = \frac{1}{z}\frac{dz}{dx}$

$\therefore$ সমীকৰণটো হ'লগৈ

$$\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = \frac{1}{x}v^2$$

$$\text{বা } \frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}\frac{1}{v} = \frac{1}{x}$$

আকৌ, আমি $t = \frac{1}{v}$ বহুৱাওঁ

$\therefore \frac{dt}{dx} = -\frac{1}{v^2}\frac{dv}{dx}$

$\therefore$ সমীকৰণটো হ'লগৈ

$$\frac{dt}{dx} - \frac{1}{x}t = -\frac{1}{x}$$

I.F $= e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\log x} = \frac{1}{x}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হ'ল

$$\frac{1}{x}.t = \int \frac{1}{x}.\left(-\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{x} + C$$

বা $t = 1 + Cx$

বা $\dfrac{1}{\log z} = 1 + Cx$

বা $\log z = \dfrac{1}{1+Cx}$

বা $z = e^{\frac{1}{1+Cx}}$

উদাহৰণ 4 ঃ সমাধান কৰক $x\dfrac{dy}{dx} + y = xy^3$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকৰণক xy^3 ৰে হৰণ কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{xy^2} = 1$$

$z = \dfrac{1}{y^2}$ বহুওৱা হ'ল। $\therefore \dfrac{dz}{dx} = -2y^3\dfrac{dy}{dx}$.

$\therefore$সমীকৰণটো হ'লগৈ

$$-\frac{1}{2}\frac{dz}{dx} + \frac{1}{x}z = 1$$

বা $\dfrac{dz}{dx} + \left(\dfrac{-2}{x}\right)z = -2$

$\text{I.F} = e^{-\int\frac{2}{x}dx} = e^{-2\log x} = \dfrac{1}{x^2}$

$\therefore$নির্ণেয় সমাধান হ'ল

$$z.\frac{1}{x^2} = \int \frac{1}{x}.(-2)dx$$

$$= \frac{2}{x} + C$$

বা $\dfrac{1}{x^2y^2} = \dfrac{2}{x} + C$

উদাহৰণ 5 ঃ সমাধান কৰক $(x+a)\dfrac{dy}{dx} - 3y = (x+a)^5$

সমাধান ঃ $z = x + a$ বহুওৱা হ'ল $\frac{dz}{dx} = 1$ আৰু $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz}.\frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz}$

$\therefore$ সমীকৰণটো হ'বগৈ

$$z\frac{dy}{dz} - 3y = z^5$$

বা $$\frac{dy}{dz} + \left(\frac{-3}{z}\right)y = z^4$$

$$\text{I.F} = e^{\int\left(\frac{-3}{z}\right)dz} = e^{-3\log z} = \frac{1}{z^3}$$

$\therefore$ সমাধানটো হ'ল

$$y.\frac{1}{z^3} = \int \frac{1}{z^3}.z^4 dz$$

$$= \int z dz$$

$$= \frac{z^2}{2} + C$$

বা $$\frac{y}{(x+a)^3} = \frac{1}{2}(x+a)^2 + C$$

বা $$y = \frac{1}{2}(x+a)^5 + C(x+a)^3.$$



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৪

প্ৰশ্ন নং 1 ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক

(a) $x\frac{dy}{dx} + y\log y = xye^x$

(b) $\left(x^2y^3 + xy\right)\frac{dy}{dx} = 1$

(c) $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2}y = x\sqrt{y}$

(d) $xy\left(1 + xy^2\right)\frac{dy}{dx} = 1$



৮.৯ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- চলকবোৰ পৃথক কৰি আৰু উভয় পক্ষক অনুকলন কৰি $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ আকাৰৰ অৱকল সমীকৰণৰ সমাধান উলিয়াব পাৰি।
- $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ আকাৰৰ অৱকল সমীকৰণক বৈখিক সুষম সমীকৰণ বুলি কোৱা হয় যদি $M(x,y)$ আৰু $N(x,y)$ একে মাত্ৰাৰ সুষম ফলন। সমীকৰণটোক এনে ধৰণেও প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x,y)}{N(x,y)} = -\frac{\phi\left(\frac{y}{x}\right)}{\varphi\left(\frac{y}{x}\right)} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

$y = vx$ বা $x = vy$ প্ৰতিষ্ঠাপনৰ দ্বাৰা আৰু পাছত চলক পৃথকীকৰণ কৰি সুষম অৱকল সমীকৰণৰ সমাধান নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।

- প্ৰথম মাত্ৰাৰ বৈখিক অৱকল সমীকৰণ $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ ৰ সমাধান হ'ল

$$y.e^{\int pdx} = \int \left(Qe^{\int pdx}\right)dx + C$$

$e^{\int Pdx}$ অক সমীকৰণটোৰ অনুকলন গুণক বুলি কোৱা হয়। সেইদৰে, প্ৰথম মাত্ৰাৰ বৈখিক অৱকল সমীকৰণ $\frac{dx}{dy} + P(y)x = Q(y)$ৰ সমাধান হ'ল

$$xe^{\int Pdy} = \int \left(Qe^{\int Pdy}\right)dy + C$$

$e^{\int Pdy}$ ক সমীকৰণটোৰ অনুকলন গুণক বুলি কোৱা হয়।

- $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ সমীকৰণটোক বাৰ্ণ'লিৰ সমীকৰণ বুলি কোৱা হয়। ইয়াত P, Q হ'ল x অৰ ফলন।

$z = y^{1-n}$ প্ৰতিষ্ঠাপনৰ দ্বাৰা সমীকৰণটোক $\frac{dz}{dx} + P(1-n)z = Q(1-n)$ বৈখিক অৱকল সমীকৰণলৈ পৰিৱৰ্তন কৰিব পাৰি। এতিয়া সমীকৰণটোক অনায়াসে সমাধান কৰিব পাৰি।



৮.১০ অধিক জানিবলৈ

1) Tenenbaum, Morris and Pollard, Harry. Ordinary Differential Equations, Dover Publications, Inc, N.Y 11501.

2) Differential Equations : An Introduction with Mathematica. Clay C. Ross, second Edition, Springer.

3) Differential Equations : Linear, Nonlinear, ordinary, partial. A.C. King, J. Billinggham and S.R. Otto, Cambridge-2003.

4) Differential equations with Application and Programs. S. Balachandra Rao and H.R. Anuradha, University Press(India) Limited 1996.



৮.১১ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) চলকসমূহ পৃথক কৰি আমি পাওঁ $\frac{3e^x}{1-e^x}dx+\frac{\sec^2 y}{\tan y}dy=0$

উভয় পক্ষক অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $\int\frac{3e^x}{1-e^x}dx+\int\frac{\sec^2 y}{\tan y}dy=\log C$

বা $-3\log\left(1-e^x\right)+\log\left(\tan y\right)=\log C$

বা $\log\left(\tan y\right)=\log\left(1-e^x\right)^3+\log C$

বা $\tan y=C\left(1-e^x\right)^3$.

(ii) দিয়া আছে, $\frac{dy}{dx}=e^{x+y}+x^2e^{x^3+y}$

বা $\frac{dy}{dx}=e^y\left(e^x+x^2e^{x^3}\right)$

চলকসমূহ পৃথক কৰি আমি পাওঁ $e^{-y}dy=\left(e^x+x^2e^{x^3}\right)dx$ ... (1)

(1) অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $\int e^{-y}dy=\int e^x dx+\int x^2e^{x^3}dx$

বা $-e^{-y} = e^x + \frac{1}{3}\int e^t dt + C$, $x^3 = t$ বহুৱাই

বা $-e^{-y} = e^x + \frac{1}{3}e^t + C$

বা $-e^{-y} = e^x + \frac{1}{3}e^{x^3} + C$.

(iii) চলকসমূহ পৃথক কৰি প্ৰদত্ত অৱকল সমীকৰণটোক এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{1+x^2} \quad \ldots (1)$$

(1) অৰ উভয় পক্ষক অনুকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\int \frac{dy}{1+y^2} = \int \frac{dx}{1+x^2}$$

বা, $\tan^{-1} y = \tan^{-1} x + C$

এইটোৱেই নিৰ্ণেয় সমাধান।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ (i) ধৰা হ'ল $4x + y + 1 = v$ ... (1)

(1) অক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ $4 + \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$

বা $\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 4$ ... (2)

(1) আৰু (2) ৰ পৰা, $\frac{dv}{dx} - 4 = v^2$ বা $\frac{dv}{dx} = 4 + v^2$

x আৰু v চলক দুটা পৃথক কৰি আমি পাওঁ $dx = \frac{dv}{4+v^2}$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ $x + C' = \frac{1}{2} \times \tan^{-1}\left(\frac{v}{2}\right)$

বা, $2x + 2C' = \tan^{-1}\left(\frac{v}{2}\right)$

বা, $2x + C = \tan^{-1}\left(\frac{v}{2}\right)$, য'ত $C = 2C'$

বা, $v = 2\tan(2x + C)$

বা $4x + y + 1 = 2\tan(2x + C)$.

(ii) ধৰা হ'ল $x + y = v$ ... (1)

(1) অক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ $1+\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$

বা $\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}-1$ ... (2)

(1) আৰু (2) ৰ পৰা,

$$\frac{dv}{dx}-1=\sin v+\cos v$$

বা $\frac{dv}{dx}=1+\sin v+\cos v$

বা $\frac{dv}{dx}=1+2\sin\frac{v}{2}\cos\frac{v}{2}+2\cos^2\frac{v}{2}-1$

বা $\frac{dv}{dx}=2\cos^2\frac{v}{2}\left[1+\tan\frac{v}{2}\right]$

চলকসমূহ পৃথক কৰি আমি পাওঁ $dx=\frac{dv}{2\cos^2\frac{v}{2}\left[1+\tan\frac{v}{2}\right]}$

$$\text{বা } dx=\frac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{v}{2}dv}{1+\tan\frac{v}{2}}$$

উভয় পক্ষক অনুকলন কৰি, আমি পালোঁ $x+C=\log\left[1+\tan\frac{v}{2}\right]$

$$\text{বা } x+C=\log\left[1+\tan\left(\frac{x+y}{2}\right)\right]$$

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ (i) (a) দিয়া আছে, $\frac{dy}{dx}=-\frac{x^3+3xy^2}{y^3+3x^2y}=-\frac{1+3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(\frac{y}{x}\right)^3+3\left(\frac{y}{x}\right)}$ ... (1)

ধৰা হ'ল $\frac{y}{x}=v$ অৰ্থাৎ $y=vx$ $\therefore$ $\frac{dy}{dx}=v+x\left(\frac{dv}{dx}\right)$ ... (2)

(1) আৰু (2) ৰ পৰা, $v+x\frac{dv}{dx}=-\frac{1+3v^2}{v^3+3v}$

বা $x\frac{dv}{dx} = -\frac{1+3v^2}{v^3+3v} - v$

বা $x\frac{dv}{dx} = -\frac{v^4+6v^2+1}{v^3+3v}$

বা $4\frac{dx}{x} = -\frac{4v^3+12v}{v^4+6v^2+1}dv$

উভয় পক্ষক অনুকলন কৰি আমি পাওঁ

$$4\log x = -\log\left(v^4+6v^2+1\right)+\log C$$

বা $\log x^4 = \log\left[\frac{C}{v^4+6v^2+1}\right]$

বা $x^4\left(v^4+6v^2+1\right) = C$

বা $y^4+6x^2y^2+x^4 = C$, এইটোৱেই নির্ণেয় সমাধান।

(b) ধৰা হ'ল $\frac{y}{x} = v$, অর্থাৎ $y = vx$ $\therefore \frac{dy}{dx} = v + x\left(\frac{dv}{dx}\right)$ ... (1)

$\therefore$ প্রদত্ত সমীকৰণটো হ'বগৈ

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \tan v$$

বা $\frac{dx}{x} = \frac{\cos v}{\sin v}dv$

উভয় পক্ষক অনুকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\log x + \log C = \log \sin v$$

বা $Cx = \sin v$

বা $Cx = \sin\left(\frac{y}{x}\right)$.

(c) প্রদত্ত সমীকৰণটোক এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-4xy-2y^2}{2x^2+4xy-y^2}$$

ধৰা হ'ল $\frac{y}{x} = v$, অর্থাৎ $y = vx$ $\therefore \frac{dy}{dx} = v + x\left(\frac{dv}{dx}\right)$ ... (1)

$\therefore$প্রদত্ত সমীকৰণটো হ'বগৈ

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1-4v-2v^2}{2+4v-v^2}$$

বা $x\frac{dv}{dx}=\frac{1-4v-2v^2}{2+4v-v^2}-v$

বা $x\frac{dv}{dx}=\frac{1-6v-6v^2+v^3}{2+4v-v^2}$

বা $3\frac{dx}{x}+\frac{3\left(v^2-4v-2\right)}{v^3-6v^2-6v+1}dv=0$

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ

$3\log x+\log\left(v^3-6v^2-6v+1\right)=\log C$

বা $x^3\left(v^3-6v^2-6v+1\right)=C$

বা $x^3\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^3-6\left(\frac{y}{x}\right)^2-6\left(\frac{y}{x}\right)+1\right\}=C$

বা $y^3-6xy^2-6x^2y+x^3=C$.

(d) এই ক্ষেত্ৰত $\frac{a}{a'}=\frac{1}{2}$ আৰু $\frac{b}{b'}=\frac{2}{1}$, so $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$.

ধৰা হ'ল $x=X+h$ আৰু $y=Y+k$, য'ত h আৰু k ধ্ৰুৱক।

$\therefore dx=dX$ আৰু $dy=dY$. সেয়ে প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'ব

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X+2Y+\left(h+2k-3\right)}{2X+Y+\left(2h+k-3\right)} \quad \text{... (1)}$$

আমি h,k দুটা এনেদৰে লওঁ যাতে $h+2k-3=0$ আৰু $2h+k-3=0$ ... (2)

(2) সমাধান কৰি আমি পাওঁ $h=1,k=1$

(1) অৰ পৰা $\frac{dY}{dX}=\frac{X+2Y}{2X+Y}=\frac{1+\left(\frac{2Y}{X}\right)}{2+\left(\frac{Y}{X}\right)}$ ... (3)

ধৰা হ'ল $\frac{Y}{X}=v$, অৰ্থাৎ $Y=vX$

$\therefore \frac{dY}{dX}=v+X\frac{dv}{dX}$ ... (4)

(3) আৰু (4)ৰ পৰা

$v+X\frac{dv}{dX}=\frac{1+2v}{2+v}$

বা $X\frac{dv}{dX}=\frac{1+2v}{2+v}-v=\frac{1-v^2}{2+v}$

বা $\frac{dX}{X}=\frac{(2+v)dv}{(1-v)(1+v)}=\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+v}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{1-v}\right)\right]dv$, অনুকলন কৰি, আমি পাওঁ

$$\log X+\log C=\frac{1}{2}\left[\log(1+v)-3\log(1-v)\right]$$

বা $2\log CX=\log\frac{1+v}{(1-v)^3}$

বা $X^2C^2=\frac{1+v}{(1-v)^3}$

বা $X^2C^2\left(1-\frac{Y}{X}\right)^3=1+\frac{Y}{X}$

বা $C^2(X-Y)^3=X+Y$

বা $C^2\{x-1-(y-1)\}^3=x-1+y-1$

বা $C'\{x-y\}^3=x+y-2$, $C'=C^2$. এইটোৱেই নিৰ্ণেয় সমাধান।

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৩

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ (a) প্রদত্ত সমীকৰণটোক এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$\frac{dy}{dx}+\left(\tan x+\frac{1}{x}\right)y=\frac{\sec x}{x} \quad \text{... (1)}$$

$\text{I.F}=e^{\int\left(\tan x+\frac{1}{x}\right)dx}=e^{\log\sec x+\log x}=e^{\log(x\sec x)}=x\sec x$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হ'ল

$yx\sec x=\int\sec^2 x\,dx+C$

বা $yx\sec x=\tan x+C$.

(b) প্রদত্ত সমীকৰণটোক এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$x(1-x^2)\frac{dy}{dx}+y(2x^2-1)=ax^3$$

বা $\frac{dy}{dx}+\frac{(2x^2-1)}{x(1-x^2)}y=\frac{ax^2}{1-x^2}$ ... (1)

ইয়াত $P=\frac{\left(2x^2-1\right)}{x\left(1-x^2\right)}=-\frac{1}{x}-\frac{1}{2(x+1)}-\frac{1}{2(x-1)}$ আৰু $Q=\frac{ax^2}{1-x^2}$ ... (2)

$$\int Pdx=-\int\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{2(x+1)}+\frac{1}{2(x-1)}\right]dx$$

$$=-\left[\log x+\frac{1}{2}\times\log(x+1)+\frac{1}{2}\times\log(x-1)\right]$$

$$=-\left[\log x+\frac{1}{2}\times\log\left(x^2-1\right)\right]$$

$$=-\log\left[x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$=\log\left[x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}$$

$$\text{I.F}=e^{\int Pdx}=e^{\log\left[x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right]^{-1}}=\left\{x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right\}^{-1}=\frac{1}{\left\{x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}\right\}}$$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সমাধানটো হ'ল

$$\frac{y}{x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}=\int\frac{ax^2}{1-x^2}\times\frac{1}{x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}dx+C$$

বা $\frac{y}{x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}=C-a\int\frac{x}{\left(x^2-1\right)^{\frac{3}{2}}}dx$

বা $\frac{y}{x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}=C-\frac{a}{2}\int\frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}}$, বহুৱাই $x^2-1=t$ আৰু $2xdx=dt$

বা $\frac{y}{x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}=C-\frac{a}{2}\left[\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{\left(-\frac{1}{2}\right)}\right]$

বা $\frac{y}{x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}=C+\frac{a}{\sqrt{t}}$

বা $\frac{y}{x\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}=C+\frac{a}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}$

বা $y=ax+Cx\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}$

(c) প্রদত্ত সমীকৰণটোক এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$\frac{dx}{dy}+\frac{1+x\left(1+y^2\right)}{y\left(1+y^2\right)}=0$$

বা $\frac{dx}{dy}+\frac{x}{y}=-\frac{1}{y\left(1+y^2\right)}$

ইয়াত $P=\frac{1}{y}$ আৰু $Q=-\frac{1}{y\left(1+y^2\right)}$

I.F $=e^{\int\frac{1}{y}dy}=e^{\log y}=y$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হ'ল

$$xy=-\int\frac{1}{y\left(1+y^2\right)}.ydy+C$$

বা $xy=-\tan^{-1}y+C$.

(d) প্রদত্ত সমীকৰণটোক এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{\sqrt{x}}y=\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$\frac{dy}{dx}+Py=Q$ সমীকৰণৰ লগত তুলনা কৰি, আমি পাওঁ

ইয়াত $P=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $Q=\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

I.F $=e^{\int Pdx}=e^{\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx}=e^{2\sqrt{x}}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান হ'ল

$$y.e^{2\sqrt{x}}=\int\frac{e^{-2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}.e^{2\sqrt{x}}dx+C$$

বা $y.e^{2\sqrt{x}}=\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx+C$

বা $y.e^{2\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C$.

(e) প্ৰদত্ত সমীকৰণটোক এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$\frac{dx}{dy}+\frac{x}{y\log y}=\frac{1}{y}$$

$\frac{dx}{dy}+Px=Q$ সমীকৰণৰ লগত তুলনা কৰি, আমি পাওঁ

$$P=\frac{1}{y\log y}\ ,\quad Q=\frac{1}{y}$$

$$\therefore \text{ I.F } =e^{\int Pdy}=e^{\int\frac{1}{y\log y}dy}=e^{\log(\log y)}=\log y$$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সমাধান হ'ল

$$x\log y=\int\frac{1}{y}.\log y dy+C$$

বা $x\log y=\frac{1}{2}(\log y)^2+C$

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ 8

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (a) xy ৰে হৰণ কৰাৰ পাছত প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'বগৈ

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}\log y=e^x \quad \text{... (1)}$$

ধৰা হ'ল $\log y=v \quad \therefore \ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{dx}$ ... (2)

$\therefore$ সমীকৰণ (1) হ'বগৈ $\frac{dv}{dx}+\frac{1}{x}v=e^x$, এইটো ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ।

ইয়াত $P=\frac{1}{x}$ আৰু $Q=e^x$

$$\text{I.F } =e^{\int\frac{1}{x}dx}=e^{\log x}=x$$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সমাধান হ'ল

$$v.x=\int xe^x dx+C$$

বা $v.x=xe^x-\int e^x dx+C$

বা $v.x=xe^x-e^x+C$

বা $x\log y=e^x(x-1)+C$

(b) প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'বগৈ

$$\frac{dx}{dy}=x^2y^3+xy$$

বা $\frac{dx}{dy} - yx = y^3x^2$

বা $x^{-2}\left(\frac{dx}{dy}\right) - x^{-1}y = y^3$ ... (1)

ধৰা হ'ল $x^{-1} = v$ $\therefore -x^{-2}\left(\frac{dx}{dy}\right) = \frac{dv}{dy}$

$\therefore$ সমীকৰণ (1) হ'ব $-\frac{dv}{dy} - yv = y^3$

বা $\frac{dv}{dy} + yv = -y^3$, এইটো ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ।

I.F $= e^{\int ydy} = e^{\frac{y^2}{2}}$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সমাধান হ'ল

$v.e^{\frac{y^2}{2}} = -\int y^3 e^{\frac{y^2}{2}} dy + C = -2\int te^t dt + C$, $\frac{y^2}{2} = t$ বহুৰাই $ydy = dt$

বা $v.e^{\frac{y^2}{2}} = -2\left[t.e^t - \int 1.e^t dt\right] + C$

বা $v.e^{\frac{y^2}{2}} = -2\left(te^t - e^t\right) + C$

বা $x^{-1}.e^{\frac{y^2}{2}} = -2e^{\frac{y^2}{2}}\left(\frac{y^2}{2} - 1\right) + C$, $x^{-1} = v$

বা $\frac{1}{x} = -2\left(\frac{y^2}{2} - 1\right) + Ce^{-\frac{y^2}{2}}$

(c) প্ৰদত্ত সমীকৰণটোক $\sqrt{y}$ ৰে পূৰণ কৰি আমি পাওঁ

$y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2}y^{\frac{1}{2}} = x$ ... (1)

ধৰা হ'ল $y^{\frac{1}{2}} = z$ $\therefore \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ বা $y^{-\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} = 2\frac{dz}{dx}$

$\therefore$ সমীকৰণ (1) হ'বগৈ

$2\frac{dz}{dx} + \frac{x}{1-x^2}z = x$

বা $\frac{dz}{dx}+\frac{x}{2\left(1-x^2\right)}z=\frac{x}{2}$, z এইটো ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ।

I.F $=e^{\int\frac{x}{2\left(1-x^2\right)}dx}=e^{-\frac{1}{4}\int\frac{-2x}{1-x^2}dx}=e^{-\frac{1}{4}\log\left(1-x^2\right)}=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{4}}$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সমাধান হ'ল

$$z.\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{4}}=\int\frac{x}{2}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{4}}dx+C$$

বা $$z.\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{4}}=-\frac{1}{4}\int\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{4}}\left(-2x\right)dx+C$$

বা $$z.\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{4}}=-\frac{1}{4}\frac{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}}+C$$

বা $$z=-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)+C\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{4}}$$

বা $$\sqrt{y}=-\frac{1}{3}\left(1-x^2\right)+C\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{4}}.$$

(d) প্ৰদত্ত সমীকৰণটোক এনেদৰে লিখিব পাৰি $\frac{dx}{dy}-yx=y^3x^2$

x^2 এৰে হৰণ কৰি আমি পাওঁ $x^{-2}\frac{dx}{dy}-yx^{-1}=y^3$ ... (1)

ধৰা হ'ল $x^{-1}=z$ $\therefore -x^{-2}\frac{dx}{dy}=\frac{dz}{dx}$ বা $x^{-2}\frac{dx}{dy}=-\frac{dz}{dx}$

$\therefore$ সমীকৰণ (1) হ'বগৈ

$$-\frac{dz}{dx}-yz=y^3$$

বা $\frac{dz}{dx}+yz=-y^3$, z এইটো এটা ৰৈখিক সমীকৰণ।

I.F $=e^{\int ydx}=e^{\frac{1}{2}y^2}$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় সমাধান হ'ল

$$z.e^{\frac{1}{2}y^2}=\int-y^3e^{\frac{1}{2}y^2}dy+C$$

বা $$z.e^{\frac{1}{2}y^2}=\int-y^2e^{\frac{1}{2}y^2}.ydy+C$$

বা $z.e^{\frac{1}{2}y^2} = -\int 2te^t dt + C$, $t = \frac{y^2}{2}$ বহুৱাই

ধ্ৰুৱক

বা $z.e^{\frac{1}{2}y^2} = -2\left[te^t - \int e^t dt\right] + C$

বা $z.e^{\frac{1}{2}y^2} = -2\left(te^t - e^t\right) + C$

বা $z.e^{\frac{1}{2}y^2} = -2e^{\frac{1}{2}y^2}\left(\frac{1}{2}y^2 - 1\right) + C$

বা $z = -2\left(\frac{1}{2}y^2 - 1\right) + Ce^{-\frac{1}{2}y^2}$

বা $z = 2 - y^2 + Ce^{-\frac{1}{2}y^2}$.



৮.১২ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(a) $\frac{y}{x}.\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + x^2 + y^2 + x^2y^2}$

(b) $e^y\left(1 + x^2\right)\frac{dy}{dx} - 2x\left(1 + e^y\right) = 0$

(c) $\frac{dy}{dx} - x\tan\left(y - x\right) = 1$

(d) $\sin\left(x + y\right)dy = dx$

প্ৰশ্ন ২ ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(a) $x\left(x - y\right)\frac{dy}{dx} = y\left(x + y\right)$

(b) $x\frac{dy}{dx} = y + x\cos^2\frac{y}{x}$

প্ৰশ্ন ৩ ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(a) $\left(2x - 2y + 5\right)\frac{dy}{dx} = x - y + 3$

(b) $(6x+2y-10)\frac{dy}{dx}-2x-9y+29=0$

(c) $(3y-7x+7)dx+(7y-3x+3)dy=0$

(d) $(2x^2+3y^2-7)xdx-(3x^2+2y^2-8)ydy=0$

প্ৰশ্ন ৪ ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(a) $(1+x^3)\frac{dy}{dx}+6x^2y=1+x^2$

(b) $(x+2y^3)\frac{dy}{dx}=y$

(c) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2y\log y+y-x}$

(d) $\sqrt{1-y^2}dx=(\sin^{-1}y-x)dy$

প্ৰশ্ন ৫ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(a) $2\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^2}$

(b) $(x+1)\frac{dy}{dx}+1=2e^{-y}$

(c) $\frac{dy}{dx}+\frac{y\log y}{x}=\frac{y(\log y)^2}{x^2}$

(d) $y(2xy+e^x)dx=e^xdy$

*** ***** ***