চাৰি বছৰীয়া স্নাতক পাঠ্যক্ৰম
(চি. বি. চি. এচ., এন. ই. পি. ২০২০ অনুসৰি)

বলবিজ্ঞান আৰু পৰিসংখ্যাৰ উপাদান

ষষ্ঠ ছেমিষ্টাৰ
গণিত

কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

বিষয় বিশেষজ্ঞ

অধ্যাপক বিপন হাজৰিকা, গণিত বিভাগ, গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়
ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা, কটন মহাদ্যিালয়, গুৱাহাটী

সমন্বয়ৰক্ষীঃ ড°হৰেকৃষ্ণ ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

প্রস্তুতি গোটৰ সদস্য

অধ্যায়	*অৰিহণা যোগাইছে*	*ভাষান্তৰকাৰী*
১, ২, ৩, ৪, ৭, ৮, ৯,১০	ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা	অধ্যায় ১, ২, ৩, ৪,৫,৬, ৭, ৮, ৯, ১০, ১২,১৩,১৪
৫, ৬, ১১, ১২,১৩,১৪,	কটন মহাবিদ্যালয়, গুৱাহাটী	ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা

সম্পাদনাঃ

বিষয়বস্তু সম্পাদনা ঃ ড° দীপক কুমাৰ শর্মা, কটন মহাবিদ্যালয় (অধ্যায় ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ১১)
ড° হৰেকৃষ্ণ ডেকা (অধ্যায় ৭, ৮, ৯, ১২, ১৩, ১৪)

গাঁথনিক সম্পাদনা ঃ ড° হৰেকৃষ্ণ ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

মার্চ, ২০২৬
ISBN: 978-93-89559-99-6

© কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ৰ দ্বাৰা সর্বস্বত্ব সংৰক্ষিত।

This Self Learning Material (SLM) of the Krishna Kanta Handiqui State Open University is made available under a Creative Commons Attribution-Non Commercial-Share Alike 4.0 License (international): http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ৰ হৈ পঞ্জীয়কৰ দ্বাৰা মুদ্রিত আৰু প্রকাশিত।

মুখ্য কার্যালয় ঃ পাটগাঁও, ৰাণী গেট, গুৱাহাটী - ৭৮১ ০১৭; Web : www.kkhsou.in
উপ-মুখ্য কার্যালয় ঃ হাউচফেড কমপ্লেক্স, দিচপুৰ, গুৱাহাটী - ৭৮১ ০০৬

এই শিক্ষণ সামগ্রী প্রস্তুতিৰ বাবে আর্থিক অনুদান আগবঢ়োৱা
দূৰ শিক্ষা ব্যুৰো, বিশ্ববিদ্যলয় অনুদান আয়োগৰ ওচৰত বিশ্ববিদ্যালয় কৃতজ্ঞ।

পাঠ্যবিষয় পৰিচয়

'বল বিজ্ঞান আৰু পৰিসংখ্যাৰ উপাদান' হ'ল স্নাতক (কলা) গণিত বিষয়ৰ ষষ্ঠ পাঠ্যবিষয়। এই পাঠ্যবিষয়টি চৈধ্যটা অধ্যায়েৰে গঠিত।

এই পাঠ্যবিষয়টিৰ প্ৰথম অধ্যায়টিত বল আৰু বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ বলৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব।

দ্বিতীয় অধ্যায়টিত সামতলিক বলৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব। এই অধ্যায়টিত লামিৰ উপপাদ্য বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব।

তৃতীয় অধ্যায়ত ভ্ৰামক আৰু বলযুগ্ম বিষয়ে জানিব পাৰিব।

চতুৰ্থ অধ্যায়ত ঘৰ্ষণ আৰু ঘৰ্ষণৰ প্ৰকাৰৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব।

পঞ্চম অধ্যায়টিত 'কণিকাৰ শুদ্ধগতিবিজ্ঞান' আৰু আনুষংগিক পদ কিছুমানৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব। আপেক্ষিক বেগ, ধ্ৰুৱক ধৰণৰ অধীনত ৰৈখিক গতি আৰু নিউটনৰ গতিবিধিৰ বিষয়েও এই অধ্যায়টিত আলোচনা কৰা হ'ব।

সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতিৰ বিষয়ে ষষ্ঠ অধ্যায়টিত আলোচনা কৰা হৈছে।

বিভিন্ন ধৰণৰ কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপ যেনে-সমান্তৰ মাধ্য, গুণোত্তৰ মাধ্য, ৰহাত্মক মাধ্য, মধ্যমা, বহুলক, চতুৰ্থকৰ বিষয়ে সপ্তম অধ্যায়টিত আলোচনা কৰা হৈছে।

বিভিন্ন ধৰণৰ প্ৰসাৰৰ মাপ যেনে পৰিসৰ, চতুৰ্থক বিচলন, মাধ্যবিচলন, প্ৰামাণিক বিচলনৰ বিষয়ে অষ্টম অধ্যায়টিত আলোচনা কৰা হৈছে।

ঘূৰ্ণক অপ্ৰতিসাম্য আৰু ককুদতাৰ বিষয়ে নৱম অধ্যায়টিত আলোচনা কৰা হৈছে।

এই পাঠ্যক্ৰমৰ দশম অধ্যায়টিত সম্ভাৱিতাৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব। সম্ভাৱিতাৰ কিছুমান আকৰ্ষণীয় তথ্যৰ বিষয়েও এই অধ্যায়টি আলোচনা কৰা হৈছে।

চৰ্তসাপেক্ষে সম্ভাৱিতা, সম্ভাৱিতাৰ গুণিতক উপপাদ্য, পূৰ্ণ সম্ভাৱিতা আৰু বেইজৰ উপপাদ্যৰ বিষয়ে একাদশ অধ্যায়টিত জানিব পাৰিব।

এই পাঠ্যবিষয়ৰ দ্বাদশ অধ্যায়টিত যাদৃচ্ছিক চলক আৰু সম্ভাৱিতা বণ্টনৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।

এই পাঠ্যবিষয়ৰ ত্ৰয়োদশ অধ্যায়টিত দ্বিপদ বণ্টন আৰু পয়ছন পণ্টনৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।

এই পাঠ্যবিষয়টি চতুৰ্দশ অধ্যায়টিত অধ্যায়টিত প্ৰসামান্য বণ্টন, প্ৰসামান্য বণ্টনৰ ধৰ্মৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিব পাৰবি।

এই পাঠ্যবিষয়টি অধ্যয়ন কৰোতে মূল পাঠত 'জানি থোৱা ভাল' বাকচবোৰৰ মূল পাঠৰ সৈতে জড়িত কিছু গুৰুত্বপূৰ্ণ তথ্যৰ সম্ভেদ আছে। প্ৰতিটো অধ্যায়ত থকা 'অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ' যোগে আগবঢ়োৱা প্ৰশ্নাৱলীয়ে অধ্যয়নৰ অগ্ৰগতি সম্পৰ্কে স্ব-পৰীক্ষণৰ সুবিধা দিব। অধ্যয়নৰ লগে লগে উক্ত প্ৰশ্নাৱলীৰ উত্তৰসমূহ লিখি শেষত দিয়া 'অগ্ৰগতিৰ খতিয়ানে'ৰ সৈতে ৰিজাই চোৱাটো অধিক লাভদায়ক হ'ব। অধ্যায়বোৰৰ শেষত 'আৰ্হি প্ৰশ্ন' হিচাপেকেইটিমান প্ৰশ্নৰ আৰ্হিও তুলি দিয়া হৈছে।

বিষয় সূচী

পৃষ্ঠা নং

অধ্যায় ১ ঃ **বল** ২-২৭
বল, বিভিন্ন প্রকাৰৰ বল, এটা কণিকাত ক্রিয়া কৰা দুটা বলৰ লব্ধৰ মান আৰু দিশ।

অধ্যায় ২ ঃ **সামতলিক বল** ২৮-৪৪
লামিৰ উপপাদ্য, একাধিক একসমতলীয় বলৰ অধীনত কণিকাৰ সাম্যাৱস্থা, সমান্তৰাল বল, বলযুগ্ম, ঘর্ষণ।

অধ্যায় ৩ ঃ ভ্রামক আৰু বলযুগ্ম ৪৫-৫১
এটা বিন্দুৰ সাপেক্ষে বলৰ ভ্রামক, বলযুগ্ম

অধ্যায় ৪ ঃ ঘর্ষণ ৫২-৫৬
সংজ্ঞা, ঘর্ষণৰ প্রকাৰ, ঘর্ষণৰ বিধি।

অধ্যায় ৫ ঃ **কণিকাৰ শুদ্ধগতিবিজ্ঞান** ৫৭-৭৯
কণিকাৰ শুদ্ধগতিবিজ্ঞান আৰু আনুষংগিক পদ, আপেক্ষিক বেগ, কৌণিক বেগ, ধ্রুৱক ত্বৰণৰ অধীনত ৰৈখিক গতি, নিউটনৰ গতি বিধি।

অধ্যায় ৬ ঃ **সৰল পর্যাবৃত্ত গতি আৰু আনুষংগিক সমস্যা** ৮০-৯৭
সৰল পর্যাবৃত্ত গতি, সৰল পর্যাবৃত্ত গতিৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা, সৰল দোলকৰ গতি।

অধ্যায় ৭ঃ **কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপ** ৯৮-১১৮
সমান্তৰ মাধ্য (বা মাধ্য), গুণোত্তৰ মাধ্য, হৰাত্মক মাধ্য, মধ্যমা, বহুলক, চতুর্থক।

অধ্যায ৮ঃ **প্রসাৰৰ মাপ** ১১৯-১৪৩
প্রসাৰৰ ধাৰণা পৰিসৰ, চতুর্থক বিচলন, মাধ্য বিচলন, প্রামাণিক বিচলন, বিচৰণ গুণাংক।

অধ্যায় ৯ঃ **ঘূর্ণক, অপ্রতিসাম্য আৰু ককুদতা** ১৪৪-১৬১
ঘূর্ণক অপৰিণত আৰু কেন্দ্রীয় ঘূর্ণকৰ মাজৰ সম্বন্ধ অপ্রতিসাম্য অপ্রতিসাম্যৰ মাপ ককুদতা, ককুদতাৰ মাপ।

অধ্যায় ১০ঃ **সম্ভাৱিতা** ১৬২-১৮৪
প্রাথমিক পাৰিভাষিক শব্দাৱলী, সম্ভাৱিতাৰ ধ্রুপদী সংজ্ঞা, সম্ভাৱিতা স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক সংজ্ঞা, সম্ভাৱিতাৰ কেইটামান উপপাদ্য।

অধ্যায় ১১ঃ **চর্তসাপেক্ষে সম্ভাৱিতা** ১৮৫-২০৪
চর্তসাপেক্ষে সম্ভাৱিতা, সম্ভাৱিতাৰ গুণিতক উপপাদ্য, পূর্ণ সম্ভাৱিতা, বেইজৰ উপপাদ্য।

অধ্যায় ১২ঃ **যাদৃচ্ছিক চলক আৰু সম্ভাৱিতা বণ্টন** ২০৫-২১৮
যাদৃচ্ছিক চলক, বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক, অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক, যাদৃচ্ছিক চলকৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন, যাদৃচ্ছিক চলকৰ মাধ্য আৰু প্রসৰণ।

অধ্যায় ১৩ঃ **তাত্ত্বিক বণ্টন I** ২১৯-২৩৯
বার্ণ'লি অভিপ্রয়োগ, দ্বিপদ (আৰু বার্ণ'লি) বণ্টন), পয়ছন বণ্টন।

অধ্যায় ১৪ঃ **তাত্ত্বিক বণ্টন II** ২৪০-২৪৩
অবিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বণ্টন, প্রসামান্য বণ্টন, প্রসামান্য বণ্টনৰ ধর্ম, প্রামাণিক প্রসামান্য চলক।

অধ্যায় ১ ঃ বল

অধ্যায় গাঁথনি

১.১ উদ্দেশ্য

১.২ পৰিচয়

১.৩ বল

১.৪ বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ বল

১.৫ এটা কণিকাত ক্ৰিয়া কৰা দুটা বলৰ লব্ধৰ মান আৰু দিশ

১.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১.৭ অধিক জানিবলৈ

১.৮ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন

১.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- বলৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ বলৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- এটা কণিকাত ক্ৰিয়া কৰা বলসমূহৰ লব্ধৰ মান আৰু দিশ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

১.২ পৰিচয়

বলবিজ্ঞান (Mechanics) ভৌতিক বিজ্ঞানসমূহৰ প্ৰাচীনতম। চাৰিও পিনৰ বস্তুসমূহৰ স্থিৰাৱস্থা বা গতিৰ বিষয়ে ইয়াত আলোচনা কৰা হয়। বলবিজ্ঞান দুই ধৰণৰ,— স্থিতিবিজ্ঞান (statics) আৰু গতিবিজ্ঞান (Dynamics)। স্থিতিবিজ্ঞানক বস্তুৰ স্থিৰাৱস্থাৰ বা সাম্যাৱস্থাৰ বিজ্ঞান বুলিব পাৰি। আনহাতেদি গতিবিজ্ঞান তথা গতিবিজ্ঞানত প্ৰধান মৌলিক ধাৰণা হ'ল বল। এই অধ্যায়ত আমি বল আৰু ইয়াৰ বিভিন্ন প্ৰকাৰ সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম। লগতে এটা কণিকাত ক্ৰিয়া কৰা বলসমূহৰ লব্ধৰ মান আৰু দিশ নিৰ্ণয় কৰিম।

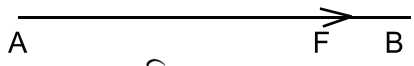
১.৩ বল

কোনো বস্তুৰ ওপৰত ক্ৰিয়া কৰা যি কাৰকে বস্তুটোৰ স্থিৰাৱস্থা বা সৰল ৰেখাও সুষম গতি সলায় বা সলাবলৈ প্ৰয়াস কৰে, তাক বল (force) বুলি কোৱা হয়।

বল এটাৰ তিনিটা বৈশিষ্ট্য আছে, যথা, (i) মান, (ii) দিশ, (iii) ক্ৰিয়া বিন্দু।

বল এটাৰ দিশ আৰু মান দুয়োটাই আছে। গতিকে বল এটা ভেক্টৰ ৰাশি।

ধৰা হ'ল $\overrightarrow{AB}$ এ বল F বুজায়। ই এটা নির্দিষ্ট বস্তুত ক্রিয়া কৰি আছে। AB দৈর্ঘই বলটোৰ মান বুজায়। কাঁড় চিনে বলটোৰ দিশ বুজায়। AB ৰেখাখণ্ডৰ আদি বিন্দু A য়ে বলটোৰ ক্রিয়া বিন্দু বুজায়। বলটোৰ দিশৰ ৰেখাডালক ক্রিয়াৰেখা বোলা হয়।



চিত্র 1.1

মাপৰ একক

ভৌতিক ৰাশি জুখিবলৈ এককৰ বিভিন্ন পদ্ধতি আছে, যথা,

(i) CGS (centimentre-gram-second) পদ্ধতি,

(ii) MKS (metre-kilogram-second) পদ্ধতি,

(iii) FPS (foot-pound-second) পদ্ধতি।

MKS পদ্ধতি হ'ল CGS পদ্ধতিৰ সম্প্রসাৰণ। আজিকালি সমগ্র পৃথিৱীত এইটো ব্যৱহৃত হয়।

বিভিন্ন পদ্ধতি তলত দেখুওৱা হ'ল।

	ভৰ	দৈর্ঘ্য	সময়	বল
	(Mass)	(Length)	(Time)	(Force)
CGS	gram (g)	Centimetre (cm)	second (s)	Dyne
MKS	kilogram (kg)	metre (m)	Second (s)	Newton (N)
FPS	pound (lb)	foot (ft)	Second (s)	Poundal (lb. wt.)

১.৪ বিভিন্ন প্রকাৰৰ বল

(i) আকর্ষণ আৰু বিকর্ষণ

বস্তুৰ প্রকৃত স্পর্শ বা কোনো দৃশ্যমান মাধ্যম অবিহনে টনা (pull) বা ঠেলা (push) ক্রমে আকর্ষণ (attraction) বা বিকর্ষণ (repulsion) বোলা হয়।

উদাহৰণ ঃ পৃথিৱীৰ আকর্ষণ, চুম্বকৰ আকর্ষণ বা বিকর্ষণ।

যি বলেৰে পৃথিৱীয়ে এটা বস্তুক আকর্ষণ কৰে তাক বস্তুটোৰ ওজন (weight) বোলে।

(ii) টান আৰু হেঁচা

যদি এটা বস্তু এডাল ষ্ট্রিঙেৰে টনা হয়, ষ্ট্রিংডালত সঞ্চালিত হোৱা বলক টান (tension) বুলি কোৱা হয়।

যদি এটা বস্তু এডাল দণ্ডেৰে (rod) ঠেলা হয়, দণ্ডডালত সঞ্চালিত হোৱা বলক হেঁচা (thrust) বোলে।

(iii) ক্রিয়া আৰু প্রতিক্রিয়া

যদি এটা বস্তুৱে আন এটা বস্তুৰ ওপৰত বল সঞ্চালন কৰে, দ্বিতীয় বস্তুটোৱেও প্রথম

বস্তুটোত এটা বল সঞ্চালন কৰে। এই বল দুটাৰ মান একে, কিন্তু দিশ বিপৰীত। তদুপৰি, বল দুটাৰ ক্ৰিয়া ৰেখা একে। গতিকে ক্ৰিয়া (action) আৰু প্ৰতিক্ৰিয়া (reaction) সমান আৰু বিপৰীত।

(iv) ঘৰ্ষণ

দুটা বস্তুৰ এটা বা দুয়োটাই খহটা (rough) এটা আনটোৰ পিঠিয়েদি চোঁচৰি বা বাগৰি গ'লে গতিৰ বিপৰীত দিশত বাধাৰ সৃষ্টি হয়। ঘৰ্ষণ (friction) হ'ল সেই বল যিটোৱে এটাক আনটোৰ পিঠিয়েদি চোঁচৰি বা বাগৰি যোৱাত বাধা দিয়ে।

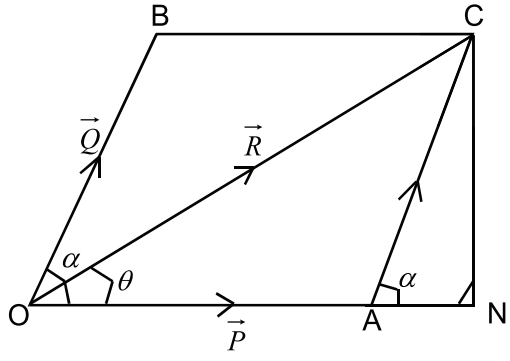
বলৰ সামান্তৰিক

যদি দুটা বা ততোধিক বলে এটা কণিকাত ক্ৰিয়া কৰে, সিহঁতৰ মুঠ প্ৰভাৱ (effect) সদায় এটা বলৰ সমতুল্য। এই বলটোক বলসমূহৰ লব্ধ (resultant) বোলে। যদি দুটা বলে এটা কণিকাত ক্ৰিয়া কৰে, বলৰ সামান্তৰিক বিধিৰ সহায়ত লব্ধ নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি। এইটো স্থিতি বিজ্ঞানৰ মৌলিক উপপাদ্য।

বলৰ সামান্তৰিক বিধি

যদি এটা বিন্দুত ক্ৰিয়া কৰা দুটা বলক সেই বিন্দুটোৰ পৰা টনা এটা সামান্তৰিকৰ দুটা বাহুৰ দ্বাৰা মান আৰু দিশত ৰূপায়িত কৰিব পাৰি। সিহঁতৰ লব্ধক সেই বিন্দুটোৰ পৰা টনা সামান্তৰিকটোৰ কৰ্ণৰ দ্বাৰা ৰূপায়িত কৰিব পাৰি।

অৰ্থাৎ যদি O বিন্দুত ক্ৰিয়া কৰা $\vec{P}$ আৰু $\vec{Q}$ বল দুটাক ক্ৰমে $\overrightarrow{OA}$ আৰু $\overrightarrow{OB}$ ৰ দ্বাৰা মান আৰু দিশত ৰূপায়িত কৰিব পাৰি, সিহঁতৰ লব্ধ $\vec{R}$ অক O ৰ পৰা টনা কৰ্ণ $\overrightarrow{OC}$ ৰে ৰূপায়িত কৰিব পাৰি। অৰ্থাৎ $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \quad \left(\because \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}\right)$



চিত্ৰ 1.2

১.৫ এটা কণিকাত ক্ৰিয়া কৰা দুটা বলৰ লব্ধৰ মান আৰু দিশ

ধৰা হ'ল P আৰু Q বল দুটাই এটা বস্তুৰ O বিন্দুত ক্ৰিয়া কৰে। ধৰা হ'ল বল দুটাৰ মাজৰ কোণ α ।

ধৰা হ'ল $\overrightarrow{OA}$ আৰু $\overrightarrow{OB}$ এ P আৰু Q বল বুজায়। OACB সামান্তৰিকটো সম্পূৰ্ণ কৰা হ'ল।

বলৰ সামান্তৰিক বিধিৰ পৰা, $\overrightarrow{OC}$ কৰ্ণই মান আৰু দিশত লব্ধ R বুজাব। ধৰা হ'ল লব্ধৰ ক্ৰিয়াৰেখাই P বলৰ ক্ৰিয়াৰেখাৰ লগত Q কোণ কৰে।

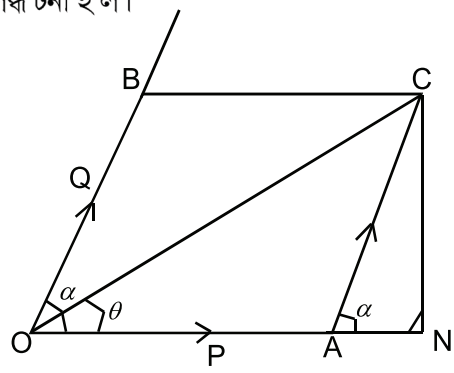
প্ৰথম ক্ষেত্ৰ ঃ α এটা সূক্ষ্ম কোণ

C ৰ পৰা বৰ্ধিত OA ৰ ওপৰত CN লব্ধ টনা হ'ল।

চিত্ৰৰ পৰা,

$\angle CAN = \angle BOA = \alpha$

CNA সমকোণী ত্ৰিভুজৰ পৰা



চিত্ৰ 1.3

$\sin\angle CAN = \frac{CN}{AC}$

$\cos\angle CAN = \frac{AN}{AC}$

$\therefore\ CN = AC\sin\angle CAN = OB\sin\angle CAN$

$\therefore\ CN = Q\sin\alpha$

$AN = AC\cos\angle CAN = OB\cos\angle CAN$

$\therefore\ AN = Q\cos\alpha$

$\therefore$ ON = OA + AN = P + Q cos α

এতিয়া ONC সমকোণী ত্ৰিভুজৰ পৰা

$OC^2 = ON^2 + CN^2$

or, $R^2 = (P + Q\cos\alpha)^2 + Q^2\sin^2\alpha$

or, $R^2 = P^2 + 2PQ\cos\alpha + Q^2\sin^2\alpha$

$\therefore\ R^2 = P^2 + 2PQ\cos\alpha + Q^2$ (i) ($\because \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$)

(1)অৰ পৰা আমি লব্ধ R অৰ মান পাওঁ।

আকৌ ONC সমকোণী ত্ৰিভুজৰ পৰা

$\cos\theta = \frac{ON}{OC} = \frac{P + Q\cos\alpha}{R}$ i.e. $R\cos\theta = P + Q\cos\alpha$

$\sin\theta = \frac{CN}{OC} = \frac{Q\sin\alpha}{R}$ i.e. $\therefore R\sin\theta = Q\sin\alpha$ . . . (2)

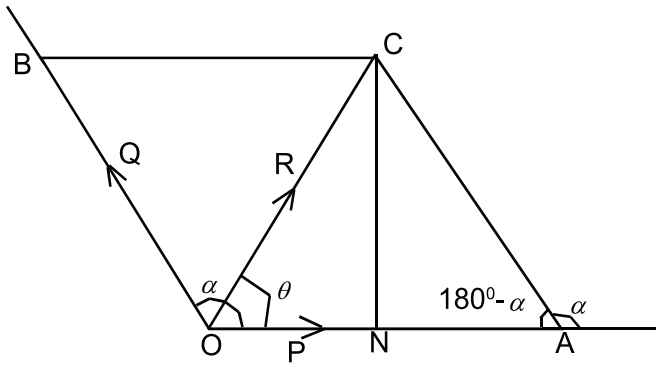
(2)ৰ পৰা আমি লব্ধ R অৰ দিশ পাওঁ।

আকৌ, (2)ৰ পৰা $\tan\theta = \frac{\theta\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰ ঃ α এটা স্থূল কোণ

Cৰ পৰা OA ৰ ওপৰত CN লব্ধ টনা হ'ল।

চিত্রৰ পৰা, $\angle CAN = 180^0 - \alpha$



চিত্র 1.4

CNA সমকোণী ত্রিভুজৰ পৰা $\sin\angle CAN = \frac{CN}{AC}$

$$\cos\angle CAN = \frac{AN}{AC}$$

$\therefore\ CN = AC\sin\angle CAN = OB\sin(180^0 - \alpha) = Q\sin\alpha$

$AN = AC\cos\angle CAN = OB\cos(180^0 - \alpha) = Q\cos\alpha$

$\therefore\ ON = OA - NA = P - (-Q\cos\alpha) = P + Q\cos\alpha$

ONC সমকোণী ত্রিভুজৰ পৰা

$OC^2 = ON^2 + CN^2$

or $R^2 = (P + Q\cos\alpha)^2 + Q^2\sin 2\alpha$

$\therefore\ R^2 = P^2 + 2PQ\cos\alpha + Q^2$ . . . (1)

(1)অৰ পৰা আমি লব্ধ R অৰ মান পাওঁ।

আকৌ, ONC সমকোণী ত্রিভুজৰ পৰা

$\cos\theta = \frac{ON}{OC} = \frac{P + Q\cos\alpha}{R}$ অর্থাৎ, $R\cos\theta = P + Q\cos\alpha$

$\sin\theta = \frac{CN}{OC} = \frac{Q\sin\alpha}{R}$ অর্থাৎ, $R\sin\theta = Q\sin\alpha$ . . . (2)

(2)ৰ পৰা আমি লব্ধ R অৰ দিশ পাওঁ।

আকৌ (2)ৰ পৰা, $\tan\theta = \frac{\theta\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$

অনুসিদ্ধান্ত

1. যদি $\alpha = 0$, অর্থাৎ, যদি বল দুটাই একে সৰলৰেখাত একে দিশত ক্রিয়া কৰে, তেনেহ'লে

(1) অৰ পৰা

$R^2 = P^2 + 2PQ\cos 0 + Q^2 = P^2 + 2PQ + Q^2$

$= (P+Q)^2$

$\therefore\ R = P+Q$

অর্থাৎ, লব্ধৰ মান = বল দুটাৰ মানৰ যোগফল।

এই ক্ষেত্ৰত, লব্ধৰ মান সৰ্বোচ্চ।

2. যদি $\alpha = 180^0$, অর্থাৎ, যদি বল দুটাই একে সৰল ৰেখাত বিপৰীত দিশত ক্ৰিয়া কৰে, গতিকে (1)অৰ পৰা,

$R^2 = P^2 + 2PQ\cos 180^0 + Q^2$

$= P^2 - 2PQ + Q^2 = (P \sim Q)^2$

$\therefore\ R = P \sim Q$

অর্থাৎ, লব্ধৰ মান = বল দুটাৰ মানৰ অন্তৰফল।

এই ক্ষেত্ৰত, লব্ধৰ মান সৰ্বনিম্ন।

3. যদি P = Q, অর্থাৎ, যদি বল দুটাৰ মান সমান হয়, তেনেহ'লে, (1) অৰ পৰা

$R^2 = P^2 + 2P^2\cos\alpha + P^2$

$= 2P^2(1+\cos\alpha) = 4P^2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$\therefore\ R = 2P\cos\frac{\alpha}{2}$

আকৌ, (3)ৰ পৰা,

$$\tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{Q+Q\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$= \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \tan\frac{\alpha}{2}$$

অর্থাৎ, $\theta = \frac{\alpha}{2}$

অর্থাৎ, যদি বল দুটাৰ মানসমান হয়, লব্ধই বল দুটাৰ মাজৰ কোণক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে।

4. যদি $\alpha = 90^0$, অর্থাৎ, যদি বল দুটা পৰস্পৰ লম্ব হয়, তেনেহ'লে (1)অৰ পৰা

$$R^2 = P^2 + 2PQ\cos 90^0 + Q^2 = P^2 + Q^2$$

অর্থাৎ, $R = (P^2+Q^2)^{\frac{1}{2}}$

আকৌ, (3)ৰ পৰা

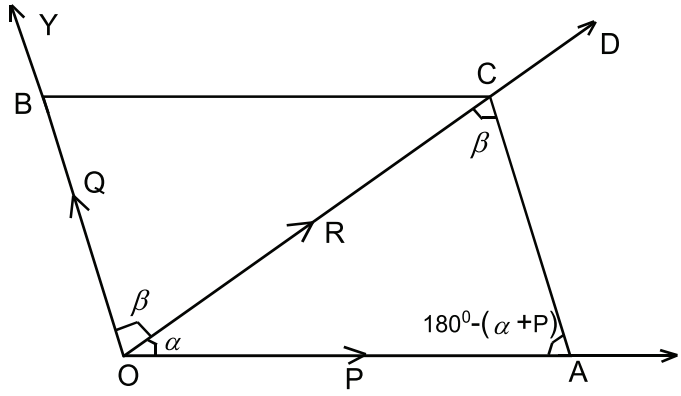
$$\tan\theta = \frac{Q}{P}$$

টোকা ঃ P আৰু Q ক R বলৰ উপাংশ বল বা উপাংশ (component forces or components) বোলা হয়।

উপাংশ আৰু বিভেদিত অংশ

বল R দিয়া আছে। ই O বিন্দুত ODত ক্রিয়া কৰে। OD ৰ দুটা বেলেগ ফালে OX আৰু OY দুটা প্রদত্ত দিশ।

ধৰা হ'ল OD য়ে OX অৰ লগত α কোণ কৰে আৰু OY ৰ লগত β কোণ কৰে।



চিত্র 1.5

ধৰা হ'ল OC এ বল R সম্পূর্ণৰূপে বুজায়। C বিন্দুৰ মাজেৰে, OX অৰ সমান্তৰালকৈ BC টনা হ'ল, আৰু AC ৰ সমান্তৰালকৈ OY টনা হ'ল। OACB সামান্তৰিকটো সম্পূর্ণ কৰা হ'ল। ধৰা হ'ল OA এ বল P সম্পূর্ণৰূপে বুজায় আৰু OB এ বল Q সম্পূর্ণৰূপে বুজায়। গতিকে, R অৰ উপাংশ P আৰু Q, আৰু P, Q ৰ লব্ধ R।

OAC ত্রিভুজৰ পৰা,

$$\frac{OA}{\sin\angle OCA} = \frac{AC}{\sin\angle AOC} = \frac{OC}{\sin\angle OAC}$$

বা, $$\frac{P}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(180^0 - (\alpha+\beta))}$$

বা, $$\frac{P}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$\therefore P = \frac{R\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

$$Q = \frac{R\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

দেখা গ'ল যে যদি R, α , β দিয়া থাকে, আমি P, Q সম্পূর্ণৰূপে নির্ধাৰণ কৰিব পাৰোঁ।

নিগমন ঃ যদি $\alpha+\beta=90^0$, তেনেহ'লে $\beta=90^0-\alpha$.

$$\therefore\ P=\frac{R\sin(90^0-\alpha)}{\sin 90^0}=R\cos\alpha$$

$Q=R\sin\alpha$.

$R\cos\alpha$ আৰু $R\sin\alpha$ অক R বলৰ বিভেদক অংশ (resolved parts or resolutes) বোলা হয়।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ যদি $\alpha=0$,

R cos α = R cos 0 = R

আৰু R sin α = R sin0 = 0

গতিকে আমি দেখিলোঁ যে এটা বলৰ নিজৰ দিশত বলটো নিজেই, আৰু ইয়াৰ লৰ্ম্ব দিশত বিভেদিত অংশ হ'ল শূন্য।

উদাহৰণ 18N বলটোক এনে এটা দিশৰ লগত বিভেদন কৰক যাৰ লগত বলটোৱে 30^0 কোণ কৰে। প্ৰথম বলটোৰ লম্ব দিশতো বলটো বিভেদন কৰক।

সমাধান

প্ৰথম দিশত বিভেদিত অংশ = 18 cos30^0N

$$=18\times\frac{\sqrt{3}}{2}N=9\sqrt{3}N$$

দ্বিতীয় দিশত বিভেদিত অংশ = 18 sin30^0N

$$=18\times\frac{1}{2}N=9N$$

বিভেদিত অংশৰ উপপাদ্য

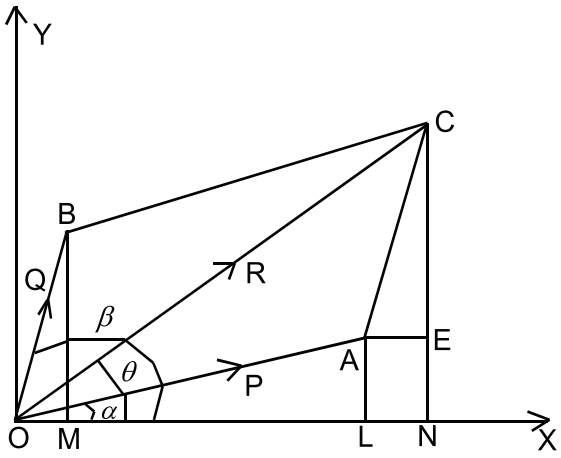
এটা বিন্দুত ক্ৰিয়া কৰা দুটা বলৰ, সমতলখনৰ যিকোনো দিশত, বিভেদিত অংশৰ বীজগণিতীয় সমষ্টি, সেই দিশত লৰ্ব্ধৰ বিভেদিত অংশৰ সমান।

প্ৰমাণ ধৰা হ'ল P আৰু Q বল দুটাই এটা বস্তুৰ কোনো এটা বিন্দু P ত ক্ৰিয়া কৰে। ধৰা হ'ল $\overrightarrow{OA}$ আৰু $\overrightarrow{OB}$ এ ক্ৰমে বল P আৰু Q বুজায়। OACB সামান্তৰিকটো সম্পূৰ্ণ কৰা হ'ল। কৰ্ণ $\overrightarrow{OC}$ য়ে মান আৰু দিশত লৰ্ব্ধ R বুজায়।

বলকেইটাৰ সমতলত OX আৰু OY পৰস্পৰ লম্ব দুটা দিশ।

ধৰা হ'ল P, Q, R এ OX দিশৰ লগত ক্ৰমে α, β, θ ৰ কোণ কৰে।

OX অৰ ওপৰত AL, BM, CN লম্ব টনা হ'ল আৰু CN অৰ ওপৰত AE লম্ব টনা হ'ল।



চিত্র 1.6

$\therefore$ OM = AE

OLA সমকোণী ত্রিভুজৰ পৰা

$$\cos\alpha = \frac{OL}{OA} \qquad \therefore\ OL = OA\cos\alpha$$

ONC সমকোণী ত্রিভুজৰ পৰা

$$\cos\theta = \frac{ON}{OC} \qquad \therefore\ ON = OC\cos\theta$$

OMB সমকোণী ত্রিভুজৰ পৰা

$$\cos\beta = \frac{OM}{OB} \qquad \therefore\ OM = OB\cos\beta$$

এতিয়া, ON = OL + LN

বা, ON = OL + AE

বা, ON = OL + OM

বা, OC $\cos\theta$ = OA$\cos\alpha$ + OB$\cos\beta$

অর্থাৎ, R$\cos\theta$ = P$\cos\alpha$ + Q$\cos\beta$

অর্থাৎ, OX অৰ দিশত R অৰ বিভেদিত অংশ

= OX অৰ দিশত P ৰ বিভেদিত অংশ + OX অৰ দিশত Q ৰ বিভেদিত অংশ

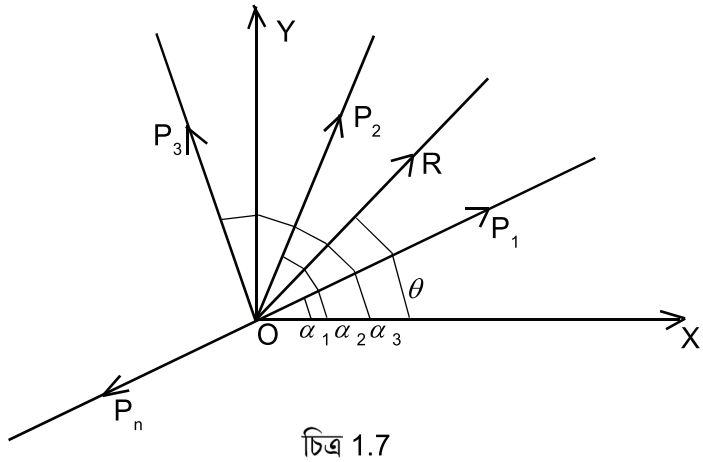
সম্প্রসাৰণ ঃ উপৰিউক্ত ফলটো সসীম সংখ্যক বললৈ সম্প্রসাৰণ কৰিব পাৰি। অর্থাৎ, এটা বিন্দুত ক্রিয়া কৰা যিকোনো সংখ্যক বলৰ সমতলখনৰ যিকোনো দিশত বিভেদিত অংশৰ বীজগণিতীয় সমষ্টি, সেই দিশত লব্ধৰ বিভেদিত অংশৰ সমান।

এটা বিন্দুত ক্রিয়া কৰা সসীম সংখ্যক বলৰ লব্ধ

ধৰা হ'ল O বিন্দুত n সংখ্যক বল $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ এ ক্রিয়া কৰি আছে।

বলকেইটাৰ সমতলত দুডাল পৰস্পৰ লম্ব ৰেখা OX আৰু OY লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ বলকেইটাৰ ক্রিয়াৰেখাই OX অৰ লগত ক্রমে $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ... \alpha_n$ কোণ কৰে।



চিত্র 1.7

ধৰা হ'ল বলকেইটাৰ লব্ধ R আৰু ইয়াৰ ক্রিয়াৰেখাই OX অৰ লগত θ কোণ কৰে।

ধৰা হ'ল OX আৰু OY অৰ দিশত $P_1, P_2, P_3, ..., P_n$ বলকেইটাৰ বিভেদিত অংশৰ বীজগণিতীয় সমষ্টি ক্রমে X আৰু Y ।

গতিকে,

$$R\cos\theta = X = P_1\cos\alpha_1 + P_2\cos\alpha_2 + ...+ P_n\cos\alpha_n$$

$$R\sin\theta = Y = P_1\sin\alpha_1 + P_2\sin\alpha_2 + ...+ P_n\sin\alpha_n$$

$$\therefore R_2 = X_2 + Y_2 \quad (1)$$

$$\tan\theta = \frac{Y}{X} \qquad (2)$$

(1)অৰ পৰা, আমি লব্ধৰ মান পাওঁ।

(2)ৰ পৰা, আমি লব্ধৰ দিশ পাওঁ।

টোকা ঃ এই ক্ষেত্রত X আৰু Y একেলগে শূন্য হ'ব নোৱাৰে। যদি X = 0, Y = 0, তেনেহ'লে R = 0, আৰু এই ক্ষেত্র বল প্রণালী সাম্যাৱস্থাত থাকিব।

উদাহৰণ 1 ঃ দুটা সমান মানৰ বলে এটা বিন্দুত ক্রিয়া কৰে। সিহঁতৰ লব্ধৰ মানো বল দুটাৰ প্রত্যেকৰে মানৰ সমান। বল দুটাৰ মাজৰ কোণটো নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল বল দুটাৰ প্রত্যেকৰে মান P.

$\therefore$ লব্ধৰ মানো P.

ধৰা হ'ল বল দুটাৰ মাজৰ কোণ α .

$\therefore P^2 = P^2 + P^2 + 2PP\cos\alpha$

অর্থাৎ, $1 + 2\cos\alpha = 0$

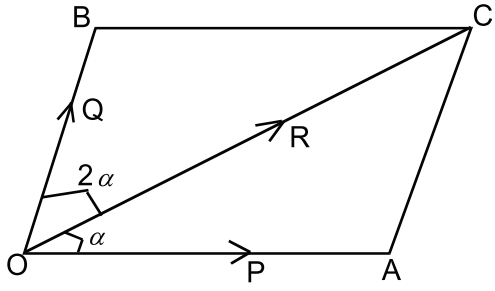
অর্থাৎ, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = 120^0$

$\therefore$ বল দুটাৰ মাজৰ কোণ 120^0.

উদাহৰণ 2 ঃ দুটা বলৰ মান P আৰু Q। বল দুটাৰ ক্ৰিয়া ৰেখাই সিহঁতৰ মাজৰ কোণক 1 : 2 অনুপাতত ভাগ কৰে। প্ৰমাণ কৰক যে সিহঁতৰ লব্ধৰ মান $\frac{P^2 - Q^2}{Q}$.

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল P আৰু Q বল দুটাৰ মাজৰ কোণ θ.



চিত্ৰ 1.8

দিয়া আছে যে লব্ধই বল দুটাৰ মাজৰ কোণক 1 : 2 অনুপাতত ভাগ কৰে।

$\therefore$ যদি $\angle COA = \alpha,\ \angle COB = 2\alpha$

$\therefore \theta = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$

এতিয়া $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos\theta$

বা, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 3\alpha$

বা, $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)$

আকৌ, $\tan\alpha = \frac{Q\sin 3\alpha}{P + Q\cos 3\alpha}$

বা, $(P + Q\cos 3\alpha)\tan\alpha = Q\sin 3\alpha$

বা, $(P + Q(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha))\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = Q(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)$

বা, $P\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2Q\sin\alpha$

বা, $\cos\alpha = \frac{P}{2Q}$

$\therefore R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\left(4\left(\frac{P}{2Q}\right)^3 - \frac{3P}{2Q}\right)$

$$= P^2 + Q^2 + \frac{P^4}{Q^2} - 3P^2$$

$$= \frac{P^2Q^2 + Q^4 + P^4 - 3P^2Q^2}{Q^2}$$

$$= \frac{P^4 + Q^4 - 2P^2Q^2}{Q^2}$$

$$= \frac{\left(P^2 - Q^2\right)^2}{Q^2}$$

$$\therefore \quad R = \frac{P^2 - Q^2}{Q}$$

উদাহৰণ 3 ঃ এটা বিন্দুত ক্ৰিয়া কৰা প্ৰদত্ত মাপৰ দুটা বলৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান ক্ৰমে P_1 আৰু P_2. যদি বল দুটাৰ মাজৰ কোণ 2α হয়, প্ৰমাণ কৰক যে সিহঁতৰ লব্ধৰ মাপ —

$$\left(P_1^2 \cos^2 \alpha + P_2^2 \sin^2 \alpha\right)^{\frac{1}{2}}$$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল বল দুটা P আৰু Q.

ধৰা হ'ল $P_1 = P + Q$

$P_2 = P - Q$, $(P > Q$ ধৰি$)$

$\therefore$ $2P = P_1 + P_2$ অৰ্থাৎ, $P = \frac{P_1 + P_2}{2}$

$2Q = P_1 - P_2$ অৰ্থাৎ, $P = \frac{P_1 - P_2}{2}$

ধৰা হ'ল P আৰু Q ৰ লব্ধ R.

$$\therefore \quad R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos 2\alpha$$

$$= \frac{1}{4}(P_1 + P_2)^2 + \frac{1}{4}(P_1 - P_2)^2 + 2.\frac{P_1 + P_2}{2}.\frac{P_1 - P_2}{2}.\cos 2\alpha$$

$$= \frac{1}{4}\left[2P_1^2 + 2P_2^2 + 2(P_1^2 - P_2^2)^2 \cos 2\alpha\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2P_1^2(1 + \cos 2\alpha) + 2P_2^2(1 - \cos 2\alpha\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[2P_1^2 . 2\cos^2 \alpha + 2P_2^2 . 2\sin^2 \alpha\right]$$

$$= P_1^2\, 2\cos^2 \alpha + P_2^2 \sin^2 \alpha$$

$$\therefore R = \left(P_1^2 \cos^2 \alpha + P_2^2 \sin^2 \alpha\right)^{\frac{1}{2}}$$

উদাহৰণ 4 ঃ এটা বিন্দুত ক্ৰিয়া কৰা P আৰু Q বল দুটাৰ মাজৰ কোণ θ আৰু সিহঁতৰ লব্ধ $(2n+1)\sqrt{P^2+Q^2}$. বল দুটাৰ মাজৰ কোণ $(90^0-\theta)$ হ'লে, লব্ধৰ মান $(2n-1)\sqrt{P^2+Q^2}$. প্ৰমাণ কৰক যে

$$\tan\theta=\frac{n-1}{n+1}$$

সমাধান ঃ আমি জানো

$$(2n+1)^2\left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^2=P^2+Q^2+2PQ\cos\theta$$

অৰ্থাৎ, $(4n^2+4n+1)(P^2+Q^2)-(P^2+Q^2)=2PQ\cos\theta$

অৰ্থাৎ, $(4n^2+4n+1-1)(P^2+Q^2)=2PQ\cos\theta$

অৰ্থাৎ, $4n+(n+1)(P^2+Q^2)=2PQ\cos\theta$ (1)

আকৌ, $(2n-1)^2\left(\sqrt{P^2+Q^2}\right)^2=P^2+Q^2+2PQ\cos(90^0-\theta)$

অৰ্থাৎ, $(4n^2-4n+1)(P^2+Q^2)-(P^2+Q^2)=2PQ\sin\theta$

অৰ্থাৎ, $(4n^2-4n+1-1)(P^2+Q^2)=2PQ\sin\theta$

অৰ্থাৎ, $4n(n-1)(P^2+Q^2)=2PQ\sin\theta$ (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা

$$\frac{2PQ\sin\theta}{2PQ\cos\theta}=\frac{4n(n-1)(P^2+Q^2)}{4n(n+1)(P^2+Q^2)}$$

অৰ্থাৎ, $\tan\theta=\frac{n-1}{n+1}$

উদাহৰণ 5 ঃ P আৰু 2P মানৰ দুটা বলে এটা বিন্দুত ক্ৰিয়া কৰে। যদি বল দুটাৰ মাজৰ কোণ 120^0, লব্ধই ডাঙৰ বলটোৰ দিশৰ লগত কৰা কোণটো নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল লব্ধই ডাঙৰ বল 2P ৰ দিশৰ লগত কৰা কোণটো θ .

$$\therefore\ \tan\theta=\frac{P\sin120^0}{2P+P\cos120^0}$$

$$=\frac{\frac{\sqrt{3}P}{2}}{2P-\frac{P}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore\ \theta=30^0$$

$\therefore$ লব্ধই ডাঙৰ বলটোৰ লগত 30^0 কোণ কৰে।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ 2N আৰু 3N মানৰ দুটা বলে এটা বিন্দুত ক্রিয়া কৰে আৰু বল দুটাৰ মাজৰ কোণ 60^0। লব্ধৰ মান নির্ণয় কৰক। লগতে লব্ধই 2N বলৰ দিশত কৰা কোণটো নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ঃ 4N আৰু 4N সমান মানৰ দুটা বলে এটা বিন্দুত ক্রিয়া কৰে। বল দুটাৰ মাজৰ কোণ 120^0 । লব্ধৰ মান নির্ণয় কৰক। লব্ধই বল দুটাৰ প্রত্যেকৰে লগত কৰা কোণটো নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ দুটা বলে সমকোণত ক্রিয়া কৰে আৰু বল দুটাৰ লব্ধ 8N। যদি লব্ধই এটা বলৰ লগত 60^0 কোণ কৰে, বল দুটা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ P আৰু 2P মানৰ দুটা বলে এটা বিন্দুত ক্রিয়া কৰে। লব্ধৰ মান $P\sqrt{3}$ হ'লে, বল দুটাৰ মাজৰ কোণ নির্ণয় কৰক। লগতে লব্ধই P মানৰ বলটোৰ দিশৰ লগত কৰা কোণটো নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ দুটা সমান মানৰ বলে এটা কণিকাত ক্রিয়া কৰে। যদি বল দুটাৰ লব্ধৰ বর্গ, বল দুটাৰ পূৰণফল তিনিগুণৰ সমান হয়, তেনেহ'লে বল দুটাৰ মাজৰ কোণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ দুটা বলে এটা বিন্দুত ক্রিয়া কৰে। যদি এটা বলৰ দিশ বিপৰীতমুখী কৰি দিয়া হয়, তেনেহ'লে লব্ধৰ দিশ এক সমকোণ ঘূৰে। প্রমাণ কৰক যে বল দুটা সম মানৰ।

প্রশ্ন নং ৭ঃ P আৰু Q বল দুটাই এটা বিন্দুত ক্রিয়া কৰে আৰু সিহঁতৰ লব্ধৰ মানো Q। আকৌ P আৰু 2Q (একে দিশত ক্রিয়া কৰা) বলৰ দুটাৰ লব্ধৰ মানো Q। প্রমাণ কৰক যে $P = \sqrt{3}Q$ । লগতে প্রমাণ কৰক যে বল দুটাৰ মাজৰ কোণ 150^0.

প্রশ্ন নং ৮ঃ P আৰু Q বল দুটাৰ লব্ধ $\sqrt{3}Q$ আৰু লব্ধই P বলৰ দিশত 30^0 কোণ কৰে। প্রমাণ কৰক যে P = Q বা P = 2Q.

প্রশ্ন নং ৯ঃ এটা বিন্দুত ক্রিয়া কৰা P আৰু Q বল দুটাৰ লব্ধ R। যদি Q দুগুণ হয়, R ও দুগুণ হয়। যদি Q বিপৰীতমুখী কৰা হয়, R আকৌ দুগুণ হয়। প্রমাণ কৰক যে $P : Q : R = \sqrt{2} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$



১.৬ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- কোনো বস্তুৰ ওপৰত ক্রিয়া কৰা যি কাৰকে বস্তুটোৰ স্থিৰাৱস্থা বা সৰল ৰেখাত সুষম গতি সলায় বা সলাবলৈ প্রয়াস কৰে, তাক বল বুলি কোৱা হয়।
- বল এটাৰ তিনিটা বৈশিষ্ট্য আছে, যথা (i) মান, (ii) দিশ, (iii) ক্রিয়া বিন্দু।
- বল এটাৰ দিশ আৰু মান দুয়োটাই আছে। গতিকে বল এটা ভেক্টৰ ৰাশি।
- ভৌতিক ৰাশি জুখিবলৈ এককৰ বিভিন্ন পদ্ধতি আছে, যথা (i) CGS পদ্ধতি, (ii) MKS পদ্ধতি (iii) FPS পদ্ধতি।

  MKS পদ্ধতি হ'ল CGS পদ্ধতিৰ সম্প্রসাৰণ। আজিকালি সমগ্র পৃথিৱীত এইটো ব্যৱহৃত হয়।
- বিভিন্ন প্রকাৰৰ বল আছে, যথা আকর্ষণ আৰু বিকর্ষণ, টান আৰু হেঁচা, ক্রিয়া আৰু প্রতিক্রিয়া, ঘর্ষণ।
- যদি দুটা বা ততোধিক বলে এটা কণিকাত ক্রিয়া কৰে, সিহঁতৰ মুঠ প্রভাৱ (effect) সদায় এটা বলৰ সমতুল্য। এই বলটোক বলসমূহৰ লব্ধ বোলে। যদি দুটা বলে এটা কণিকাত ক্রিয়া কৰে, বলৰ সামান্তৰিকৰ বিধিৰ সহায়ত লব্ধ নির্ণয় কৰিব পাৰি। এইটো স্থিতিবিজ্ঞানৰ মৌলিক উপপাদ্য।
- এটা বিন্দুত ক্রিয়া কৰা P আৰু Q বল দুটাৰ লব্ধ R আৰু বল দুটাৰ মাজৰ কোণ α হ'লে

  $R^2 = P^2 + 2PQ\cos\alpha + Q^2$.

  লব্ধ R অৰ দিশ তলৰ সম্বন্ধ দুটাৰ পৰা পাব পাৰি

  $R\cos\theta = P + Q\cos\alpha$

  $R\sin\theta = Q\sin\alpha$
- এটা বিন্দুত ক্রিয়া কৰা দুটা বলৰ, সমতলখনৰ যিকোনো দিশত, বিভেদিত অংশৰ বীজগণিতীয় সমষ্টি, সেই দিশত লব্ধৰ বিভেদিত অংশৰ সমান।



১.৭ অধিক জানিবলৈ

1) Statics and Dynamics with Background Mathematics, Adrian Roberts, Cambridgee University Press.

2) Enginering Machanics : Statics and Dynamics by R. G. Hibbeler and Ashok Gupta.

3) Engineering Mechanics : Statics and Dynamics by S. Rajasekarn and Sankara subramanian. Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

১.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ আমি পালোঁ

$$R^2 = 2^2 + 2\times 2\times 3\cos 60^0 + 3^2$$

$$= 4 + 2\times 2\times 3\times \frac{1}{2} + 9 = 19$$

$$\therefore\ R = \sqrt{19}\ N$$

আকৌ $\tan\theta = \dfrac{3\sin 60^0}{2 + 3\cos 60^0}$ (ইয়াত P = 2, Q = 3)

$$= \frac{\frac{3\sqrt{3}}{2}}{2 + 3\times\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{7}$$

$$\therefore\ \theta = \tan^{-1}\frac{3\sqrt{3}}{7}$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ আমি জানো বল দুটাৰ প্ৰত্যেকৰে মান P হ'লে

$$R = 2p\cos\frac{\alpha}{2},\quad \text{আৰু}\quad \theta = \frac{\alpha}{2}$$

$$\therefore\ R = 2\times 4\times\cos\frac{120^0}{2}N$$

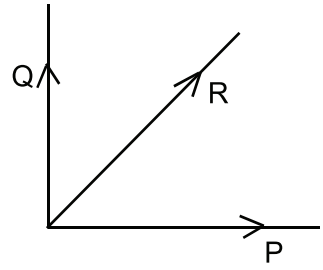
$$= 2\times 4\times\cos 60^0 N = 2\times 4\times\frac{1}{2}N = 4n$$

$$\theta = \frac{120^0}{2} = 60^0$$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ আমি জানো যে $R^2 = P^2 + Q^2$

আৰু $\tan\theta = \dfrac{Q}{P}$

এতিয়া $8^2 = P^2 + Q^2$ অর্থাৎ $P^2 + Q^2 = 64$



$\tan 60^0 = \frac{Q}{P}$ অর্থাৎ $\sqrt{3} = \frac{Q}{P}$ অর্থাৎ $Q = \sqrt{3}P$

$\therefore P^2 + 3P^2 = 64$ বা $4P^2 = 64$ বা $P^2 = 16$

$\therefore P = 4$ N

আৰু $Q = 4\sqrt{3}N$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল বল দুটাৰ মাজৰ কোণ α ।

$\therefore \left(P\sqrt{3}\right)^2 = P^2 + 2 \times P \times 2P\cos\alpha + (2P)^2$

বা, $3P^2 = P^2 + 4P^2\cos\alpha + 4P^2$

বা, $2\cos\alpha = -1$

বা, $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = 120^0$

ধৰা হ'ল লব্ধই P বলৰ দিশৰ লগত θ কোণ কৰে।

$\therefore P\sqrt{3}\sin\theta = 2P\sin 120^0 (R\sin\theta = Q\sin\alpha)$

বা, $\sqrt{3}\sin\theta = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\sin\theta = 1$

$\therefore \theta = 90^0$

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল লব্ধ R আৰু বল দুটাৰ মাজৰ কোণ α ।

ধৰা হ'ল প্ৰতিটো বলৰ মান P।

$\therefore R^2 = P^2 + 2PP\cos\alpha + P^2$

$= 2P^2 + 2P^2\cos\alpha = 2P^2(1 + \cos\alpha)$

আকৌ, $R^2 = 3PP = 3P^2$

$\therefore 3P^2 = 2P^2(1 + \cos\alpha)$

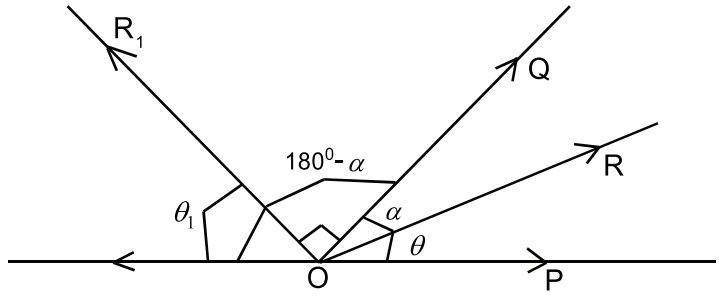
বা, $1 + \cos\alpha = \frac{3}{2}$

বা $\cos\alpha = \frac{1}{2}$

$\therefore \alpha = 60^0$

$\therefore$ বল দুটাৰ মাজৰ কোণ 60^0।

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰাহ'ল P আৰু Q বল দুটাই O বিন্দুত ক্ৰিয়া কৰে। ধৰা হ'ল বল দুটাৰ মাজৰ কোণ α । ধৰা হ'ল লব্ধই P বলৰ দিশৰ লগত θ কোণ কৰে।



চিত্র 1.9

$$\therefore \tan\theta = \frac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha}$$

P বলটো বিপৰীতমুখী কৰি দিয়া হ'ল। তেতিয়া লব্ধ এক সমকোণ ঘূৰে (দিয়া আছে)। ধৰা হ'ল নতুন লব্ধই P ৰ লগত (বিপৰীত মুখী) θ_1 কোণ কৰে।

এতিয়া, $\theta + 90^0 + \theta_1 = 180^0$

$\therefore\ \theta_1 = 180^0 - 90^0 - \theta = 90^0 - \theta$

এতিয়া, $\tan\theta_1 = \dfrac{Q\sin(180^0 - \alpha)}{P + Q\cos(180^0 - \alpha)}$

বা, $\tan(90^0 - \theta) = \dfrac{Q\sin\alpha}{P - Q\cos\alpha}$

বা, $\cot\theta = \dfrac{Q\sin\alpha}{P - Q\cos\alpha}$ (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা

বা, $\dfrac{Q\sin\alpha}{P + Q\cos\alpha} \cdot \dfrac{Q\sin\alpha}{P - Q\cos\alpha} = \tan\theta \,.\, \cot\theta$

বা, $\dfrac{Q^2\sin^2\alpha}{P^2 - Q^2\cos^2\alpha} = 1$

বা, $P^2 - Q^2\cos^2\alpha = Q^2\sin^2\alpha$

বা, $P^2 = Q^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = Q^2$

$\therefore$ P = Q

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল বল দুটাৰ মাজৰ কোণ α ।

$\therefore Q^2 = P^2 + 2PQ\cos\alpha + Q^2$

বা, $P^2 + 2PQ\cos\alpha = 0$

বা, $P(P + 2Q\cos\alpha) = 0$

বা, $P + 2Q\cos\alpha = 0$

বা, $2Q\cos\alpha = -P$ (1)

আকৌ, $Q^2 = P^2 + 4PQ\cos\alpha + 4Q^2$

বা, $P^2 + 4PQ\cos\alpha + 3Q^2 = 0$

বা $P^2 + 2P(2Q\cos\alpha) + 3Q^2 = 0$

বা, $P^2 + 2P(-P) + 3Q^2 = 0$ (1)

বা $P^2 = 3Q^2$

$\therefore P = \sqrt{3}\,Q$

$\therefore$ (1)অৰ পৰা, $2Q\cos\alpha = -\sqrt{3}\,Q$

$\therefore \cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\cos\alpha = -\cos 30^0$

বা, $\cos\alpha = -\cos(180^0 - 30^0)$

$\therefore \alpha = 150^0$

অর্থাৎ, বল দুটাৰ মাজৰ কোণ 150^0.

৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল বল দুটাৰ মাজৰ কোণ α ।

$\therefore \left(\sqrt{3}\,Q\right)^2 = P^2 + 2PQ\cos\alpha + Q^2$

বা $3Q^2 = P^2 + 2Q\cos\alpha + Q^2$

বা $P^2 + 2PQ\cos\alpha - 2Q^2 = 0$ (1)

আকৌ $\sqrt{3}\,Q\cos 30^0 = P + Q\cos\alpha$ $(R\cos\theta = P + Q\cos\alpha)$

বা, $\sqrt{3}\,Q\,.\,\frac{\sqrt{3}}{2} = P + Q\cos\alpha$

বা, $3Q = 2P + 2Q\cos\alpha$

বা, $2Q\cos\alpha = 3Q - 2P$ (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা

$P^2 + P(3Q - 2P) - 2Q^2 = 0$

বা, $P^2 + 3P3Q - 2P^2 - 2Q^2 = 0$

বা, $P^2 - 3PQ + 2Q^2 = 0$

বা, $(P - Q)(P - 2Q) = 0$

$\therefore P = Q$ বা $P = 2Q$

৯ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল P আৰু Q ৰ মাজৰ কোণ α ।

$\therefore R^2 = P^2 + 2PQ\cos\alpha + Q^2$ (1)

আকৌ, $(2R)^2 = P^2 + 2P(2Q\cos\alpha) + (2Q)^2$

বা, $4R^2 = P^2 + 4PQ\cos\alpha + 4Q^2$ (2)

আকৌ, $(2R)^2 = P^2 + 2PQ\cos(180^0 - \alpha) + Q^2$

বা, $4R^2 = P^2 - 2PQ\cos\alpha + Q^2$ (3)

(1) অক 2ৰে পূৰণ কৰি আমি পাওঁ

$2R^2 = 2P^2 + 4PQ^2\cos\alpha + 2Q^2$ (4)

(2) ৰ পৰা (4) বিয়োগ কৰি আমি পাওঁ

$2R^2 = -P^2 + 2Q^2$

বা, $P^2 - 2Q^2 + 2R^2 = 0$ (5)

আকৌ, (1) আৰু (3) যোগ কৰি আমি পাওঁ

$5R^2 = 2P^2 + 2Q^2$

বা, $2P^2 + 2Q^2 - 5R^2 = 0$ (6)

(5) আৰু (6) অৰ পৰা, আমি পালোঁ

$$\frac{P^2}{10-4} = \frac{Q^2}{-(-5-4)} = \frac{R^2}{4+2}$$

বা, $\frac{P^2}{6} = \frac{Q^2}{9} = \frac{R^2}{6}$

বা, $\frac{P^2}{2} = \frac{Q^2}{3} = \frac{R^2}{2}$

$\therefore \frac{P}{\sqrt{2}} = \frac{Q}{\sqrt{3}} = \frac{R}{\sqrt{2}}$



১.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ঃ P আৰু Q বল দুটাই এটা বিন্দুত ক্ৰিয়া কৰে। বল দুটাৰ মাজৰ কোণ θ আৰু সিহঁতৰ লব্ধ R এ P ৰ দিশৰ লগত α কোণ কৰে। যদি P = 24, R = 36, $\alpha = 90^0$, Q নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ২ঃ দুটা অসমান মানৰ বলে এটা বিন্দুত ক্ৰিয়া কৰে। প্ৰমাণ কৰক যে লব্ধ, ডাঙৰ বলটোৰ ওচৰত থাকে।

প্ৰশ্ন ৩ঃ দুটা বলৰ প্ৰত্যেকৰে মান P। বল দুটাই এটা বিন্দুত ক্ৰিয়া কৰে আৰু সিহঁতৰ লব্ধ R।

যদি $R^2 = 3P^2$, প্রমাণ কৰক যে বল দুটাৰ মাজৰ কোণ 60^0।

প্রশ্ন ৪ঃ P আৰু Q বল দুটাই এটা বিন্দুত ক্রিয়া কৰে। বল দুটাৰ মাজৰ কোণ θ, আৰু লব্ধ R. যদি প্রথম বলটোৰ মান দুগুণ কৰা হয়, প্রমাণ কৰক যে নতুন লব্ধৰ মান $\sqrt{2P^2 + 2R^2 - Q^2}$.

প্রশ্ন ৫ঃ P আৰু Q বল দুটাই এটা বিন্দুত ক্রিয়া কৰে। বল দুটাৰ মাজৰ কোণ ক্রমে 90^0, θ আৰু $90^0 - \theta$ হ'লে লব্ধ ক্রমে R, nR আৰু (n + 2) R. প্রমাণ কৰা যে

$$\tan\theta = \frac{n+3}{n-1}.$$

প্রশ্ন ৬ঃ এটা বিন্দুত ক্রিয়া কৰা দুটা বল P আৰু Q ৰ লব্ধৰ মানো P. যদি প্রথম বলটোৰ মান দুগুণ কৰা হয়, প্রমাণ কৰক যে নতুন লব্ধৰ মান $\sqrt{4P^2 - Q^2}$.

প্রশ্ন ৭ঃ এটা বিন্দুত ক্রিয়া কৰা P আৰু Q বল দুটাৰ লব্ধ R. যদি দ্বিতীয় বলটোৰ দিশ বিপৰীতমুখী কৰা হয় আৰু মান $\frac{(R^2 - P^2)}{Q}$ হয়, প্রমাণ কৰক যে লব্ধৰ মান পৰিৱর্তিত নহয়।

প্রশ্ন ৮ঃ এটা কণিকাত ক্রিয়া কৰা দুটা বলৰ লব্ধই এটা বলৰ লগত 90^0 কোণ কৰে ইয়াৰ মান আনটোৰ মানৰ এক-তৃতীয়াংশ। প্রমাণ কৰক যে ডাঙৰ বল আৰু সৰু বলৰ মানৰ অনুপাত $3 : 2\sqrt{2}$.

প্রশ্ন ৯ঃ P আৰু Q বল দুটাই O বিন্দুত ক্রিয়া কৰে আৰু সিহঁতৰ লব্ধ R. যদি এডাল ছেদকে P, Q, R বলৰ ক্রিয়া ৰেখাক ক্রমে L, M, N বিন্দুত কাটে, প্রমাণ কৰক যে

$$\frac{P}{OL} + \frac{Q}{OM} = \frac{R}{ON}.$$

প্রশ্ন ১০ঃ দুটা সমান মানৰ বলে এটা বিন্দুত ক্রিয়া কৰে। বল দুটাৰ মাজৰ কোণ 2θ হ'লে লব্ধৰ মান, মাজৰ কোণ 2ϕ হ'লে যি মান হয় তাৰ দুগুণ। প্রমাণ কৰক যে $\cos\theta = 2\cos\phi$.

*** ***** ***

অধ্যায় ২ ঃ সামতলিক বল

অধ্যায় গাঁথনি

২.১ উদ্দেশ্য
২.২ পৰিচয়
২.৩ লামিৰ উপপাদ্য
২.৪ একাধিক একসমতলীয় বলৰ অধীনত কণিকাৰ সাম্যাৱস্থা
২.৫ সমান্তৰাল বল
২.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
২.৭ অধিক জানিবলৈ
২.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
২.৯ আৰ্হি প্রশ্ন

২.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

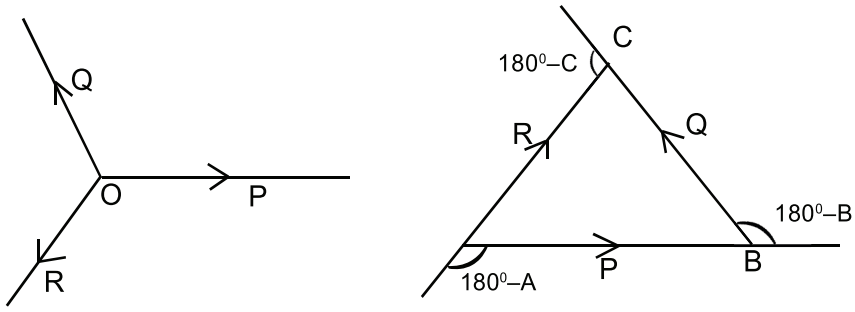
- লামিৰ উপপাদ্যৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- একাধিক একসমতলীয় বলৰ অধীনত কণিকাৰ সাম্যাৱস্থা সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- সমান্তৰাল বল সম্বন্ধে জানিব পাৰিব

২.২ পৰিচয়

যদি দুটা বলে একে অৱস্থাত সমান ভৰত ক্রিয়া কৰে আৰু সমান ত্বৰণ উৎপন্ন কৰে, বল দুটা সমান বুলি কোৱা হয়। যদি একাধিক বলে এটা বস্তুত ক্রিয়া কৰে, বস্তুটোৱে গতি কৰিব পাৰে বা স্থিৰ অৱস্থাত থাকিব পাৰে। যদি বস্তুটো স্থিৰ অৱস্থাত থাকে, বস্তুটো সাম্যাৱস্থাত (in equilibrium) থাকে বুলি কোৱা হয় আৰু বলবোৰো সাম্যাৱস্থাত থাকে বুলি কোৱা হয়। এই অধ্যায়ত আমি লামিৰ উপপাদ্য, একাধিক এক সমতলীয় বলৰ অধীনত কণিকাৰ সাম্যাৱস্থা আৰু সমান্তৰাল বল সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

২.৩ লামিৰ উপপাদ্য

এটা বিন্দুত ক্রিয়াশীল তিনিটা বল যদি সাম্যাৱস্থাত থাকে, প্রতিটো বল, বাকী দুটা বলৰ মাজৰ কোণৰ ছাইনৰ সমানুপাতিক।



চিত্র ২.১

ধৰা হ'ল O ত ক্ৰিয়াশীল P, Q, R বল তিনিটা সাম্যাৱস্থাত আছে।

প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে $\frac{P}{\sin(\widehat{Q,R})}=\frac{Q}{\sin(\widehat{R,P})}=\frac{R}{\sin(\widehat{P,Q})}$

য'ত $(\widehat{Q, R})$ এ Q আৰু R অৰ মাজৰ কোণ বুজায়,

$(\widehat{R, P})$ এ R আৰু P অৰ মাজৰ কোণ বুজায়,

$(\widehat{P, Q})$ এ P আৰু Q ৰ মাজৰ কোণ বুজায়।

ধৰা হ'ল ABC এটা ত্ৰিভুজ আৰু ইয়াৰ বাহু AB, BC, CA ক্ৰমে P, Q, R অৰ দিশৰ সমান্তৰাল।

$\therefore$ AB, BC, CA দৈৰ্ঘ ক্ৰমে P, Q, R অৰ মানৰ সমানুপাতিক।

$$\therefore \frac{AB}{P}=\frac{BC}{Q}=\frac{CA}{R} \qquad (1)$$

আকৌ ত্ৰিকোণমিতিৰ পৰা আমি জানো যে

$$\therefore \frac{AB}{Sin\,C}=\frac{BC}{Sin\,A}=\frac{CA}{Sin\,B} \qquad (2)$$

(1) আৰু (2)ৰ পৰা

$$\frac{P}{Sin\,C}=\frac{Q}{Sin\,A}=\frac{R}{Sin\,B}$$

অৰ্থাৎ, $\frac{P}{Sin(180^0-C)}=\frac{Q}{Sin(180^0-A)}=\frac{R}{Sin(180^0-B)}$

এতিয়া $180^0 - C = Q$, আৰু R অৰ মাজৰ কোণ

$180^0 - A = R$, আৰু P ৰ মাজৰ কোণ

$180^0 - B = P$, আৰু Q ৰ মাজৰ কোণ

$$\therefore \frac{P}{Sin\ (\widehat{Q,\ R})}=\frac{Q}{Sin\ (\widehat{R,\ P})}=\frac{R}{Sin\ (\widehat{P,\ Q})}$$

২.৪ একাধিক এক সমতলীয় বলৰ অধীনত কণিকাৰ সাম্যাৱস্থা

আমি তলৰ অৱস্থাকেইটা বিবেচনা কৰোঁহক।

প্ৰথম অৱস্থা ঃ দুটা বলে এটা কণিকাত ক্ৰিয়া কৰি আছে। কণিকাটো সাম্যাৱস্থাত থাকিব, অৰ্থাৎ বল দুটা সাম্যাৱস্থাত থাকিব, যদি

(i) সিহঁতৰ মান সমান,

(ii) সিহঁতে একেডাল ৰেখাত ক্ৰিয়া কৰে,

আৰু (iii) সিহঁতে বিপৰীত দিশত ক্ৰিয়া কৰে।

দ্বিতীয় অৱস্থা ঃ তিনিটা একৰেখীয় নোহোৱা বলে এটা কণিকাত ক্ৰিয়া কৰি আছে। কণিকাটো সাম্যাৱস্থাত থাকিব, অৰ্থাৎ বল তিনিটা সাম্যাৱস্থাত থাকিব যদি

(i) বল তিনিটাক এটা ত্ৰিভুজৰ বাহুকেইটাৰ দ্বাৰা ক্ৰমাগতভাৱে ৰূপায়িত কৰিব পাৰি,

(ii) প্ৰতিটো বল, বাকী দুটা বলৰ মাজৰ কোণৰ ছাইনৰ সমানুপাতিক,

বা (iii) দুটা পৰস্পৰ লম্ব দিশৰ প্ৰতিটোৰ দিশত বিভেদনসমূহৰ যোগদান শূন্য।

তৃতীয় অৱস্থা ঃ সসীম সংখ্যক বলে, ইয়াৰ কোনো দুটাই একৰেখীয় নহয়, এটা কণিকাত ক্ৰিয়া কৰে। কণিকাটো সাম্যাৱস্থাত থাকিব, অৰ্থাৎ, বলকেইটা সাম্যাৱস্থাত থাকিব যদি

(i) বলকেইটাক এটা বহুভুজৰ বাহুকেইটাৰ দ্বাৰা ক্ৰমাগতভাৱে ৰূপায়িত কৰিব পাৰি।

বা (ii) বলকেইটা এক সমতলীয় আৰু দুটা পৰস্পৰ লম্ব দিশৰ প্ৰতিটোৰ দিশত বিভেদনসমূহৰ যোগফল শূন্য।

বা (iii) যি বিন্দুত প্ৰদত্ত বলসমূহে ক্ৰিয়া কৰে সেইটো বলসমূহ ৰূপায়িত কৰা ৰেখাখণ্ডসমূহৰ মূৰ বিন্দুৰ ভাৰকেন্দ্ৰ।

উদাহৰণ 1 ঃ এটা কণিকাত ক্ৰিয়াশীল তিনিটা বলৰ পৰিমাণ 5 : 3 : 2 অনুপাতত আছে। এই বল তিনিটাক যিকোনো পৰিস্থিতিত সাম্যাৱস্থাত ৰাখিব পাৰিনে?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল বল তিনিটাৰ মান 5k, 3k, 2k.

সাম্যাৱস্থা সম্ভৱ হ'ব যদি 5k মানৰ বলটো এটা দিশত ক্ৰিয়া কৰে আৰু 3k আৰু 2k মানৰ বল দুটাই একেডাল ৰেখাত বিপৰীত দিশত ক্ৰিয়া কৰে।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ১

প্ৰশ্ন নং ১ঃ এটা কণিকাত ক্ৰিয়াশীল তিনিটা বলৰ পৰিমাণ 3 : 2 : 1 অনুপাতত আছে। এই বল তিনিটাক যিকোনো পৰিস্থিতিত সাম্যাৱস্থাত ৰাখিব পাৰিনে?

প্ৰশ্ন নং ২ঃ এটা কণিকাত ক্ৰিয়াশীল তিনিটা বলৰ পৰিমাণ 3 : 5 : 10 অনুপাতত আছে। এই বল তিনিটাক সাম্যাৱস্থাত ৰাখিব পাৰিনে?

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ তিনিটা সম পৰিমাণৰ বলে এটা বিন্দুত ক্ৰিয়া কৰি আছে। যিকোনো দুটা

বলৰ মাজৰ কোণবোৰ সমান। প্ৰমাণ কৰক যে বলকেইটা সাম্যাৱস্থাত আছে।

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ P, Q, R বল তিনিটাই ABC ত্ৰিভুজৰ অন্তঃকেন্দ্ৰ I ত ক্ৰমে IA, IB, IC দিশত ক্ৰিয়া কৰি আছে। যদি বল তিনিটা সাম্যাৱস্থাত থাকে, প্ৰমাণ কৰক যে $P^2 : Q^2 : R^2 = a(b + c – a) : b(c + a –b) : c(a + b + c)$.

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ P, Q, R বল তিনিটাই ABC ত্ৰিভুজৰ ভাৰকেন্দ্ৰ G ত ক্ৰমে GA, GB, GC দিশত ক্ৰিয়া কৰি আছে। যদি বল তিনিটা সাম্যাৱস্থাত থাকে, প্ৰমাণ কৰক যে P : Q R = GA : GB : GC

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ P, Q, R বল তিনিটাই ABC ত্ৰিভুজৰ পৰিকেন্দ্ৰ O ত ক্ৰমে OA, OB, OC দিশত ক্ৰিয়া কৰি আছে। যদি বল তিনিটা সাম্যাৱস্থাত থাকে, প্ৰমাণ কৰক যে P : Q : R.

$$= \frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{a^2}{b^2c^2} : \frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{b^2}{c^2a^2} : \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{c^2}{a^2b^2}$$

প্ৰশ্ন নং ৭ঃ O বিন্দুত ক্ৰিয়া কৰা তিনিটা বল (একৰেখীয় নহয়) সাম্যাৱস্থাত আছে। O বিন্দুৰ মাজেৰে এটা বৃত্ত আঁকা হ'ল আৰু ই বল তিনিটাৰ ক্ৰিয়া ৰেখাক ক্ৰমে A, B, C বিন্দুত কাটে। প্ৰমাণ কৰক যে বল তিনিটা ABC ত্ৰিভুজৰ বাহুৰ সমানুপাতিক।

প্ৰশ্ন নং ৮ঃ এটা বিন্দুত ক্ৰিয়াশীল বল কিছুমানক মান আৰু দিশত 2AB, 3BC, 2CD, DA, CA আৰু DB ৰ দ্বাৰা ৰূপায়িত কৰা হ'ল, য'ত ABCD এটা চতুৰ্ভুজ। প্ৰমাণ কৰক যে বলকেইটা সাম্যাৱস্থাত আছে।

প্ৰশ্ন নং ৯ঃ এটা বিন্দুত ক্ৰিয়াশীল বল কিছুমানক মান আৰু দিশত AB, 2BC, 2CD, 2DE, 2EF, FA আৰু FB ৰ দ্বাৰা ৰূপায়িত কৰা হ'ল, য'ত ABCDEF এটা ষড়ভুজ। প্ৰমাণ কৰক যে বলকেইটা সাম্যাৱস্থাত আছে।

প্ৰশ্ন নং ১০ঃ ABCDE এটা পঞ্চভুজ। এটা বিন্দুত ক্ৰিয়াশীল বল কিছুমানক মান আৰু দিশত AB, 3BC, 2CA, CD, DE, 2EB আৰু AE ৰ দ্বাৰা ৰূপায়িত কৰা হ'ল। প্ৰমাণ কৰক যে বলকেইটা সাম্যাৱস্থাত আছে।

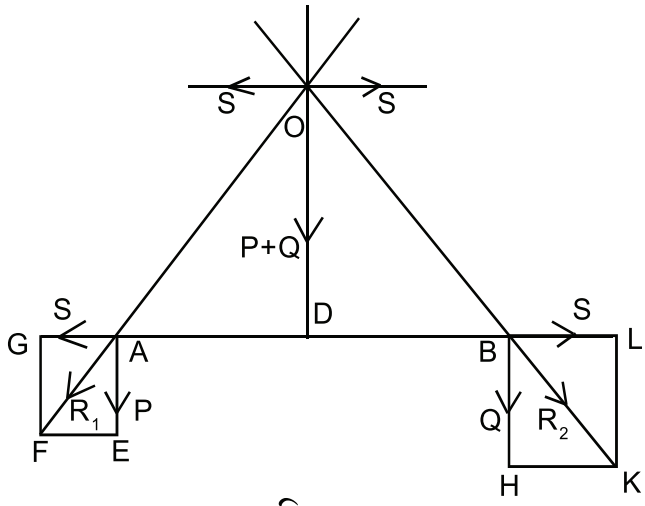
২.৫ সমান্তৰাল বল

দুটা বলক সমান্তৰাল বল (parallel forces) বুলি কোৱা হয় যদি সিহঁতৰ ক্ৰিয়া ৰেখা সমান্তৰাল। সিহঁতক সদৃশ সমান্তৰাল (like parallel) বুলি কোৱা হয় যদি সিহঁতে একে দিশত ক্ৰিয়া কৰে। আনহাতেদি সিহঁতক বিসদৃশ সমান্তৰাল (unlike parallel) বুলি কোৱা হয় যদি সিহঁতে বিপৰীত দিশত ক্ৰিয়া কৰে।

স্পষ্টতঃ বল দুটা এক বিন্দুগামী (concurrent) নহয়। সিহঁতেএটা দৃঢ় বস্তুত ক্ৰিয়া কৰে বুলি ভবা হয়।

দুটা সদৃশ সমান্তৰাল বলৰ লব্ধ

ধৰা হ'ল এটা দৃঢ় বস্তুৰ A, B বিন্দুত ক্ৰমে P, Q সদৃশ সমান্তৰাল বল দুটাই ক্ৰিয়া কৰে।



চিত্ৰ ২.২

ধৰা হ'ল AE, BH এ ক্ৰমে P, Q বুজায়।

AB সংযোগ কৰা হ'ল। A, B বিন্দুত দুটা সমান কিন্তু বিপৰীতমুখী বল S, S প্ৰয়োগ কৰা হ'ল আৰু সিহঁতক AG, BL অৰ দ্বাৰা ৰূপায়িত কৰা হয়।

যিহেতু বল দুটাই পৰস্পৰ সন্তুলন কৰে, সেয়ে ই প্ৰণালীটোত কোনো প্ৰভাৱ নেপেলায়।

AEFG আৰু BHKL সামান্তৰিক দুটা সম্পূৰ্ণ কৰা হ'ল।

P আৰু S অৰ লব্ধ R_1 আৰু ইয়াক AF অৰ দ্বাৰা বুজোৱা হ'ল। Q আৰু S অৰ লব্ধ R_2 ইয়াক BK ৰ দ্বাৰা বুজোৱা হ'ল।

FA আৰু KB বৰ্ধিত কৰা হ'ল আৰু ইহঁতে O ত কাটে।

AE (বা BH)ৰ সমান্তৰালকৈ OD টনা হ'ল আৰু ই AB ক D বিন্দুত কাটে।

R_1 আৰু R_2 লব্ধই O ত ক্ৰিয়া কৰে বুলি ধৰা হ'ল। গতিকে O ত ক্ৰিয়া কৰা R_1, P আৰু S অৰ সমতুল্য, O ত ক্ৰিয়াশীল P, OD ৰ দিশত আৰু O ত ক্ৰিয়াশীল S, AG ৰ সমান্তৰাল। আকৌ O ত ক্ৰিয়া কৰা R_2, Q আৰু S অৰ সমতুল্য, O ত ক্ৰিয়াশীল Q, OD ৰ দিশত আৰু O ত ক্ৰিয়াশীল S, BL অৰ সমান্তৰাল।

O ত ক্ৰিয়া কৰা S, S বল দুটাই পৰস্পৰ সন্তুলন কৰে। গতিকে OD ৰ দিশত P + Q বলটো বাকী থাকিল আৰু ই P আৰু Q সদৃশ সমান্তৰাল বল দুটাৰ লব্ধ।

এতিয়া আমি D ৰ অৱস্থান নিৰ্ণয় কৰোঁ, য'ত P + Q ৰ ক্ৰিয়াৰেখাই কাটে।

স্পষ্টত ঃ AFE আৰু OAD ত্ৰিভুজ দুটা সদৃশ।

$$\therefore \frac{AE}{OD} = \frac{EF}{DA}$$

বা, $\frac{P}{OD}=\frac{S}{DA}$ অর্থাৎ, $\frac{P}{S}=\frac{OD}{DA}$ (1)

আকৌ, BHK আৰু ODB ত্রিভুজ দুটা সদৃশ।

$\therefore \frac{BH}{OD}=\frac{HK}{DB}$

বা, $\frac{Q}{OD}=\frac{S}{DB}$ অর্থাৎ, $\frac{Q}{S}=\frac{OD}{DB}$ (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা, $\frac{P}{S}\cdot\frac{S}{Q}=\frac{OD}{DA}\cdot\frac{DB}{OD}$

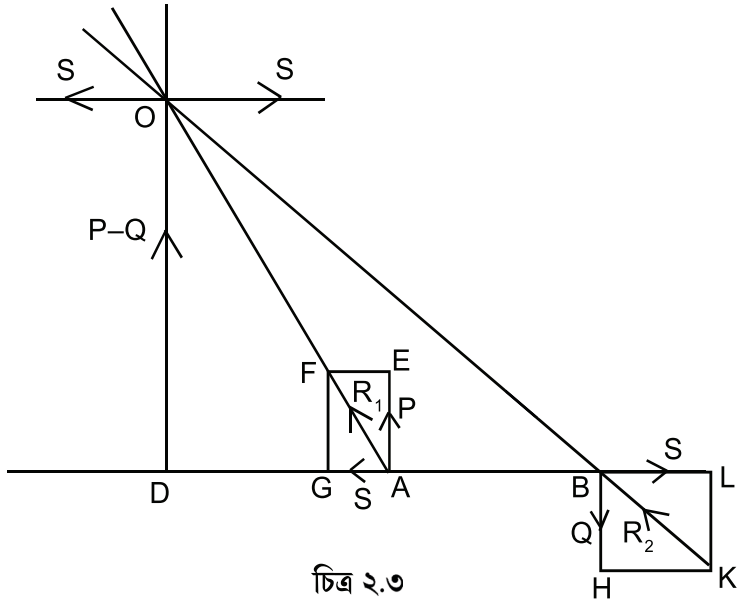
অর্থাৎ, $\frac{P}{Q}=\frac{DB}{DA}$

দেখা গ'ল যে, D এ AB ক বল দুটাৰ বিপৰীত অনুপাতৰ অন্তঃভাৱে বিভক্ত কৰে।

টোকা ঃ যদি P = Q, লব্ধ 2P আৰু এই ক্ষেত্রত D, AB ৰ মধ্য বিন্দু।

দুটা অসমান, বিসদৃশ সমান্তৰাল বলৰ লব্ধ

ধৰা হ'ল এটা দৃঢ় বস্তুৰ A, B বিন্দুত ক্রমে P, Q বিসদৃশ সমান্তৰাল বল দুটাই ক্রিয়া কৰে, য'ত P > Q ।



চিত্র ২.৩

ধৰা হ'ল AE, BH এ ক্রমে P, Q বুজায়।

AB সংযোগ কৰা হ'ল। A, B বিন্দুত দুটা সমান কিন্তু বিপৰীতমুখী বল S, S প্রয়োগ কৰা হ'ল আৰু সিহঁতক AG, BL অৰ দ্বাৰা ৰূপায়িত কৰা হ'ল।

যিহেতু বল দুটাই পৰস্পৰ সন্তুলন কৰে, সেয়ে ই প্রণালীটোত কোনো প্রভাৱ নেপেলায়।

AEFG আৰু BHKL সামান্তৰিক দুটা সম্পূর্ণ কৰা হ'ল।

P আৰু S অৰ লব্ধ R_1 আৰু ইয়াক AF অৰ দ্বাৰা বুজোৱা হ'ল। Q আৰু S অৰ লব্ধ

R_2 আৰু ইয়াক KB ৰ দ্বাৰা বুজোৱা হ'ল।

AF আৰু KB বৰ্ধিত কৰা হ'ল আৰু ইহঁতে O ত কাটে।

AE (বা BH)ৰ সমান্তৰালকৈ OD টনা হ'ল আৰু ই বৰ্ধিত BA ক D বিন্দুত কাটে।

R_1 আৰু R_2 লব্ধই O ত ক্ৰিয়া কৰে বুলি ধৰা হ'ল। গতিকে O ত ক্ৰিয়া কৰা R_1, P আৰু S অৰ সমতুল্য, O ত ক্ৰিয়াশীল P, DO ৰ দিশত আৰু O ত ক্ৰিয়াশীল S, AG ৰ সমান্তৰাল। আকৌ O ত ক্ৰিয়া কৰা R_2, Q আৰু S অৰ সমতুল্য, O ত ক্ৰিয়াশীল Q, OD ৰ দিশত আৰু O ত ক্ৰিয়াশীল S, BLঅৰ সমান্তৰাল।

O ত ক্ৰিয়া কৰা S, S বল দুটাই পৰস্পৰ সন্তুলন কৰে। গতিকে DO ৰ দিশত P– Q বলটো বাকী থাকিল আৰু ই P আৰু Q বিসদৃশ সমান্তৰাল বল দুটাৰ লব্ধ।

এতিয়া আমি D ৰ অৱস্থান নিৰ্ণয় কৰোঁ, য'ত P–Q ৰ ক্ৰিয়াৰেখাই কাটে।

স্পষ্টত ঃ AFG আৰু AOD ত্ৰিভুজ দুটা সদৃশ।

$$\therefore \frac{GF}{DO} = \frac{AG}{AD}$$

বা, $\frac{GF}{AG} = \frac{DO}{AD}$ অৰ্থাৎ, $\frac{P}{S} = \frac{DO}{AD}$ (1)

আকৌ, BHK আৰু ODB ত্ৰিভুজ দুটা সদৃশ।

$$\therefore \frac{BH}{OD} = \frac{HK}{DB}$$

বা, $\frac{BH}{HK} = \frac{OD}{DB}$ অৰ্থাৎ, $\frac{Q}{S} = \frac{OD}{DB}$ (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা, $\frac{P}{S} \cdot \frac{S}{Q} = \frac{DO}{AD} \cdot \frac{BD}{OD}$

অৰ্থাৎ, $\frac{P}{Q} = \frac{DB}{DA}$

দেখা গ'ল যে, D এ BA ক বল দুটাৰ বিপৰীত অনুপাতত বৰ্হিভাৱে বিভক্ত কৰে।

উদাহৰণ 2 ঃ দুটা সদৃশ সমান্তৰাল বল 11 newton আৰু 19 newton এ এটা দৃঢ় বস্তুৰ A, B বিন্দুত ক্ৰিয়া কৰে। যদি AB = 10m, লব্ধৰ মান আৰু ক্ৰিয়া বিন্দু নিৰ্ণয় কৰক।

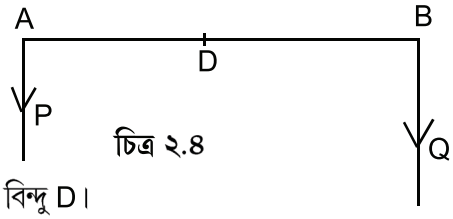
সমাধান ঃ ধৰা হ'ল P = 11 newton

Q = 19 newton

$\therefore$ R = (P + Q) newton

= (11 + 19) newton

= 30 newton.



চিত্র ২.৪

ধৰা হ'ল লব্ধৰ ক্ৰিয়া বিন্দু D।

$\therefore$ P. DA = Q . DB

বা, 11. DA = 19. (10 – DA)

বা, 11. DA = 190 – 19DA

বা, 30DA = 190

$$\therefore DA = \frac{19}{3} m$$



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

প্ৰশ্ন নং ১ঃ দুটা সদৃশ সমান্তৰাল বল P আৰু Q এ ক্ৰমে A আৰু B বিন্দুত ক্ৰিয়া কৰে আৰু সিহঁতৰ লব্ধ R এ AB ৰ D বিন্দুত ক্ৰিয়া কৰে। যদি P = 6 newton, AD = 9m আৰু DB = 8m, Q আৰু R নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২ঃ দুটা সদৃশ সমান্তৰাল বলৰ অৱস্থান সালসলনি কৰিলেও লব্ধৰ অৱস্থানৰ সালসলনি নহয়। প্ৰমাণ কৰক যে বল দুটা সমমানৰ।

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ দুটা বিসদৃশ সমান্তৰাল বল P আৰু Q এ ক্ৰমে A আৰু B বিন্দুত ক্ৰিয়া কৰে আৰু সিহঁতৰ লব্ধ R এ বৰ্ধিত AB ৰ D ত ক্ৰিয়া কৰে। যদি P = 5 newton, AD = 12m, AB = 9m, Q আৰু R নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ P আৰু Q দুটা বিসদৃশ সমান্তৰাল বল আৰু P > Q। যদি প্ৰতিটো বলৰ মান সম পৰিমাণৰ দ্বাৰা বৰ্ধিত কৰা হয়, প্ৰমাণ কৰক যে লব্ধৰ ক্ৰিয়াৰেখা P ৰ পৰা আৰু অধিক আঁতৰি যাব।

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ P আৰু Q দুটা সদৃশ সমান্তৰাল বল। যদি P ক নিজৰ সমান্তৰালকৈ x দূৰত্ব আঁতৰাই দিয়া হয়, প্ৰমাণ কৰক যে লব্ধ $\frac{Px}{P+Q}$ দূৰত্ব আঁতৰি যাব।

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ তিনিটা সদৃশ বল P, Q, R এ ABC ত্ৰিভুজৰ কৌণিক বিন্দু A, B, C ত ক্ৰিয়া কৰে। যদি বলসমূহৰ লব্ধ

(i) ভাৰকেন্দ্ৰৰ মাজেৰে যায়, প্ৰমাণ কৰক যে P = Q = R,

(ii) পৰিকেন্দ্ৰৰ মাজেৰে যায়, প্ৰমাণ কৰক যে

$$\frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$$

(iii) অন্তঃকেন্দ্রৰ মাজেৰে যায়, প্ৰমাণ কৰক যে

$$\frac{P}{BC}=\frac{Q}{CA}=\frac{R}{AB}$$

(iv) পাদিক কেন্দ্রৰ মাজেৰে যায়, প্ৰমাণ কৰক যে

$$\frac{P}{\tan 2A}=\frac{Q}{\tan 2B}=\frac{R}{\tan 2C}$$



২.৬ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- যদি একাধিক বলে এটা বস্তুত ক্ৰিয়া কৰে, বস্তুটোৱে গতি কৰিব পাৰে বা স্থিৰ অৱস্থাত থাকিব পাৰে। যদি বস্তুটো স্থিৰ অৱস্থাত থাকে, বস্তুটো সাম্যাৱস্থাত থাকে বুলি কোৱা হয় আৰু বলবোৰো সাম্যাৱস্থাত থাকে বুলি কোৱা হয়।
- এটা বিন্দুত ক্ৰিয়াশীল তিনিটা বল যদি সাম্যাৱস্থাত থাকে, প্ৰতিটো বল, বাকী দুটা বলৰ মাজৰ কোণৰ ছাইনৰ সমানুপাতিক। (ইয়াক লামিৰ উপপাদ্য বুলি কোৱা হয়।)
- দুটা বলক সমান্তৰাল বল বুলি কোৱা হয় যদি সিহঁতৰ ক্ৰিয়া ৰেখা সমান্তৰাল। সিহঁতক সদৃশ সমান্তৰাল বুলি কোৱা হয় যদি সিহঁতে একে দিশত ক্ৰিয়া কৰে। আনহাতে সিহঁতৰ বিসদৃশ সমান্তৰাল বুলি কোৱা হয় যদি সিহঁতে বিপৰীত দিশত ক্ৰিয়া কৰে। সিহঁতে এটা দৃঢ় বস্তুত ক্ৰিয়া কৰে বুলি ভবা হয়।



২.৭ অধিক জানিবলৈ

1) Statics and Dynamics with Background Mathematics, Adrian Roberts, Cambridge University Press.
2) Enginering Machanics : Statics and Dynamics by R. G. Hibbeler and Ashok Gupta.
3) Engineering Mechanics : Statics and Dynamics by S. Rajasekarn and Sankara subramanian. Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

২.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল বল তিনিটাৰ মান 3k, 2k, k.

সাম্যাৱস্থা সম্ভৱ হ'ব যদি 3k মানৰ বলটো এটা দিশত ক্রিয়া কৰে, আৰু 2k আৰু k মানৰ বল দুটাই একেডাল ৰেখাত বিপৰীত দিশত ক্রিয়া কৰে।

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল বল তিনিটাৰ মান 3k, 5k, 10k.

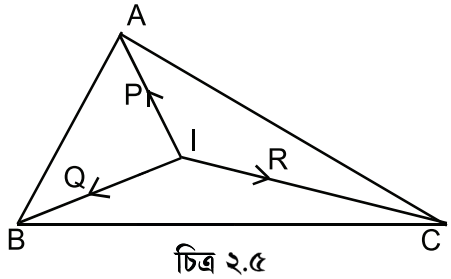
সাম্যাৱস্থা সম্ভৱ নহয় যিহেতু বল তিনিটাক এটা ত্রিভুজৰ বাহু তিনিটাৰ দ্বাৰা ৰূপায়িত কৰিব নোৱাৰি। 3k, 5k, 10k একক বাহুৰে এটা ত্রিভুজ অংকন কৰিব নোৱাৰি, যিহেতু 3k + 5k < 10k.

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ আমাক দিয়া আছে যে তিনিটা সম পৰিমাণৰ বলে এটা বিন্দুত ক্রিয়া কৰি আছে আৰু যিকোনো দুটা বলৰ মাজৰ কোণবোৰ সমান। গতিকে, বল তিনিটাক এটা ত্রিভুজৰ বাহু তিনিটাৰ দ্বাৰা ক্রমাগতভাৱে ৰূপায়িত কৰিব পাৰি। গতিকে, বল তিনিটা সাম্যাৱস্থাত আছে।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে যে, বল তিনিটা সাম্যাৱস্থাত আছে।

$\therefore$ লামিৰ উপপাদ্যৰ পৰা

$$\frac{P}{\sin\angle BIC}=\frac{Q}{\sin\angle CIA}=\frac{R}{\sin\angle AIB}$$



চিত্র ২.৫

এতিয়া, $\angle BIC+\frac{1}{2}\angle B+\frac{1}{2}\angle C=180^0$

$$\therefore \angle BIC=180^0-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$$

$$=180^0-\frac{1}{2}(180^0-\angle A) \quad \left[\because \angle A+\angle B+\angle C=180^0\right]$$

$$=90^0+\frac{A}{2}$$

সেইদৰে $\angle CIA=90^0+\frac{B}{2}$, $\angle AIB=90^0+\frac{C}{2}$

$$\therefore \frac{P}{\sin\left(90^0+\frac{A}{2}\right)}=\frac{Q}{\sin\left(90^0+\frac{B}{2}\right)}=\frac{R}{\sin\left(90^0+\frac{C}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{Q}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{R}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{P^2}{\cos^2\frac{A}{2}} = \frac{Q^2}{\cos^2\frac{B}{2}} = \frac{R^2}{\cos^2\frac{C}{2}}$$

এতিয়া, $\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1$

$$\therefore 2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A$$

$$= 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{2bc}$$

সেইদৰে,

$$\cos^2\frac{B}{2} = \frac{(c+a+b)(c+a-b)}{2ca}$$

$$\cos^2\frac{C}{2} = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}$$

$$\therefore\ P^2 : Q^2 : R^2$$

$$= \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc} : \frac{(c+a+b)(c+a-b)}{4ca} : \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{4ab}$$

$$= a(b+c-a) : b(c+a-b) : c(a+b-c)$$

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে যে, বল তিনিটা সাম্যাৱস্থাত আছে।

$\therefore$ লামিৰ উপপাদ্যৰ পৰা

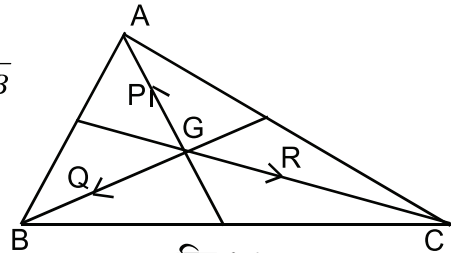
$$\frac{P}{\sin\angle BGC} = \frac{Q}{\sin\angle CGA} = \frac{R}{\sin\angle AGB}$$

আমি জানো যে

GBC ত্ৰিভুজৰ কালি

= GCA ত্ৰিভুজৰ কালি

= GAB ত্ৰিভুজৰ কালি



চিত্ৰ ২.৬

$$\therefore \frac{1}{2}GB.GC\sin\angle BGC = \frac{1}{2}GC.GA\sin\angle CGA$$

$$= \frac{1}{2}GA.GB\sin\angle AGB$$

$$\Rightarrow \frac{\sin\angle BGC}{GA} = \frac{\sin\angle CGA}{GB} = \frac{\sin\angle AGB}{GC} \quad (2)$$

(1) আৰু (2) ৰ পৰা

$$\frac{P}{GA} = \frac{Q}{GB} = \frac{R}{GC}$$

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে যে বলকেইটা সাম্যাৱস্থাত আছে।

$\therefore$ লামিৰ উপপাদ্যৰ পৰা

$$\frac{P}{\sin\angle BOC} = \frac{Q}{\sin\angle COA} = \frac{R}{\sin\angle AOB}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin 2A} = \frac{Q}{\sin 2B} = \frac{R}{\sin 2C}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{2\sin A\cos A} = \frac{Q}{2\sin B\cos B} = \frac{R}{2\sin C\cos C}$$

$$\Rightarrow \frac{P}{\sin A\cos A} = \frac{Q}{\sin B\cos B} = \frac{R}{\sin C\cos C} \quad (1)$$

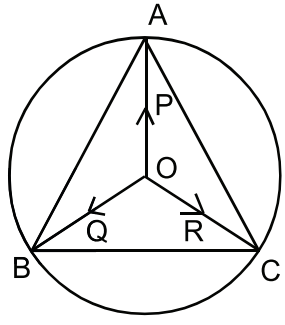
আকৌ, আমি জানো যে

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = k\text{, ধৰা হ'ল}$$

$\therefore \sin A = ka,\ \sin B = kb,\ \sin C = kc$

$\therefore$ (1) অৰ পৰা

$$\frac{P}{ka\cos A} = \frac{Q}{kb\cos B} = \frac{R}{kc\cos C}$$



চিত্ৰ ২.৭

অৰ্থাৎ, $\frac{P}{a\cos A} = \frac{Q}{b\cos B} = \frac{R}{c\cos C}$ (2)

এতিয়া $a\cos A = a\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$= \frac{abc}{2}\ \frac{b^2+c^2-a^2}{b^2c^2}$$

$$= \frac{abc}{2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{a^2}{b^2c^2}\right)$$

সেইদৰে

$$b\cos B = \frac{abc}{2}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{b^2}{c^2a^2}\right)$$

$$c\cos C = \frac{abc}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{c^2}{a^2b^2}\right)$$

$\therefore$ (2)ৰ পৰা

P : Q : R

$$= \frac{abc}{2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{a^2}{b^2c^2}\right):\frac{abc}{2}\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{b^2}{c^2a^2}\right):\frac{abc}{2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{c^2}{a^2b^2}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{a^2}{b^2c^2}\right):\left(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{b^2}{c^2a^2}\right):\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}-\frac{c^2}{a^2b^2}\right)$$

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে যে বলকেইটা সাম্যাৱস্থাত আছে।

$\therefore$ লামিৰ উপপাদ্যৰ পৰা

$$\frac{P}{\sin\angle BOD} = \frac{Q}{\sin\angle DOA} = \frac{R}{\sin\angle AOB} \qquad (1)$$

এতিয়া $\angle BOD + \angle BOC = 180^0$

$$\angle DOA + \angle AOC = 180^0$$

$$\angle AOB + \angle BOA = 180^0$$

$$\therefore \sin\angle BOD = \sin\left(180^0 - \angle BOC\right)$$

$$= \sin\angle BOC$$

$$= \sin\angle BAC$$

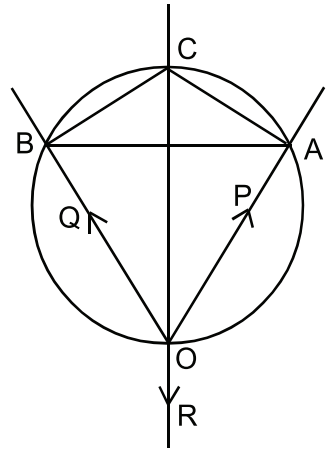
$$\sin\angle DOA = \sin\left(180^0 - \angle AOC\right)$$

$$= \sin\angle AOC$$

$$= \sin\angle ABC$$

$$\sin\angle AOB = \sin\left(180^0 - \angle BCA\right)$$

$$= \sin\angle BCA$$



চিত্ৰ ২.৮

$\therefore$ (1)অৰ পৰা

$$\frac{P}{\sin\angle BAC} = \frac{Q}{\sin\angle ABC} = \frac{R}{\sin\angle BCA} \qquad (2)$$

আকৌ, ACB ত্ৰিভুজৰ পৰা

$$\frac{\sin\angle BAC}{BC} = \frac{\sin\angle ABC}{CA} = \frac{\sin\angle BCA}{AB} \qquad (3)$$

$\therefore$ (2) আৰু (3)ৰ পৰা

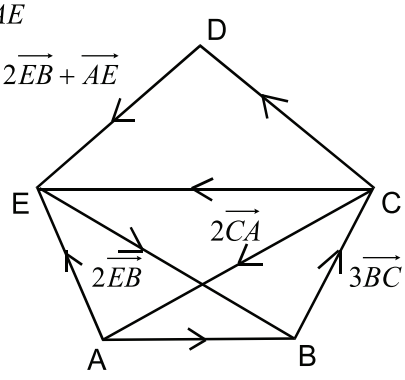
$$\frac{P}{BC}=\frac{Q}{CA}=\frac{R}{AB}$$

8 আৰু 9. নিজে চেষ্টা কৰক।

১০ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ আমি পালোঁ

$$\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+2\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{AE}$$
$$=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}\right)+2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{AE}$$
$$=\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{AE}$$
$$=2\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{EB}$$
$$=2\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}\right)$$
$$=2\left(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}\right)$$
$$=\vec{O}$$

$\therefore$ বলকেইটা সাম্যাৱস্থাত আছে।



চিত্ৰ ২.৯

অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ P = 6 newton

AD = 9m

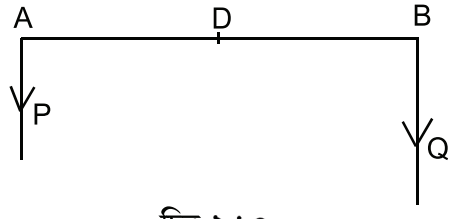
DB = 8m

$\therefore$ এতিয়া P. DA = Q. DB

বা, 6 x 9 = Q x 8

$$\therefore Q=\frac{3\times 9}{4}=\frac{27}{4}\text{ newton}$$

$$\therefore R=\left(6+\frac{27}{4}\right)\text{ newton}$$



চিত্ৰ ২.১০

$$=\frac{51}{4}\text{ newton}$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল P, Q সদৃশ সমান্তৰাল বল দুটাই ক্ৰমে A, B ত ক্ৰিয়া কৰে।

ধৰা হ'ল লব্ধই AB ৰ D ত ক্ৰিয়া কৰে।

$\therefore$ P. AD = Q. BD (1)

বল দুটাৰ ক্ৰিয়া ৰেখা সলনি কৰা হ'ল।

দিয়া আছে যে লব্ধই D ত ক্ৰিয়া কৰে।

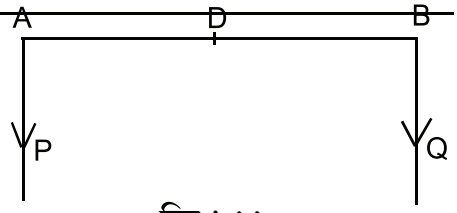
$\therefore$ Q. AD = P. BD (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা

$$\frac{P}{Q}=\frac{Q}{P}$$

অর্থাৎ, $P^2 = Q^2$

অর্থাৎ, P = Q



চিত্র ২.১১

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ P = 5 newton

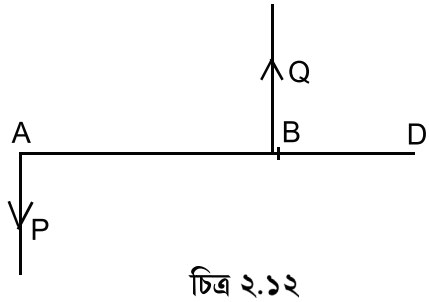
AD = 12 m

AB = 9m

P. DA = Q. DB

বা, 5 x 12 = Q x 3

$\therefore Q=\frac{5\times12}{3}=20$ newton



চিত্র ২.১২

$\therefore$ R = Q – P

= (20 – 5) newton = 15 newton.

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল P, Q বিসদৃশ সমান্তৰাল বল দুটাই ক্রমে A, B বিন্দুত ক্রিয়া কৰে, যাত P > Q.

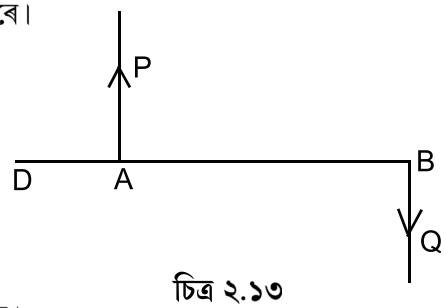
ধৰা হ'ল লব্ধই বর্ধিত BAৰ Dত ক্রিয়া কৰে।

$\therefore$ P. AD = Q. BD

বা, P. AD = Q.(AB + AD)

$\therefore$ (P – Q) AD = Q. AB

$\therefore AD=\frac{Q}{P-Q}AB$ (1)



চিত্র ২.১৩

ধৰা হ'ল প্রতিটো বলৰ মান x বঢ়োৱা হ'ল।

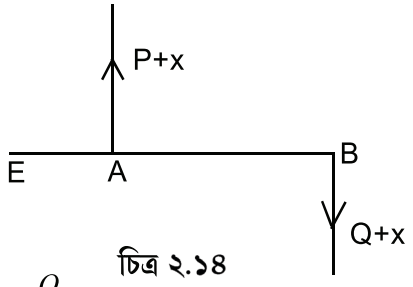
$\therefore$ (P + x). AE = (Q + x). BE

বা, (P + x) AE = (Q + x) (AB + AE)

বা (P + x – Q – x) AE = (Q + x) . AB

$\therefore$ (P – Q). AE = (Q + x). AB

$\therefore AE=\frac{Q+x}{P-Q}.AB$



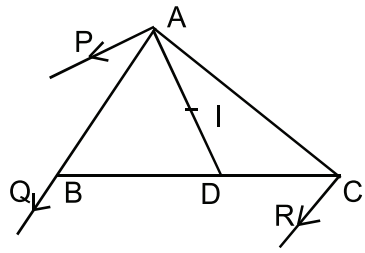
চিত্র ২.১৪

এতিয়া $\frac{Q+x}{P-Q}.AB=\frac{Q}{P-Q}.AB+\frac{x}{P-Q}.AB>\frac{Q}{P-Q}AB$

অর্থাৎ, AE > AD.

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (iii) ধৰা হ'ল ABC ত্রিভুজৰ I অন্তঃকেন্দ্র। AD হ'ল BAC কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক।



চিত্র ২.১৫

$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$ (1)

দিয়া আছে যে লব্ধ অন্তঃকেন্দ্র I ৰ মাজেৰে যায়।

$\therefore$ Q. BD = R. DC, অর্থাৎ, $\frac{Q}{R} = \frac{DC}{BD}$ (2)

$\therefore$ (1) আৰু (2)ৰ পৰা

$\frac{Q}{R} = \frac{AC}{AB}$ অর্থাৎ $\frac{Q}{CA} = \frac{R}{AB}$

সেইদৰে, $\frac{P}{BC} = \frac{Q}{CA}$

$\therefore \frac{P}{BC} = \frac{Q}{CA} = \frac{R}{AB}$

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i), (ii), (iv), নিজে চেষ্টা কৰক।



২.৯ আৰ্হি প্রশ্ন

প্রশ্ন ১ঃ তিনিটা সামতলিক বলে এটা বিন্দুত যিকোনো উপায়ে ক্রিয়া কৰিব পাৰে। সিহঁতে সাম্যাৱস্থাত থাকিব পাৰেনে যদি সিহঁতৰ মান (i) 2, 3, 5 (ii) 3, 4, 5 (iii) 1, 3, 5 ?

প্রশ্ন ২ঃ P, Q, R বল তিনিটাই ABC ত্রিভুজৰ পাদিক কেন্দ্র O ত ক্রমে OA, OB, OC দিশত ক্রিয়া কৰি আছে। যদি বল তিনিটা সাম্যাৱস্থাত থাকে, প্রমাণ কৰক যে P : Q : R = a : b : c.

প্রশ্ন ৩ঃ এটা বিন্দুত ক্রিয়াশীল P, Q, R বল তিনিটা সাম্যাৱস্থাত আছে। যদি P আৰু Q ৰ মাজৰ কোণটো P আৰু Rৰ মাজৰ কোণৰ দুগুণ হয়, প্রমাণ কৰক যে $R^2 = Q(Q - P)$.

প্রশ্ন ৪ঃ দুটা সদৃশ সমান্তৰাল বল P আৰু Q এ ক্রমে A আৰু B বিন্দুত ক্রিয়া কৰে আৰু সিহঁতৰ লব্ধই AB ৰ C ত ক্রিয়া কৰে। যদি

(i) P = 12 newton, Q = 8 newton, AB = 10m, R আৰু ACৰ নির্ণয় কৰক,

(ii) P = 12 newton, R = 20 newton, AC = 14m, Q আৰু AB নির্ণয় কৰক,

(iii) R = 12 newton, AC = 0.5m, AB = 3m. P আৰু Q নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৫ঃ দুটা বিসদৃশ সমান্তৰাল বল P আৰু Q এ ক্রমে A আৰু B বিন্দুত ক্রিয়া কৰে আৰু সিহঁতৰ লব্ধই AB (বর্ধিত)ৰ C ত ক্রিয়া কৰে। যদি

(i) P = 5 newton, AB = 9m, AC = 12m, Q আৰু R নির্ণয় কৰক,

(ii) AB = 2.5m, R = 5 newton, AC = 5m, P আৰু Q নির্ণয় কৰক,

(iii) P = 910 newton, Q = 210 newton, AC = 3m, AB আৰু R নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৬ঃ দুটা সদৃশ সমান্তৰাল বল P আৰু Q এ (P > Q) ক্রমে A আৰু B বিন্দুত ক্রিয়া কৰে। যদি সিহঁতৰ অৱস্থান সালসলনি কৰা হয়, প্রমাণ কৰক যে সিহঁতৰ লব্ধ ABত $\frac{P-Q}{P+Q}AB$ দূৰত্ব বিস্থাপিত হ'ব।

প্রশ্ন ৭ঃ দুটা বিসদৃশ সমান্তৰাল বল P আৰু Q এ (P > Q) x মিটাৰ আঁতৰত ক্রিয়া কৰে। যদি ডাঙৰ বলটোৰ দিশ বিপৰীতমুখী কৰি দিয়া হয়, প্রমাণ কৰক যে লব্ধৰ অৱস্থান $\frac{2PQx}{P^2-Q^2}$ মিটাৰ বিস্থাপিত হ'ব।

*** ***** ***

অধ্যায় ৩ ঃ ভ্রামক আৰু বল যুগ্ম

অধ্যায় গাঁথনি

৩.১ উদ্দেশ্য

৩.২ পৰিচয়

৩.৩ এটা বিন্দু সাপেক্ষে বলৰ ভ্রামক

৩.৪ বলযুগ্ম

৩.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৩.৬ অধিক জানিবলৈ

৩.৭ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৩.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

৩.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- এটা বিন্দু সাপেক্ষে বলৰ ভ্রামক সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- বলযুগ্ম সম্বন্ধে জানিব পাৰিব

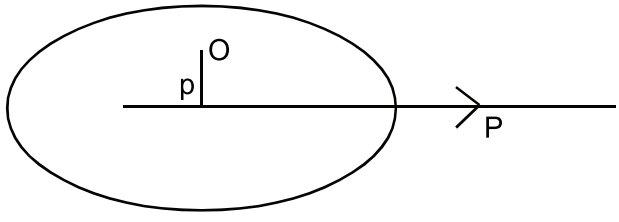
৩.২ পৰিচয়

এই অধ্যায়ত আমি ভ্রামক আৰু বলযুগ্ম সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

৩.৩ এটা বিন্দু সাপেক্ষে বলৰ ভ্রামক

এটা বলৰ মান আৰু এটা নির্দিষ্ট বিন্দুৰ পৰা বলটোৰ ক্রিয়া ৰেখালৈ লম্ব দূৰত্বৰ পূৰণফলক বিন্দুটো সাপেক্ষে বলটোৰ ভ্রামক (moment) বুলি কোৱা হয়।

ধৰা হ'ল P বলটোৱে এটা দৃঢ় বস্তুত ক্রিয়া কৰি আছে। ধৰা হ'ল ই স্থিৰ বিন্দু O সাপেক্ষে দৃঢ় বস্তুটোক ঘূৰোৱাৰ প্রয়াস কৰে। তেনেহ'লে O সাপেক্ষে P ৰ ভ্রামক = pP.



চিত্র ৩.১

ভ্রামক এটা সদৃশ ৰাশি।

যদি আৱর্তনৰ প্রয়াস ঘড়ীৰ কাঁটাৰ বিপৰীতমুখী হয়, তেনেহ'লে এটা বিন্দু সাপেক্ষে বলৰ ভ্রামকক ধনাত্মক বুলি ধৰা হয়, আৰু আৱর্তনৰ প্রয়াস ঘড়ীৰ কাঁটাৰ দিশত হ'লে ভ্রামক ঋণাত্মক বুলি বিবেচনা কৰা হয়।

ভ্রামকৰ একক ঃ ভ্রামকৰ একক dyne-cm, newton-m, poundal-ft হিচাপে প্রকাশ কৰা হয়।

এটা বিন্দু সাপেক্ষে বলৰ ভ্রামকৰ জ্যামিতীয় অর্থ

ধৰা হ'ল P বলটোৱে এটা দৃঢ় বস্তুত ক্রিয়া কৰি আছে। ধৰা হ'ল ই বস্তুটোক স্থিৰ বিন্দু O সাপেক্ষে ঘূৰোৱাৰ প্রয়াস কৰে।

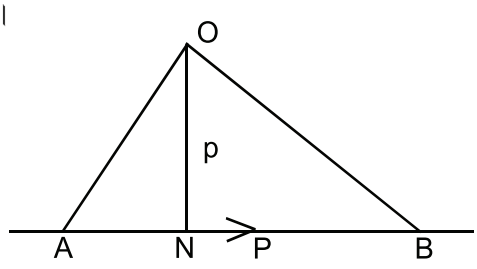
ধৰা AB এ P বলটো প্রদর্শন কৰে।

O সাপেক্ষে P ৰ ভ্রামক

= pP.

আকৌ, OAB ত্রিভুজৰ কালি

$$= \frac{1}{2} pP$$



চিত্র ৩.২

$\therefore$ O সাপেক্ষে P ৰ ভ্রামক

= 2 (OAB ত্রিভুজৰ কালি)

দেখা গ'ল যে যি ত্রিভুজৰ ভূমি বল বুজোৱা ৰেখাখণ্ডডাল আৰু শীর্ষ বিন্দু যি বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামক লোৱা হয় সেই বিন্দু, তেনে ত্রিভুজৰ কালিৰ দুগুণ হ'ল, বিন্দুটো সাপেক্ষে বলটোৰ ভ্রামক।

উদাহৰণ 3 ঃ ABCD বর্গৰ প্রতি বাহুৰ দৈর্ঘ 4m. 5, 6, 7, 8 newton বলকেইটাই ক্রমে AB, CB, CD, AD বাহুৰে ক্রিয়া কৰে। A, B, C, D বিন্দুকেইটা সাপেক্ষে বলবোৰৰ ভ্রামকৰ সমষ্টি নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ A সাপেক্ষে ভ্রামকৰ যোগফল

= (0 x 5 – 4 x 6 + 4 x 7 x 0 x 8) newton – m

= 4 newton – m

B সাপেক্ষে ভ্রামকৰ যোগফল

= (0 x 5 + 0 x 6 + 4 x 7 – 4 x 8) newton–m

= – 4 newton –m

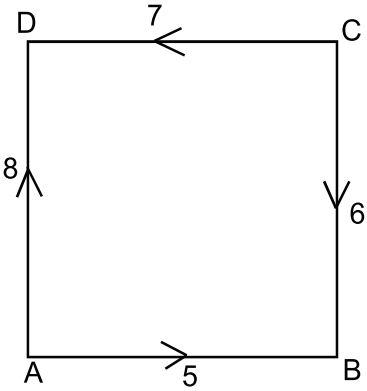
C সাপেক্ষে ভ্রামকৰ যোগফল

= (0 x 6 + 0 x 7 – 4 x 8 + 4 x 5)

= – 12 newton –m

D সাপেক্ষে ভ্রামকৰ যোগফল

= (0 x 7 + o x 8 + 4 x 6) newton – m



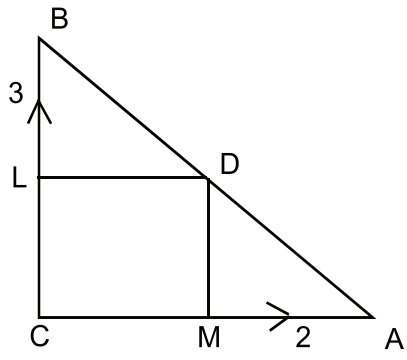
চিত্র ৩.৩

= – 4 newton –m

উদাহৰণ 4 ঃ ABC এটা সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজাকৃতিৰ ব'ৰ্ড আৰু C কোণটো সমকোণ। এখন মসৃণ টেবুলত এইখন থোৱা হৈছে। 2 newton বলে C বিন্দুত CA ৰে, আৰু 3 newton বলে B বিন্দুত CBৰে ক্রিয়া কৰে। যদি AC = BC = 1m, তেনেহ'লে A, B আৰু D বিন্দু সাপেক্ষে ভ্রামকৰ যোগফল নির্ণয় কৰক। D হ'ল AB ৰ মধ্য বিন্দু।

সমাধান ঃ D হ'ল AB ৰ মধ্য বিন্দু।

$$\therefore DL = \frac{1}{2}CA = \frac{1}{2}m$$



চিত্র ৩.৪

$$DM = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}m$$

A সাপেক্ষে ভ্রামকৰ যোগফল

= (0 x 2 – 1 x 3) newton – m = –3 newton –m

B সাপেক্ষে ভ্রামকৰ যোগফল

= (1 x 2 + 0 x 3) newton – m = 2 newton –m

D সাপেক্ষে ভ্রামকৰ যোগফল

= $\left(\frac{1}{2}\times 2 - \frac{1}{2}\times 3\right)$ newton m = –0.5 newton –m



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ ABCD বর্গৰ প্রতি বাহুৰ দৈর্ঘ 4m. 4, 3, 6, 10 newton বলকেইটাই ক্রমে AB, BC, DC, DA বাহুৰে ক্রিয়া কৰে। A, B, C, D, O বিন্দুকেইটা সাপেক্ষে বলবোৰৰ ভ্রামকৰ বীজগণিতীয় সমষ্টি নির্ণয় কৰক। O হ'ল বর্গটোৰ কেন্দ্র।

প্রশ্ন নং ২ঃ ABCD বর্গৰ প্রতি বাহুৰ দৈর্ঘ 4m. 4, 3, 2, 10 newton বলকেইটাই ক্রমে CB, BA, DA, DB বাহুৰে ক্রিয়া কৰে। C সাপেক্ষে বলকেইটাৰ ভ্রামকৰ

বীজগণিতীয় সমষ্টি নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ ABCD বর্গৰ প্রতি বাহুৰ দৈর্ঘ 4m. 3, 5, 3, 5 newton বলকেইটাই ক্রমে AB, CB, DC, DA বাহুৰ ক্রিয়া কৰে। B, C আৰু O বিন্দুকেইটা সাপেক্ষে বলকেইটাৰ ভ্রামকৰ বীজগণিতীয় সমষ্টি নির্ণয় কৰক। O হ'ল বর্গটোৰ কেন্দ্র।

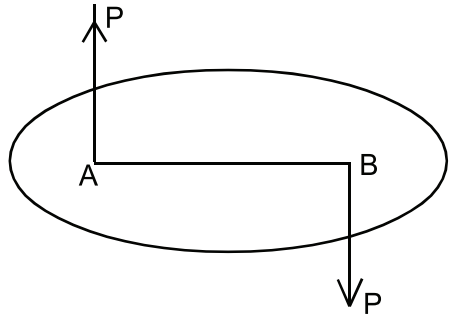
৩.৪ বলযুগ্ম

এটা দৃঢ় বস্তুত ক্রিয়াশীল দুটা সমান আৰু বিসদৃশ সমান্তৰাল বলে (ক্রিয়া ৰেখা বিভিন্ন) এটা বলযুগ্ম (couple) গঠন কৰে বুলি কোৱা হয়।

এটা বলযুগ্মৰ বল দুটাৰ মাজৰ লম্ব দূৰত্বক বলযুগ্মটোৰ বাহু (arm) বুলি কোৱা হয়।

বলযুগ্মটোৰ এটা বল আৰু বাহুৰ পূৰণফলক বলযুগ্মটোৰ ভ্রামক বুলি কোৱা হয়।

বলযুগ্মৰ একক আৰু ভ্রামকৰ একক একে।



চিত্র ৩.৫

ধৰা হ'ল P মানৰ দুটা বলে এটা বলযুগ্ম গঠন কৰে। ধৰা হ'ল বল দুটাৰ মাজৰ লম্ব দূৰত্ব AB(=p)। বলযুগ্মটো সাধাৰণতে এনেদৰে লিখা হয়, (P, p)।

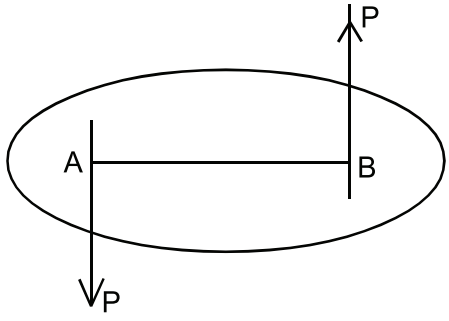
যদি আৱর্তনৰ প্রয়াস ঘড়ীৰ কাঁটাৰ বিপৰীতমুখী হয়, বলযুগ্মৰ ভ্রামক ধনাত্মক বুলি ধৰা হয় আৰু আৱর্তনৰ প্রয়াস ঘড়ীৰ কাঁটাৰ দিশত হয়, তেনেহ'লে বলযুগ্মৰ ভ্রামক ঋণাত্মক বুলি বিবেচনা কৰা হয়।

এতিয়া আমি প্রমাণ ব্যতিৰেকে তলৰ উপপাদ্যটো উল্লেখ কৰোঁ। ইয়াৰ সহায়ত এখন সমতলত থকা যিকোনো সংখ্যক বলযুগ্মৰ লব্ধ উলিয়াব পাৰি।

উপপাদ্য ঃ একেখন সমতলত এটা দৃঢ়বস্তুৰ ওপৰত ক্রিয়া কৰা দুটা বলযুগ্মৰ লব্ধও এটা বলযুগ্ম আৰু ইয়াৰ ভ্রামক বলযুগ্ম দুটাৰ ভ্রামকৰ বীজগণিতীয় সমষ্টিৰ সমান।

উদাহৰণ 5 ঃ 3, 5, 3, 5 newton বলে এটা বর্গৰ বাহুৰে ক্রমাগতভাৱে ক্রিয়া কৰে। লব্ধ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল বৰ্গটোৰ প্ৰতি বাহুৰ দৈৰ্ঘ a.



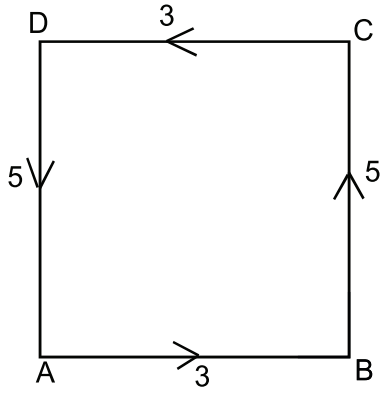
চিত্ৰ ৩.৬

চিত্ৰৰ পৰা আমি দেখিছোঁ যে AB ৰে 3 newton বল আৰু CD ৰে 3 newton বলে এটা বলযুগ্ম সৃষ্টি কৰে আৰু ইয়াৰ ভ্রামক 3a.

সেইদৰে, BC ৰে 5 newton বল আৰু DA ৰে 5 newton বলে এটা বলযুগ্ম সৃষ্টি কৰে। আৰু ইয়াৰ ভ্রামক 5a.

∴ প্ৰদত্ত বল-প্ৰণালীৰ লব্ধ (3a + 5a), অৰ্থাৎ, 8a.

উদাহৰণ 6 ঃ 8, 7, 8, 7 newton বলে এটা বৰ্গৰ বাহুৰে ক্ৰমাগতভাৱে ক্ৰিয়া কৰে। লব্ধ নিৰ্ণয় কৰক। (নিজে চেষ্টা কৰক)।



চিত্ৰ ৩.৭



৩.৫ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- এটা বলৰ মান আৰু এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ পৰা বলটোৰ ক্ৰিয়া ৰেখালৈ লম্ব দূৰত্বৰ পূৰণফলক বিন্দুটো সাপেক্ষে বলটোৰ ভ্রামক বুলি কোৱা হয়।
- যদি আৱৰ্তনৰ প্ৰয়াস ঘড়ীৰ কাঁটাৰ বিপৰীতমুখী হয়, তেনেহ'লে এটা বিন্দু সাপেক্ষে বলৰ ভ্রামকক ধনাত্মক বুলি ধৰা হয় আৰু আৱৰ্তনৰ প্ৰয়াস ঘড়ীৰ কাঁটাৰ দিশত হ'লে ভ্রামক ঋণাত্মক বুলি বিবেচনা কৰা হয়।

- এটা দৃঢ় বস্তুত ক্রিয়াশীল দুটা সমান আৰু বিসদৃশ সমান্তৰাল বলে (ক্রিয়া ৰেখা বিভিন্ন) এটা বলযুগ্ম গঠন কৰে বুলি কোৱা হয়।
  এটা বলযুগ্মৰ বল দুটাৰ মাজৰ লম্ব দূৰত্বক বলযুগ্মটোৰ বাহু বুলি কোৱা হয়।
  বলযুগ্মটোৰ এটা বল আৰু বাহুৰ পূৰণফলক বলযুগ্মটোৰ ভ্রামক বুলি কোৱা হয়।



৩.৬ অধিক জানিবলৈ

1) Statics and Dynamics with Background Mathematics, Adrian Roberts, Cambridge University Press.
2) Enginering Machanics : Statics and Dynamics by R. G. Hibbeler and Ashok Gupta.
3) Engineering Mechanics : Statics and Dynamics by S. Rajasekarn and Sankara subramanian. Vikas Publishing House Pvt. Ltd.

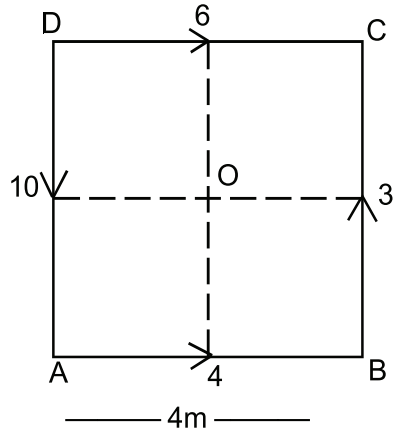


৩.৭ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ যিহেতু ABCD বর্গৰ O কেন্দ্র, গতিকে বর্গৰ বাহুৰ পৰা ইয়াৰ দূৰত্ব

$$= \frac{1}{2} \times 4m = 2m$$



চিত্র ২.২২

A সাপেক্ষে ভ্রামকৰ যোগফল

= 0 x 4 + 4 x 3 – 4 X 6 + 0 x 10 = –12 newton

B সাপেক্ষে ভ্রামকৰ যোগফল

= 0 x 4 + 0 x 3 – 4 x 6 + 4 x 10 = 16 newton m.

C সাপেক্ষে ভ্রামকৰ যোগফল

= 0 x 3 + 0 x 6 + 4 x 10 + 4 x 4

= 56 newton m

D সাপেক্ষে ভ্রামকৰ যোগফল

= 0 x 6 + 0 x 10 + 4 x 4 + 4 x 3

= 28 newton m

O সাপেক্ষে ভ্রামকৰ যোগফল

= 2 x 4 + 2 x 3 – 2 x 6 + 2 x 10

= 22 newton m

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।



৩.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ৮ঃ ABCD বৰ্গৰ প্ৰতি বাহুৰ দৈৰ্ঘ 1.5m. 4, 3, 2 আৰু $5\sqrt{2}$ মানৰ বলে CB, BA, DA আৰু DC বাহুৰে ক্ৰিয়া কৰে। C বিন্দু সাপেক্ষে বলবোৰৰ ভ্রামকৰ সমষ্টি নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৯ঃ 4, 7, 4 আৰু 7 মানৰ বলকেইটাই এটা বৰ্গৰ বাহুকেইটাৰে ক্ৰমাগতভাৱে ক্ৰিয়া কৰে। প্ৰমাণ কৰক যে বলকেইটাৰ লব্ধ এটা বলযুগ্ম আৰু ইয়াৰ ভ্রামক 11a একক, a হ'ল বৰ্গটোৰ প্ৰতি বাহুৰ দৈৰ্ঘ।

*** ***** ***

অধ্যায় ৪ ঃ ঘর্ষন

অধ্যায় গাঁথনি

৪.১ উদ্দেশ্য
৪.২ পৰিচয়
৪.৩ ঘর্ষন
৪.৩.১ সংজ্ঞা
৪.৩.২ ঘর্ষন প্রকাৰ
৪.৩.৩ সীমা ঘর্ষন
৪.৩.৪ ঘর্ষন গুনাংক
৪.৩.৫ ঘর্ষনৰ বিধি
৪.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
৪.৫ অধিক জানিবলৈ
৪.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
৪.৭ আৰ্হি প্রশ্ন

৪.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- ঘর্ষনৰ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- ঘর্ষনৰ প্রকাৰৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- সীমা ঘর্ষন আৰু ঘর্ষনৰ গুনাংকৰ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- ঘর্ষনৰ বিধি সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

৪.২ পৰিচয়

এই অধ্যায়ত আমি ঘর্ষন, ঘর্ষনৰ প্রকাৰ, সীমা ঘর্ষন আৰু ঘর্ষনৰ গুনাংক সম্বন্ধে অধ্যয়ন কৰিম। আমি ঘর্ষনৰ বিধিৰ সম্বন্ধেও এই অধ্যায়টিত আলোচনা কৰিম।

৪.৩ ঘর্ষন

৪.৩.১ ঘর্ষনৰ সংজ্ঞা

এটা বস্তু আন এটা বস্তুৰ পিঠিয়েদি চোঁচৰি বা বাগৰি গ'লে এটা বলে গতি বাধাপ্রাপ্ত কৰিবলৈ প্রয়াস কৰে। এটা বাধাটোকে ঘর্ষন বল (force of friction) বুলি

কোৱা হয়। ঘর্ষনে এটা বস্তু আন এটা বস্তুৰ পিঠিয়েদি চোঁচৰি যোৱাত বাধা দিয়ে। ঘর্ষন এটা স্ব নিয়ন্ত্রিত (self-adjusling) বল।

৪.৩.২ ঘর্ষনৰ প্রকাৰ

ঘর্ষন দুই প্রকাৰৰ ঃ

১) স্থৈতিক ঘর্ষন

২) ক্রিয়াশীল ঘর্ষন

১) স্থৈতিক ঘর্ষন ঃ স্থিৰাৱস্থাত থকা এটা বস্তুৰ ওপৰত ক্রিয়া কৰা ঘর্ষন বলক স্থৈতিক ঘর্ষন (statical friction) বুলি কোৱা হয়।

২) ক্রিয়াশীল ঘর্ষন ঃ যেতিয়া এটা বস্তু প্রকৃততে গতিশীল হৈ থাকে, তেতিয়া তাৰ ওপৰত ক্রিয়শীল ঘর্ষন (Dynamical friction) বুলি কোৱা হয়।

ক্রিয়াশীল ঘর্ষন দুই প্রকাৰৰ ঃ

১) পিছল ঘর্ষন ঃ যেতিয়া এটা বস্তু আন এটা বস্তুৰ ওপৰত পিছলি যোৱাৰ ফলত বস্তুটোৰে যি ঘর্ষনৰ সন্মুখীন হয় সেই ঘর্ষনক পিছল ঘর্ষন বুলি কোৱা হয়।

২) ঘুর্ণী ঘর্ষন ঃ যেতিয়া এটা বস্তু আন এটা বস্তুৰ ওপৰত বাগৰি যোৱাৰ ফলত বস্তুটোৰে যি ঘর্ষনৰ সন্মুখীন হয় সেই ঘর্ষনক ঢাল ঘর্ষন বুলি কোৱা হয়।

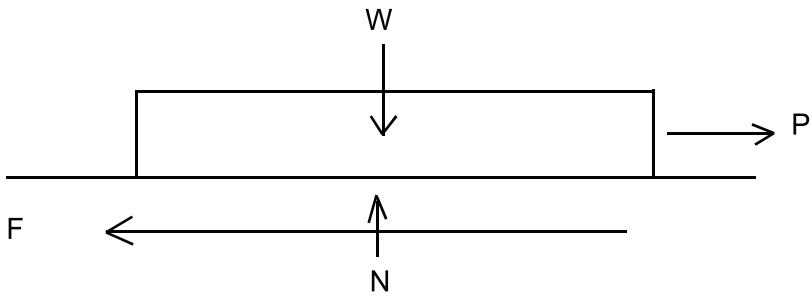
৪.৩.৩ সীমা ঘর্ষন

গতিৰ সময়ত এটা বস্তুৰ ওপৰত ক্রিয়াশীল ঘর্ষন বলক সীমা ঘর্ষন (limiting friction) বুলি কোৱা হয়। যিটো বলে গতি উৎপন্ন কৰিবলৈ প্রয়াস কৰে, সীমা ঘর্ষনৰ মান তাৰ সমান, কিন্তু বিপৰীতমুখী।

৪.৩.৪ ঘর্ষনৰ গুনাংক

পৰস্পৰ সংস্পর্শত থকা কঠিন বস্তু দুটাৰ এটাক আনটোৰ ওপৰেদি টানি নিওঁতে স্পর্শ তলত স্পর্শকীয়ভাৱে উদ্ভৱ হোৱা সীমা ঘর্ষন আৰু উলম্ব দিশত হোৱা প্রতিক্রিয়াৰ অনুপাতক ঘর্ষন গুনাংক (Co-efficient of friction) বোলে।

ই স্পর্শ তলৰ প্রকৃতিৰ ওপৰত নির্ভৰ কৰে।



ঘর্ষনৰ গুনাংক = $\frac{F}{N}$

য'ত F হ'ব সীমা ঘর্ষন আৰু N হ'ব উলম্ব দিশত হোৱা স্পর্শৰ পৃষ্ঠৰ মাজৰ প্রতিক্রিয়া। ঘর্ষনৰ গুনাংক μ ৰে বুজোলা হয়।

গতিকে $\mu = \frac{F}{N}$

৪.৩.৫ ঘর্ষনৰ বিধি

1. স্পর্শ বিন্দুৱে যিটো দিশত গতি কৰা প্রয়াস কৰে, ঘর্ষন বলৰ দিশ তাৰ বিপৰীতমুখী।
2. এটা নির্দিষ্ট গৰিষ্ঠ সীমা সাপেক্ষে, স্পর্শ বিন্দুৰ গতিক বাধা দিবলৈ, ঘর্ষন বলৰ মান পর্যাপ্ত।
3. সীমা ঘর্ষন, স্পর্শ কালিৰ পৰা মুক্ত।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ ঃ ঘর্ষনৰ সংজ্ঞা দিয়ক।

.....

.....

প্রশ্ন নং ২ ঃ ঘর্ষনৰ বিধিসমূহ উল্লেখ কৰক।

.....

.....

প্রশ্ন নং ৩ ঃ ঘর্ষনৰ গুনাংকৰ সংজ্ঞা দিয়ক।

.....

.....



৪.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- এটা বস্তু আন এটা বস্তুৰ পিঠিয়েদি চোঁচৰি বা বাগৰি গ'লে, এটা বলে গতি বাধাগ্রস্ত কৰিবলৈ প্রয়াস কৰে। এই বাধাটোকে ঘর্ষন বল বুলি কোৱা হয়।
- ঘর্ষনে এটা বস্তু আন এটা বস্তুৰ পিঠিয়েদি চোঁচৰি যোৱাত বাধা দিয়ে। ঘর্ষন এটা স্বনিয়ন্ত্রিত বল।
- ঘর্ষন দুই প্রকাৰৰ ঃ ১) স্থৈতিক ঘর্ষন ২) ক্রিয়াশীল ঘর্ষন।
- ক্রিয়াশীল ঘর্ষন দুই প্রকাৰৰ ঃ ১) পিছল ঘর্ষন ২) ঘুর্ণী ঘর্ষন।
- গতিৰ সময়ত এটা বস্তুৰ ওপৰত ক্রিয়াশীল ঘর্ষন বলক সীমা ঘর্ষন বুলি কোৱা হয়।
- পৰস্পৰ সংস্পর্শত থকা কঠিন বস্তু দুটাৰ এটাক আনটোৰ ওপৰেদি টানি নিওঁতে স্পর্শ তলত স্পর্শকীয়ভাৱে উদ্ভৱ হোৱা সীমা ঘর্ষন আৰু উলম্ব দিশত হোৱা প্রতিক্রিয়াৰ অনুপাতক ঘর্ষন গুনাংক (μ) বোলে।

  $$\text{i.e.,} \quad \mu = \frac{F}{N}$$

  য'ত F = সীমা ঘর্ষন

  F = স্পর্শ তলিৰ মাজৰ উলম্ব দিশত হোৱা প্রতিক্রিয়া।



৪.৫ অধিক জানিবলৈ

1) Statics and Dynamics with Background Mathematics, Adrian Roberts, Cambridge University Press.
2) Enginering Machanics : Statics and Dynamics by R. G. Hibbeler and Ashok Gupta.
3) Engineering Mechanics : Statics and Dynamics by S. Rajasekarn and Sankara subramanian. Vikas Publishing House Pvt. Ltd.



৪.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ ৪.৩.১ চাওঁক।

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ ৪.৩.৩ চাওঁক।

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ ৪.৩.৩ চাওঁক।



৪.৭ আৰ্হি প্রশ্ন

প্রশ্ন ১ ঃ স্থৈতিক ঘর্ষন আৰু ক্রিয়াশীল ঘর্ষনৰ সম্বন্ধ ব্যাখ্যা কৰক।

প্রশ্ন ২ ঃ সীমা ঘর্ষন সংজ্ঞা দিয়ক।

*** ***** ***

অধ্যায় ৫ ঃ কণিকাৰ শুদ্ধগতিবিজ্ঞান

অধ্যায় গাঁথনি

৫.১ উদ্দেশ্য

৫.২ পৰিচয়

৫.৩ কণিকাৰ শুদ্ধগতিবিজ্ঞান আৰু আনুষংগিক পদ

৫.৪ আপেক্ষিক বেগ

৫.৫ কৌণিক বেগ

৫.৬ ধ্ৰুৱক ত্বৰণৰ অধীনত ৰৈখিক গতি

৫.৭ নিউটনৰ গতিৰ বিধি

৫.৮ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৫.৯ অধিক জানিবলৈ

৫.১০ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৫.১১ আৰ্হি প্ৰশ্ন

৫.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- কণিকাৰ শুদ্ধগতিবিজ্ঞান আৰু আনুষংগিক পদ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- ধ্ৰুৱক ত্বৰণৰ অধীনত ৰৈখিক গতি সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- নিউটনৰ গতিৰ বিধি সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

৫.২ পৰিচয়

গতিবিজ্ঞান (Dynamics) হ'ল বলবিজ্ঞানৰ (Mechanics) এটা শাখা। বলৰ ক্ৰিয়াৰ ফলত বস্তুৰ গতি সম্বন্ধে ইয়াত আলোচনা কৰা হয়।

গতিবিজ্ঞান সাধাৰণতে দুটা শাখাত বিভক্ত— বলগতিবিজ্ঞান (Kinetics) আৰু শুদ্ধগতিবিজ্ঞান (Kinematics)। এই অধ্যায়ত আমি কণিকাৰ (particle) শুদ্ধগতিবিজ্ঞান আৰু আনুষংগিক পদ, কৌণিক বেগ, আপেক্ষিক বেগ ইত্যাদি সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম। আকৌ, আমি ধ্ৰুৱক ত্বৰণৰ অধীনত ৰৈখিক গতি সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম। নিউটনৰ গতিৰ বিধি সম্বন্ধেও আমি অধ্যয়ন কৰিম।

৫.৩ কণিকাৰ শুদ্ধগতিবিজ্ঞান আৰু আনুষংগিক

দ্ৰব্য বস্তুৰ ভৰ আৰু গতি সৃষ্টি কৰা বল বিবেচনা নকৰাকৈ দ্ৰব্য বস্তুৰ গতি সম্বন্ধে শুদ্ধগতিবিজ্ঞানত আলোচনা কৰা হয়।

পদাৰ্থ ঃ ইন্দ্ৰিয়গম্য আৰু স্থান আগুৰা যিকোনোৱে পদাৰ্থ (matter)।

বস্তু ঃ বস্তু (body) বা দ্ৰব্য বস্তু (material body) হ'ল পদাৰ্থৰ স্বল্প পৰিমাণৰ অংশ।

আয়তন ঃ বস্তুৱে আগুৰি থকা স্থানৰ পৰিমাণ হ'ল আয়তন (volume)।

ভৰ ঃ কোনো বস্তুত থকা পদাৰ্থৰ পৰিমাণ হ'ল ভৰ (mass)।

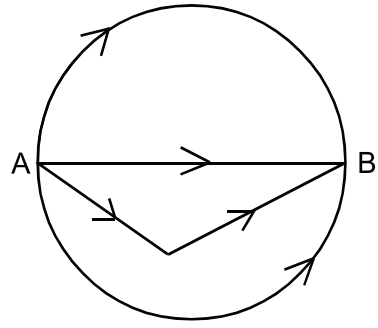
কণিকা ঃ অত্যল্প ভৰৰ বস্তুৱে হ'ল কণিকা (particle)। ইয়াক এটা চলমান জ্যামিতীয় বিন্দুৰ দ্বাৰা চিনাক্ত কৰিব পাৰি।

অৱস্থান ঃ কোনো নিৰ্দিষ্ট সময়ত যিটো বিন্দুত এটা কণিকা পোৱা যায়, তাক কণিকাটোৰ অৱস্থান (position) বুলি কোৱা হয়।

গতি আৰু স্থিৰাৱস্থা ঃ সময়ৰ লগে লগে বস্তুৰ অৱস্থানৰ পৰিৱৰ্তনক গতি (motion) বুলি কোৱা হয়। যেতিয়া অৱস্থানৰ পৰিৱৰ্তন নহয়, তেনেহ'লে বস্তুটো স্থিৰাৱস্থাত (rest) থাকে বুলি কোৱা হয়।

বিস্থাপন ঃ যেতিয়া কণিকা এটাই এটা নিৰ্দিষ্ট পথেৰে চলাচল কৰে, ইয়াৰ অৱস্থান সলনি হয়। দুটা বিন্দুৰ মাজৰ অৱস্থানৰ পৰিৱৰ্তনক, পথ যিয়েই নহওক কিয়, বিস্থাপন (displacement) বুলি কোৱা হয়।

তলৰ চিত্ৰত, A হ'ল কণিকাটোৰ আদি অৱস্থান (initial position) আৰু B হ'ল অন্তিম অৱস্থান (final position)। $\overrightarrow{AB}$ বিস্থাপন।



বিস্থাপনৰ তিনিটা বৈশিষ্ট্য আছে, যথা, (a) মান (magnitude), – AB দৈর্ঘৰে বুজোৱা, (b) দিশ (directions), – AB ৰ পিনে (c) অভিদিশা (sense), A ৰ পৰা B লৈ বিস্থাপন।

দেখা গ'ল যে বিস্থাপন এটা সদিশ ৰাশি (vector quantity)।

বেগ ঃ এটা চলমান কণিকাৰ বিস্থাপনৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰক বেগ (velocity) বোলে। ইয়াৰ নিৰ্দিষ্ট দিশ আৰু মান আছে।

বেগ — এটা সদিশ ৰাশি।

দ্রুতি ঃ অৱস্থানৰ পৰিৱর্তনৰ হাৰক দ্রুতি (speed) বোলে। ইয়াৰ কোনো নির্দিষ্ট দিশ নাই।

দ্রুতি এটা অদিশ ৰাখি (scalar quantity)।

টোকা ঃ ৰৈখিক বেগৰ ক্ষেত্রত, দ্রুতি আৰু বেগ সমার্থক।

বেগৰ মানৰ একক ঃ যদি কণিকা এটাৰ বিস্থাপন মিটাৰত জোখা হয় আৰু সময় ছেকেণ্ডত জোখা হয়, তেনেহ'লে দ্রুতিৰ একক হ'ল প্রতি ছেকেণ্ডত এক মিটাৰ (one metre per second)। ইয়াক m/s এৰে বুজোৱা হয়। যদি কণিকা এটাৰ বিস্থাপন কিল'মিটাৰত আৰু সময় ঘণ্টাত বুজোৱা হয়, তেনেহ'লে দ্রুতিৰ একক হ'ল প্রতি ঘণ্টাত এক কিল'মিটাৰ। ইয়াক km/h এৰে বুজোৱা হয়।

মন কৰিব লগীয়া যে 18km/h = 5 m/s.

সুষম বেগ

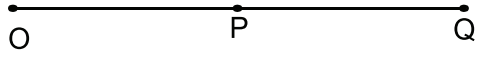
যদি এটা কণিকাই একেডাল সৰল ৰেখাত একে অভিদিশাত গতি কৰে আৰু সমান সময়ৰ অন্তৰালত সমান দূৰত্ব অতিক্রম কৰে, তেনেহ'লে ইয়াৰ বেগ সুষম (uniform) বুলি কোৱা হয়।

বেগৰ বৈশ্লেষিক প্রকাশ

ধৰা হ'ল t সময়ত এটা নির্দিষ্ট বিন্দু O ৰ পৰা এটা চলমান বিন্দু x দূৰত্বত থাকে। ধৰা হ'ল $t+\delta t$ সময়ত কণিকাটো Q বিন্দুত থাকে, য'ত $OQ = x + \delta x$

$\therefore PQ = \delta x$

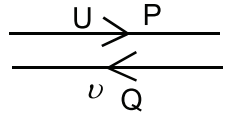
t সময়ত Pৰ বেগ υ



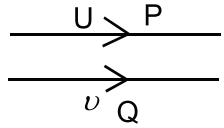
$= \lim_{\delta t \to o} \frac{\delta x}{\delta t}$ ($\because$ বেগ হ'ল বিস্থাপনৰ পৰিৱর্তনৰ হাৰ)

$= \frac{dx}{dt}$

অর্থাৎ $\upsilon = \frac{dx}{dt}$.



সুষম বেগৰ বাবে, $\upsilon = \frac{dx}{dt}$ = ধ্রুৱক



অ-সুষম বেগৰ বাবে, $\upsilon = \frac{dx}{dt} \neq$ ধ্রুৱক

ত্বৰণ

এটা চলমান কণিকাৰ বেগৰ পৰিৱর্তনৰ হাৰক ত্বৰণ (acceleration) বুলি কোৱা হয়।

যদি এটা কণিকাই এডাল ৰেখাত চলাচল কৰে আৰু ইয়াৰ বেগ বাঢ়ে, তেনেহ'লে ত্বৰণ ধনাত্মক, আৰু যদি বেগ হ্রাস পায়, তেনেহ'লে ত্বৰণ ঋণাত্মক। ঋণাত্মক ত্বৰণক মন্থৰণ

(retardation) বুলি কোৱা হয়।

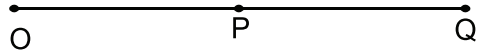
ত্বৰণৰ একক

ত্বৰণৰ একক হ'ল প্ৰতি ছেকেণ্ডত এক মিটাৰ বা এক ছেণ্টিমিটাৰ প্ৰতি ছেকেণ্ডত বেগৰ পৰিৱৰ্তন। ইয়াক $1m/s^2$ বা $1\ cm/s^2$ এৰে বুজোৱা হয়।

ত্বৰণৰ বৈশ্লেষিক প্ৰকাশ

ধৰা হ'ল t সময়ত এটা কণিকাৰ বেগ υ, আৰু $t+\delta t$ সময়ত বেগ $\upsilon+\delta\upsilon$।

t সময়ত ত্বৰণ f



$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{(\upsilon+\delta\upsilon)-\upsilon}{\delta t}$$ ($\because$ ত্বৰণ হ'ল বেগৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰ)

$$= \lim_{\delta t \to 0} \frac{\delta\upsilon}{\delta t}$$

$$= \frac{d\upsilon}{dt}$$

অৰ্থাৎ, $f = \frac{d\upsilon}{dt}$

এতিয়া $f = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$

আকৌ, $f = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon}{dx}\frac{dx}{dt} = \upsilon\frac{d\upsilon}{dx}$

গতিকে $f = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \upsilon\frac{d\upsilon}{dx}$

৩.৪ আপেক্ষিক বেগ

ধৰা হ'ল P আৰু Q বিন্দু দুটাই একেখন সমতলত চলাচল কৰে। P ৰ পৰা দেখিবলৈ পোৱা Q ৰ অৱস্থানৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰক P সাপেক্ষে Q ৰ আপেক্ষিক বেগ (relative velocity) বুলি কোৱা হয়।

যদি P এ u বেগেৰে চলাচল কৰে আৰু Q এ υ বেগেৰে P ৰ বিপৰীত দিশত চলাচল কৰে, তেনেহ'লে Q সাপেক্ষে P ৰ আপেক্ষিক বেগ $= u-(-\upsilon) = u+\upsilon$.

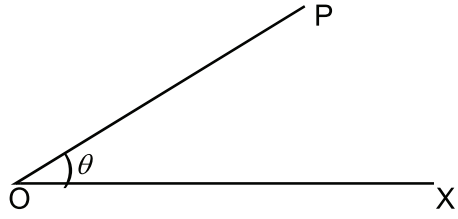
যদি P আৰু Q এ ক্ৰমে u আৰু υ বেগেৰে একে দিশত চলাচল কৰে, তেনেহ'লে Q সাপেক্ষে P ৰ আপেক্ষিক বেগ $= u-\upsilon$

৩.৫ কৌণিক বেগ

কোনো অক্ষ সাপেক্ষে ঘূৰ্ণনশীল বস্তু এটাই বৃত্তীয় কক্ষপথৰ কেন্দ্ৰত একক সময়ত উৎপন্ন কৰা কোণ বা কৌণিক বিস্থাপনৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰক কৌণিক বেগ (angular velocity) বুলি কোৱা হয়।

ধৰা হ'ল এখন সমতলৰ এডাল স্থিৰ ৰেখা OX অত O এটা স্থিৰ বিন্দু।

ধৰা হ'ল সমতলখনত চলাচল কৰা এটা কণিকাৰ t সময়ত অৱস্থান P.



ধৰা হ'ল $\angle XOP = \theta$. ঘড়ীৰ কাঁটাৰ বিপৰীত দিশত ইয়াক ধনাত্মক বুলি কোৱা হয়।

সময় t সাপেক্ষে θ ৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰ, অৰ্থাৎ $\frac{d\theta}{dt}$ হ'ল O সাপেক্ষে P কণিকাৰ কৌণিক বেগ। অৰ্থাৎ, যি হাৰত θ কোণ বাঢ়ে, সেয়াই হ'ল θ সাপেক্ষে কণিকাটোৰ কৌণিক বেগ।

কৌণিক বেগৰ একক হ'ল প্ৰতি ছেকেণ্ডত ৰেডিয়ান। অৰ্থাৎ, এটা কণিকাৰ কৌণিক বেগ ω হ'লে,

$$\omega = \frac{d\upsilon}{dt} \text{ rad/s}$$

সময় t সাপেক্ষে ω ৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰ অৰ্থাৎ $\frac{d\omega}{dt}$ অৰ্থাৎ $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ হ'ল ত্বৰণ (বৰ্ধিত θ ৰ অভিদিশাত)।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ১

প্ৰশ্ন নং ১ঃ এডাল সৰলৰেখাত চলাচল কৰা এটা কণিকাই t সময়ত x দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰে। যদি $x = 3t^2 + 2t, 4$ ছেকেণ্ড অন্তত বেগ আৰু ত্বৰণ নিৰ্ণয় কৰক। (x মিটাৰত, t ছেকেণ্ডত দিয়া আছে)

প্ৰশ্ন নং ২ঃ এডাল সৰল ৰেখাত চলাচল কৰা এটা কণিকাই t সময়ত x দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰে (x মিটাৰত, t ছেকেণ্ডত দিয়া আছে)। যদি $x = 9t^2 - t^3 - 4$, (i) আদি ত্বৰণ, (ii) ত্বৰণ শূন্য হ'লে বেগ, (iii) আৰম্ভণিৰ বিন্দুৰ পৰা পুনৰ স্থিৰ অৱস্থালৈ অহা বিন্দুৰ মাজৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ এডাল সৰল ৰেখাত চলাচল কৰা এটা কণিকাই t সময়ত এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু O ৰ পৰা অতিক্ৰম কৰা দূৰত্ব x এনেদৰে দিয়া আছে। $x = t^3 + 18t + 11$ (x ছেমিত দিয়া আছে)

5 ছেকেণ্ড অন্তত O বিন্দুৰ পৰা ইয়াৰ দূৰত্ব, বেগ আৰু ত্বৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ এডাল সৰলৰেখাত চলাচল কৰা এটা কণিকাৰ এটা স্থিৰ বিন্দুৰ পৰা x দূৰত্বত বেগ এনেদৰে দিয়া আছে। $v^2 = 2(x\sin x + \cos x)$.

ত্বৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

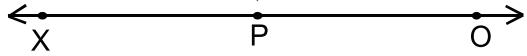
প্ৰশ্ন নং ৫ঃ এডাল সৰল ৰেখাত চলাচল কৰা এটা কণিকাৰ এটা স্থিৰ বিন্দুৰ পৰা x দূৰত্বত বেগ এনেদৰে দিয়া আছে $v^2 = ax^2 + 2bx + c$, য'ত a, b, c ধ্ৰুৱক।

প্ৰমাণ কৰক যে ত্বৰণ, স্থিৰ বিন্দুটোৰ পৰা দূৰত্বৰ সমানুপাতিক।

৩.৬ ধ্ৰুৱক ত্বৰণৰ অধীনত ৰৈখিক গতি

সৰল ৰেখা এডালত কণিকাৰ গতিক ৰৈখিক গতি (rectilinear motion) বুলি কোৱা হয়।

ধৰা হ'ল ধ্ৰুৱক ত্বৰণৰ অধীনত এটা কণিকাই এডাল ৰেখাত চলাচল কৰে।



ধৰা হ'ল OX ৰেখাডালত কণিকাটোৱে চলাচল কৰে।

ধৰা হ'ল গতি আৰম্ভ কৰা সময়ত কণিকাটো O বিন্দুত থাকে। O বিন্দুক কণিকাটোৰ আদি অৱস্থান (initial position) বুলি কোৱা হয়।

ধৰা হ'ল কণিকাটোৱে t সময়ত কণিকাটোৰ অৱস্থান P। ধৰা হ'ল OP = x.

ধৰা হ'ল কণিকাটোৱে u বেগেৰে গতি আৰম্ভ কৰে আৰু P বিন্দুত বেগ v।

ধৰা হ'ল f ধ্ৰুৱক ত্বৰণ।

এতিয়া আমি তলৰ সম্বন্ধকেইটা প্ৰমাণ কৰোঁ।

I. $\boxed{v = u + ft}$

আমি জানো $f = \frac{dv}{dt}$

$\therefore dv - fdt$

$\therefore \int dv = f\int dt$

বা $v = ft + c$, য'ত c হ'ল অনুকলন ধ্ৰুৱক।

যেতিয়া t = 0, $v = u$

$\therefore$ u = f0 + c বা c = u

$\therefore v = ft + u$ অৰ্থাৎ $\boxed{v = u + ft}$

II. $\boxed{s = ut + \frac{1}{2} f t^2}$

আমি জানো যে $v = u + f t$

এতিয়া, $v = \frac{dx}{d t}$

$\therefore \frac{dx}{d t} = u + f t$

বা $dx = udt + ftdt$

$\therefore \int dx = u \int dt + f \int t d$

$\therefore x = ut + \frac{ft^2}{2} + c$, য'ত c এটা ধ্ৰুৱক।

যেতিয়া t = 0, x = 0

$\therefore$ 0 = 0 + 0 + c অর্থাৎ, c = 0

$\therefore x = ut + \frac{1}{2} f t^2$

বা $s = ut + \frac{1}{2} f t^2$

য'ত s হ'ল t সময়ত কণিকাটোৰে অতিক্ৰম কৰা দূৰত্ব।

III. $\boxed{v^2 = u^2 + 2fs}$

আমি জানো

$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx}$

আকৌ $\frac{dv}{dt} = f$

$\therefore v \frac{dv}{dx} = f$

বা $vdv = f\, dx$

$\therefore \int vdv = f \int dx$

$\therefore \frac{v^2}{2} = fx + c$, য'ত c হ'ল অনুকলন ধ্ৰুৱক।

যেতিয়া $v = u$ x = 0

$\therefore \frac{u^2}{2} = 0 + c$ অর্থাৎ, $C = \frac{u^2}{2}$

$$\therefore \quad \frac{v^2}{2} = fx + \frac{u^2}{2}$$

বা $v^2 = u^2 + 2fx$

বা $\boxed{v^2 = u^2 + 2fs}$

IV. সৰল ৰেখাত গতি কৰা কণিকাৰ n তম ছেকেণ্ডত অতিক্রান্ত দূৰত্ব

ধৰা হ'ল কণিকাটোৱে n ছেকেণ্ড আৰু (n–1) ছেকেণ্ডত অতিক্রম কৰা দূৰত্ব ক্রমে s_n আৰু s_{n-1} ।

$\therefore$ nতম ছেকেণ্ডত অতিক্রান্ত দূৰত্ব

= s_n – s_{n-1}

$$= \left(un + \frac{1}{2}fn^2\right) - \left(u(n-1) + \frac{1}{2}f(n-1)^2\right)$$

$$= u + \frac{1}{2}f(n-1)$$

উপপাদ্য ঃ গড় বেগ হ'ল আদি বেগ আৰু অন্তিম বেগৰ মাধ্য আৰু ই হ'ল অন্তৰালৰ মধ্যৰ বেগৰ সমান।

প্রমাণ ঃ গড় বেগ $= \dfrac{\text{অতিক্রান্ত মুঠ দূৰত্ব}}{\text{মুঠ সময়}}$

$$= \frac{s}{t}$$

$$= \frac{ut + \frac{1}{2}ft^2}{t}$$

$$= u + \frac{1}{2}ft$$

$$= \frac{2u + ft}{2}$$

$$= \frac{u + (u + ft)}{2}$$

$$= \frac{u + v}{2}$$

= আদি বেগ আৰু অন্তিম বেগৰ মাধ্য

আকৌ, গড় বেগ $= \dfrac{s}{t}$

$$= \frac{ut + \frac{1}{2}ft^2}{t}$$

$= u + \frac{1}{2} ft$

$= u + f\left(\frac{t}{2}\right)$

= $\frac{t}{2}$ সময়ত বেগ

= অন্তৰালৰ মধ্যত বেগ

টোকা ঃ যদি কণিকাটোৱে চলক ত্বৰণেৰে চলাচল কৰে বা কণিকাটোৱে এটা বক্র পথেৰে চলাচল কৰে, তেনেহ'লে উপৰিউক্ত সম্বন্ধকেইটা প্রযোজ্য নহয়।

উদাহৰণ 1: সৰল ৰেখাত 5m/s^2 ত্বৰণেৰে চলাচল কৰা এটা কণিকাই 5 ছেকেণ্ডত 200 মিটাৰ অতিক্রম কৰে। কণিকাটোৰ আদি বেগ আৰু অন্তিম বেগ কিমান ?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল আদি বেগ u m/s আৰু অন্তিম বেগ v m/s

এতিয়া $200 = u5 + \frac{1}{2} \times 5 \times 5^2$ $\left(s = ut + \frac{1}{2} ft^2\right)$

বা, $200 = 5u + \frac{125}{2}$

বা, $10u = 400 - 125$

বা $10u = 275$

$\therefore u = 27.5$

আকৌ $v = 27.5 + 5 \times 5$ $(v = u + ft)$

= 52.5

$\therefore$ আদি বেগ = 27.5 m/s

অন্তিম বেগ = 52.5 m/s

উদাহৰণ 2 : এটা কণিকাই এডাল সৰল ৰেখাত সুষম ত্বৰণেৰে গতি কৰে। যাত্রাৰ একাদশ আৰু পঞ্চদশ ছেকেণ্ডত ই ক্রমে 720cm আৰু 960 cm অতিক্রম কৰে। আদি বেগ আৰু ত্বৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল আদি বেগ u cm/s আৰু ত্বৰণ f cm/s^2

$\therefore 720 = u + \frac{1}{2} f(2 \times 11 - 1)$

বা $720 = u + \frac{21}{2} f$ (1)

আৰু $960 = u + \frac{1}{2} f(2 \times 15 - 1)$

বা $960 = u + \frac{29}{2} f$ (2)

(2)ৰ পৰা (1) বিয়োগ কৰি, আমি পাওঁ

240 = 4f বা f = 60

$\therefore$ (1)অৰ পৰা $720 = u + \frac{21}{2} \times 60$

$\therefore$ u = 720 – 630 = 90

$\therefore$ আদি বেগ = 90 cm/s

ত্বৰণ = 60 cm/s^2

উদাহৰণ 3 : এটা কণিকাই এডাল সৰল ৰেখাত f সুষম ত্বৰণেৰে গতি কৰে। প্ৰমাণ কৰা যে

$$f = 2\left(\frac{s'}{t'} - \frac{s}{t}\right) / \left(t + t'\right)$$

য'ত s হ'ল t ছেকেণ্ডত অতিক্ৰম কৰা দূৰত্ব আৰু s′ হ'ল ইয়াৰ ঠিক পাছৰ t′ ছেকেণ্ডত অতিক্ৰম কৰা দূৰত্ব।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল আমি বেগ u আৰু ধৰা হ'ল t সময় অন্তত বেগ v ।

$\therefore\ v = u + f\,t$ (1)

$$s = ut + \frac{1}{2} f t^2 \qquad (2)$$

$$s' = vt' + \frac{1}{2} f t'^2$$

অৰ্থাৎ $s' = (u + ft)t' + \frac{1}{2} f t'^2$ (3)

(2)ৰ পৰা $\frac{s}{t} = u + \frac{1}{2} f t$ (4)

(3)ৰ পৰা $\frac{s'}{t'} = u + ft + \frac{1}{2} f t'$ (5)

(5) অৰ পৰা (4) বিয়োগ কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{s'}{t'} - \frac{s}{t} = \frac{1}{2} ft + \frac{1}{2} f t'$$

বা, $2\left(\frac{s'}{t'} - \frac{s}{t}\right) = f\left(t + t'\right)$

$\therefore\ f = 2\left(\frac{s'}{t'} - \frac{s}{t}\right) /\ f\left(t + t'\right)$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

প্রশ্ন নং ১ঃ সৰল ৰেখাত 60 m/s বেগেৰে গতি কৰা এটা কণিকাক সুষম মন্থৰণেৰে 3 মিনিটত স্থিৰ অৱস্থালৈ অনা হ'ল। মন্থৰণ নির্ণয় কৰক আৰু স্থিৰ অৱস্থালৈ অহালৈকে কণিকাটোৰ অতিক্রান্ত দূৰত্ব নির্ণয় কৰক। [মন্থৰণ হ'ল ঋণাত্মক ত্বৰণ। যেতিয়া বেগ হ্রাস পায়, তেতিয়া ইয়াৰ পৰিৱর্তনৰ হাৰ ঋণাত্মক।]

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা লক্ষ্যত নিক্ষেপ কৰা এটা বুলেটে 3 cm সোমোৱাৰ পাছত আধা বেগ হেৰুৱায়। ই আৰু কিমানখিনি সোমাই যাব?

প্রশ্ন নং ৩ঃ সৰল ৰেখাত চলাচল কৰা এটা কমিকাৰ গতিৰ p-তম আৰু (p+q) -তম ছেকেণ্ডত অতিক্রান্ত দূৰত্ব ক্রমে x_1 আৰু x_2। প্রমাণ কৰক যে ইয়াৰ ত্বৰণ $\frac{x_2 - x_1}{q}$.

প্রশ্ন নং ৪ঃ এখন ট্রেইন এটা পোন পথেৰে যায় আৰু দুটা ষ্টেছনত ৰয়। ষ্টেছন দুটাৰ মাজৰ দূৰত্ব 2 km আৰু এটাৰ পৰা আনটোলৈ সময় লাগে 4 মিনিট। প্রথম অৱস্থাত ট্রেইনখন সুষম ত্বৰণ a ৰে যায় আৰু পাছত সুষম মন্থৰণ bৰে যায়। প্রমাণ কৰক যে $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=4$

প্রশ্ন নং ৫ঃ সৰল ৰেখাত গতি কৰা এটা কণিকাই u বেগেৰে যাত্রা আৰম্ভ কৰে। দূৰত্বৰ প্রথমার্ধ ই f_1 সুষম ত্বৰণেৰে আৰু দ্বিতীয়ার্ধ f_2 সুষম ত্বৰণেৰে গতি কৰে। প্রমাণ কৰক যে অন্তিম বেগ হ'ল কণিকাটোৰে $\frac{1}{2}(f_1+f_2)$ সুষম ত্বৰণেৰে গতি কৰিলে যি বেগ হ'ব সেয়া।

প্রশ্ন নং ৬ঃ এটা কণিকাই এডাল ৰেখাত সুষম ত্বৰণেৰে গতি কৰে। t_1, t_2, t_3 সময়ত কণিকাটোৰে তিনিটা সমান ক্রমিক দূৰত্ব অতিক্রম কৰে। প্রমাণ কৰক যে

$$\frac{1}{t_1}-\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_3}=\frac{3}{t_1+t_1+t_3}.$$

৩.৭ নিউটনৰ গতিৰ বিধি

ছাৰ আইজাক নিউটনে (1642-1727 খ্রীষ্টাব্দ) অধোলিখিত উক্তিসমূহ বিধিৰদ্ধ কৰে। ইয়াক নিউটনৰ গতিৰ বিধি (Newton's Laws of Motion) বুলি কোৱা হয়।

প্রথম বিধি ঃ বাহিৰৰ পৰা প্রয়োগ কৰা বলে অৱস্থাৰ পৰিৱর্তন কৰিবলৈ বাধ্য নকৰা পর্যন্ত অচল বস্তু অচল অৱস্থাত থাকে আৰু সচল বস্তুৰে সুষম বেগেৰে গতি কৰি থাকে।

দ্বিতীয় বিধি ঃ কোনো বস্তুৰ ওপৰত বল প্রয়োগৰ ফলত হোৱা ভৰবেগৰ পৰিৱর্তনৰ

হাৰ প্ৰয়োগ কৰা বলৰ সমানুপাতিক আৰু বলে যি দিশত ক্ৰিয়া কৰে ভৰবেগৰ পৰিৱৰ্তনো সেই দিশত হয়।

তৃতীয় বিধি ঃ প্ৰত্যেক ক্ৰিয়াৰে সমান আৰু বিপৰীত প্ৰতিক্ৰিয়া আছে।

এই বিধিকেইটাক স্বতঃসিদ্ধ হিচাপে লোৱা হয়। এই স্বতঃসিদ্ধবোৰ অভিজ্ঞতা আৰু পৰ্যবেক্ষণৰ ওপৰত প্ৰতিষ্ঠিত। এই বিধিবোৰৰ কোনো প্ৰত্যক্ষ প্ৰমাণ নাই।

ভৰবেগ

এটা চলমান কণিকাৰ যিকোনো মুহূৰ্তত ভৰবেগ (momentum) হ'ল ভৰ আৰু সেই মুহূৰ্তত বেগৰ পূৰণফল।

এটা বস্তুৰ ভৰবেগ সদিশ ৰাশি।

ভৰবেগৰ একক ঃ ভৰবেগৰ এককৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়, — 'একক বেগত চলাচল কৰা একক ভৰ'।

ছি জি এছ পদ্ধতিত ভৰবেগৰ একক হ'ল প্ৰতি ছেকেণ্ডত গ্ৰাম-ছেণ্টিমিটাৰ (gm-cm per sec)।

এফ পি এছ পদ্ধতিত ভৰবেগৰ একক হ'ল প্ৰতি ছেকেণ্ডত পাউণ্ড-ফুট (lb-ft per sec)।

যদি m gm ভৰৰ বস্তুৱে u cm/s বেগেৰে গতি কৰে, ভৰবেগ হ'ল mu gm-cm/s

P = mf সূত্ৰ

ধৰা হ'ল m ভৰৰ বস্তু এটাৰ ওপৰত P বলে ক্ৰিয়া কৰে। ধৰা হ'ল বলটোৱে বস্তুটোৰ বেগ অবিচ্ছিন্নভাৱে সলনি কৰে।

ধৰা হ'ল t সময়ত বেগ v আৰু ত্বৰণ f ।

গতিকে ভৰবেগৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰ

$$= \frac{d}{dt}(mv)$$

$$= m\frac{dv}{dt} + v\frac{dm}{dt}$$

= mf [ধ্ৰুৱক ভৰ m অৰ বাবে, $\frac{dm}{dt} = 0$]

নিউটনৰ গতিৰ দ্বিতীয় বিধিৰ পৰা, P, mf অৰ সমানুপাতিক।

$\therefore$ P = kmf, য'ত k এটা ধ্ৰুৱক।

আমি বলৰ একক এনেদৰে লওঁ যাতে k = 1.

ধৰা হ'ল একক বল সেইটো বল যিটো বলে একক ভৰত ক্ৰিয়া কৰি একক ত্বৰণ উৎপন্ন কৰে। গতিকে আমি পালোঁ যে

P = 1, যদি m = 1 আৰু f = 1

$\therefore$ k = 1

$\therefore$ P = mf

বলৰ একক

নিউটনৰ গতিৰ দ্বিতীয় বিধিৰ সহায়ত বলৰ পৰিমাণ নির্ণয় কৰিব পাৰি।

1. নিউটন বলে 1 kg ভৰত ক্রিয়া কৰি 1 m/s^2 ত্বৰণ উৎপন্ন কৰে।

1 dyne বলে 1 gm ভৰত ক্রিয়া কৰি 1 cm/s^2 ত্বৰণ উৎপন্ন কৰে।

1 poundal বলে 1 lb ভৰত ক্রিয়া কৰি 1 ft/s^2 ত্বৰণ উৎপন্ন কৰে।

উপৰিউক্ত এককসমূহ, যথা, Newton, dyne আৰু poundal-অক বলৰ পৰম একক (absolute units of force) বুলি কোৱা হয়। ইহঁত মাধ্যাকর্ষণিক ত্বৰণ g-ৰ ওপৰত নির্ভৰশীল নহয়।

কোনো বস্তুৰ ওজন (weight) হ'ল বস্তুটোৰ ওপৰত পৃথিৱীৰ মাধ্যাকর্ষণিক বলৰ পৰিমাণ।

ধৰা হ'ল m ভৰৰ এটা বস্তুৰ ওজন W. m ভৰত W বলে উৎপন্ন কৰা ত্বৰণ হ'ল মাধ্যাকর্ষণিক ত্বৰণ g।

P = mf সূত্রৰ সহায়ত আমি পালোঁ W = mg.

1. যেতিয়া ভৰ 1 gm, ওজন হ'ল g dyne.
2. যেতিয়া ভৰ 1 kg, ওজন হ'ল g newton.
3. যেতিয়া ভৰ 1 lb, ওজন হ'ল g poundal.

আমি তলৰ সম্বন্ধকেইটা পালোঁ

1 gm wt = g dyne (g = 981)

1 kg wt = g newton (g = 9.81)

1 lb wt = g poundal (g = 32.2)

উপৰিউক্ত এককসমূহক, যথা, gm wt, kg wt, lb wt -অক বলৰ মাধ্যাকর্ষণিক একক (gravitational units of force) বুলি কোৱা হয়। সিহঁত মাধ্যাকর্ষণিক ত্বৰণ g ৰ ওপৰত নির্ভৰশীল।

টোকা ঃ 1 newton = 1 kg x 1 m/s^2 = 10^3 gm x 10^2 cm/s^2 = 10^5 dyne

1 poundal = 13800 dyne = 0.138 newton.

উদাহৰণ 1 ঃ এটা বস্তুৰ ভৰ 1 gm হ'লে ওজন কিমান?

সমাধান ঃ নির্ণেয় ওজন

= 981 dyne

উদাহৰণ 2 ঃ এটা বস্তুৰ ভৰ 1 kg হ'লে ওজন কিমান?

সমাধান ঃ নির্ণেয় ওজন

= 9.81 N

উদাহৰণ 3 ঃ এটা বস্তুৰ ওজন 29.4 N হ'লে ভৰ কিমান ?

সমাধান ঃ নির্ণেয় ভৰ

$$\frac{29.4}{9.8}\ \text{kg} = 3\ \text{kg} \qquad (g = 9.8)$$

উদাহৰণ 4 ঃ 2 kg ভৰৰ এটা বস্তুৰ ওপৰত 8N বলে ক্রিয়া কৰে। ত্বৰণ কিমান ?

সমাধান ঃ ইয়াত P = 8N, m = 2kg

P = mf সূত্ৰৰ সহায়ত আমি পাওঁ

$$f = \frac{p}{m} = \frac{8}{2} m/s^2 = 4m/s^2$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৩

প্রশ্ন নং ১ঃ 5 gm ভৰৰ বস্তু এটাই 981 cm/s^2 ত্বৰণ উৎপন্ন কৰে। বস্তুটোত ক্রিয়া কৰা বলটো নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ঃ 675 g ভৰৰ বস্তু এটাই 16 cm/s^2 ত্বৰণ উৎপন্ন কৰে। বস্তুটোত ক্রিয়া কৰা বলটো নিউটনত নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ 45 kg ভৰৰ বস্তু এটাই 6m/s^2 ত্বৰণ উৎপন্ন কৰে। বস্তুটোত ক্রিয়া কৰা বলটো নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ 2 ton ভৰৰ বস্তুটোৰ পৃথিৱীত ওজন নির্ণয় কৰক। (1 ton = 1000 kg)

প্রশ্ন নং ৫ঃ 20 g ভৰৰ কণিকা এটাৰ ওপৰত এটা স্থিৰ বলে ক্রিয়া কৰে। আৰু ই 5 ছেকেণ্ডত 15 cm/s বেগ উৎপন্ন কৰে। যদি কণিকাটো আদিতে স্থিৰ অৱস্থাত থাকে, বলটোৰ পৰিমাণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ এডাল সৰলৰেখাত গতি কৰা এটা বস্তুৰ ওপৰত 520 dyne সুষম বলে আধা মিনিটৰ বাবে ক্রিয়া কৰাৰ ফলত বেগ 2.9 m/s অৰ পৰা 3.5 m/s অলৈ পৰিৱর্তিত হয়। বস্তুটোৰ ভৰ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৭ঃ এডাল সৰল ৰেখাত গতি কৰা এটা বস্তুৰ ওপৰত 200 dyne ধ্রুৱক বলে এক মিনিটৰ বাবে ক্রিয়া কৰাৰ ফলত বেগ 250 m/s অৰ পৰা 300 m/s অলৈ পৰিৱর্তিত হ'ল। বস্তুটোৰ ভৰ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৮ঃ m gram ভৰৰ বস্তু এটাৰ ওপৰত t ছেকেণ্ডৰ বাবে P dyne ধ্রুৱক বলে ক্রিয়া কৰে আৰু ই স্থিৰ অৱস্থাৰ পৰা x cm দূৰত্ব অতিক্রম কৰে আৰু v cm/s বেগ আয়ত্ত কৰে। প্রমাণ কৰক যে $x = \frac{1}{2}\frac{mv^2}{p}$



৫.৮ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- যেতিয়া কণিকা এটাই এটা নির্দিষ্ট পথেৰে চলাচল কৰে, ইয়াৰ অৱস্থান সলনি হয়। দুটা বিন্দুৰ মাজৰ অৱস্থানৰ পৰিৱৰ্তনক, পথ যিয়েই নহওক কিয়, বিস্থাপন বুলি কোৱা হয়। বিস্থাপন এটা সদিশ ৰাশি।
- এটা চলমান কণিকাৰ বিস্থাপনৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰক বেগ বোলে। ইয়াৰ নির্দিষ্ট দিশ আৰু মান আছে।
  বেগ এটা সদিশ ৰাশি।
- অৱস্থানৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰক দ্রুতি বোলে। ইয়াৰ কোনো নির্দিষ্ট দিশ নাই।
  দ্রুতি এটা অদিশ ৰাশি।
- ৰৈখিক বেগৰ ক্ষেত্রত, দ্রুতি আৰু বেগ সমার্থক।
- যদি এটা কণিকাই একেডাল সৰল ৰেখাত একে অভিদিশাত গতি কৰে আৰু সমান সময়ৰ অন্তৰালত সমান দূৰত্ব অতিক্রম কৰে, তেনেহ'লে ইয়াৰ বেগ সুষম বুলি কোৱা হয়।
- এটা চলমান কণিকাৰ বেগৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰক ত্বৰণ বুলি কোৱা হয়।
- ঋণাত্মক ত্বৰণক মন্থৰণ বুলি কোৱা হয়।
- ধৰা হ'ল P আৰু Q বিন্দু দুটাই একেখন সমতলত চলাচল কৰে। P ৰ পৰা দেখিবলৈ পোৱা Q ৰ অৱস্থানৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰক P সাপেক্ষে Q ৰ আপেক্ষিক বেগ বুলি কোৱা হয়।
- কোনো অক্ষ সাপেক্ষে ঘূৰ্ণনশীল বস্তু এটাই বৃত্তীয় কক্ষপথৰ কেন্দ্রত একক সময়ত উৎপন্ন উৎপন্ন কৰা বা কৌণিক বিস্থাপনৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰক কৌণিক বেগ বুলি কোৱা হয়।
  কৌনিক বেগৰ একক হ'ল প্রতি ছেকেণ্ডত ৰেডিয়ান।
- সৰলৰেখা এডালত কণিকাৰ গতিক ৰৈখিক গতি বুলি কোৱা হয়।
- এটা কণিকাই f সুষম ত্বৰণেৰে এডাল সৰল ৰেখাত u বেগেৰে যাত্রা আৰম্ভ কৰে। ধৰা হ'ল t সময় অন্তত বিস্থাপন s আৰু সেই সময়ত বেগ v । তেনেহ'লে
  1. $v = u + ft$
  2. $s = ut + \frac{1}{2} ft^2$
  3. $v^2 = u^2 + 2fs$
- গড় বেগ হ'ল আদি বেগ আৰু অন্তিম বেগৰ মাধ্য আৰু ই হ'ল অন্তৰালৰ মধ্যৰ বেগৰ সমান।
- নিউটনৰ গতিৰ বিধিকেইটা হ'ল ঃ
  প্রথম বিধি ঃ বাহিৰৰ পৰা প্রয়োগ কৰা বলে অৱস্থাৰ পৰিৱৰ্তন কৰিবলৈ বাধ্য নকৰা পর্যন্ত

অচল বস্তু অচল অৱস্থাত থাকে আৰু সচল বস্তুৱে সুষম বেগেৰে গতি কৰি থাকে।

দ্বিতীয় বিধি ঃ কোনো বস্তুৰ ওপৰত বল প্ৰয়োগৰ ফলত হোৱা ভৰবেগৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰ প্ৰয়োগ কৰা বলৰ সমানুপাতিক আৰু বলে যি দিশত ক্ৰিয়া কৰে ভৰবেগৰ পৰিৱৰ্তনো সেই দিশত হয়।

তৃতীয় বিধি ঃ প্ৰত্যেক ক্ৰিয়াৰে সমান আৰু বিপৰীত প্ৰতিক্ৰিয়া আছে।

- এটা চলমান কণিকাৰ যিকোনো মুহূৰ্তত ভৰবেগ হ'ল ভৰ আৰু সেই মুহূৰ্তত বেগৰ পূৰণফল।
- P = mf, য'ত m হ'ল বস্তুটোৰ ভৰ, P হ'ল ইয়াত ক্ৰিয়াশীল বল আৰু f হ'ল P এ উৎপন্ন কৰা ত্বৰণ।
- P = mf সিদ্ধ হয় যেতিয়া

  (1) P নিউটনত (newton) থাকে, m in kg, f in m/s^2 অত থাকে

  বা (2) P ডাইনত (dyne) থাকে, m in gram, f in cm/s^2 অত থাকে

  বা (3) P পাউণ্ডেলত (poundal) m in lb, f in ft/s^2 অত থাকে



৫.৯ অধিক জানিবলৈ

1) Statics and Dynamics with Background Mathematics, Adrian Roberts, Cambridge University Press.
2) Enginering Machanics : Statics and Dynamics by R. G. Hibbeler and Ashok Gupta.
3) Engineering Mechanics : Statics and Dynamics by S. Rajasekarn and Sankara subramanian. Vikas Publishing House Pvt. Ltd.



৫.১০ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত $x = 3t^2 + 2t$

$$\therefore\ v = \frac{dx}{dt} = 6t + 2$$

$$f = \frac{d^2x}{dt^2} = 6$$

∴ 4 ছেকেণ্ড অন্তত বেগ = (6 x 4 + 2) m/s

= 26 m/s

4 ছেকেণ্ড অন্তত ত্বৰণ = 6 m/s^2

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত x = 9t^2 – t^3 – 4

$$\therefore\ v = \frac{dx}{dt} = 18t - 3t^2$$

$$f = \frac{d^2x}{dt^2} = 18 - 6t$$

(i) আদি ত্বৰণ

= (t = 0 হ'লে) ত্বৰণ

= (18 – 6 x 0) m/s^2

= 18m/s^2

(ii) যেতিয়া ত্বৰণ **শূন্য** হয়, $\frac{d^2x}{dt^2} = 0$

অৰ্থাৎ 18 – 6t = 0

অৰ্থাৎ t = 3

∴ t = 3 হ'লে বেগ

= (18 x 3 – 3 x 3^2) m/s

= 27m/s

(iii) যেতিয়া কণিকাটো স্থিৰ অৱস্থালৈ আহে,

$$v = \frac{dx}{dt} = 0$$

ইয়াৰ পৰা 18t – 3t^2 = 0 $\Rightarrow$ t (6 – t) = 0 $\Rightarrow$ t = 0 বা t = 6.

যেতিয়া t = 0, x = 0

যেতিয়া t = 6, x = 9 x 6^2 – 6^3 – 4 = 104

∴ নিৰ্ণেয় দূৰত্ব = 104m

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত x = t^3 + 18 t + 11

$$\therefore\ v = \frac{dx}{dt} = 3t^2 + 18$$

$$f = \frac{d^2x}{dt^2} = 6t$$

5 ছেকেণ্ডৰ অন্তত

$x = (5^3 + 18 \times 3 + 11)$ cm = 190 cm

$v = (3 \times 5^2 + 18)$ cm/s = 93 cm/s

$f = 6 \times 5$ cm/s^2 = 30 cm/s^2.

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত $v^2 = 2(x\sin x + \cos x)$

$$\therefore\ 2v\frac{dv}{dx} = 2(\sin x + x\cos x - \sin x)$$

$$\Rightarrow\ v\frac{dv}{dx} = x\cos x$$

$\therefore$ ত্বৰণ = x cosx

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত $v^2 = ax^2 + 2bx + c$

$$\therefore\ 2v\frac{dv}{dx} = 2ax + 2b$$

$$\Rightarrow v\frac{dv}{dx} = ax + b$$

$\therefore$ a আৰু b ধ্ৰুৱক, গতিকে ত্বৰণ, স্থিৰ বিন্দুটোৰ পৰা দূৰত্বৰ সমানুপাতিক।

অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল f m/s^2 সুষম ত্বৰণ। ধৰা হ'ল স্থিৰ অৱস্থালৈ অহালৈকে কণিকাটোৰ

অতিক্ৰান্ত দূৰত্ব x m

এতিয়া $0 = 60 + 180f$ (v =u + ft, t = 30 x 6 = 180s)

বা $f = -\frac{1}{3}$

$\because$ f ঋণাত্মক, $\therefore$ মন্থৰণ হ'ল $\frac{1}{3}$ m/s^2.

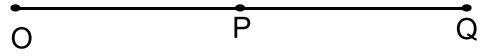
আকৌ $0^2 = 60^2 + 2.\left(-\frac{1}{3}\right).x$

বা x = 5400

$\therefore$ অতিক্ৰান্ত দূৰত্ব 5400 m

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল বুলেটটো u বেগেৰে নিক্ষেপ কৰা হয়। ধৰা হ'ল OA = 3 cm

$\therefore$ Aত বেগ $= \frac{1}{2}u$



এতিয়া $v^2 = u^2 + 2fs$ সূত্ৰৰ সহায়ত আমি পাওঁ $\left(\frac{u}{2}\right)^2 = u^2 + 2f3$

বা $-\frac{3u^2}{4} = 6f$

$\therefore\ f = -\frac{u^2}{8}$

ধৰা হ'ল বুলেটটো B লৈকে সোমাই যায়, অর্থাৎ, ই B ত স্থিৰ অৱস্থালৈ আহে, অর্থাৎ B ত বেগ শূন্য।

$\therefore\ v^2 = u^2 + 2fs$ সূত্ৰৰ সহায়ত আমি পাওঁ

$0 = \left(\frac{u}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{u^2}{8}\right)s$, য'ত AB = s

বা $\frac{u^2}{4} = \frac{u^2}{4}s$

$\therefore\ s = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় দূৰত্ব হ'ল 1 cm.

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল ত্বৰণ f, আৰু আদি বেগ u.

$\therefore\ x_1 = u + \frac{1}{2}f(2p-1)$ (1)

$x_2 = u + \frac{1}{2}f(2p+2q-1)$ (2)

(2) ৰ পৰা (1) বিয়োগ কৰি আমি পাওঁ

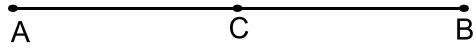
$x_2 - x_1 = \frac{1}{2}f.2q$

$\therefore\ f = \frac{x_2 - x_1}{q}$

অর্থাৎ, নির্ণেয় ত্বৰণ হ'ল $\frac{x_2 - x_1}{q}$.

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ট্ৰেইনখন A আৰু B দুয়োটা ষ্টেছনতে ৰয়।

$\therefore$ আদি বেগ তথা অন্তিম বেগ শূন্য।



AB = 2

ধৰা হ'ল ট্ৰেইনখনে a সুষম ত্বৰণেৰে t_2 সময়ত AC (= s_1) দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰে আৰু b সুষম মন্থৰণেৰে t_1 সময়ত CB (= s_2) দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰে।

স্পষ্টতঃ $s_1 + s_2 = 2$,

$t_1 + t_2 = 4$

ধৰা হ'ল C ত বেগ v.

$\therefore\ v = 0 + at_1$ অর্থাৎ, $t_1 = \frac{v}{a}$

$0 = v - bt_2$ অর্থাৎ, $t_2 = \frac{v}{b}$

$\therefore \ t_1 + t_2 = v\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

অর্থাৎ, $v\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 4$ (1)

আকৌ, $v^2 = 0 + 2as_1$ অর্থাৎ $s_1 = \frac{v^2}{2a}$

$0 = v^2 - 2bs_2$ অর্থাৎ $s_2 = \frac{v^2}{2b}$

$\therefore \ s_1 + s_2 = \frac{v^2}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$

অর্থাৎ $\frac{v^2}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 2$

অর্থাৎ $v^2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 4$ (2)

(1) আৰু (2) ৰ পৰা আমি পালো

$v = 1$

$\therefore$ (1) অৰ পৰা, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 4$

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল নির্দিষ্ট দূৰত্ব s । ধৰা হ'ল অন্তিম বেগ v আৰু প্ৰথমার্ধৰ অন্তত বেগ v_1.

$\therefore \ v_1^2 = u^2 + 2f_1.\frac{s}{2} = u^2 + f_1 s$

$v^2 = v_1^2 + 2f_2.\frac{s}{2}$

$= u^2 + f_1 s + f_2 s$

$= u^2 + (f_1 + f_2)s$

$= u^2 + 2 \times \frac{1}{2}(f_1 + f_2)s$

গতিকে, প্ৰমাণিত হ'ল।

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল t_1 অৰ আৰম্ভণিত বেগ u, আৰু ধৰা হ'ল ত্বৰণ f.

$\therefore \ t_2$ ৰ আৰম্ভণিত বেগ $u + ft_1$.

আকৌ, t_3 ৰ আৰম্ভণিত বেগ হ'ব $(u + ft_1) + ft_2$ অর্থাৎ, $u + f(t_1 + t_2)$

ধৰা হ'ল সমান দূৰত্ব s.

$\therefore\ s = ut_1 + \frac{1}{2}ft_1^2$ (1)

$s = (u + ft_1)t_2 + \frac{1}{2}ft_2^2$ (2)

$s = u + f(t_1 + t_2)t_3 + \frac{1}{2}ft_3^2$ (3)

আকৌ $s + s + s = u(t_1 + t_2 + t_3) + \frac{1}{2}f(t_1 + t_2 + t_3)^2$

অর্থাৎ, $3s = u(t_1 + t_2 + t_3) + \frac{1}{2}f(t_1 + t_2 + t_3)^2$ (4)

(1)অৰ পৰা, $\frac{s}{t_1} = u + \frac{1}{2}ft_1$

(2)ৰ পৰা, $\frac{s}{t_2} = u + ft_1 + \frac{1}{2}ft_2$

(3)ৰ পৰা, $\frac{s}{t_3} = u + f(t_1 + t_2) + \frac{1}{2}ft_3$

(4) অৰ পৰা, $\frac{3s}{t_1 + t_2 + t_3} = u + \frac{1}{2}f(t_1 + t_2 + t_3)$

স্পষ্টত ঃ $\frac{s}{t_1} - \frac{s}{t_2} + \frac{s}{t_3} = \frac{3s}{t_1 + t_2 + t_3}$

অর্থাৎ $\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3} = \frac{3}{t_1 + t_2 + t_3}$

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ ৩

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত m = 5 gm,

f = 981 cm/s^2

$\therefore$ P = 5 x 981 dyne

= 4905 dyne

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত m = 675 g

f = 16 cm/s^2

$\therefore$ P = 675 x 16 dyne

= 10800 dyne

আমি জানো যে

10^5 dyne = 1 newton

$\therefore$ 10800 dyne $= \frac{10800}{10^5}$ newton

= 0.108 newton

$\therefore$ P = 0.108 newton

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত m = 45 kg

f = 6 m/s^2

$\therefore$ P = 45 x 6 newton

= 270 newton

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল ত্বৰণ f cm/s^2

এতিয়া $v = u + ft$ সূত্ৰৰ পৰা আমি পালোঁ

16 = 0 + f5

$\therefore$ f = 3 cm/s^2

আকৌ m = 20 g

$\therefore$ P = 20 x 3 dyne

= 60 dyne

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $\frac{1}{2}$ মিনিট চলাচল কৰোঁতে বেগৰ পৰিৱৰ্তন = (3.5 – 2.9) m/s

= 0.6 m/s

$\therefore f = \frac{2 \times 0.6 \times 100}{60} cm/s^2$

= 2 cm/s^2

P = 520 dyne (দিয়া আছে)

$\therefore m = \frac{P}{f} = \frac{520}{2} g = 260g$

৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ আমি পালোঁ $v^2 = 0 + 2fx$, য'ত f হ'ল ত্বৰণ

($v^2 = u^2 + 2fs$ সূত্ৰৰ সহায়ত)

$\therefore \quad f = \frac{v^2}{2x}$

আকৌ P = mf

বা $P = m\frac{v^2}{2x}$

$\therefore \quad x = \frac{mv^2}{2p}$



৫.১১ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ঃ সৰলৰেখাত চলাচল কৰা এটা কণিকাৰ t সময়ত এটা স্থিৰ বিন্দুৰ পৰা বিস্থাপন x এনেদৰে দিয়া আছে। $x = t^3 - 9t^2 + 24t + 6$.

(i) ত্বৰণ কেতিয়া শূন্য হয় নিৰ্ণয় কৰক,

(ii) সেই সময়ত কণিকাটোৰ অৱস্থান নিৰ্ণয় কৰক,

(iii) সেই সময়ত কণিকাটোৰ বেগ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ২ঃ দূৰত্ব s এনেদৰে দিয়া আছে, $s = at^2 + bt + c$, য'ত t হ'ল সময় আৰু a, b, c ধ্ৰুৱক। প্ৰমাণ কৰক যে $4a(s-c) = v^2 - b^2$, য'ত v হ'ল বেগ।

প্ৰশ্ন ৩ঃ এটা বিন্দুৱে সুষম ত্বৰণেৰে চলাচল কৰে। তিনিটা ক্ৰমিক অন্তৰাল t_1, t_2, t_3 গড় বেগ ক্ৰমে v_1, v_2, v_3 প্ৰমাণ কৰক যে $\frac{v_1 - v_2}{v_2 - v_3} = \frac{t_1 + t_2}{t_2 + t_3}$.

প্ৰশ্ন ৪ঃ সৰল ৰেখাত চলাচল কৰা এটা কণিকা t ছেকেণ্ড অন্তত এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ পৰা x মিটাৰ দূৰত্বত আছে, য'ত $x = t^3 - 2t - 16$.

3 ছেকেণ্ড অন্তত বেগ নিৰ্ণয় কৰক।

4 ছেকেণ্ড অন্তত ত্বৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৫ঃ এটা কণিকাই $v = x^2$ বিধি অনুসৰি এডাল সৰল ৰেখাত চলাচল কৰে। প্ৰমাণ কৰকযে ত্বৰণ $2v^{3/2}$.

প্ৰশ্ন ৬ঃ এটা কণিকাই স্থিৰ অৱস্থাৰ পৰা এডাল সৰল ৰেখাত প্ৰথমতে a সুষম ত্বৰণেৰে গতি কৰে, আৰু পাছত b সুষম মন্থৰণেৰে গতি কৰে। যদি t সময়ত s দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰি ই স্থিৰ অৱস্থালৈ আহে, প্ৰমাণ কৰক যে $t^2 = 2s\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$.

প্ৰশ্ন ৭ঃ এটা বস্তুৰ ওজন 19.6 N হ'লে ভৰ কিমান?

প্ৰশ্ন ৮ঃ এটা বলে 500 gm ভৰৰ বস্তু এটাত ক্ৰিয়া কৰে আৰু $10 m/s^2$ ত্বৰণ উৎপন্ন কৰে। বলটোৰ পৰিমাণ কি?

প্ৰশ্ন ৯ঃ স্থিৰ অৱস্থাত থকা m gm ভৰৰ বস্তু এটাৰ ওপৰত t ছেকেণ্ডৰ বাবে P gmwt সুষম বলে ক্ৰিয়া কৰে। প্ৰমাণ কৰক যে বেগ $\frac{pgb}{m} cm/s$ আৰু অতিক্ৰান্ত দূৰত্ব $\frac{pgt^2}{2m} cm$.

প্ৰশ্ন ১০ঃ 8000 dyne বলে এটা বস্তুত ক্ৰিয়া কৰে আৰু ইয়াৰ ফলত ইয়াৰ বেগ 6 ছেকেণ্ডত 20 cm/s অৰ পৰা 50m/s অলৈ বৃদ্ধি পায়। বস্তুটোৰ ভৰ নিৰ্ণয় কৰক।

*** ***** ***

অধ্যায় ৬ ঃ সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতি আৰু আনুষংগিক সমস্যা

অধ্যায় গাঁথনি

৬.১ উদ্দেশ্য
৬.২ পৰিচয়
৬.৩ সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতি
৬.৩.১ সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতিৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা
৬.৩.২ সৰল দোলকৰ গতি
৬.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
৬.৫ অধিক জানিবলৈ
৬.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
৬.৭ আৰ্হি প্ৰশ্ন

৬.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

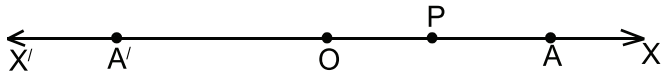
- সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতিৰ সমীকৰণ জানিব পাৰিব
- সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতিৰ অধীনত গতি কৰা কণিকাৰ বেগ জানিব পাৰিব
- সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতিৰ অধীনত গতি কৰা, কণিকাৰ অৱস্থান, পৰ্যায় কাল, কম্পনাংক, বিস্তাৰ জানিব পাৰিব
- সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতিৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- সৰল দোলকৰ গতি সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

৬.২ পৰিচয়

কেতিয়াবা আমি বিশেষ ধৰণৰ গতিৰ মুখামুখি হওঁ। উদাহৰণস্বৰূপে, এটা অতি সৰু কোণেৰে দোদুল্যমান সৰল দোলকৰ গতি। এডাল স্প্ৰিং বা স্থিতিস্থাপক স্প্ৰিঙৰ এটা মূৰ স্থিৰ, আনটো মূৰত এটা বস্তু লগোৱা আছে,— তাৰ গতি ইত্যাদি। এই গতিবোৰ সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতি। ইয়াত ত্বৰণ, দূৰত্বৰ সমানুপাতিক বুলি বিবেচনা কৰা হয়।

৬.৩ সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতি

যদি এটা কণিকাই এডাল ৰেখাত এনেদৰে গতি কৰে যাতে ইয়াৰ ত্বৰণ সদায় ৰেখাডালৰ ওপৰৰ যিকোনো স্থিৰ বিন্দু অভিমুখী হয় আৰু বিন্দুটোৰ পৰা দূৰত্ব সমানুপাতিক হয়, তেনেহ'লে কণিকাটোৱে সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতি (Simple Harmonic Motion সংক্ষেপে S.H.M) কৰে বুলি কোৱা হয়।



চিত্ৰ ৪.১

X/OX ৰেখাডালত O এটা স্থিৰ বিন্দু (fixed point)। ধৰা হ'ল স্থিৰাৱস্থাৰ পৰা এটা কণিকা A ৰ পৰা যাত্ৰা কৰে। ধৰা হ'ল t সময়ত কণিকাটোৰ অৱস্থান P, য'ত OP = x যিহেতু P বিন্দুটো ধনাত্মক ফালত লোৱা হৈছে, গতিকে x > o.

t সময়ত কণিকাটোৰ বেগ $\frac{dx}{dt}$ আৰু ত্বৰণ $\frac{d^2x}{dt^2}$. যিপিনে x বাঢ়ে, সেই দিশত ই ক্ৰিয়া কৰে। যিহেতু ত্বৰণ, স্থিৰ বিন্দু O অভিমুখী আৰু O ৰ পৰা দূৰত্বৰ সমানুপাতিক, গতিকে গতিৰ সমীকৰণ হ'ল

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x \qquad -(1)$$

য'ত μ এটা ধনাত্মক ধ্ৰুৱক।

P বিন্দুটো O ৰ সোঁ বা বাওঁপিনে থাকিলে, সমীকৰণ (1) সত্য।

ধৰা হ'ল t সময়ত কণিকাটোৰ বেগ v . গতিকে,

$$v = \frac{dx}{dt},\ \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\therefore v\,\frac{dv}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$\therefore$ (1) অক এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$v\,\frac{dv}{dx} = -\mu x$$

বা, $v\,dv = -\mu x dx$

$$\therefore \int v dv = -\int \mu x dx$$

বা $\frac{v^2}{2} = -\frac{\mu x^2}{2} + c$ য'ত C হ'ল এটা অনুকলন ধ্ৰুৱক।

ধৰা হ'ল OA = a

যিহেতু কণিকাটোৱে A বিন্দুৰ পৰা স্থিৰাৱস্থাত গতি কৰে,

গতিকে যেতিয়া $v = 0$, x = a

$$\therefore 0 = -\frac{\mu a^2}{2} + C$$

অৰ্থাৎ, $c = \frac{\mu a^2}{2}$

$$\frac{v^2}{2} = -\frac{\mu a^2}{2} + \frac{\mu a^2}{2}$$

অৰ্থাৎ, $v^2 = \mu(a^2 - x^2)$

$$\therefore v = -\sqrt{\mu(a^2 - x^2)} \qquad (2)$$

মন কৰিব লগীয়া যে যেতিয়া t বাঢ়ে, তেতিয়া x কমে। গতিকে $v = \frac{dx}{dt}$ ঋণাত্মক বুলি লোৱা হয়।

(2)ৰ পৰা আমি পালোঁ

$$\frac{dx}{dt} = -\sqrt{\mu}\sqrt{a^2 - x^2}$$

বা, $$\sqrt{\mu}\, dt = -\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$\therefore \int \sqrt{\mu}\, dt = \int \left(-\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) dx$$

বা, $\sqrt{\mu}\, dt = \cos^{-1}\frac{x}{a} + k$, য'ত k এটা অনুকলন ধ্ৰুৱক।

যিহেতু কণিকাটোৱে A বিন্দুৰ পৰা স্থিৰাৱস্থাত গতি কৰে, গতিকে যেতিয়া r = a, তেতিয়া t = 0

$$\therefore 0 = \cos^{-1}\frac{a}{a} + k$$

অৰ্থাৎ, k = 0

$$\therefore \sqrt{\mu}\, t = \cos^{-1}\frac{x}{a}$$

বা, $x = a\cos\sqrt{\mu}\, t$ (3)

টোকা ঃ

1. (2)ৰ পৰা আমি যিকোনো দূৰত্ব x অত চলমান কণিকাটোৰ বেগ পাওঁ। ই হ'ল $-\sqrt{\mu}\sqrt{a^2 - x^2}$.
2. (3)ৰ পৰা আমি যিকোনো সময় t ত স্থিৰ বিন্দুটোৰ পৰা চলমান কণিকাটোৰ দূৰত্ব পাওঁ। ই হ'ল $a\cos\sqrt{\mu}\, t$.
3. যেতিয়া x = 0, (2)ৰ পৰা আমি পাওঁ $v = -\sqrt{\mu}\, a$, অৰ্থাৎ স্থিৰ বিন্দু O ত চলমান কণিকাটোৰ বেগ $-\sqrt{\mu}\, a$, যিটো সৰ্বোচ্চ। ইয়াৰ পৰা আমি এইটোকেই পাওঁ যে কণিকাটো O বিন্দুত নৰয়। ই O বিন্দু অতিক্ৰম কৰি আনটো ফাল OX/অলৈ যায়। ধৰা হ'ল ৰেখাডালৰ

আনটো ফালত A/ এটা বিন্দু যাতে OA/ = OA = a.

স্পষ্টতঃ (2)ৰ পৰা, যেতিয়া x = a বা x = -a, $v = 0$ অর্থাৎ A ত বা A/ অত বেগ শূন্য। A/ অৰ পৰা কণিকাটো পথেৰে উভতি আহে, O অতিক্রম কৰে আৰু পুনৰ A বিন্দুত তাৎক্ষণিকভাৱে স্থিৰ অৱস্থালৈ আহে। এইদৰে দেখা যায় যে কণিকাটোৰ গতি O বিন্দু সাপেক্ষে দুদোল্যমান (A ৰ পৰা A/ অলৈ, আৰু তাৰ পাছত পুনৰ A/ অৰ পৰা Aলৈ)। ই পুনঃ পুনঃ হৈ থাকিব। এনে ধৰণৰ গতিক সৰল পর্যাবৃত্ত গতি বোলে। O বিন্দুটোক দোলন কেন্দ্র (centre of oscillation) বা মাধ্য অৱস্থান কেন্দ্র (centre of mean position) বোলে।

বিস্তাৰ ঃ

O ৰ দুয়োপিনে যি সর্বোচ্চ দূৰত্ব OA বা OA/(=a) অলৈ কণিকাটো যায়, তাক বিস্তাৰ (amplitude) বোলে। অর্থাৎ দোলন কেন্দ্রৰ দুয়োফালে কণিকাটোৱে অতিক্রান্ত কৰা সর্বোচ্চ বিস্থাপনক বিস্তাৰ বোলে।

পর্যায় কাল ঃ

এক সম্পূর্ণ দোলনৰ বাবে যি সময়ৰ প্রয়োজন, অর্থাৎ, A ৰ পৰা A/ অলৈ আৰু পুনৰ, Aলৈ— যি সময়ৰ প্রয়োজন তাক পর্যায় কাল (periodic time) বা সম্পূর্ণ দোলনৰ কাল (time of a complete oscillation) বোলে।

(3)ত x = 0 বহুৰাই আমি পাওঁ

$0 = a\cos\sqrt{\mu}\,t$ [মন কৰিব লগীয়া যে O বিন্দুত x = 0]

$\therefore \cos\sqrt{\mu}\,t = 0$

বা $\sqrt{\mu}\,t = \frac{\pi}{2}$

$\therefore t = \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}$

$\therefore$ A ৰ পৰা O লৈকে কণিকাটোৱে লোৱা সময় $\frac{\pi}{2\sqrt{\mu}}$

এতিয়া, A ৰ পৰা O লৈ সময়

= O ৰ পৰা A/ অলৈ সময়

= A/ ৰ পৰা O লৈ সময়

= O ৰ পৰা A লৈ সময়

$\therefore$ পর্যায় কাল $= 4 \times \frac{\pi}{2\sqrt{\mu}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$

মন কৰিব লগীয়া যে পর্যায়কাল $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$ ত a নাই। অর্থাৎ, পর্যায় কাল, বিস্তাৰ a ৰহিত।

কম্পনাংক

প্রতি একক সময়ত সম্পূর্ণ দোলনৰ সংখ্যাক দোলনৰ কম্পনাংক (frequency) বোলা হয়।

ধৰা হ'ল n কম্পনাংক আৰু T পর্যায় কাল।

$\therefore\ nT = 1$

বা, $n = \frac{1}{T} = \frac{\sqrt{\mu}}{2\pi}$

বা, $\mu = 4n^2\pi^2$

উদাহৰণ 1 ঃ সৰল ৰেখাত গতি কৰা এটা কণিকাৰ অৱস্থান এনেদৰে দিয়া আছে।

x = a cos nt + b sin nt. প্রমাণ কৰক যে কণিকাটোৰ গতি সৰল পর্যাবৃত্ত। পর্যায় কাল আৰু বিস্তাৰ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ এই ক্ষেত্রত

x = a cos nt + b sin nt.

t সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{dx}{dt} = -an\sin nt + bn\cos nt$$

আকৌ অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -an^2\cos nt - bn^2\sin nt$$

অর্থাৎ, $\frac{d^2x}{dt^2} = -n^2x$ (1)

(1)অৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে ত্বৰণ, দূৰত্বৰ সমানুপাতিক আৰু ই স্থিৰ বিন্দুটো অভিমুখী। গতিকে, কণিকাটোৰ গতি সৰল পর্যাবৃত্ত।

পর্যায়কাল $= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{2\pi}{\mu}$ (ইয়াত $\mu = n^2$)

আকৌ, $v = \frac{dx}{dt} = -an\sin t + bn\cos nt = -\sqrt{\mu}\ dt$

আমি জানো যে

বিস্তাৰ = দোলন কেন্দ্র আৰু তাৎক্ষণিক স্থিৰ অৱস্থানৰ (য'ত বেগ শূন্য) মাজৰ দূৰত্ব

যেতিয়া $v = 0$

–a x sin nt + bn cos nt = 0

বা, an sin nt = bn cos nt

বা, $\frac{\sin nt}{bn} = \frac{\cos nt}{an} = k$, (ধৰা হ'ল)

$\therefore$ sin nt = kbn, cos nt = kan

এতিয়া, $\cos^2 nt + \sin^2 nt = 1$

বা, $k^2n^2(a^2 + b^2) = 1$

বা, $k = \frac{1}{n\sqrt{a^2+b^2}}$

$\therefore \sin nt = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos nt = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\therefore$ বিস্তাৰ $= a \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = b \cdot \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$= \frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sqrt{a^2+b^2}$

উদাহৰণ 2 ঃ সৰল ৰেখাত গতি কৰা এটা কণিকাৰ যিকোনো সময়ত বেগ এনেদৰে দিয়া আছে $v^2 = 40x - 4x^2 - 64$. প্ৰমাণ কৰক যে কণিকাটোৰ গতি সৰল পৰ্যাবৃত্ত।

সমাধান ঃ দিয়া আছে $v^2 = 40x - 4x^2 - 64$

উভয়পক্ষক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$2v\frac{d^2v}{dx} = 40 - 8x$$

বা $$v\frac{dv}{dx} = 20 - 4x$$

বা $$\frac{d^2x}{dt^2} = -4(x-5)$$

x – 5 = y লৈ আমি পাওঁ

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -4y \qquad (1)$$

(1)অৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে ত্বৰণ, দূৰত্বৰ সমানুপাতিক আৰু ই স্থিৰ বিন্দুটো অভিমুখী। গতিকে, কণিকাটোৰ গতি সৰল পৰ্যাবৃত্ত।

উদাহৰণ 3 ঃ এটা কণিকাই সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতিত চলাচল কৰে। তিনি ক্ৰমিক ছেকেণ্ডৰ অন্তত, মাধ্য অৱস্থানৰ পৰা কণিকাটোৰ দূৰত্ব (একে দিশত) 1, 5 আৰু 5. প্ৰমাণ কৰক যে এক সম্পূৰ্ণ দোলনৰ কাল $\frac{2\pi}{\theta}$, য'ত $\cos\theta = \frac{3}{5}$.

সমাধান ঃ আমি জানো যে $x = a\cos\sqrt{\mu}\,t$ (1)

প্ৰমাম চৰ্ত বিবেচনা কৰি আমি পাওঁ

$1 = a\cos\sqrt{\mu}\,t$ (2)

$5 = a\cos\sqrt{\mu}\,(t+1)$ (3)

$5 = a\cos\sqrt{\mu}\,(t+2)$ (4)

(2) আৰু (4) যোগ কৰি আমি পাওঁ

1 + 5 $= a\,[\cos\sqrt{\mu}\,t + \cos\sqrt{\mu}\,(t+2)]$

$$= 2a\cos\frac{\sqrt{\mu}(t+2)+\sqrt{\mu}\,t}{2}\cdot\cos\frac{\sqrt{\mu}(t+2)-\sqrt{\mu}\,t}{2}$$

$$= 2a\cos\sqrt{\mu}\,(t+1)\cos\sqrt{\mu}$$

বা $6 = 2\times 5\cos\sqrt{\mu}$, (3)ৰ সহায়ত

$$\therefore\ \cos\sqrt{\mu} = \frac{6}{2\times 5} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore\ \sqrt{\mu} = \cos^{-1}\frac{3}{5} = \theta, \quad \text{(ধৰা হ'ল)}$$

$$\therefore \text{ পৰ্যায় কাল } = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{2\pi}{\theta}, \text{ য'ত } \cos\theta = \frac{3}{5}$$

উদাহৰণ 4 ঃ এটা বিন্দু P য়ে এডাল সৰল ৰেখাত গতি কৰে আৰু ইয়াৰ দ্ৰুতি v এনেদৰে দিয়া আছে $v^2 = a - bx^2$, য'ত x হ'ল ৰেখাডালৰ এটা স্থিৰ বিন্দুৰ পৰা P বিন্দুৰ দূৰত্ব, a আৰু b ধ্ৰুৱক। প্ৰমাণ কৰক যে P ৰ গতি সৰল পৰ্যাবৃত্ত। ইয়াৰ বিস্তাৰ আৰু পৰ্যায় কাল নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে যে $v^2 = a - bx^2$.

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$2v\frac{dv}{dx} = -2bx$$

বা $$\frac{v\,dv}{dx} = -bx$$

বা $$\frac{d^2v}{dt^2} = -bx \qquad \text{(i)} \qquad \left[\because \frac{v\,dv}{dx} = \frac{d^2x}{dt^2}\right]$$

এইটো সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতিৰ সমীকৰণৰ প্ৰামাণিক ৰূপ। গতিকে প্ৰদত্ত কণিকাটোৰ গতি সৰল পৰ্যাবৃত্ত আৰু ইয়াৰ পৰ্যায় কাল $= \frac{2\pi}{b}$ $[\mu = b]$.

আকৌ $v^2 = a - bx^2$ অৰ পৰা, যেতিয়া $\vartheta = 0$,

$$a - bx^2 = 0$$

বা $x = \sqrt{\frac{a}{b}}$

আমি জানো যে ϑ শূন্য হ'লে x অৰ যি মান সেয়াই হ'ল গতিৰ বিস্তাৰ, যদিহে x = 0.

$\therefore$ বিস্তাৰ $= \sqrt{\frac{a}{b}}$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ এটা কণিকাই এডাল ৰেখাত চলাচল কৰে আৰু মূল বিন্দুৰ পৰা x দূৰত্বত ইয়াৰ বেগ $\lambda\sqrt{a^2 - x^2}$. প্রমাণ কৰক যে গতিটো সৰল পর্যাবৃত্ত।

প্রশ্ন নং ২ঃ সৰল ৰেখাত গতি কৰা এটা কণিকাৰ যিকোনো সময়ত বেগ এনেদৰে দিয়া আছে $v^2 = \lambda^2(-x^2 + 10ax - 16a^2)$, য'ত a আৰু λ হ'ল ধনাত্মক ধ্রুৱক। প্রমাণ কৰক যে গতিটো সৰল পর্যাবৃত্ত।

প্রশ্ন নং ৩ঃ এটা কণিকাই এডাল সৰল ৰেখাত সৰল পর্যাবৃত্ত গতিত চলাচল কৰে। 3 ক্রমিক ছেকেণ্ডৰ অন্তত, মাধ্য অৱস্থানৰ পৰা কণিকাটোৰ দূৰত্ব (একে দিশত) ক্রমে a, b আৰু c। প্রমাণ কৰক যে সম্পূর্ণ দোলনৰ কাল

$$\frac{2\pi}{\cos^{-1}\frac{a+c}{2b}}$$

প্রশ্ন নং ৪ঃ সৰল পর্যাবৃত্ত গতিত যিকোনো মুহূর্তত বেগ আৰু ত্বৰণ ক্রমে V আৰু f হ'লে আৰু T পর্যায় কাল হ'লে, প্রমাণ কৰক যে $f^2T^2 + 4n^2V^2$ এটা ধ্রুৱক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ এডাল সৰল ৰেখাত সৰল পর্যাবৃত্ত গতিত চলাচল কৰা এটা কণিকাৰ কেন্দ্রৰ পৰা x_1, x_2 দূৰত্বত বেগ ক্রমে v_1, v_2 । প্রমাণ কৰক যে পর্যায় কাল $2\pi\frac{x_1^2 - x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}$ আৰু বিস্তাৰ হ'ল $\sqrt{\frac{v_2^2 x_1^2 - v_1^2 x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}}$

প্রশ্ন নং ৬ঃ দোলন কেন্দ্রৰ পৰা কিমান দূৰত্বত সৰল পর্যাবৃত্ত গতিৰ বেগ, সর্বোচ্চৰ আধা হ'ব?

প্রশ্ন নং ৭ঃ এটা কণিকাই সৰল পর্যাবৃত্ত গতিত চলাচল কৰে। প্রমাণ কৰক যে সর্বোচ্চ বিস্থাপনৰ অৱস্থানৰ পৰা বিস্থাপন বিস্তাৰৰ আধা হোৱালৈকে— কণিকাটোৱে পর্যায় কালৰ এক-ষষ্ঠাংশ সময় লয়।

প্রশ্ন নং ৮ঃ OAB সৰল ৰেখাত সৰল পর্যাবৃত্ত গতিত চলাচল কৰা এটা বস্তুৰ A আৰু B

বিন্দুত বেগ শূন্য আৰু A, B বিন্দুৰ Oৰ পৰা দূৰত্ব ক্ৰমে a, b, আৰু ইয়াৰ মাজত ইয়াৰ বেগ v । প্ৰমাণ কৰক যে সম্পূৰ্ণ পৰ্যায় কাল হ'ল $\frac{\pi(b-a)}{v}$.

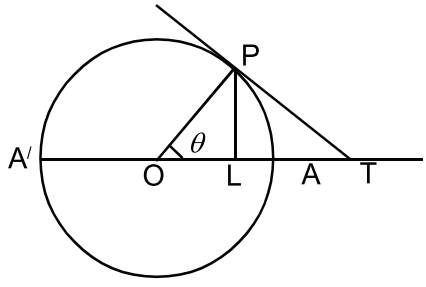
প্ৰশ্ন নং ৯ঃ এডাল সৰল ৰেখাত সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতিত চলাচল কৰা এটা কণিকাৰ দুটা অৱস্থানত বেগ ক্ৰমে v_1, v_2 আৰু ত্বৰণ ক্ৰমে f_1, f_2 । যদি অৱস্থান দুটাৰ মাজৰ দূৰত্ব d, প্ৰমাণ কৰক যে $d = \frac{v_1^2 \sim v_2^2}{f_1 + f_2}$.

প্ৰশ্ন নং ১০ঃ সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতিত চলাচল কৰা এটা কণিকাৰ দোলন কেন্দ্ৰৰ পৰা 3m দূৰত্বত বেগ 8m/s, আৰু দোলন কেন্দ্ৰৰ পৰা 4m দূৰত্বত বেগ 6m/s। সৰ্বোচ্চ বেগ আৰু পৰ্যায় কাল নিৰ্ণয় কৰক।

৪.৩.১ সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতিৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা

যদি এটা কণিকাই ধ্ৰুৱক কৌণিক বেগেৰে এটা বৃত্ত গঠন কৰে, তেনেহ'লে কণিকাটোৰ পৰা টনা লম্বৰ পাদ বিন্দুৱে ব্যাসত সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতিত চলাচল কৰে। ইয়াক সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতিৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা বুলি কোৱা হয়।

ধৰা হ'ল P কণিকাটোৱে ধ্ৰুৱক কৌণিক বেগ W এৰে কেন্দ্ৰ O ৰ চাৰিওপিনে এটা বৃত্ত গঠন কৰে।



চিত্ৰ ৪.২

ধৰা হ'ল P ৰ পৰা স্থিৰ ব্যাস A/OA ৰ ওপৰত টনা লম্বৰ L পাদ বিন্দু।

যেতিয়া P কণিকাটো Aত থাকে, L ও Aত থাকে। যেতিয়া Pয়ে A ৰ পৰা A/ অভিমুখে বৃত্তটোৰে গতি কৰে, L এ AOA/ ব্যাসাৰে A ৰ পৰা A/ অভিমুখে গতি কৰে। শেহত P গৈ যেতিয়া A/ পায়, L ও A/ পায়। আকৌ যেতিয়া P এ A/ অৰ পৰা A অভিমুখে বৃত্তটোৰে গতি আৰম্ভ কৰে, Lএ A/OA ব্যাসেৰে A/ অৰ পৰা A লৈ গতি আৰম্ভ কৰে। অৰ্থাৎ P কণিকাটো A ৰ পৰা A/অলৈ আৰু পুনৰ A/অৰ পৰা A লৈ দুলি থাকে।

ধৰা হ'ল বৃত্তটোৰ ব্যাসার্ধ a। O ক মূল বিন্দু আৰু A′OAক x-অক্ষ হিচাপে লোৱা হ'ল। ধৰা হ'ল P বিন্দুৰ স্থানাংক (x, y)।

$$\therefore\ x = a\cos\theta$$

এতিয়া PO অভিলম্বেৰে O অভিমুখে Pৰ একমাত্ৰ ত্বৰণ $\omega^2 a$.

OA ৰ দিশত এই ত্বৰণৰ উপাংশ হ'ব

$\omega^2 a\cos\theta = \omega^2 x$, O অভিমুখে।

অর্থাৎ L বিন্দুটোৰ গতিৰ সমীকৰণ হ'ল

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w^2 x,$$

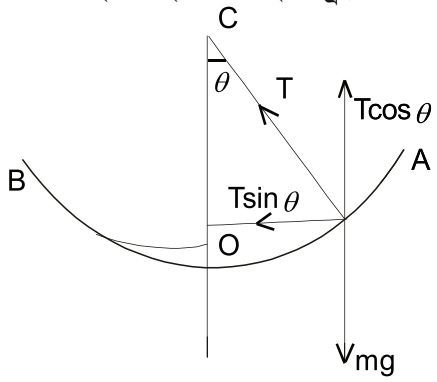
স্পষ্টতঃ ই হ'ল সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতি।

স্পষ্টতঃ, পৰ্যায় কাল $= \frac{2\pi}{\sqrt{w^2}} = \frac{2\pi}{w}$.

৪.৩.২ সৰল দোলকৰ গতি

এটা স্থিৰ বিন্দুৰ পৰা এডাল পাতল অবিস্তার্য ষ্ট্ৰিঙেৰে ওলোমাই ৰখা আৰু এখন উলম্ব সমতলত দুলিবলৈ দিয়া এটা গধুৰ ক্ষুদ্ৰ কণিকাক সৰল দোলক (simple pendulum) বুলি কোৱা হয়। ক্ষুদ্ৰ দোলনৰ বাবে গতি প্ৰায় ৰৈখিক।

ধৰা হ'ল স্থিৰ বিন্দুটো C। Cৰ পৰা এডাল পাতল অবিস্তার্য ষ্ট্ৰিঙেৰে এটা গধুৰ ক্ষুদ্ৰ কণিকা ওলোমাই ৰখা হ'ল। ধৰা হ'ল ষ্ট্ৰিংডালৰ দৈর্ঘ l.



চিত্ৰ ৪.৩

ধৰা হ'ল কণিকাটোৰ ভৰ m।

ধৰা হ'ল যিকোনো সময় t ত কণিকাটোৰ অৱস্থান P। যেতিয়া কণিকাটো P বিন্দুত থাকে, ধৰা হ'ল ষ্ট্ৰিংডালে উলম্বৰ লগত θ কোণ কৰে, য'ত θ এটা অতি ক্ষুদ্ৰ কোণ।

ধৰা হ'ল মাধ্য অৱস্থান Oৰ পৰা কণিকাটোৰ আনুভূমিক বিস্থাপন PO

(বিস্থাপন, আনুভূমিক বুলি ধৰা হৈছে)। ধৰা হ'ল OP = x.

ধৰা হ'ল ষ্ট্রিংডালৰ টান (tension) T.

আনুভূমিক আৰু উলম্বভাৱে বিভেদন কৰি, আমি পাওঁ

$$T\cos\theta = mg \qquad (1)$$

$$-T\sin\theta = m\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (2)$$

যিহেতু θ অতি ক্ষুদ্ৰ, $\therefore \cos\theta = 1$ (লোৱা হ'ল)

$\therefore$ (1)অৰ পৰা, T = mg

$\therefore$ (2)ৰ পৰা $-mg\sin\theta = m\frac{d^2x}{dt^2}$

বা, $\frac{d^2x}{dt^2} = -g\sin\theta \qquad (3)$

এতিয়া COP সমকোণী ত্রিভুজৰ পৰা

$$\sin\theta = \frac{OP}{CP} = \frac{x}{l}$$

$\therefore$ (3)ৰ পৰা, $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x \qquad (4)$

সমীকৰণ (4) অৰ পৰা আমি পালোঁ যে ত্বৰণ, দূৰত্বৰ সমানুপাতিক আৰু ই O অভিমুখী। গতিকে, কণিকাটোৰ গতি সৰল পৰ্যাবৃত্ত।

$$\text{পৰ্যায় কাল} = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



৬.৪ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- যদি এটা কণিকাই এডাল ৰেখাত এনেদৰে গতি কৰে যাতে ইয়াৰ ত্বৰণ সদায় ৰেখাডালৰ ওপৰৰ যিকোনো স্থিৰ বিন্দু অভিমুখী হয় আৰু বিন্দুটোৰ পৰা দূৰত্ব সমানুপাতিক হয়, তেনেহ'লে কণিকাটোৱে সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতি (Simple Harmonic Motion সংক্ষেপে S.H.M.) কৰে বুলি কোৱা হয়।
- সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতিত চলাচল কৰা চলমান কণিকা এটাৰ যিকোনো দূৰত্ব x অত বেগ $-\sqrt{\mu}\sqrt{a^2-x^2}$.

- সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতিত চলাচল কৰা চলমান কণিকা এটাৰ যিকোনো সময় t ত স্থিৰ বিন্দুটোৰ পৰা দূৰত্ব $a\cos\sqrt{\mu}\,t$.
- দোলন কেন্দ্ৰ দুয়োফালে কণিকাটোৱে অতিক্ৰম কৰা সৰ্বোচ্চ বিস্থাপনক বিস্তাৰ বোলে।
- এক সম্পূৰ্ণ দোলনৰ বাবে যি সময়ৰ প্ৰয়োজন তাক পৰ্যায় কাল বা সম্পূৰ্ণ দোলনৰ কাল বোলে। পৰ্যায় কাল হ'ল $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$, আৰু ই বিস্তাৰ a ৰহিত।
- প্ৰতি একক সময়ত সম্পূৰ্ণ দোলনৰ সংখ্যাক দোলনৰ কম্পনাংক বোলা হয়।
- যদি এটা কণিকাই ধ্ৰুৱক কৌণিক বেগেৰে এটা বৃত্ত গঠন কৰে, তেনেহ'লে কণিকাটোৰ পৰা টনা লম্বৰ পাদ বিন্দুৰে ব্যাসত সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতিৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা বুলি কোৱা হয়।
- এটা সৰল দোলকৰ গতি সৰল পৰ্যাবৃত্ত আৰু ইয়াৰ পৰ্যায় কাল $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, য'ত l হ'ল দোলকৰ দৈৰ্ঘ আৰু g মাধ্যাকৰ্ষণিক ত্বৰণ।



৬.৫ অধিক জানিবলৈ

1) Statics and Dynamics with Background Mathematics, Adrian Roberts, Cambridge University Press.
2) Enginering Machanics : Statics and Dynamics by R. G. Hibbeler and Ashok Gupta.
3) Engineering Mechanics : Statics and Dynamics by S. Rajasekarn and G.Sankara subramanian. Vikas Publishing House Pvt. Ltd.



৬.৬ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে $v=\lambda\sqrt{a^2-x^2}$

বা $v^2=\lambda^2\sqrt{a^2-x^2}$

উভয় পক্ষক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$2v = \frac{dv}{dx} = \lambda^2(0-2x)$$

বা $v = \frac{dv}{dx} = -\lambda^2 x$

বা $\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda^2 x$ (1)

(1)অৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে ত্বৰণ, দূৰত্বৰ সমানুপাতিক আৰু ই স্থিৰ বিন্দুটো অভিমুখী। গতিকে, কণিকাটোৰ গতি সৰল পৰ্যাবৃত্ত।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে $v^2 = \lambda^2(-x^2+10ax-16a^2)$

উভয় পক্ষক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$2v\frac{dv}{dx} = \lambda^2(-2x+10a)$$

বা, $v\frac{dv}{dx} = -\lambda^2(x-5a)$

বা, $\frac{d^2x}{dt^2} = -\lambda^2(x-5a)$

x – 5a = y ধৰি আমি পাওঁ

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\lambda^2 y \qquad (1)$$

(1)অৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে ত্বৰণ, দূৰত্বৰ সমানুপাতিক আৰু ই স্থিৰ বিন্দুটো অভিমুখী। গতিকে, কণিকাটোৰ গতি সৰল পৰ্যাবৃত্ত।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে $x = a\cos\sqrt{\mu}\,t$ (1)

প্ৰশ্নৰ চৰ্ত বিবেচনা কৰি আমি পাওঁ

$a = a\cos\sqrt{\mu}\,t$ (2)

$b = a\cos\sqrt{\mu}\,(t+1)$ (3)

$c = a\cos\sqrt{\mu}\,(t+2)$ (4)

(2) আৰু (4) যোগ কৰি আমি পাওঁ

$$a+c = a[\cos\sqrt{\mu}\,t + \cos\sqrt{\mu}\,(t+2)]$$

$$= 2a\cos\frac{\sqrt{\mu}\,(t+2)+\sqrt{\mu}\,t}{2}\cos\frac{\sqrt{\mu}\,(t+2)-\sqrt{\mu}\,t}{2}$$

$$= 2a\cos\sqrt{\mu}\,(t+1)\cos\sqrt{\mu}$$

$= 2b\cos\sqrt{\mu}$, (3)ৰ পৰা

$$\therefore \cos\sqrt{\mu} = \frac{a+c}{2b}$$

বা, $\sqrt{\mu} = \cos^{-1}\frac{a+c}{2b}$

$\therefore$ পৰ্যায় কাল $= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{2\pi}{\cos^{-1}\frac{a+c}{2b}}$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে $V = -\sqrt{\mu}\sqrt{a^2 - x^2}$

বা, $V^2 = \mu\left(a^2 - x^2\right)$ (1)

$f = -\mu x$

বা, $f^2 = \mu^2 x^2$

$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}$

বা $T^2 = \frac{4\pi^2}{\mu}$

এতিয়া $f^2T^2 + 4\pi^2 v^2$

$= \mu^2x^2.\frac{4\pi^2}{\mu} + 4\pi^2\mu\left(a^2 - x^2\right)$

$= 4\pi^2\mu x^2 + 4\pi^2\mu a^2 - 4\pi^2\mu x^2$

$= 4\pi^2\mu a^2$ এইটো এটা ধ্ৰুৱক।

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে $v_1^2 = \mu\left(a^2 - x_1^2\right)$ (1)

$v_2^2 = \mu\left(a^2 - x_2^2\right)$ (2)

$\therefore v_2^2 - v_1^2 = \mu\left(a^2 - x_2^2\right) - \mu\left(a^2 - x_1^2\right)$

$= \mu\left(x_1^2 - x_2^2\right)$

$\therefore \mu = \frac{v_2^2 - v_1^2}{x_1^2 - x_1^2}$

$\therefore$ পৰ্যায় কাল $= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = 2\pi\sqrt{\frac{x_1^2 - x_2^2}{v_2^2 - v_1^2}}$

দ্বিতীয় অংশ (1)অক x_2^2 এৰে আৰু (2)ক x_1^2 এৰে পূৰণ কৰি আমি পাওঁ

$v_1^2x_2^2 = \mu a^2x_2^2 - \mu x_1^2x_2^2$ (3)

$v_2^2x_1^2 = \mu a^2x_1^2 - \mu x_2^2x_1$ (4)

(4) অৰ পৰা (3) বিয়োগ কৰি আমি পাওঁ

$$\mu a^2\left(x_1^{\,2}-x_2^{\,2}\right)=\nu_2^{\,2}x_1^{\,2}-\nu_1^{\,2}x_2^{\,2}$$

বা, $a^2=\dfrac{\nu_2^{\,2}x_1^{\,2}-\nu_1^{\,2}x_2^{\,2}}{\mu\left(x_1^{\,2}-x_2^{\,2}\right)}$

বা, $a=\dfrac{\sqrt{\nu_2^{\,2}x_1^{\,2}-\nu_1^{\,2}x_2^{\,2}}}{\sqrt{\mu}\,\sqrt{x_1^{\,2}-x_2^{\,2}}}$

$=\dfrac{\sqrt{\nu_2^{\,2}x_1^{\,2}-\nu_1^{\,2}x_2^{\,2}}}{\sqrt{x_1^{\,2}-x_2^{\,2}}}\cdot\dfrac{\sqrt{x_1^{\,2}-x_2^{\,2}}}{\sqrt{\nu_2^{\,2}-\nu_1^{\,2}}}$ অৰ পৰা

$=\dfrac{\sqrt{\nu_2^{\,2}x_1^{\,2}-\nu_1^{\,2}x_2^{\,2}}}{\sqrt{\nu_2^{\,2}-\nu_1^{\,2}}}$

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে $v=\sqrt{\mu}\sqrt{a^2-x^2}$

প্ৰশ্নৰ চৰ্তানুযায়ী,

$v=\dfrac{1}{2}$ (সৰ্বোচ্চ বেগ)

বা, $\sqrt{\mu}\sqrt{a^2-x^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\mu}\;a$

বা, $\sqrt{a^2-x^2}=\dfrac{1}{2}\,a$

বা, $a^2-x^2=\dfrac{a^2}{4}$

বা, $x^2=a^2-\dfrac{a^2}{4}$

বা, $x^2=\dfrac{3a^2}{4}$

$\therefore x=\dfrac{\sqrt{3}\,a}{2}$

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে $x=a\cos\sqrt{\mu}\,t$

প্ৰশ্নৰ চৰ্তানুযায়ী $x=\dfrac{1}{2}a$

বা, $a\cos\sqrt{\mu}\,t=\dfrac{1}{2}a$

বা, $\cos\sqrt{\mu}\,t = \frac{1}{2}$

বা, $\sqrt{\mu}\,t = \frac{\pi}{3}$

বা, $t = \frac{\pi}{3\sqrt{\mu}}$

$\therefore t = \frac{1}{6}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{1}{6}$ (পৰ্যায় কাল)

৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে A‌ত বেগ = 0

B ত বেগ = 0

$\therefore$ A আৰু B হ'ল তাৎক্ষণিক স্থিৰাৱস্থাৰ অৱস্থান

এতিয়া AB = OB – OA

= b – a

$\therefore$ বিস্তাৰ $= \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}(b-a)$

ধৰা হ'ল $\frac{1}{2}(b-a) = \alpha$

দিয়া আছে $V^2 = \mu\left(\alpha^2 - x^2\right)$

যেতিয়া x = 0, $V = v$

$\therefore v^2 = \mu\alpha^2 = \frac{\mu}{4}(b-a)^2$

$\therefore \mu = \frac{4v^2}{(b-a)^2}$, or $\sqrt{\mu} = \frac{2v}{b-a}$

$\therefore$ পৰ্যায় কাল $= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{2\pi(b-a)}{2v}$

$= \frac{\pi(b-a)}{v}$

৯ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে $\frac{d^2x}{dt^2} = -\mu x$

আৰু $v^2 = \mu\left(\alpha^2 - x^2\right)$

ধৰা হ'ল, দোলন কেন্দ্ৰৰ পৰা অৱস্থান দুটাৰ দূ�ৰত্ব ক্ৰমে x_1, x_2। ধৰা হ'ল $x_2 > x_1$

$\therefore f_1 = -\mu x_1,\ f_2 = -\mu x_2$ (1)

$v_1^{\,2} = \mu\left(\alpha^2 - x_1^{\,2}\right),\ \vartheta_2^{\,2} = \mu\left(a^2 - x_2^{\,2}\right)$ (2)

$$\therefore v_1^2 - v_2^2 = \mu\left(a^2 - x_1^2\right) - \mu\left(a^2 - x_2^2\right)$$
$$= \mu\left(a^2 - x_1^2 - a^2 - x_2^2\right)$$
$$= \mu\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$
$$= \mu\left(x_2 - x_1\right)\left(x_2 + x_1\right)$$
$$= \mu d\left(x_2 + x_1\right) \qquad (3)$$

(1)অৰ পৰা, $f_1 + f_2 = -\mu\left(x_1 + x_2\right)$

বা, $\mu = -\dfrac{f_1 + f_2}{x_1 + x_2}$ (4)

(3) আৰু (4)অৰ পৰা,

$$v_1^2 - v_2^2 = -\frac{f_1 + f_2}{x_1 + x_2} d\left(x_1 + x_2\right)$$

বা, $d = -\dfrac{v_2^2 - v_1^2}{f_1 + f_2}$

যদি আমি $x_1 > x_2$ বুলি ধৰোঁ, $d = \dfrac{v_1^2 - v_2^2}{f_1 + f_2}$

অৰ্থাৎ, $d = \dfrac{v_1^2 \sim v_2^2}{f_1 + f_2}$

১০ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে $v^2 = \mu\left(a^2 - x^2\right)$ (1)

যেতিয়া x = 3, v = 8

$\therefore$ (1)অৰ পৰা, $64 = \mu\left(a^2 - 9\right)$ (2)

যেতিয়া x = 4, $v = 6$

$\therefore$ (1)অৰ পৰা, $36 = \mu\left(a^2 - 16\right)$ (3)

(3)ক (2)ৰে হৰণ কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{36}{64} = \frac{a^2 - 16}{a^2 - 9}$$

বা, $\dfrac{9}{16} = \dfrac{a^2 - 16}{a^2 - 9}$

বা, $16a^2 - 256 = 9a^2 - 81$

বা, $7a^2 = 175$

বা, $7a^2 = 175$

বা, $a^2 = 25$

বা, $a = 5$.

$\therefore$ (2)ৰ পৰা, $64 = \mu(25-9)$

বা, $16\mu = 64$

$\therefore \mu = 4$

$\therefore$ সৰ্বোচ্চ বেগ $= \sqrt{\mu}\, a$

= 2 x 5 m/s = 10 m/s

পৰ্যায় কাল $= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu}} = \frac{2\pi}{2} = \pi$



৬.৭ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ঃ এটা কণিকাই সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতিত চলাচল কৰে। দোলন কেন্দ্ৰৰ পৰা ক্ৰমে 6m আৰু 8m দূৰত্বত বেগ 10m/sec আৰু 8m/sec। গতিৰ পৰ্যায় কাল আৰু বিস্তাৰ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ২ঃ এটা কণিকাই সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতিত চলাচল কৰে আৰু ইয়াৰ বিস্তাৰ a আৰু পৰ্যায় কাল T. প্ৰমাণ কৰক যে কণিকাটোৰ সৰ্বোচ্চ বেগ $\frac{2\pi a}{T}$.

প্ৰশ্ন ৩ঃ এটা কণিকাই এডাল সৰল ৰেখাত সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতিত চলাচল কৰে। দোলন কেন্দ্ৰৰ পৰা x_1, x_2, x_3 দূৰত্বত বেগ ক্ৰমে ν_1, ν_2, ν_3 । প্ৰমাণ কৰক যে

$$x_1^2\left(\nu_2^2 - \nu_3^2\right) + x_2^2\left(\nu_3^2 - \nu_1^2\right) + x_3^2\left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right) = 0$$

প্ৰশ্ন ৪ঃ এটা কণিকাই সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতিত চলাচল কৰে। t = 0 অত x = x_0 আৰু $\nu = \nu_0$ হ'লে প্ৰমাণ কৰক যে বিস্তাৰ $\left(x_0^2 + \frac{\nu_0^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$

প্ৰশ্ন ৫ঃ এটা কণিকাই সৰল পৰ্যাবৃত্ত গতিত চলাচল কৰে। এটা স্থিৰ বিন্দুৰ পৰা (দোলন কেন্দ্ৰ নহয়) a, b, c দূৰত্বত বেগ ক্ৰমে u, v, w হ'লে, প্ৰমাণ কৰক যে পৰ্যায় কাল T তলৰ সম্বন্ধটোৰে দিয়া আছে

$$\frac{4\pi^2}{T^2}(b-c)(c-a)(a-b) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ u^2 & v^2 & w^2 \end{vmatrix}.$$

*** ***** ***

অধ্যায় ৭ ঃ কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপ (MEASURES OF CENTRAL TENDENCY)

অধ্যায় গাঁথনি

৭.১ উদ্দেশ্য
৭.২ পৰিচয়
৭.৩ সমান্তৰ মাধ্য (বা মাধ্য)
৭.৪ গুণোত্তৰ মাধ্য
৭.৫ হৰাত্মক মাধ্য
৭.৬ মধ্যমা
৭.৭ বহুলক
৭.৮ চতুর্থক
৭.৯ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
৭.১০ অধিক জানিবলৈ
৭.১১ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
৭.১২ আৰ্হি প্রশ্ন

৭.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি তলৰ বিষয়কেইটা সম্বন্ধে জানিব পাৰিব

- সমান্তৰ মাধ্য
- গুণোত্তৰ মাধ্য
- হৰাত্মক মাধ্য
- মধ্যমা
- বহুলক
- চতুর্থক

৭.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপ (measure of central tendency), হ'ল 'এটা সংক্ষিপ্ত মাপ যিয়ে তথ্যৰ সংহতি এটা বণ্টনৰ মাজত বা কেন্দ্রত থকা এটা মাত্র মানেৰে বুজোৱাৰ প্রয়াস কৰে।' কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপ পাঁচটা, যথা, সমান্তৰ মাধ্য বা চমুকৈ মাধ্য (arithmetic mean or simply mean), গুণোত্তৰ মাধ্য (geometric mean), হৰাত্মক মাধ্য (harmonic mean), মধ্যমা (median), বহুলক (mode)। এই মাপকেইটা প্রায়েই ব্যৱহাৰ হয়। আমি এই অধ্যায়ত

এই মাপবোৰ সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম। তদুপৰি আমি চতুর্থক (quartile) সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম। পাছৰ অধ্যায়ত চতুর্থক সম্বন্ধে প্রয়োজন হ'ব।

৭.৩ সমান্তৰ মাধ্য (বা মাধ্য) (ARITHMETIC MEAN)

মাধ্যৰ দ্বাৰা আমি সমান্তৰ মাধ্যক বুজিম।

I. অসংঘৱদ্ধ তথ্যৰ মাধ্য (Mean for ungrouped data)

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ nটা পর্যবেক্ষণ। এই পর্যবেক্ষণকেইটাৰ মাধ্যক $\bar{x}$ - এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

টোকা ঃ $\sum$ হ'ল গ্রিক বর্ণমালাৰ অষ্টাদশ আখৰ (বৰফলাৰ)। উচ্চাৰণ হ'ল ছিগমা (sigma)।

উদাহৰণ 1 : 8 জন মানুহৰ উচ্চতা (ছেণ্টিমিটাৰত) হ'ল 155, 161, 164, 166, 167, 169, 171, 177. মাধ্য উচ্চতা নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $\bar{x} = \frac{155+161+164+166+167+169+171+177}{8}$

$= \frac{1330}{8}$ = 166.25

$\therefore$ মাধ্য উচ্চতা = 166.25 cm

II. বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মাধ্য (Mean for discrete frequency distribution)

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \ldots, x_n$ এই n টা পর্যবেক্ষণৰ বাৰংবাৰতা ক্রমে $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$। এই পর্যবেক্ষণকেইটাৰ মাধ্যক $\bar{x}$ -এৰে বুজোৱা হয়, আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}, \quad \text{য'ত } N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

উদাহৰণ 2 : অধোলিখিত বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মাধ্য নির্ণয় কৰক।

x_i	3	5	7	9	11	13
f_i	6	8	15	25	8	4

সমাধান ঃ $\bar{x} = \dfrac{6\times3+8\times5+15\times7+25\times9+8\times11+4\times13}{6+8+15+25+8+4}$

$= \dfrac{18+40+105+225+88+52}{6+8+15+25+8+4}$

$= \dfrac{528}{66} = 8$

III. সংঘৱদ্ধ বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মাধ্য (Mean for grouped or continuous frequency distribution)

সংঘৱদ্ধ বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মাধ্যৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}$$

য'ত x_i হ'ল অনুৰূপ শ্রেণীৰ মধ্যমান।

উদাহৰণ 3 : অধোলিখিত বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মাধ্য নির্ণয় কৰক।

গুণাংক	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
ছাত্রৰ সংখ্যা	15	17	19	27	19	12

সমাধা ঃ [এইটো এটা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টন। প্রত্যেক শ্রেণী উচ্চ সীমা সেই শ্রেণীটোৰ পৰা বাদ দিয়া হয়। উদাৰণস্বৰূপে 0–10 শ্রেণীটোত 10 -অক ধৰা নহয়। ইয়াক 10–20 শ্রেণীটো ধৰা হয়।]

শ্রেণী-অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা f_i	মধ্যমা x_i	$f_i x_i$
0–10	15	5	75
10–20	17	15	255
20–30	19	25	475
30–40	27	35	945
40–50	19	45	855
50–60	12	55	660

$N = \sum f_i = 109, \ \sum f_i x_i = 3265$

$\therefore \bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{N} = \dfrac{3265}{109}$

= 29.954 (মোটামুটিভাৱে)

টোকা ঃ ওপৰৰ উদাহৰণটোত f_i' বোৰ আৰু x_i' বোৰ ডাঙৰ সংখ্যা। গতিকে $f_i x_i'$ বোৰ আৰু

ডাঙৰ। ডাঙৰ গণনাৰ হাত সাৰিবৰ বাবে, মাধ্য নির্ণয়ৰ ক্ষেত্রত আমি এটা চুটি নিয়ম ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰোঁ।

চুটি নিয়ম

এই নিয়মৰ সহায়ত মাধ্য $\bar{x}$ এইদৰে উলিওৱা হয়।

$$\bar{x} = a + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - a),$$

য'ত a এটা স্বেচ্ছ সংখ্যা। ইয়াক ধৰি লোৱা মাধ্য (assumed mean) বুলি কোৱা হয়।

সমান শ্রেণী-অন্তৰালবিশিষ্ট সংঘৱদ্ধ বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ ক্ষেত্রত, ইয়াতকৈয়ো চুটি নিয়ম এটা ব্যৱহাৰ কৰা হয়। এই ক্ষেত্রত আমি ধৰি লওঁ—

$d_i = \frac{x_i - a}{h}$, য'ত h হ'ল শ্রেণী অন্তৰালৰ দৈর্ঘ্য।

মাধ্য এনেদৰে উলিওৱা হয়।

$$\bar{x} = a + h\frac{\sum f_i d_i}{N}$$

উদাহৰণ 4 : উদাহৰণ 3 ত প্রদত্ত বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মাধ্য চুটি নিয়মেৰে নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ a = 35 বুলি ধৰা হ'ল, h = 10

শ্রেণী অন্তৰাল	বাৰংবাতা f_i	মধ্যমা x_i	$d_i = \frac{xi - 35}{10}$	$f_i d_i$
0–10	15	5	–3	–45
10–20	17	15	–2	–34
20–30	19	25	–1	–19
30–40	27	35	0	0
40–50	19	45	1	19
50–60	12	55	2	24

$$N = \sum f_i = 109$$

$$\sum f_i d_i = -55$$

$$\therefore \bar{x} = 35 + 10 \times \left(\frac{-55}{109}\right)$$

$$= 35 - \frac{550}{109}$$

= 35 – 5.0459

= 29.9541

সমান্তৰ মাধ্যৰ ধর্ম

1. কিছুমান মানৰ সমান্তৰ মাধ্যৰ পৰা বিচ্যুতিৰ বীজগণিতীয় সমষ্টি শূন্য। (The algebraic sum of the deviations of a set of values from their arithmetic mean is zero.)

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ —এই n টা পর্যবেক্ষণৰ বাৰংবাৰতা ক্রমে $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$। তেনেহ'লে মাধ্য $\bar{x}$ হ'ল

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{N}, \qquad \text{য'ত } N = \sum_{i=1}^{n} f$$

প্রমাণ কৰিব লাগে যে $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x}) = 0$

এতিয়া, $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x}) = 0$

$$= f_1(x_1 - x) + f_2(x_2 - \bar{x}) + \ldots\ldots + f_n(x_n - \bar{x})$$
$$= (f_1x_1 - f_2x_2 + \ldots\ldots + f_nx_n) - (f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n) - \bar{x})$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f_ix_i - \sum_{i=1}^{n} f_i\bar{x}$$
$$= N\bar{x} - N\bar{x}$$
$$= 0$$

2. মাধ্য সাপেক্ষে ল'লে কিছুমান মানৰ বিচ্যুতিৰ বর্গৰ বীজগণিতীয় সমষ্টি সর্বনিম্ন।(The sum of the squares of the deviations of a set of values is minimum when taken about mean.)

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ — এই n টা পর্য্যবেক্ষণৰ বাৰংবাৰতা ক্রমে $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$। তেনেহ'লে মাধ্য $\bar{x}$ হ'ল।

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} == \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{N_i}, \qquad N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

প্রমাণ কৰিব লাগে যে $a = \bar{x}$ হ'লে $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - a)^2$ সর্বনিম্ন, য'ত a যিকোনো স্বেচ্ছ সংখ্যা।

ধৰাহ'ল $z = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - a)^2$

$$= f_1(x_1 - a)^2 + f_2(x_2 - a)^2 + ... + f_n(x_n - a)^2$$

$$= f_1(x_1 - \bar{x} + \bar{x} - a)^2 + f_2(x_2 - \bar{x} + \bar{x} - a)^2 + ... + f_n(x_n - \bar{x} + \bar{x} - a)^2$$

$$= f_1[(x_1 - \bar{x})^2 + (\bar{x} - a)^2 + 2(x_1 - x)(\bar{x} - a)^2]$$

$$+ f_2[(x_2 - \bar{x})^2 + (\bar{x} - a)^2 + 2(x_2 - \bar{x})(\bar{x} - a)] + ...$$

$$+ f_n[(x_n - \bar{x})^2 + (\bar{x} - a)^2 + 2(x_n - \bar{x})(\bar{x} - a)]$$

$$= f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + ... + f_n(x_n - \bar{x})^2 + (\bar{x} - a)^2(f_1 + f_2 + ... + f_n)$$

$$+ 2(\bar{x} - a)[f_1(x_1 - \bar{x}) + f_2(x_2 - \bar{x}) + ... + f_n(x_n - \bar{x})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - a)^2 \sum_{i=1}^{n} f_i + 2(\bar{x} - a) \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})$$

আমি জানো যে $\sum_{i=1}^{n} f_i = N$ আৰু $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2 = o$ (ধৰ্ম 1)

$$\therefore z = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - a)^2 N$$

যদি $a = \bar{x}$, $(\bar{x} - a)^2 = 0$

$\therefore$ $a = \bar{x}$ হ'লে, z সৰ্বনিম্ন আৰু সৰ্বনিম্ন মান হ'ল $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2$.

৭.৪ গুণোত্তৰ মাধ্য (GEOMETRIC MEAN)

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, ..., x_n$— এই n টা পৰ্যবেক্ষণ। ইয়াত x_i বোৰ অশূন্য আৰু ধনাত্মক। এই পৰ্যবেক্ষণকেইটাৰ গুণোত্তৰ মাধ্যক Gৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$G = (x_1 x_2 .... x_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\therefore \log G = \log(x_1 x_2 .... x_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{n} \log (x_1 x_2 .... x_n)$$

$$= \frac{1}{n} \log [\log x_1 + \log x_2 + ... + \log x_n] \qquad (1)$$

$\therefore$ G = antilog $\left[\frac{1}{n}(\log x_1 + \log x_2 + ... + \log x_n)\right]$

আকৌ ধৰা হ'ল $x_1, x_2, ..., x_n$ এই n টা পৰ্যবেক্ষণৰ বাৰংবাৰতা ক্ৰমে $f_1, f_2, ..$

. . . ., f_n । এই পর্যবেক্ষণকেইটাৰ গুণোত্তৰ মাধ্যক G ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$G = \left(x_1^{f_1} x_2^{f_2} \ldots . x_n^{fn}\right)^{\frac{1}{N}}, \qquad \text{য'ত } N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

$$\therefore \log G = \log \left(x_1^{f_1} x_2^{f_2} \ldots . x_n^{fn}\right)^{\frac{1}{N}}$$

$$= \frac{1}{N} \log \left(x_1^{f_1} x_2^{f_2} \ldots . x_n^{fn}\right)$$

$$= \frac{1}{N} \left[\log x_1^{f_1} + \log x_2^{f_2} + \ldots . + \log x_n^{fn}\right]$$

$$= \frac{1}{N} \left[f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + \ldots . + f_n \log x_n\right] \qquad (2)$$

$$\therefore \text{ G = antilog } \left[\frac{1}{n}\left(f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + \ldots . + f_n \log x_n\right)\right]$$

(1) আৰু (2) ৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে n টা পর্যবেক্ষণৰ গুণোত্তৰ মাধ্যৰ ঘাতাংক = পর্যবেক্ষণকেইটাৰ ঘাতাংকৰ সমান্তৰ মাধ্য।

৭.৫ হৰাত্মক মাধ্য (HARMONIC MEAN)

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \ldots . , x_n$, - এই n টা পর্যবেক্ষণৰ প্রত্যেকেই অশূন্য।

এই পর্যবেক্ষণকেইটাৰ হৰাত্মক মাধ্যক H এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots . + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

আকৌ, ধৰা হ'ল $x_i, x_2, \ldots . , x_n$ —এই n টা পর্যবেক্ষণৰ বাৰংবাৰতা ক্রমে $f_1, f_2, \ldots . . , f_n$ । এই পর্যবেক্ষণকেইটাৰ হৰাত্মক মাধ্যক H এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$H = \frac{N}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \ldots . + \frac{f_n}{x_n}} \qquad \text{য'ত } N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

উদাহৰণ 5 : 7, 8, 49 অৰ সমান্তৰ মাধ্য (AM), গুণোত্তৰ মাধ্য (GM), আৰু হৰাত্মক মাধ্য (HM) নির্ণয় কৰক আৰু দেখুৱাওক যে AM > GM > HM.

সমাধান ঃ $AM = \frac{7+8+49}{3} = \frac{64}{3} = 21.3$ (মোটামুটিভাৱে)

$$GM = (7\times 8\times 49)^{\frac{1}{3}} = (7\times 2^3\times 7^2)^{\frac{1}{3}} = (2^3\times 7^3)^{\frac{1}{3}} = 2\times 7 = 14$$

$$HM = \frac{3}{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{49}} = \frac{3}{\frac{113}{392}} = 3\times\frac{392}{113} = 10.41 \text{ (মোটামুটিভাৱে)}$$

স্পষ্টত ঃ AM > GM > HM



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

প্রশ্ন নং ১ঃ 14.9, 10.8, 12.3, 23.3 এই পর্যবেক্ষণকেইটাৰ মাধ্য নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ঃ তলৰ তথ্যবোৰৰ মাধ্য নির্ণয় কৰক।

গুণাংক	5	10	15	20	25	30	35	40
ছাত্রৰসংখ্যা	5	7	9	10	8	6	3	2

প্রশ্ন নং ৩ঃ তলৰ বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ পৰা মাধ্য উচ্চতা নির্ণয় কৰক।

উচ্চতা (ছেমিত)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
উদ্ভিদৰ সংখ্যা	42	44	58	35	26	15

প্রশ্ন নং ৪ঃ 7, 27, 49 অৰ সমান্তৰ মাধ্য (AM), গুণোত্তৰ মাধ্য (GM), হৰাত্মক মাধ্য (HM) নির্ণয় কৰক আৰু দেখুৱাওক যে AM > GM > HM.

প্রশ্ন নং ৫ঃ যদি প্রথম কিল'মিটাৰ ঘণ্টাত 10 km দ্রুতিৰে, দ্বিতীয় কিল'মিটাৰ ঘণ্টাত 8 km দ্রুতিৰে আৰু তৃতীয় কিল'মিটাৰ ঘণ্টাত 4 km দ্রুতিৰে ভ্রমণ কৰা হয়, তেনেহ'লে গড় দ্রুতি নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ প্রথম n টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ বর্গৰ মাধ্য নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৭ঃ 3.2, 5.8, 7.9, আৰু 4.5 সংখ্যাকেইটাৰ বাৰংবাৰতা ক্রমে x, (x + 2), (x – 3), আৰু (x + 6)। যদি সিহঁতৰ মাধ্য 4.876 হয়, x অৰ মান নির্ণয় কৰক।

৭.৬ মধ্যমা (MEDIAN)

বণ্টনৰ মধ্যমা বুলি ক'লে আমি চলকৰ সেই মানটোক বুজো যিয়ে বণ্টনটোক দুটা সমান অংশত ভাগ কৰে।

I. অসংঘৱদ্ধ তথ্যৰ মধ্যমা (Median for ungrouped data)

ধৰা হ'ল n টা পর্যবেক্ষণ দিয়া আছে।

প্রথমতে আমি পর্যবেক্ষণবোৰক মানৰ ঊৰ্ধ্বক্রমত (বা অধঃ ক্রমত) সজাওঁ।

(a) ধৰা হ'ল n অযুগ্ম সংখ্যা।

এই ক্ষেত্রত, $\left(\frac{n+1}{2}\right)$তম পদটোৱেই মধ্যমা, অর্থাৎ মধ্যমা = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$তম পদ।

(b) ধৰা হ'ল n যুগ্ম সংখ্যা।

এই ক্ষেত্রত, মধ্যম পদ দুটাৰ মাধ্যই অর্থাৎ $\frac{n}{2}$তম আৰু $\left(\frac{n}{2}+1\right)$তম পদ দুটাৰ মাধ্যই মধ্যমা।

টোকা ঃ n যুগ্ম সংখ্যা হ'লে, মধ্যম মান দুটাৰ মাজৰ যিকোনো সংখ্যাক মধ্যমা হিচাপে ল'ব পাৰি। কিন্তু সাধাৰণতে মধ্যম মান দুটাৰ মাধ্যকে মধ্যমা হিচাপে লোৱা হয়।

উদাহৰণ 6 : তলৰ পর্যবেক্ষণবোৰৰ মধ্যমা নির্ণয় কৰক।

5, 19, 42, 11, 50, 30, 21, 0, 52, 36, 27.

সমাধান ঃ তলত দেখুওৱাৰ দৰে আমি পর্যবেক্ষণবোৰক মানৰ ঊৰ্ধ্বক্রমত সজাওঁ,— 0, 5, 11, 19, 21, 27, 30, 36, 42, 50, 52.

ইয়াত 11 টা পর্যবেক্ষণ (অযুগ্ম সংখ্যক পর্যবেক্ষণ)

$\therefore$ মধ্যমা = $\left(\frac{11+1}{2}\right)$তম, অর্থাৎ ষষ্ঠ পর্যবেক্ষণ = 27

উদাহৰণ 7 : তলৰ পর্যবেক্ষণবোৰৰ মধ্যমা নির্ণয় কৰক।

6, 10, 4, 3, 9, 11, 22, 18.

সমাধান ঃ তলত দেখুওৱাৰ দৰে আমি পর্যবেক্ষণবোৰক মানৰ ঊৰ্ধ্বক্রমত সজাওঁ,—

3, 4, 6, 9, 10, 11, 18, 22.

ইয়াত 8 টা পর্যবেক্ষণ (যুগ্ম সংখ্যক পর্যবেক্ষণ) আছে।

$\therefore$ মধ্যমা = $\frac{8}{2}$তম আৰু $\left(\frac{8}{2}+1\right)$তম পর্যবেক্ষণৰ মাধ্য

= চতুর্থ আৰু পঞ্চম পর্যবেক্ষণৰ মাধ্য

$= \frac{9+10}{2} = \frac{19}{2} = 9.5$

II. বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা চলকৰ মধ্যমা (Median for discrete frequency distribution)

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ — এই n টা পর্যবেক্ষণৰ বাৰংবাৰতা ক্রমে $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$। এই ক্ষেত্রত সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিবেচনা কৰি মধ্যমা নির্ণয় কৰা হয়।

পোনতে আমি $N = \sum_{i=1}^{n} f$ নির্ণয় কৰোঁ। তাৰ পাছত আমি $\frac{N}{2}$ উলিয়াওঁ। $\frac{N}{2}$ তকৈ ঠিক ডাঙৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা(Cumulative Frequency) নির্ণয় কৰোঁ. x অৰ অনুৰূপ মানেই মধ্যমা।

উদাহৰণ 8 : তলৰ বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মধ্যমা নির্ণয় কৰক।

x_i	20	9	25	50	40	80
f_i	6	4	16	7	8	2

সমাধান ঃ

x_i (ঊর্ধক্রমত)	f_i	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা (c.f.)
9	4	4
29	6	10
25	16	26
40	8	34
50	7	41
80	2	43

$N = \Sigma f_i = 43$, $\frac{N}{2} = 43 = 21.5$

21.5 অতকৈ ঠিক ডাঙৰ c.f. হ'ল 26। x অৰ অনুৰূপ মান 25। মধ্যমা = 25.

III. সংঘৱদ্ধ বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মধ্যমা (Median for grouped or continuous frequency distribution)

সংঘৱদ্ধ বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মধ্যমা তলত দিয়াৰ দৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হয়–

মধ্যমা = $L + \frac{\frac{N}{2} - c}{f} \times h$

য'ত L = মধ্যমা শ্রেণীৰ নিম্নসীমা,

f = মধ্যমা শ্রেণীৰ বাৰংবাৰতা,

c = মধ্যমা শ্রেণীৰ ঠিক আগৰ শ্রেণীটোৰ c.f.

h = মধ্যমা শ্রেণীৰ দৈর্ঘ

$\frac{N}{2}$ তকৈ ঠিক ডাঙৰ c.f. অৰ অনুৰূপ শ্রেণীটোক মধ্যমা শ্রেণী বুলি কোৱা হয়, $N = \Sigma f_i$

উদাহৰণ 9 : তলৰ বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মধ্যমা নির্ণয় কৰক।

শ্রেণী অন্তৰাল	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
বাৰংবাৰতা	5	10	20	5	3

সমাধান ঃ

শ্রেণী অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা	c.f
20-30	5	5
30-40	10	15
40-50	20	35
50-60	5	40
60-70	3	43

এই ক্ষেত্রত $N = \Sigma f_i = 43$, $\frac{N}{2} = \frac{43}{2} = 21.5$

21.5 অতকৈ ঠিক ডাঙৰ c.f. অৰ অনুৰূপ শ্রেণী হ'ল 40-50.

$\therefore$ মধ্যমা শ্রেণী : 40 – 50

L = 40, f = 20, c = 15, h = 20

মধ্যমা $= L = \frac{\frac{N}{2} - c}{f} \times h$

$= 40 + \frac{21.5 - 15}{20} \times 10$

$= 40 + \frac{6.5}{2}$

= 40 + 3.25

= 43.25



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

প্রশ্ন নং ১ঃ তলৰ পর্যবেক্ষণবোৰৰ মধ্যমা নির্ণয় কৰক।

25, 30, 21, 55, 47, 10, 15, 17, 45, 35

প্রশ্ন নং ২ঃ তলৰ বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ পৰা মধ্যমা উচ্চতা নির্ণয় কৰক।

উচ্চতা (ছেমিত)	150	155	158	160	164	168
ছাত্রৰ সংখ্যা	10	14	8	15	7	11

প্রশ্ন নং ৩ঃ তলৰ বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মধ্যমা নির্ণয় কৰক।

শ্রেণী অন্তৰাল	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
বাৰংবাৰতা	7	10	16	32	24

প্রশ্ন নং ৪ঃ 8, 11, 13, 15, x+1, x+3, 30, 35, 40, 43 পর্যবেক্ষণ কেইটা ঊর্ধক্রমত

আছে, আৰু ইয়াৰ মধ্যমা 22। x অৰ মান নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ তলৰ বণ্টনটোৰ মধ্যমা নির্ণয় কৰক।

দৰমহা (টকাত)	2200-2300	2300-2400	2400-2500	2500-2600	2600-2700
শ্রমিকৰ সংখ্যা	3	5	20	10	5

৭.৭ বহুলক (MODE)

বণ্টনত যিটো মান সবাতোকৈ বেছিকৈ ওলায়, তাক বহুলক বুলি কোৱা হয়।

তলৰ পর্যবেক্ষণবোৰ লোৱা হ'ল।

6, 5, 3, 4, 3, 7, 8, 5, 9, 5, 4.

ইয়াত 5 মানটো সবাতোকৈ বেছিকৈ ওলাইছে।

∴ বণ্টনটোৰ বহুলক হ'ল 5.

টোকা ঃ যদি এটাতকৈ অধিক মানৰ একে সর্বাধিক বাৰংবাৰতা থাকে, তেনেহ'লে বহুলক সংজ্ঞাৱদ্ধ নহয়।

II. বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ বহুলক (Mode for discrete frequency distribution)

বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ ক্ষেত্রত, সর্বোচ্চ বাৰংবাৰতাৰ অনুৰূপে চলকৰ যিটো মান, সেইটোকে বহুলক বুলি কোৱা হয়।

তলৰ উদাহৰণটো লোৱা হ'ল।

x_i	1	2	3	4	5	6	7
f_i	10	15	20	35	16	3	1

এই ক্ষেত্রত, সর্বোচ্চ বাৰংবাৰতা = 35, আৰু x অৰ সর্বোচ্চ মান 4। ∴ বহুলক = 4.

তলৰ যিকোনো এটাৰ (বা একাধিকৰ) ক্ষেত্রত এই নিয়মটো প্রযোজ্য নহয়।

1. সর্বোচ্চ বাৰংবাৰতাৰ পুনৰুক্তি হয়।
2. সর্বোচ্চ বাৰংবাৰতা একেবাৰে আৰম্ভণিতে বা একেবাৰে শেষত ওলায়।
3. যদি বণ্টনটোত থাকে।

এনে ক্ষেত্রত, গ্রুপিঙৰ সহায়ত বহুলক নির্ণয় কৰা হয়। আমি সেই বিষয়ে আলোচনা নকৰোঁ।

III. সংঘৱদ্ধ বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ বহুলক (Mode for grouped or continuous frequency distribution)

সংঘৱদ্ধ বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ বহুলক এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হয়।

$$\text{বহুলক} = L + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times h,$$

য'ত L = ম'ডেল শ্রেণীৰ নিম্ন সীমা

h = ম'ডেল শ্রেণীৰ দৈর্ঘ

f_1 = ম'ডেল শ্রেণীৰ ঠিক আগৰ শ্রেণীটোৰ বাৰংবাৰতা

f_2 = ম'ডেল শ্রেণীৰ ঠিক পিছৰ শ্রেণীটোৰ বাৰংবাৰতা

f_m = ম'ডেল শ্রেণীৰ বাৰংবাৰতা

ম'ডেল শ্রেণী (modal class) বুলি ক'লে আমি সেই শ্রেণীক বুজিম যাৰ বাৰংবাৰতা সর্বোচ্চ বা যিটো শ্রেণীত বহুলক থাকে।

উদাহৰণ 10 : তলৰ বণ্টনটোৰ বহুলক নির্ণয় কৰক।

শ্রেণী-অন্তৰাল	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
বাৰংবাৰতা	7	10	16	32	24

সমাধান ঃ এই ক্ষেত্রত সর্বোচ্চ বাৰংবাৰতা হ'ল 32.

∴ ম'ডেল শ্রেণী হ'ল 15-20.

∴ L = 15, f_m = 32, f_1 = 16, f_2 = 24, h = 5

$$\therefore \text{বহুলক} = L + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times h$$

$$= 15 + \frac{32 - 16}{2 \times 32 - 16 - 24} \times 5$$

$$= 15 + \frac{16}{24} \times 5$$

$$= 15 + \frac{2}{3} \times 5 \quad = 15 + \frac{10}{3} \quad = 18.3$$

মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলকৰ মাজৰ আনুভৱিক সম্বন্ধ (Empirical relation between mean, median and mode)

কোনো বণ্টনৰ মাধ্য = মধ্যমা = বহুলক হ'লে বণ্টনটোক সমমিতীয় বণ্টন (symmetrical distribution) বুলি কোৱা হয়। যদি মাধ্য, মধ্যমা, বহুলক সমান নহয়, তেনেহ'লে বণ্টনটোক অসমমিতীয় (asymmetrical) বা বিষম (skewed) বুলি কোৱা হয়। এটা নিয়মীয়া অসমমিতীয় বণ্টনৰ ক্ষেত্রত মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলকৰ মাজত এটা সম্বন্ধ আছে। পৰিসংখ্যাবিজ্ঞানী কার্ল পিয়েৰছনে (karl pearson) সম্বন্ধটো এনেদৰে প্রকাশ কৰিছে।

বহুলক = 3 মধ্যমা – 2 মাধ্য

উদাহৰণ ১১ ঃ যদি বহুলক = 25.5, মধ্যমা = 24.25, মাধ্য নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে

বহুলক = 3 মধ্যমা – 2 মাধ্য

বা, 25.5 = 3 x 24.25 – 2 মাধ্য

বা, 2 মাধ্য= 72.75 – 25.5

বা, 2 মাধ্য = 47.35

$\therefore$ মাধ্য $= \frac{47.25}{2}$

= 23.625



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 3

প্ৰশ্ন নং ১ঃ তলৰ বণ্টনটোৰ বহুলক নিৰ্ণয় কৰক।

উচ্চতা (ছেমিত)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
উদ্ভিদৰ সংখ্যা	42	44	58	35	26	15

প্ৰশ্ন নং ২ঃ যদি বহুলক = 16, মাধ্য = 20.2, মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ বহুলক আৰু মাধ্যৰ মান ক্ৰমে 60 আৰু 66 হ'লে, মধ্যমাৰ মান নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ যদি বহুলক = 50.04, মাধ্য = 45, মধ্যমা কিমান?

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ তলৰ পৰ্যবেক্ষণবোৰৰ মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলক নিৰ্ণয় কৰক।

1, 2, 2, 3, 4, 7, 9.

৭.৮ চতুৰ্থক (QUARTILE)

চলকৰ যিবোৰ মানে পৰ্যবেক্ষণৰ অনুক্ৰমটোক সমানে চাৰি ভাগ কৰে, তাক চতুৰ্থক বুলি কোৱা হয়। প্ৰত্যেক অংশতে সমান সংখ্যক পদ থাকে। প্ৰথম বিন্দুটোক প্ৰথম চতুৰ্থক (Q_1), দ্বিতীয় বিন্দুটোক দ্বিতীয় চতুৰ্থক (Q_2, মধ্যমা), আৰু তৃতীয় বিন্দুটোক তৃতীয় চতুৰ্থক (Q_3) বোলে।

চতুৰ্থকৰ গণনা (Computation of quantiles)

I. অসংঘৱদ্ধ তথ্যৰ চতুৰ্থক (Quartiles for ungrouped data)

প্ৰথমতে আমি মানৰ ঊৰ্ধক্ৰমত পৰ্যবেক্ষণবোৰ সজাওঁ। ধৰাহ'ল মুঠ পৰ্যক্ষেণৰ সংখ্যা N। তেনেহ'লে

$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right)$তম পৰ্যবেক্ষণৰ মান

$Q_2 = \left(\frac{N+1}{2}\right)$তম পৰ্যবেক্ষণৰ মান, যদি n অযুগ্ম

$= \frac{N}{2}$ তম আৰু $\left(\frac{N+1}{2}\right)$তম পর্যবেক্ষণৰ মানৰ মাধ্য, যদি n যুগ্ম

$Q_3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$তম পর্যবেক্ষণৰ মান

II. সংঘৱদ্ধ বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ চতুর্থক (Quartiles for grouped or continuous frequency distribution)

প্রথমতে আমি প্রদত্ত বণ্টনৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা (c.f.) নির্ণয় কৰোঁ।

ধৰা হ'ল $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

আমি $\frac{iN}{4}$, উলিয়াওঁ, য'ত Q_1 অৰ বাবে i = 1, Q_2 ৰ (বা মধ্যমাৰ) বাবে i = 2, Q_3 ৰ বাবে i = 3.

তাৰ পাছত আমি $\frac{iN}{4}$অতকৈ ঠিক ডাঙৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা আৰু অনুৰূপ শ্রেণী উলিয়াওঁ। অনুৰূপ শ্রেণীটোক চতুর্থক শ্রেণী বুলি কোৱা হয়।

তলৰ সূত্রটোৰ সহায়ত আমি Q_1, Q_2, আৰু Q_3 নির্ণয় কৰিম।

$$Q_i = L + \frac{\frac{iN}{4} - c}{f} \times h$$

i = 1, 2, 3

য'ত L = চতুর্থক শ্রেণীৰ নিম্ন সীমা

f = চতুর্থক শ্রেণীৰ বাৰংবাৰতা

c = চতুর্থক শ্রেণীৰ ঠিক আগৰ শ্রেণীটোৰ c.f.

h = চতুর্থক শ্রেণীৰ দৈর্ঘ্য।



৭.৯ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \ldots, x_n$. — n টা পর্যবেক্ষণ। এই n টা পর্যবেক্ষণৰ মাধ্যক $\bar{x}$-এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — n টা পর্যবেক্ষণৰ বাৰংবাৰতা ক্রমে $f_1, f_2, \ldots, f_n$। এই পর্যবেক্ষণকেইটাৰ মাধ্যৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{N}$$

সংঘৱদ্ধ বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মাধ্যৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{N}, \qquad N = \sum_{i=1}^{n} f$$

য'ত x_i হ'ল অনুৰূপ শ্রেণীৰ মধ্যমান।

- বণ্টনৰ মধ্যমা বুলি ক'লে আমি চলকৰ সেই মানটোক বুজো যিয়ে বণ্টনটোক দুটা সমান অংশত ভাগ কৰে।

  আমি পর্যবেক্ষণবোৰক মানৰ ঊর্ধক্রমত (বা অধঃক্রমত) সজাওঁ। পর্যবেক্ষণৰ সংখ্যা n হ'লে আৰু n অযুগ্ম হ'লে, $\left(\frac{N+1}{2}\right)$তম পদটোৱেই মধ্যমা। n যুগ্ম হ'লে $\frac{n}{2}$তম পদ আৰু $\left(\frac{n}{2}+1\right)$তম পদ দুটাৰ মাধ্যই মধ্যমা।

  সংঘৱদ্ধ বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মধ্যমা তলত দিয়াৰ দৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হয়।

  $$\text{মধ্যমা} = L + \frac{\frac{N}{2} - c}{f} \times h$$

য'ত L = মধ্যমা শ্রেণীৰ নিম্ন সীমা,

f = মধ্যমা শ্রেণীৰ বাৰংবাৰতা,

c = মধ্যমা শ্রেণীৰ ঠিক আগৰ শ্রেণীটোৰ c.f.,

h = মধ্যমা শ্রেণীৰ দৈর্ঘ্য

$\frac{N}{2}$তকৈ ঠিক ডাঙৰ c.f.অৰ অনুৰূপ শ্রেণীটোক মধ্যমা শ্রেণী বুলি কোৱা হয়। $N = \Sigma f_i$

- বণ্টনত যিটো মান সবাতোকৈ বেছিকৈ ওলায় তাক বহুলক বুলি কোৱা হয়।

  সংঘৱদ্ধা বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ বহুলক এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হয়।

  $$\text{বহুলক} = L + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times h$$

য'ত L = ম'ডেল শ্রেণীৰ নিম্ন সীমা

h = ম'ডেল শ্রেণীৰ দৈর্ঘ্য

f_1 = ম'ডেল শ্রেণীৰ ঠিক আগৰ শ্রেণীটোৰ বাৰংবাৰতা

f_2 = ম'ডেল শ্রেণীৰ ঠিক পিছৰ শ্রেণীটোৰ বাৰংবাৰতা

f_m = ম'ডেল শ্রেণীৰ বাৰংবাৰতা

ম'ডেল শ্রেণী (modal class) বুলি ক'লে আমি সেই শ্রেণীক বুজিম যাৰ বাৰংবাৰতা সর্বোচ্চ বা যিটো শ্রেণীত বহুলক থাকে।



৭.১০ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

1) Statistical Methods by N.G. Das, McGraw Hill Education (India) Private Ltd. 2009
2) Probability and Statistics by G.Shanker Rao, University Press (India) private Ltd. 2011
3) Introduction to probability and Statistics by Seymour Lipschutz, John J.Schiller, Tata McGraw Hill Education private Ltd. 2005
4) Probability, Random Process, Queueing theory and Statistics by Dr. S.Rajasekaran, Prof.A.Chandrasekaran & G.Kavitha, Dhanam Publications, Chennai-60042
5) Probability and Statistics by G.Balaji, G.Balaji Publishers, Chennai-33



৭.১১ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ ১

1 নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $\bar{x} = \frac{14.9+10.8+12.3+23.3}{4} = \frac{61.3}{4} = 15.325$

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ

$$\bar{x} = \frac{5\times5+7\times10+9\times15+10\times20+8\times25+6\times30+3\times35+2\times40}{5+7+9+10+8+6+3+2}$$

$$= \frac{25+70+135+200+200+180+105+80}{50}$$

$$= \frac{995}{50} = 19.9$$

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ

শ্রেণী অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা (f_i)	মধ্যমান (x_i)	$f_i x_i$
0-10	42	5	210
10-20	44	15	660
20-30	58	25	1450
30-40	35	35	1225
40-50	26	45	1170
50-60	15	55	825

$N = \Sigma f_i = 220$, $\Sigma f_i x_i = 5540$

$\therefore \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} = \frac{5540}{220}$ = 25.18 (মোটামুটিভাৱে)

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $AM = \frac{7+27+49}{3} = \frac{83}{3}$ = 27.67 (মোটামুটিভাৱে)

$GM = (7+27+49)^{\frac{1}{3}} = (7+3^3+7^2)^{\frac{1}{3}} = (3^3+7^3)^{\frac{1}{3}} = 3\times 7 = 21$

$HM = \frac{3}{\frac{1}{7}+\frac{1}{27}+\frac{1}{49}} = \frac{3}{\frac{265}{1323}} = 3\times\frac{1323}{265}$

$\frac{3969}{265}$ = 14.98 (মোটামুটিভাৱে)

$\therefore$ AM > GM > HM

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ প্রথম কিল'মিটাৰ অতিক্রম কৰে $\frac{1}{10}$ ঘণ্টাত

দ্বিতীয় কিল'মিটাৰ অতিক্রম কৰে $\frac{1}{8}$ ঘণ্টাত

তৃতীয় কিল'মিটাৰ অতিক্রম কৰে $\frac{1}{4}$ ঘণ্টাত

$\therefore$ দূৰত্ব (3 কিঃমিঃ) অতিক্রম কৰে $\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)$ ঘণ্টাত

$\therefore$ গড় দ্রুতি $= \frac{3}{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}}$ কিঃমিঃ/ঘণ্টাত

$= \frac{3}{\frac{19}{40}}$ কিঃমিঃ/ঘণ্টাত

$$= 3 \times \frac{40}{19}$$ কিঃমিঃ/ঘণ্টাত

= 6.316 কিঃমিঃ/ঘণ্টাত (মোটামুটিভাৱে)

টোকা ঃ গড় দ্রুতি হ'ল 10, 8, 4 অৰ হৰাত্মক মাধ্য।

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $\bar{x} = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2}{n}$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n}$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $4.876 = \frac{(3.2)x + (5.8)(x+2) + (7.9)(x-3) + (4.5)(x+6)}{x + x + 2 + x - 3 + x + 6}$

বা, $4.876 = \frac{(21.4)x + 11.6 - 23.7 + 27}{4x + 5}$

বা, (4.876) (4x + 5) = (21.4)x + 14.9

বা, (19.504)x + 24.38 = (21.4)x + 14.9

বা, (21.4)x – (19.504)x = 24.38–14.9

বা, (1.896)x = 9.48

$\therefore x = \frac{9.48}{1.896} = 5$

অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ পৰ্যবেক্ষণবোৰক তলত দেখুওৱাৰ দৰে আমি মানৰ ঊৰ্ধ্বক্ৰমত লিখোঁ

10, 15, 17,21, 25, 30, 35, 45, 47, 55

মুঠতে 10 টা পৰ্যবেক্ষণ আছে (যুগ্ম সংখ্যক পৰ্যবেক্ষণ)।

$\therefore$ মধ্যমা = $\frac{10}{2}$ তম আৰু $\left(\frac{10}{2}+1\right)$ তম পদৰ মাধ্য

= 5-তম আৰু 6-তম পদৰ মাধ্য

$$= \frac{25+30}{2} = \frac{55}{2} = 27.5$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ঊৰ্ধ্বক্ৰমত থকা পৰ্যবেক্ষণবোৰ হ'ল 8, 11, 13, 15, x+1, x+3, 30, 35, 40, 43.

মুঠতে 10 টা পৰ্যবেক্ষণ আছে।

$\therefore$ মধ্যমা = পঞ্চম আৰু ষষ্ঠ পর্যবেক্ষণৰ মাধ্য

$$= \frac{x+1+x+3}{2} = \frac{2x+4}{2}$$

$= x + 2.$

এতিয়া, মধ্যমা = 22 (দিয়া আছে)

$\therefore x + 2 = 22$

$\therefore x = 20$

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ ৩

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ বহুলক = 50.04, মাধ্য = 45 (দিয়া আছে)

আমি জানো যে

বহুলক = 3 মধ্যমা – 2 মাধ্য

বা, 50.04 = 3 মধ্যমা – 2 x 45

বা, 3 মধ্যমা = 50.04 + 90

বা, 3 মধ্যমা = 140.04

$\therefore$ মধ্যমা = $\frac{140.04}{3}$ = 46.68

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ পর্যবেক্ষণবোৰ হ'ল

1, 2, 2, 3, 4, 7, 9

মাধ্য $= \frac{1+2+2+3+4+7+9}{7} = \frac{28}{7} = 4$

মুঠতে 7 টা পর্যবেক্ষণ আছে।

মধ্যমা $= \left(\frac{7+1}{2}\right)$ তম পর্যবেক্ষণ

= চতুর্থ পর্যবেক্ষণ

= 3

বহুলক = 2

টোকা ঃ বহুলক < মধ্যমা < মাধ্য।



৭.১২ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ 1, 2, 3, ..., n পৰ্যবেক্ষণকেইটাৰ বাৰংবাৰতা ক্ৰমে 1, 2, 3, ..., n। সমান্তৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ২ঃ 2, 4, 16 আৰু 32 ৰ সমান্তৰ মাধ্য (AM), গুণোত্তৰ মাধ্য (GM), আৰু হৰাত্মক মাধ্য (HM) নিৰ্ণয় কৰক। ইয়াৰ সহায়ত দেখুওৱাক যে AM > GM > HM.

প্ৰশ্ন ৩ঃ 30 ৰ পৰা 20 টা পৰ্যবেক্ষণৰ বিচ্যুতিৰ বীজগণিতীয় সমষ্টি 2। এই পৰ্যবেক্ষণকেইটাৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ঃ 15 জন ছাত্ৰৰ মাধ্য উচ্চতা 154 ছেণ্টিমিটাৰ। পিছত দেখা গ'ল যে মাধ্য গণনা কৰোঁতে, 155 ছেণ্টিমিটাৰ পৰ্যবেক্ষণটো ভুলকৈ 125 ছেণ্টিমিটাৰ বুলি লিখা হৈছিল। শুদ্ধ মাধ্য উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৫ঃ অধোলিখিত বণ্টনটোৰ মাধ্য, মধ্যমা, বহুলক নিৰ্ণয় কৰক।

শ্ৰেণী অন্তৰাল	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
বাৰংবাৰতা	3	10	17	7	6

*** ***** ***

অধ্যায় ৮ ঃ প্রসাৰৰ মাপ (MEASURES OF DISPERSION)

অধ্যায় গাঁথনি

৮.১ উদ্দেশ্য

৮.২ পৰিচয়

৮.৩ প্রসাৰৰ ধাৰণা

- ৮.৩.১ পৰিসৰ
- ৮.৩.২ চতুর্থক বিচলন
- ৮.৩.৩ মাধ্য বিচলন
- ৮.৩.৪ প্রামাণিক বিচলন
- ৮.৩.৫ বিচৰণ গুণাংক

৮.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৮.৫ অধিক জানিবলৈ

৮.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৮.৭ আৰ্হি প্রশ্ন

৮.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- প্রসাৰৰ ধাৰণা আয়ত্ত কৰিব পাৰিব
- পৰিসৰৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- চতুর্থক বিচলন সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- মাধ্য বিচলনৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- প্রামাণিক বিচলনৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- বিচৰণ গুণাংক সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

৮.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

প্রসাৰ (dispersion) হ'ল তথ্য কেনেদৰে সিঁচৰতি হৈ আছে তাৰ পৰিমাণ। এটা বণ্টনৰ মানবোৰ কেনেদৰে সিঁচৰতি বা প্রসাৰ হৈ থাকে, তাৰ নির্দিষ্ট তথ্য প্রসাৰৰ মাপৰ সহায়ত পোৱা যায়। পৰিসৰ (range), চতুর্থক বিচলন (quartile deviation), মাধ্য বিচলন (mean deviation), প্রামাণিক বিচলন (standard deviation) হ'ল প্রসাৰৰ মাপ (measures of dispersion)। এই অধ্যায়ত সেইবোৰৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব।

৮.৩ প্রসাৰৰ ধাৰণা (CONCEPT OF DISPERSION)

তলত দুটা পর্যবেক্ষণৰ সংহতি লোৱা হ'ল ঃ

A. 25, 26, 27, 28, 29

B. 3, 7, 13, 50, 60

A আৰু B – প্রত্যেকেই পাঁচটাকৈ পর্যবেক্ষণ আছে। প্রত্যেক ক্ষেত্রতেই মাধ্য 27। কিন্তু B ৰ পর্যক্ষেণবোৰতকৈ A ৰ পর্যবেক্ষণবোৰ বেছি কেন্দ্রীভূত। যদিও মাধ্য একে, সংহতি দুটাৰ গঠন বেলেগ। A ৰ ক্ষেত্রত মাধ্যৰ পৰা সর্বোচ্চ পৰিৱর্তন 4; আনহাতেদি B ৰ ক্ষেত্রত এয়া 35। গতিকে আমি দেখিলোঁ যে কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপে এটা বণ্টনৰ স্পষ্ট ধাৰণা নিদিয়ে। এই মাপবোৰৰ পৰিপূৰক হিচাপে অন্য মাপৰ প্রয়োজন হয়। প্রসাৰ হ'ল এনে এক মাপ।

৮.৩.১ পৰিসৰ (Range)

পর্যবেক্ষণৰ সর্বোচ্চ আৰু সর্বনিম্ন মানৰ মাজৰ পার্থক্যক পৰিসৰ বুলি কোৱা হয়। অর্থাৎ পৰিসৰ =M–m, য'ত M হ'ল সর্বোচ্চ মান আৰু m হ'ল সর্বনিম্ন মান।

উদাহৰণ 1ঃ তলৰ পর্যবেক্ষণবোৰৰ পৰিসৰ নির্ণয় কৰক।

23, 16, 14, 29, 5.6, 27, 13, 59

সমাধান ঃ আমি তথ্যসমূহ ঊর্দ্ধক্রমত লিখোঁ ঃ

13, 14, 16, 23, 27, 29, 56, 59

এই ক্ষেত্রত সর্বোচ্চ মান = 59

সর্বনিম্ন মান = 13

∴ পৰিসৰ = 59 – 13 = 46

টোকা ঃ যদিও পৰিসৰ সহজে উলিয়াব পাৰি, এইটো বিশ্বাসযোগ্য মাপ নহয়। ই সমগ্র তথ্যসমূহৰ ওপৰত নির্ভৰশীল নহয়। ই প্রান্ত মান দুটাৰ ওপৰত নির্ভৰ কৰে। ওপৰৰ উদাহৰণটোত প্রান্ত মান দুটা হ'ল 13, আৰু 59। পৰিসৰ এই দুটাৰ ওপৰত নির্ভৰ কৰে।

পৰিসৰ গুণাংক ঃ পৰিসৰ গুণাংকৰ (Coefficient of range) সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়—

পৰিসৰ গুণাংক $= \frac{M-m}{M+m}$, য'ত M হ'ল সর্বোচ্চ মান আৰু m হ'ল সর্বনিম্ন মান।

উদাহৰণ 2ঃ 1 নম্বৰ উদাহৰণত দিয়া পর্যবেক্ষণসমূহৰ পৰিসৰ গুণাংক নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ এই ক্ষেত্রত M = 59, m = 13

$\therefore$ পৰিসৰ গুণাংক = $\frac{59-13}{59+13}=\frac{46}{72}=\frac{23}{36}$

৮.৩.২ চতুর্থক বিচলন (Quartile Deviation)

তৃতীয় চতুর্থক আৰু প্ৰথম চতুর্থকৰ মাজৰ পার্থক্যক আন্তঃ চতুর্থক পৰিসৰ (interquartile range) বুলি কোৱা হয় আৰু আন্তঃ চতুর্থক পৰিসৰৰ আধাক চতুর্থক বিচলন (quartile deviation, (QD) বুলি কোৱাহয়। অর্থাৎ চতুর্থক বিচলন Q হ'ল

$QD = Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$,

য'ত Q_3 হ'ল তৃতীয় চতুর্থক, আৰু Q_1 হ'ল প্ৰথম চতুর্থক।

চতুর্থক বিচলন গুণাংকৰ (Coefficient of quartile deviation) এনেদৰে দিয়া হয় চতুর্থক বিচলন গুণাংক $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

উদাহৰণ 3ঃ তলৰ তথ্যসমূহৰ চতুর্থক বিচলন নির্ণয় কৰক।

শ্ৰেণী অন্তৰাল (গুণাংক)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ছাত্ৰৰ সংখ্যা	4	6	20	10	7	3

সমাধান ঃ আমি জানো যে $Q_1 = L + = \frac{\frac{N}{4} - c}{f} \times h$,

য'ত L হ'ল প্ৰথম চতুর্থক শ্ৰেণীৰ নিম্ন সীমা

N হ'ল মুঠ বাৰংবাৰতাৰ সংখ্যা

C হ'ল চতুর্থক শ্ৰেণীৰ ঠিক ওপৰৰ শ্ৰেণীৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা (c. f.)

f হ'ল চতুর্থক শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা

h হ'ল শ্ৰেণী অন্তৰালৰ দৈর্ঘ্য

এতিয়া,

শ্ৰেণী অন্তৰাল	ছাত্ৰৰ সংখ্যা (f)	c.f.
0-10	4	4
10-20	6	10
20-30	20	30
40-50	7	47
50-60	3	50

$\therefore$ N = 50, $\frac{N}{4} = \frac{50}{4} = 12.5$

সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা (c.f) 30 ত 12.5 আছে।

∴ প্রথম চতুর্থক শ্রেণী ঃ 20 – 30

L = 20, c = 10, f = 20, h = 10

$$\therefore Q_1 = 20 + \frac{12.5 - 10}{20} \times 10$$

$$= 20 + \frac{2.5}{2} = 20 + 1.25 = 21.25$$

আকৌ, $Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - c}{f} \times h$

$$\frac{3N}{4} = \frac{3 \times 50}{4} = 37.5$$

∴ তৃতীয় চতুর্থক শ্রেণী ঃ 30 – 40

L = 30, c = 30, f = 10 h = 10

$$\therefore Q_3 = 30 + \frac{37.5 - 30}{10} \times 10$$

= 30 + 7.5 = 37.5

$$\therefore \text{চতুর্থক বিচলন} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{37.5 - 21.25}{2}$$

$$= \frac{16.25}{2}$$

= 8.125

টোকা ঃ প্রান্ত মানৰ দ্বাৰা চতুর্থক বিচলন প্রভাৱিত নহয়।



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

প্রশ্ন নং ১ঃ পৰিসৰৰ এটা সুবিধা আৰু এটা অসুবিধা লিখক।

প্রশ্ন নং ২ঃ তলৰ পর্যবেক্ষণবোৰৰ পৰিসৰ আৰু পৰিসৰ গুণাংক নির্ণয় কৰক।

43, 13, 26, 11, 39, 56, 7, 98, 96, 34, 65, 42 .

প্রশ্ন নং ৩ঃ প্রান্ত মানৰ দ্বাৰা চতুর্থক বিচলন প্রভাৱিত হয়নে?

প্রশ্ন নং ৪ঃ অধোলিখিত পর্যবেক্ষণসমূহৰ পৰিসৰ কি?

6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6.

প্রশ্ন নং ৫ঃ তলৰ তথ্যবোৰৰ চতুর্থক বিচলন নির্ণয় কৰক।

শ্রেণী-অন্তৰাল	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
গুণাংক	5	8	15	16	6

৮.৩.৩ মাধ্য বিচলন (Mean Deviation)

মাধ্য, মধ্যমা বা বহুলকৰ পৰা সাংখ্যিক বিচলনৰ মাধ্যক মাধ্য বিচলন (Mean deviation) বুলি কোৱা হয়।

অসংঘৱদ্ধ তথ্যৰ বাবে মাধ্য বিচলন (Mean deviation for ungrouped data)

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ এই n টা পর্যবেক্ষণ।

ধৰা হ'ল বণ্টনটোৰ $\bar{x}$ মাধ্য, আৰু M মধ্যমা।

(A) মাধ্য সাপেক্ষে মাধ্য বিচলনক MD ($\bar{x}$) এৰে বুজোৱা হয় আৰু ই হ'ল

$$MD(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

(B) মধ্যমা সাপেক্ষে মাধ্য বিচলনক MD(M) এৰে বুজোৱা হয় আৰু ই হ'ল

$$MD(M) = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - M|}{n}$$

উদাহৰণ 4ঃ (a) মাধ্য সাপেক্ষে, (b) মধ্যমা সাপেক্ষে তলৰ পর্যবেক্ষণবোৰৰ মাধ্য বিচলন নির্ণয় কৰক।

4, 5, 7, 8, 9, 13, 16, 18

সমাধান ঃ (a) $\bar{x} = \frac{4+5+7+8+9+13+16+18}{8} = \frac{80}{8} = 10$

$\therefore$ $(x_i - \bar{x})$ ৰ মানবোৰ হ'ল –6, –5, –3, –2, –1, 3, 6, 8.

$\therefore$ $|x_i - \bar{x}|$ ৰ মানবোৰ হ'ল 6, 5, 3, 2, 1, 3, 6, 8.

$$\therefore MD(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{8} |x_i - \bar{x}|}{8}$$

(b) পর্যবেক্ষণবোৰ ঊর্ধ্বক্রমত লিখা হ'ল

4, 5, 7, 8, 9, 13, 16, 18.

মুঠতে 8 টা পর্যবেক্ষণ আছে।

মাধ্য $M = \frac{1}{2}$ ($\frac{8}{2}$তম পর্যবেক্ষণ + $\left(\frac{8}{2}+1\right)$ তম পর্যবেক্ষণ)

$= \frac{1}{2}$(4 তম পর্যবেক্ষণ + 5 তম পর্যবেক্ষণ)

$= \frac{1}{2} \times (8+9) = \frac{17}{2} = 8.5$

$\therefore$ $|x_i - M|$ অৰ মানবোৰ হ'ল

–4.5, –3.5, –1.5, –0.5, 0.5, 4.5, 7.5, 9.5

$\therefore$ $(x_i - M)$ অৰ মানবোৰ হ'ল

4.5, 3.5, 1.5, 0.5, 0.5, 4.5, 7.5, 9.5

$$\therefore MD(M) = \frac{\sum_{i=1}^{8} |x_i - M|}{8}$$

$$= \frac{4.5+3.5+1.5+0.5+0.5+4.5+7.5+9.5}{8}$$

$$= \frac{32}{2} = 4$$

বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ বাবে মাধ্য বিচলন (Mean deviation for discrete frequency distribution)

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ — এই n টা পর্যবেক্ষণৰ বাৰংবাৰতা ক্রমে $f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots, f_n$ ।

(A) মাধ্য সাপেক্ষে মাধ্য বিচলনক $MD(\bar{x})$ এৰে বুজোৱা হয়, আৰু ই হ'ল

$$MD(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i}, \quad \text{য'ত}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}, \quad N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

(B) মধ্যমা সাপেক্ষে মাধ্য বিচলনক MD (M), এৰে বুজোৱা হয়, আৰু ই হ'ল

$$MD(M) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - M|}{N}$$

উদাহৰণ 5ঃ (a) মাধ্য সাপেক্ষে, (b) মধ্যমা সাপেক্ষে তলৰ বণ্টনটোৰ মাধ্য বিচলন নির্ণয় কৰক।

x_i	6	12	18	24	30	86
f_i	5	4	11	6	4	6

সমাধান ঃ

(a)

x_i	f_i	f_ix_i	$x_i-\bar{x}$	$\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	$f_i\lvert x_i-\bar{x}\rvert$
6	5	30	–15	15	75
12	4	48	–9	9	36
18	11	198	–3	3	33
24	6	144	3	3	18
30	4	120	-	9	36
36	6	216	15	15	90

$$N=\sum_{i=1}^{6} f_i=36,\ \sum_{i=1}^{6} f_ix_i=756$$

$$\therefore\ \bar{x}=\frac{\Sigma f_ix_i}{N}=\frac{756}{36}=21$$

$$\therefore\ MD(\bar{x})=\frac{\Sigma f_i\,|\,x_i-\bar{x}\,|}{N}=\frac{288}{36}=8$$

(B)

x_i	f_i	cf	x_i-M	$(x_i$-M)	$f_i\lvert x_i$-M$\rvert$
6	5	5	–12	12	60
12	4	9	–6	6	24
18	11	20	0	0	0
24	6	26	6	6	36
30	4	30	12	12	48
36	6	35	18	18	104

N = 36, এটা যুগ্ম সংখ্যা

$\therefore$ মাধ্য M = $\frac{1}{2}$ [$\frac{36}{2}$তম পর্যবেক্ষণ + $\left(\frac{36}{2}+1\right)$তম পর্যবেক্ষণ]

= $\frac{1}{2}$ [18-তম পর্যবেক্ষণ +19-তম পর্যবেক্ষণ]

$$=\frac{1}{2}(18+18)=18$$

$$\therefore\ MD(M)=\frac{\sum_{i=1}^{6} f_i\,|\,x_i-M\,|}{N}=\frac{272}{36}=7.5$$

অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ বাবে মাধ্য বিচলন (Mean deviation for continuous frequency distribution)

(A) মাধ্য সাপেক্ষে মাধ্য বিচলনক MD ($\bar{x}$), এৰে বুজোৱা হয় আৰু ই হ'ল

$$MD(\bar{x}) = \frac{\Sigma f_i \mid x_i - \bar{x} \mid}{N}, \quad \text{য'ত } N = \Sigma f_i$$

(B) মধ্যমা সাপেক্ষে মাধ্য বিচলনক MD (M), এৰে বুজোৱা হয় আৰু ই হ'ল

$$MD(M) = \frac{\Sigma f_i \mid x_i - M \mid}{N}$$

উদাহৰণ 6ঃ তলৰ বণ্টনটোৰ বাবে মাধ্য সাপেক্ষে মাধ্য বিচলন নির্ণয় কৰক।

শ্রেণী-অন্তৰাল (গুণাংক)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
বাৰংবাৰতা (ছাত্রৰ সংখ্যা)	6	8	14	16	4	2

সমাধান ঃ

শ্রেণী-অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা (f_i)	মধ্যবিন্দু (x_i)	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
0–10	6	5	30	–22	22	132
10–20	8	15	120	–12	12	96
20–30	14	25	350	–2	2	28
30–40	16	35	560	8	8	128
40–50	4	45	180	18	18	72
50–60	2	55	110	28	28	56

$$N = \Sigma f_i = 50, \quad \Sigma f_i x_i = 1350$$

$$\therefore \ x = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} = \frac{1350}{50} = 27$$

$$MD(\bar{x}) = \frac{\Sigma f_i \mid x_i - \bar{x} \mid}{N}$$

$$= \frac{512}{50} = 10.24$$

উদাহৰণ 7ঃ তলৰ বণ্টনটোৰ বাবে মধ্যমা সাপেক্ষে মাধ্য বিচলন নির্ণয় কৰক।

শ্রেণী-অন্তৰাল	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
বাৰংবাৰতা	5	10	20	5	10

সমাধান ঃ

শ্রেণী-অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা (f_i)	মধ্যন্দিু (x_i)	c.f.	$\lvert x_i - M \rvert$	$f_i \lvert x_i - M \rvert$
0–10	5	5	5	20	100
10–20	10	15	15	10	100
20–30	20	25	35	0	0
30–40	5	35	40	10	50
40–50	10	45	50	20	200

ইয়াত $N = \Sigma f_i = 50$ $\therefore \frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$

25 অতকৈ ঠিক ডাঙৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা হ'ল 35 আৰু অনুৰূপ শ্ৰেণী-অন্তৰাল 20–30।

$\therefore$ মধ্যমা অন্তৰাল হ'ল 20–30

এতিয়া মধ্যমা = $M = L + \frac{\frac{N}{2} - c}{f} \times h$

ইয়াত L = 20, $\frac{N}{2} = 25$ c = 15, f = 20, h = 10

$\therefore M = 20 + \frac{25-15}{20} \times 10 \quad = 20 + \frac{10}{20} \times 10 = 20 + 5 = 25$

$\therefore MD(M) = \frac{\Sigma f_i \mid x_i - M \mid}{N} = \frac{450}{50} = 9$



অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

প্ৰশ্ন নং ১ঃ তলৰ পৰ্যবেক্ষণবোৰৰ বাবে মাধ্য সাপেক্ষে মাধ্য বিচলন নিৰ্ণয় কৰক।

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

প্ৰশ্ন নং ২ঃ তলৰ পৰ্যবেক্ষণবোৰৰ বাবে মধ্যমা সাপেক্ষে মাধ্য বিচলন নিৰ্ণয় কৰক।

2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 14

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ তলৰ বণ্টনটোৰ বাবে (a) মাধ্য সাপেক্ষে, (b) মধ্যমা সাপেক্ষে মাধ্য বিচলন নিৰ্ণয় কৰক।

x_i	5	7	9	10	12	15
f_i	8	6	2	2	2	6

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ 2, 4, 6, k, 8 আৰু 15 অৰ মাধ্য 7।

(a) মধ্যমা সাপেক্ষে, (b) মধ্যমা সাপেক্ষে মাধ্য বিচলন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ তলৰ বণ্টনটোৰ মাধ্য সাপেক্ষে মাধ্য বিচলন নিৰ্ণয় কৰক।

শ্ৰেণী-অন্তৰাল	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
বাৰংবাৰতা	5	10	20	5	10

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ তলৰ বণ্টটোৰ মধ্যমা সপেক্ষে মাধ্য বিচলন নিৰ্ণয় কৰক।

শ্ৰেণী-অন্তৰাল	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
বাৰংবাৰতা	5	8	15	16	6

৮.৩.৪ প্ৰামাণিক বিচলন (Standard Deviation)

(A) অসংঘৱদ্ধ তথ্যৰ বাবে প্ৰামাণিক বিচলন (Standard deviation for ungrouped data)

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$– এই n টা পৰ্যবেক্ষণ। ধৰা হ'ল $\bar{x}$ মাধ্য।

প্ৰামাণিক বিচলনক (Standard deviation, SD), σ ৰে (গ্ৰিক ভাষাৰ আখৰ ছিগমা, সৰু ফলাৰ) বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2}$$

প্ৰামাণিক বিচলনৰ বৰ্গক প্ৰসৰণ (variance) বুলি কোৱা হয়।

তলৰ দেখুওৱাৰ দৰে σ ৰ সূত্ৰটোক সৰলীকৃত কৰিব পাৰি।

$$\text{প্ৰসৰণ } = \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(xi - \bar{x})^2$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left({x_i}^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - \frac{2\bar{x}}{n}\Sigma x_i + \frac{1}{n}\Sigma\bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - 2\bar{x}\,\bar{x} + \frac{1}{n}n\bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - 2\bar{x}^{\,2} + \bar{x}^2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2}{n} - \bar{x}^{\,2}$$

গতিকে, $SD = \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\bar{x_i}^2}{n} - \bar{x}^2}$

$$\text{প্ৰসৰণ } = \sigma^2 = \frac{\Sigma\bar{x_i}^2}{n} - \bar{x}^2$$

উদাহৰণ ৪ঃ প্ৰথম পাঁচটা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ SD নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ প্ৰথম পাঁচটা স্বাভাৱিক সংখ্যা হ'ল 1, 2, 3, 4, 5.

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\therefore\ \bar{x}^2 = 3^2 = 9$$

$$\frac{\Sigma x_i^2}{n} = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5} = \frac{55}{5} = 11$$

$$\therefore \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \bar{x}^2 = 11 - 9 = 2$$

$$\therefore SD = \sigma = \sqrt{2}$$

উদাহৰণ 9ঃ a, 3, 6, 11 পর্যবেক্ষণকেইটাৰ প্রামাণিক বিচলন 3.5। a নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো $\bar{x} = \frac{a+3+6+11}{4} = \frac{a+20}{4}$

$$\frac{\Sigma x_i^2}{n} = \frac{a^2+3^2+6^2+11^2}{4} = \frac{a^2+9+36+121}{4} = \frac{a^2+166}{4}$$

এতিয়া $\sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^2}{n} - \bar{x}^2$

বা, $(3.5)^2 = \frac{a^2+166}{4} - \frac{(a^2+20)^2}{4}$

বা, $\frac{49}{4} = \frac{4(a^2+166)-(a^2+40a+400)}{16}$

বা, $49 = \frac{3a^2-40a+264}{4}$

বা, $3a^2 - 40a + 264 = 196$

বা, $3a^2 - 40a + 68 = 0$

বা, $3a^2 - 6a - 34a + 68 = 0$

বা, $3a(a-2) - 34(a-2) = 0$

বা, $(a-2)(3a-34) = 0$

$\therefore a - 2 = 0$ বা $3a - 34 = 0$

$\therefore a = 2$ বা $a = \frac{34}{3}$

দুটা ধর্ম (Two properties)

ধর্ম ঃ যদি $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ পর্যবেক্ষণকেইটাৰ প্রতিটোকে এটা অশূন্য ধ্রুৱক k ৰ দ্বাৰা বঢ়োৱা হয়, প্রামাণিক বিচলন আৰু প্রসৰণ অপৰিৱর্তিত হৈ থাকে।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল পর্যবেক্ষণকেইটা $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$\therefore \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

$$\therefore SD = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

এতিয়া নতুন পর্যবেক্ষণকেইটা হ'ল

$y_1 = x_1 + k,\ y_2 = x_2 + k,\ \ldots\ldots,\ y_n = x_n + k$

$\therefore$ নতুন মাধ্য $\quad \bar{y} = \dfrac{(x_1 + k) + (x_2 + k) + \ldots + (x_n + k)}{n}$

$$= \frac{(x_1 + n_2 + \ldots + x_n) + (k + k + \ldots + k)}{n}$$

$$= \frac{x_1 + n_2 + \ldots + x_n}{n} + \frac{nk}{n}$$

$$= \bar{x} + k$$

এতিয়া নতুন $SD = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - y)^2}$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + k - \bar{x} - k)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

= পুৰণি SD.

দেখা গ'ল যে প্রামাণিক বিচলন অপৰিৱর্তিত হৈ থাকে।

ধর্ম ঃ যদি $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ পর্যবেক্ষণকেইটাৰ প্রতিটোকে এটা অশূন্য ধ্রুৱক k ৰে পূৰণ কৰা হয়, তেনেহ'লে প্রামাণিক বিচলনকো সেই একেটা ধ্রুৱক k ৰে পূৰণ কৰিব লাগিব।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল পর্যবেক্ষণকেইটা $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$.

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

$$\therefore\ SD = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

এতিয়া, নতুন পর্যবেক্ষণকেইটা হ'ল

$y_1 = kx_1,\ y_2 = kx_2,\ \ldots\ldots,\ y_n = kx_n$

$\therefore$ নতুন মাধ্য $\quad \bar{y} = \dfrac{kx_1 + kx_2 + \ldots + kx_n}{n}$

$$= \frac{k(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n}$$

$$= k\,\bar{x}$$

এতিয়া, নতুন $SD = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(k\,x_i - k\,\bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}k^2\,(x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{k^2\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$= k\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

= k (পুৰণি SD)

টোকা ঃ যদি $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ পর্যবেক্ষণকেইটাৰ প্রতিটোকে এটা অশূন্য ধ্রুৱক k ৰে পূৰণ কৰা হয়, তেনেহ'লে প্রসৰণক k^2 এৰে পূৰণ কৰিব লাগিব।

(B) বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ বাবে প্রামাণিক বিচলন (Standard deviation for discrete frequency distribution)

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ পর্যবেক্ষণকেইটাৰ প্রত্যেকৰে বাৰংবাৰতা ক্রমে $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$ ।

তেনেহ'লে প্রামাণিক বিচলন SD ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$$SD = \sigma = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2, \qquad \text{য'ত } N = \Sigma f$$

উদাহৰণ 10ঃ তলৰ বণ্টনটোৰ বাবে প্রামাণিক বিচলন নির্ণয় কৰক।

x_i	5	15	25	35	45
f_i	5	4	6	3	2

সমাধান ঃ

x_i	f_i	f_ix_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
5	5	25	–16.5	272.25	136.25
15	4	60	–6.5	42.25	169
25	6	150	3.5	12.25	73.5
35	3	105	13.5	182.25	546.75
45	2	90	23.5	552.25	1104.5

এতিয়া $N = \Sigma f_i = 20,\ \Sigma f_i x_i = 430$

$$\therefore \bar{x} = \frac{430}{20} = 21.5$$

$$\therefore \Sigma f_i(x_i - \bar{x})^2 = 3255$$

$$\therefore SD = \sqrt{\frac{3255}{20}} = \sqrt{162.75}$$

(C) অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ বাবে প্রামাণিক বিচলন (Statdard deviation for continuous frequency distribution)

অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ বাবে প্রামাণিক বিচলন এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হয়।

$$SD = \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2}$$

য'ত $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$, x_i হ'ল i -তম শ্রেণীৰ মধ্য বিন্দু।

উদাহৰণ 11ঃ তলৰ বণ্টনটোৰ বাবে প্রামাণিক বিচলন নির্ণয় কৰক।

শ্রেণী-অন্তৰাল	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
বাৰংবাৰতা	5	10	20	5	10

সমাধান ঃ

শ্রেণী-অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা (f_i)	মধ্যবিন্দু (x_i)	f_ix_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
0–10	5	5	25	–21	441	2205
10–20	10	15	150	–11	121	1210
20–30	20	25	500	–1	1	20
30–40	5	35	175	9	81	405
40–50	10	45	450	19	361	3610

এতিয়া, $N = \Sigma f_i = 50,\ \Sigma f_i x_i = 1300$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} = \frac{1300}{50} = 26$$

এতিয়া, $\Sigma f_i(x_i - \bar{x})^2 = 7450$

$$\therefore SD = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{7450}{50}} = \sqrt{149}$$

টোকা ঃ প্রসাৰৰ মাপসমূহৰ ভিতৰত প্রামাণিক বিচলনকে উত্তম বুলি কোৱা হয়। ই বহুলভাৱে ব্যৱহৃত হয়।

চতুর্থক বিচলন, মাধ্য বিচলন আৰু প্রামাণিক বিচলনৰ মাজত এটা আনুভৱিক সম্বন্ধ (empirical relation) আছে। সেইটো হ'ল

6 QD = 5 MD = 4 SD



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 3

প্রশ্ন নং ১ঃ 5 টা পর্যবেক্ষণৰ প্রামাণিক বিচলন 13.25। যদি প্রতিটো পর্যবেক্ষণ 3ৰে বঢ়োৱা হয়, নতুন প্রামাণিক বিচলন কিমান?

প্রশ্ন নং ২ঃ 7 টা পর্যবেক্ষণৰ প্রামাণিক বিচলন 15.75। যদি প্রতিটো পর্যবেক্ষণক 2 ৰে পূৰণ কৰা হয়, তেনেহ'লে নতুন প্রামাণিক বিচলন কিমান?

প্রশ্ন নং ৩ঃ 5 টা পর্যবেক্ষণৰ প্রামাণিক বিচলন 27.45। (a) চতুর্থক বিচলন, (b) মাধ্য বিচলন কিমান?

প্রশ্ন নং ৪ঃ তলৰ পর্যবেক্ষণকেইটাৰ প্রামাণিক বিচলন নির্ণয় কৰক—

13, 16, 17, 22

প্রশ্ন নং ৫ঃ প্রথম n টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ প্রামাণিক বিচলন নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ 1, 2, a, 6 আৰু b পর্যবেক্ষণকেইটাৰ মাধ্য, আৰু প্রসৰণ ক্রমে 4.4 আৰু 8.24। a আৰু b ৰ মান নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৭ঃ তলৰ বণ্টনটোৰ বাবে প্রামাণিক বিচলন নির্ণয় কৰক।

x_i	6	10	14	18	20
f_i	2	4	7	12	5

প্রশ্ন নং ৮ঃ তলৰ বণ্টনটো বাবে প্রামাণিক বিচলন নির্ণয় কৰক।

শ্রেণী-অন্তৰাল	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
বাৰংবাৰতা	2	4	7	12	5

৮.৩.৫ বিচৰণ গুণাংক (Coefficient of Variation)

ধৰা হ'ল এটা বণ্টনৰ মাধ্য আৰু প্রামাণিক বিচলন ক্রমে $\bar{x}$ আৰু α । বিচৰণ গুণাংকৰ (coefficient of variation, CV) সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100, \quad \bar{x} \neq 0$$

পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানী কার্ল পিয়াৰছনে (Karl Pearson) এই মাপটোৰ অৱতাৰণা কৰে।

টোকা 1ঃ বিচৰণ গুণাংক (CV) এটা এককবিহীন (unitless) প্রসাৰৰ মাপ।

2. দুটা বণ্টনৰ পৰিৱর্তন তুলনা কৰিবলৈ CV য়েই সর্বোত্তম মাপ।

3. যিটো বণ্টনৰ CV কম, সেইটো অধিক সংগত (consistent) বুলি বিবেচনা কৰা হয় (পৰিৱর্তন কম)।

4. যিটো বণ্টনৰ CV বেছি, সেইটো কম সংগত বুলি বিবেচনা কৰা হয় (পৰিৱর্তন বেছি)।

উদাহৰণ 12ঃ প্রাপ্ত বয়স্কৰ (বয়স 30 বছৰ) আৰু শিশুৰ (বয়স 10 মাহ) উচ্চতাৰ মাধ্য আৰু প্রামাণিক বিচলন (SD) তলত দিয়া হ'ল।

	প্রাপ্তবয়স্ক	শিশু
মাধ্য	160 cm	60 cm
SD	10 cm	5 cm

দেখুওৱাক যে প্রাপ্তবয়স্কতকৈ শিশুৰ উচ্চতাৰ পৰিৱর্তন বেছি।

সমাধান ঃ

$$\text{CV (প্রাপ্তবয়স্ক)} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{10}{160} \times 100 = 6.25$$

$$\text{CV (শিশু)} \quad \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{5}{60} \times 100 = 8.33$$

এতিয়া CV (শিশু) > CV (প্রাপ্তবয়স্ক)

∴ প্রাপ্তবয়স্কতকৈ শিশুৰ উচ্চতাৰ পৰিৱর্তন বেছি।



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 4

প্রশ্ন নং ১ঃ 25 জন ল'ৰাৰ মাধ্য ৰক্তচাপ 120 mm Hg, আৰু প্রামাণিক বিচলন (SD)10 mm Hg। সেই একেখিনি ল'ৰাৰ মাধ্য উচ্চতা আৰু প্রামাণিক বিচলন ক্রমে 160 cm আৰু 5 cm। দেখুওৱাক যে উচ্চতাতকৈ ৰক্তচাপ বেছি পৰিৱর্তনশীল।



৮.৪ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- এটা বণ্টনৰ মানবোৰ কেনেদৰে সিঁচৰতি বা প্রসাৰ হৈ থাকে, তাৰ নির্দিষ্ট তথ্য প্রসাৰৰ মাপৰ সহায়ত পোৱা যায়।
- পৰিসৰ, চতুর্থক বিচলন, মাধ্য বিচলন, প্রামাণিক বিচলন হ'ল প্রসাৰৰ মাপ।
- পর্যবেক্ষণৰ সর্বোচ্চ আৰু সর্বনিম্ন মানৰ মাজৰ পার্থক্যক পৰিসৰ বুলি কোৱা হয়।
- তৃতীয় চতুর্থক আৰু প্রথম চতুর্থকৰ মাজৰ পার্থক্যক আন্তঃ চতুর্থক পৰিসৰ বুলি কোৱা হয় আৰু আন্তঃচতুর্থক পৰিসৰৰ আধাক চতুর্থক বিচলন বুলি কোৱা হয়। প্রান্ত মানৰ দ্বাৰা চতুর্থক বিচলন প্রভাৱিত নহয়।
- মাধ্য, মধ্যমা বা বহুলকৰণৰ পৰা সাংখ্যিক বিচলনৰ মাধ্যমক মাধ্য বিচলন বুলি কোৱা হয়।

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ পর্যবেক্ষণবোৰৰ প্রামাণিক বিচলনক (SD) σ ৰে (গ্রিক ভাষাৰ আখৰ ছিগমা, সৰু ফলাৰ) বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$$SD = \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ পর্যবেক্ষণকেইটাৰ প্রত্যেকৰে বাৰংবাৰতা ক্রমে $f_1, f_2, \ldots, f_n$। এই ক্ষেত্রত প্রামাণিক বিচলন SDৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$$SD = \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}, \qquad \text{য'ত } N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

- প্রামাণিক বিচলনৰ বর্গক প্রসৰণ বুলি কোৱা হয়।
- বিচৰণ গুণাংকৰ (CV) সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়। $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100, \quad \bar{x} \neq 0$

য'ত σ হ'ল প্রামাণিক বিচলন আৰু $\bar{x}$ হ'ল বণ্টনটোৰ মাধ্য।

- বিচৰণ গুণাংক এটা এককবিহীন প্রসাৰৰ মাপ।
- যিটো বণ্টনৰ বিচৰণ গুণাংক কম, সেইটো অধিক সংগত বুলি বিবেচনা কৰা হয়।
- যিটো বণ্টনৰ বিচৰণ গুণাংক বেছি, সেইটো কম সংগত বুলি বিবেচনা কৰা হয়।



৮.৫ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

1) Statistical Methods by N.G. Das, McGraw Hill Education (India) Private Ltd. 2009
2) Probability and Statistics by G.Shanker Rao, University Press (India) private Ltd. 2011
3) Introduction to probability and Statistics by Seymour Lipschutz, John J.Schiller, Tata McGraw Hill Education private Ltd. 2005
4) Probability, Random Process, Queueing theory and Statistics by Dr. S.Rajasekaran, Prof.A.Chandrasekaran & G.Kavitha, Dhanam Publications, Chennai-60042
5) Probability and Statistics by G.Balaji, G.Balaji Publishers, Chennai-33



৮.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ সুবিধা ঃ পৰিসৰ সহজে গণনা কৰিব পাৰি

অসুবিধা ঃ ই বিশ্বাসযোগ্য মাপ নহয়। ই সমগ্র তথ্যসমূহৰ ওপৰত নির্ভৰশীল নহয়। ই প্রান্ত মান দুটাৰ ওপৰত নির্ভৰ কৰে।

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ আমি তথ্যবোৰক ঊর্ধ্বক্রমত সজাওঁ

7, 11, 13, 26, 34, 39, 42, 56, 65, 96, 98.

এই ক্ষেত্রত সর্বোচ্চ মান = 98

সর্বনিম্ন মান = 7

∴ পৰিসৰ = 98 – 7 = 91

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ প্রান্ত মানৰ দ্বাৰা চতুর্থক বিচলন প্রভাৱিত নহয়।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এই ক্ষেত্রত সকলোবোৰ পর্যবেক্ষণেই সমান।

সর্বোচ্চ মান = সর্বনিম্ন মান = 6.

∴ পৰিসৰ = 6 – 6 = 0

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ

শ্রেণী-অন্তৰাল	ছাত্রৰ সংখ্যা (f)	c.f.
0-10	5	5
10-20	8	13
20-30	15	28
30-40	16	44
40-50	6	50

এতিয়া, N = 50, $\frac{N}{4} = \frac{50}{4} = 12.5$

∴ প্রথম চতুর্থক শ্রেণী ঃ 10–20

∴ L = 10, c = 5, f = 8, h = 10

এতিয়া, $Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - c}{f} \times h$

$= 10 + \frac{12.5 - 5}{8} \times 10$

= 10 + 9.375 = 19.375

এতিয়া, $\frac{3N}{4} = \frac{3 \times 50}{4} = 37.5$

∴ তৃতীয় চতুর্থক শ্রেণী ঃ 30–40

L = 30, c = 28, f = 16, h = 10

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - c}{f} \times h$$

$$= 30 + \frac{37.5 - 28}{16} \times 10$$

= 30 + 5.9375 = 35.9375

∴ চতুর্থক বিচলন $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{35.9375 - 19.375}{2}$$

$$= \frac{16.5625}{2} = 8.28125$$

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = \frac{28}{7} = 4$

$(x_i - \bar{x})$ ৰ মানবোৰ হ'ল

–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3

$|x_i - \bar{x}|$ ৰ মানবোৰ হ'ল

3, 2, 1, 0, 1, 2, 3

$$\therefore MD(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{7} |x_i - \bar{x}|}{7} = \frac{3+2+1+0+1+2+3}{7}$$

$$= \frac{12}{7}$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ পৰ্যবেক্ষণবোৰ ঊৰ্ধ্বক্ৰমত আছে

2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 14

মুঠতে 9 টা পৰ্যবেক্ষণ আছে

মধ্যমা $M = \left(\frac{9+1}{2}\right)$ তম পৰ্যবেক্ষণ

= 5-তম পৰ্যবেক্ষণ = 8

$(x_i - M)$ অৰ মানবোৰ হ'ল –6, –5, –4, –1, 0, 1, 2, 3, 6

$|x_i - M|$ অৰ মানবোৰ হ'ল 6, 5, 4, 1, 0, 1, 2, 3, 6

$$\therefore MD(M) = \frac{\Sigma |x_i - M|}{9}$$

$$= \frac{6+5+4+1+0+1+2+3+6}{9}$$

$$= \frac{28}{9}$$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ আমি পালো

(a)

x_i	f_i	f_ix_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i\lvert x_i - \bar{x} \rvert$
5	8	40	–4	4	32
7	6	42	–2	2	12
9	2	18	0	0	0
10	2	20	1	1	2
12	2	24	3	3	6
15	6	90	6	6	36

$N = \Sigma f_i = 26, \ \Sigma f_i x_i = 234 \qquad \therefore \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} = \frac{234}{26} = 9$

$$\therefore MD(\bar{x}) = \frac{\Sigma f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{N} = \frac{88}{26} = 3.38$$

(b)

x_i	f_i	cf	$x_i - M$	$\lvert x_i - M \rvert$	$f_i\lvert x_i - M \rvert$
5	8	8	–2	2	16
7	6	14	0	0	0
9	2	16	2	2	4
10	2	18	3	3	6
12	2	20	5	5	10
15	6	26	8	8	48

N = 26, এটা যুগ্ম সংখ্যা

$\therefore$ মধ্যমা M= $\frac{1}{2}$ [$\frac{26}{2}$ -তম পৰ্যবেক্ষণ + $\left(\frac{26}{2}+1\right)$তম পৰ্যবেক্ষণ]

= $\frac{1}{2}$ [13-তম পৰ্যবেক্ষণ + 14-তম পৰ্যবেক্ষণ]

$$= \frac{1}{2}(7+7) = 7$$

$$MD(M) = \frac{\Sigma f_i \lvert x_i - M \rvert}{N} = \frac{84}{20} = 3.23$$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ আমি পালোঁ

$$7 = \frac{2+4+6+k+8+15}{6}$$

বা, $7 = \frac{35+k}{6}$ বা 42 = 35 + k, or k = 7

∴ পর্যবেক্ষণবোৰ হ'ল 2, 4, 6, 7, 8, 15.

(a) আমি জানো $\bar{x} = 7$

∴ $(x_i - \bar{x})$ ৰ মানবোৰ হ'ল

–5, –3, –1, 0, 1, 8

∴ $|x_i - \bar{x}|$ ৰ মানবোৰ হ'ল

5, 3, 1, 0, 1, 8

$$\therefore MD(\bar{x}) = \frac{\Sigma|x_i - \bar{x}|}{6} = \frac{5+3+1+0+1+8}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

(b) পর্যবেক্ষণবোৰ ঊৰ্ধ্বক্রমত আছে ঃ

2, 4, 6, 7, 8, 15

মুঠতে 6 টা পর্যবেক্ষণ আছে।

মধ্যমা M = $\frac{1}{2}$ [$\frac{6}{2}$ -তম পর্যবেক্ষণ + $\left(\frac{6}{2}+1\right)$-তম পর্যবেক্ষণ]

= $\frac{1}{2}$ (তৃতীয় পর্যবেক্ষণ + চতুর্থ পর্যবেক্ষণ)

$$= \frac{1}{2} \times (6+7) = \frac{13}{2} = 6.5$$

(x_i–M) অৰ মানবোৰ হ'ল

–4.5, –2.5, –0.5, 0.5, 1.5, 8.5

∴ $|x_i - M|$ অৰ মানবোৰ হ'ল

4.5, 2.5, 0.5, 0.5, 1.5, 8.5

$$\therefore MD(M) = \frac{\Sigma|x_i - M|}{6} = \frac{4.5+2.5+0.5+0.5+1.5+8.5}{6}$$

$$= \frac{18}{6} = 3$$

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ

শ্রেণী-অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা f_i	মধ্যবিন্দু x_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
0–10	5	5	25	–21	21	105
10–20	10	15	150	–11	11	110
20–30	20	25	500	–1	1	20
30–40	5	35	175	9	9	45
40–50	10	45	450	19	19	190

এইক্ষেত্রত $N = \sum f_i = 50,$

$$\sum f_i x_i = 1300$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{1300}{50}$$

$$= 26$$

$$\therefore MD(\bar{x}) = \frac{\sum f_i |x_i - x^{-1}|}{N} = \frac{470}{50} = 94$$

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ

শ্রেণী-অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা (f_i)	মধ্যবিন্দু (x_i)	cf	$\|x_i-M\|$	$f_i\|x_i-M\|$
0–10	6	5	5	23	115
10–20	8	15	13	13	104
20–30	15	25	28	3	45
30–40	16	35	44	7	112
40–50	6	45	50	17	102

এই ক্ষেত্রত $N = \Sigma f_i = 50 \quad \therefore \frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$

25 অতকৈ ঠিক ডাঙৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা হ'ল 28, আৰু অনুৰূপ শ্রেণী-অন্তৰাল হ'ল 20–30। $\therefore$ মধ্যমা শ্রেণী ঃ 20–30.

এতিয়া মধ্যমা $M = L + \frac{\frac{N}{2} - c}{f} \times h$

ইয়াত L = 20, $\frac{N}{2} = 25$, c = 13, f = 15, h = 10

$$\therefore \quad M = 20 + \frac{25-13}{15} \times 10 \quad = 20 + \frac{12}{15} \times 10 \quad = 20 + 8 = 28$$

$$\therefore MD(M) = \frac{\Sigma f_i \,|\, x_i - M \,|}{N} = \frac{478}{50} = 9.56$$

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 3

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ আমি জানো যে যদি প্রতিটো পর্যবেক্ষণ এটা ধ্রুৱকেৰে বঢ়োৱা হয়, প্রামাণিক বিচলন অপৰিৱর্তিত হৈ থাকে।

$\therefore$ নতুন প্রামাণিক বিচলন হ'ল 13.25.

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নতুন প্রামাণিক বিচলন = 5 x 15.75 = 78.75

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ আমি জানো যে চতুর্থক বিচলন, মাধ্য বিচলন, আৰু প্রামাণিক বিচলনৰ মাজৰ সম্পর্ক হ'ল 6 QD = 5 MD = 4 SD

ইয়াত SD = 27.45

$\therefore$ 6 QD = 4 x 27.45

বা, QD = $\frac{109.8}{6} = 18.3$

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ আমি জানো যে $\sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^{\ 2}}{N} - \bar{x}^2$

এতিয়া, $\bar{x} = \frac{13+16+17+22}{4} = \frac{68}{4} = 17$

$$\therefore \ \sigma^2 = \frac{13^2+16^2+17^2+22^2}{4} - 17^2$$

$$= \frac{169+256+289+484}{4} - 289$$

$$= \frac{1198}{4} - 289 = 299.5 - 289 = 10.5$$

$$\therefore \ SD = \sigma = \sqrt{10.5}$$

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ আমি জানো যে $\sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^{\ 2}}{N} - \bar{x}^2$

এতিয়া $\bar{x} = \frac{1+2+3+.....+n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$

$$\frac{\Sigma x_i^{\ 2}}{n} = \frac{1^2+2^2+3^2+.....+n^2}{n}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore \ \sigma^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{2(n+1)(2n+1)-3(n+1)^2}{12}$$

$$= \frac{(n+1)[2(2n+1)-3(n+1)]}{12}$$

$$= \frac{(n+1)(4n+2-3n-3)}{12}$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

$$\therefore \ SD = \sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ আমি পালোঁ যে $\frac{1+2+a+6+b}{5}=4.4$

বা, 9 + a + b = 4.5 x 5 = 22

∴ a + b = 22 – 9 = 13 (1)

আকৌ, $\frac{1^2+2^2+a^2+6^2+b^2}{5}=(4.4)^2=8.24$

বা, 1 + 4 + a^2 + 36 + b^2 – 19.36 x 5 = 8.24 x 5

বা, 41 + a^2 + b^2 – 96.8 = 41.2

বা, a^2 + b^2 = 97 (2)

(1) অৰ পৰা, b = 13 – a

∴ (2)ৰ পৰা, a^2 + $(13 – a)^2$ = 97

বা, a^2 + 169 – 26a + a^2 = 97

বা, $2a^2$ – 26a + 72 = 0

বা, a^2 – 13a + 36 = 0

বা, a^2 – 4a – 9a + 36 = 0

বা, a(a–4) – 9(a–4) = 0

বা, (a–4) (a–9) = 0

∴ a = 4, or a = 9

যদি a = 4, b = 13 – 4 = 9

যদি a = 9, b = 13 – 9 = 4

∴ নিৰ্ণেয় পৰ্যবেক্ষণ দুটা 4 আৰু 9।

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ 4

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ CV (ৰক্তচাপ) $=\frac{\sigma}{\bar{x}}\times100$

$=\frac{10}{120}\times100=8.3$ (মোটামুটিভাৱে)

CV (উচ্চতা) $=\frac{\sigma}{\bar{x}}\times100=3.125$

$=\frac{5}{100}\times100=3.125$

CV (ৰক্তচাপ) > CV (উচ্চতা)

∴ উচ্চতাতকৈ ৰক্তচাপ বেছি পৰিৱৰ্তনশীল।



৮.৭ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ এটা শ্ৰেণী-পৰীক্ষাত 5জন ছাত্ৰই এটা বিষয়ত 20 গুণাংকৰ ভিতৰত তলত দেখুওৱাৰ দৰে গুণাংক পালে

A	B	C	D	E
10	12	14	12	18

এই গুণাংকবোৰৰ প্ৰামাণিক বিচলন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ২ঃ (a) মাধ্য সাপেক্ষে, (b) মধ্যমা সাপেক্ষে তলৰ তথ্যবোৰৰ মাধ্য বিচলন নিৰ্ণয় কৰক।

শ্ৰেণী-অন্তৰাল	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
বাৰংবাৰতা	120	201	150	75	25

প্ৰশ্ন ৩ঃ 7 টা পৰ্যবেক্ষণৰ মাধ্য আৰু প্ৰসৰণ ক্ৰমে 8 আৰু 16। যদি 5 টা পৰ্যবেক্ষণ 6, 8, 10, 12, 14; তেনেহ'লে আন দুটা পৰ্যবেক্ষণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ঃ পাঁচখন খেলত A আৰু B ক্ৰিকেটাৰ দুজনৰ স্ক'ৰ এনেধৰণৰ

A :	58	59	60	54	65
B :	82	12	44	08	64

কোনজন ক্ৰিকেটাৰক বেছি সংগত (consistent) বুলি ক'ব পাৰি?

প্ৰশ্ন ৫ঃ পৰ্যবেক্ষণৰ দুটা সংহতিৰ বিচৰণ গুণাংক ক্ৰমে 58 আৰু 69। সিহঁতৰ প্ৰামাণিক বিচলন ক্ৰমে 21.2 আৰু 15.6। সমান্তৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰক।

*** ***** ***

অধ্যায় ৯ ঃ ঘূর্ণক, অপ্রতিসাম্য আৰু ককুদতা (MOMENTS, SKEWNESS AND KURTOSIS)

অধ্যায় গাঁথনি

৯.১ উদ্দেশ্য

৯.২ পৰিচয়

৯.৩ ঘূর্ণক

৯.৩.১ অপৰিণত আৰু কেন্দ্রীয় ঘূর্ণকৰ মাজৰ সম্বন্ধ

৯.৪ অপ্রতিসাম্য

৯.৪.১ অপ্রতিসাম্যৰ মাপ

৯.৫ ককুদতা

৯.৫.১ ককুদতাৰ মাপ

৯.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৯.৭ অধিক জানিবলৈ

৯.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৯.৯ আৰ্হি প্রশ্ন

৯.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- ঘূর্ণক সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- অপৰিণত ঘূর্ণক আৰু কেন্দ্রীয় ঘূর্ণকৰ মাজৰ সম্বন্ধ সম্পর্কে জানিব পাৰিব
- অপ্রতিসাম্য সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- অপ্রতিসাম্যৰ মাপ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- ককুদতাৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- ককুদতাৰ মাপ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

৯.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

বলবিজ্ঞানৰ ঘূর্ণকৰ ধাৰণাৰ পৰা পৰিসংখ্যাবিজ্ঞাৰ ঘূর্ণকৰ ধাৰণা আহিছে। বলবিজ্ঞানত আমি পাইছোঁ যে এটা বল f আৰু লম্ব দূৰত্ব d ৰ পূৰণফল অর্থাৎ fd ক বলটোৰ ঘূর্ণক বুলি কয়। পৰিসংখ্যাবিজ্ঞানত সদৃশ ৰাশি হ'ল f_i, আৰু $x_i - a$। ঘূর্ণক, অপ্রতিসাম্য আৰু ককুদতা,— এই তিনিটা পৰিসংখ্যাজ্ঞানৰ প্রয়োজনীয় ধাৰণা।

৯.৩ ঘূর্ণক (MOMENTS)

ধৰা হ'ল এটা চলক x এ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ মান লয় আৰু ইহঁতৰ বাৰংবাৰতা ক্ৰমে $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ।

যিকোনো বিন্দু a সাপেক্ষে x-অৰ r-তম ঘূর্ণকক (moment) μ'_r এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$\mu'_r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^r, \quad N = \sum_{i=1}^{n} f_i \qquad (1)$$

μ'_r -অক r-তম অপৰিণত ঘূর্ণক (raw moment) বুলি কোৱা হয়।

মাধ্য $\bar{x}$ সাপেক্ষে x- অৰ ঘূর্ণকক μ_r -এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$\mu_r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^r \qquad (2)$$

μ_r -অক r-তম কেন্দ্ৰীয় ঘূর্ণক (central moment) বুলি কোৱা হয়।

টোকা ঃ অসংঘৱদ্ধ তথ্যৰ বাবে অপৰিণত ঘূর্ণক আৰু কেন্দ্ৰীয় ঘূর্ণকৰ সূত্ৰ দুটা ক্ৰমে এনেধৰণৰ

$\mu'_r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^r$ আৰু $\mu_r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^r$

অনুমিতি (Deductions)

(A) (1) অত r = 0 বহুৱাই আমি পাওঁ

$$\mu'_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i, \quad (x_i - a)^0 = 1$$

$$= \frac{1}{N} N = 1$$

(2)ত r = 0 বহুৱাই আমি পাওঁ

$$\mu_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i = \frac{1}{N} N = 1$$

অর্থাৎ, $\mu'_0 = \mu_0 = 1$, অর্থাৎ 0 তম অপৰিণত ঘূর্ণক আৰু কেন্দ্ৰীয় ঘূর্ণক এক।

(B) (1) অত r = 1 বহুৱাই আমি পাওঁ

$$\mu'_1 = \frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i - a)$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma(f_i x_i - f_i a)$$

$$= \frac{1}{N}\left[\Sigma f_i x_i - \Sigma f_i a\right]$$

এতিয়া $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} \Rightarrow \Sigma f_i x_i = N\bar{x}$

$\Sigma f_i a = a\Sigma f_i = aN$

$\therefore \mu_1' = \frac{1}{N}(N\bar{x} - aN) = \bar{x} - a = d$, (ধৰা হ'ল)

দেখা গ'ল যে প্ৰথম অপৰিণত ঘূৰ্ণক $\bar{x} - a$

(2)ত r = 1 বহুৱাই আমি পাওঁ,

$$\mu_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(f_i x_i - f_i\bar{x})$$

$$= \frac{1}{N}\left(\Sigma f_i x_i - \Sigma f_i\bar{x}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left(N\bar{x} - N\bar{x}\right) = 0$$

দেখা গ'ল যে প্ৰথম কেন্দ্ৰীয় ঘূৰ্ণক শূন্য।

(C) (1) অত r = 2 বহুৱাই আমি পাওঁ

$$\mu_2' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - a)^2$$

(2) ত r = 2 বহুৱাই আমি পাওঁ

$$\mu_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2 = \sigma^2$$

দেখা গ'ল যে দ্বিতীয় কেন্দ্ৰীয় ঘূৰ্ণক হ'ল প্ৰসৰণ।

৯.৩.১ অপৰিণত আৰু কেন্দ্ৰীয় ঘূৰ্ণকৰ মাজৰ সম্পৰ্ক (Relation Between Raw and Central Moments)

আমি জানো যে

$\mu_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^r$ য'ত $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

$X_i = x_i - a$, $d = \bar{x} - a$ বহুৱাই আমি পাওঁ

$\therefore X_i - d = (x_i - a) - (\bar{x} - a) = x_i - \bar{x}$

$\therefore \mu_r = \frac{1}{N}\Sigma f_i(X_i - d)^r$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f_i\left(X_i^r - {}^rC_1 X_i^{r-1}d + {}^rC_2 X_i^{r-2}d^2 - {}^rC_3 X_i^{r-3}d^3 + \ldots\ldots + (-1)^r d^r\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left[\Sigma f_i X_i^r - {}^rC_1 d\,\Sigma f_i X_i^{r-1} + {}^rC_2 d^2 \Sigma f_i X_i^{r-2} - {}^rC_3 d^3 \Sigma f_i X_i^{r-3} + \ldots\ldots + (-1)^r d^r \Sigma f_i\right]$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f_i (x_i - a)^r - {}^rC_1 d \frac{1}{N}\Sigma f_i (x_i - a)^{r-1} + {}^rC_2 d^2 \frac{1}{N}\Sigma f_i (x_i - a)^{r-2}$$

$$- {}^rC_3 d^3 \frac{1}{N}\Sigma f_i (x_i - a)^{r-3} + \ldots\ldots + (-1)^r d^r \frac{1}{N}\Sigma f_i$$

$$= \mu'_r - {}^rC_1 d\,\mu'_{r-1} + {}^rC_2 d^2 \mu'_{r-2} - {}^rC_3 d^3 \mu'_{r-3} + \ldots\ldots + (-1)^r d^r$$

$$= \mu'_r - {}^rC_1 \mu'_{r-1}\mu'_1 + {}^rC_2 d^2 \mu'_{r-2}\mu_1'^2 - {}^rC_3 d^3 \mu'_{r-3}\mu_1'^3 + \ldots\ldots + (-1)^r \mu_1'^r \quad (3)$$

অনুমিতি (Deductions)

(3)ত r = 2 বহুৰাই, আমি পাওঁ

$$\mu_2 = \mu_2' - {}^2C_1 \mu'_1 \mu_1' + {}^2C_2 \mu'_0 \mu_1'^2$$

$$= \mu_2' - 2\mu_1'^2 + \mu_1'^2, \quad (\mu'_0 = 1)$$

$$= \mu_2' - \mu_1'^2 \qquad (4)$$

(3)ত r = 3 বহুৰাই, আমি পাওঁ

$$\mu_3 = \mu_3' - {}^3C_1 \mu_2' \mu_1' + {}^3C_2 \mu_1' \mu_1'^2 - {}^3C_3 \mu_0' \mu_1'^3$$

$$= \mu_3' - 3\mu_2' \mu_1' + 3\mu_1'^3 - \mu_1'^3$$

$$= \mu_3' - 3\mu_2' \mu_1' + 2\mu_1'^3 \qquad (5)$$

(3)ত r = 4 বহুৰাই, আমি পাওঁ

$$\mu_4 = \mu_4' - {}^4C_1 \mu_3' \mu_1' + {}^4C_2 \mu_2' \mu_1'^2 - {}^4C_3 \mu_1' \mu_1'^3 + {}^4C_4 \mu_{4-4}' \mu_1'^4$$

$$= \mu_4' - 4\mu_3' \mu_1' + 6\mu_2' \mu_1'^2 - 4\mu_1'^4 + \mu_1'^4$$

$$= \mu_4' - 4\mu_3' \mu_1' + 6\mu_2' \mu_1'^2 - 3\mu_1'^4 \qquad (6)$$

টোকা ঃ (4) অৰ সোঁহাতৰ সহগ দুটা হ'ল 1, –1; আৰু ইহঁতৰ যোগফল 0. (5) অৰ সোঁহাতৰ সহগবোৰ হ'ল 1, –3, 2; আৰু ইহঁতৰ যোগফল 0. (6) অৰ সোঁহাতৰ সহগবোৰ হ'ল 1, –4, 6, –3; আৰু সিহঁতৰ যোগফল 0. এইদৰে (3)ৰ সোঁহাতৰ সহগবোৰৰ যোগফল 0. তলত এইটো দেখুওৱা হৈছে।

$1 - {}^rC_1 + {}^rC_2 - {}^rC_3 + \ldots\ldots + (-1)^r = (1-1)^r = 0$

উদাহৰণ 1: এটা চলকৰ 1 সাপেক্ষে প্ৰথম ঘূর্ণক 5। মাধ্য নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো

$$\mu_1' = \frac{1}{N}\Sigma f_i (x_i - 1), \quad (a = 1)$$

$$= \frac{1}{N}(\Sigma f_i x_i - \Sigma f_i)$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f_i x_i - \frac{1}{N}\Sigma f_i, \quad \left(\frac{\Sigma f_i x_i}{N} = \bar{x},\ \Sigma f_i = N\right)$$

$$= \bar{x} - 1$$

এতিয়া $\bar{x} - 1 = 5 \Rightarrow \bar{x} = 6$ অর্থাৎ মাধ্য = 6

উদাহৰণ 2: এটা চলকৰ 2 সাপেক্ষে প্রথম দুটা ঘূর্ণক ক্রমে 1, আৰু 16 । মাধ্য আৰু প্রসৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে $\mu_1' = \frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i - 2)$

$$\mu_2' = \frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i - 2)^2$$

এতিয়া, $\mu_1' = \frac{1}{N}(\Sigma f_i x_i - 2f_i)$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i}{N} - \frac{2\Sigma f_i}{N}$$

$$= \bar{x} - 2$$

এতিয়া, $\mu_1' = 1,$ (দিয়া আছে)

$$\therefore \bar{x} - 2 = 1$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 3$$

$\therefore$ মাধ্য = 3

এতিয়া, $\mu_2' = \frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i - 2)^2$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i - 3 + 1)^2$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f_i\left((x_i - 3)^2 + 2(x_i - 3) + 1\right)$$

$$= \frac{\Sigma f_i(x_i - 3)^2}{N} + \frac{2\Sigma f_i x_i}{N} - 5\frac{\Sigma f_i}{N}$$

এতিয়া, $\mu_2' = 16$, (দিয়া আছে; আৰু $\mu_2' = \frac{\Sigma f_i(x_i - 3)^2}{N}, (\bar{x} = 3)$

$\therefore 16 = \mu_2 + 2\bar{x} - 5$

বা, $16 = \mu_2 + 2 \times 3 - 5$

$\therefore \mu_2 = 15$

আমি জানো যে দ্বিতীয় কেন্দ্রীয় ঘূর্ণক হ'ল প্রসৰণ।

$\therefore$ প্রসৰণ $= \mu_2 = 15$

সংঘৱদ্ধ বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ বাবে শ্বেপার্ডৰ ঘূর্ণকৰ শুধৰণি (Sheppard's Corrections to moments for grouped frequency distributions)

সংঘৱদ্ধ বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ বাবে ঘূর্ণক গণনা কৰাৰ সময়ত, আমি ধৰি লওঁ যে অন্তৰালৰ মধ্যবিন্দুত বাৰংবাৰতাবোৰ কেন্দ্রভূত হয়। এই ধাৰণাৰ বাবে কিছুমান ত্রুটি (errors) দেখা দিয়ে। এইবিলাকক গ্রুপিং ত্রুটি (grouping errors) বুলি কয়। ঘূর্ণকৰ সমন্বয় সাধিবলৈ পৰিসংখ্যাবিজ্ঞানী শ্বেপার্ডে (William Flectword Sheppard, 1863-1936) এটা উপায় উলিয়াই। ইয়াক শ্বেপার্ডৰ শুধৰণি (Shappard's corrections) বুলি কোৱা হয়। প্রথম চাৰিটা ক্রমৰ বাবে শ্বেপার্ডৰ শুধৰণি তলত দিয়া হ'ল।

μ_1' (শুদ্ধীকৃত) = μ_1',

μ_2' (শুদ্ধীকৃত) $= \mu_2' - \frac{h^2}{12}$,

μ_3' (শুদ্ধীকৃত) $\mu_3' - \frac{h^2}{4}\mu_1'$

μ_4' (শুদ্ধীকৃত) $= \mu_4' - \frac{h^2}{2}\mu_2' + \frac{7}{240}h^4$

আৰু, μ_2 (শুদ্ধীকৃত) $= \mu_2 - \frac{h^2}{12}$

μ_3 (শুদ্ধীকৃত) = μ_3

μ_4(শুদ্ধীকৃত) $= \mu_4 - \frac{h^2}{12}\mu_2 + \frac{7}{240}h^4$

য'ত h হ'ল শ্রেণী-অন্তৰালৰ দৈর্ঘ্য।

পিয়াৰছনৰ β আৰু γ সহগ ঃ

কার্ল পিয়াৰছনে (Karl Pearson, 1857-1936) চাৰিটা প্রয়োজনীয় সহগ বা ঘূর্ণক অনুপাতৰ অৱতাৰণা কৰে। সেইকেইটা হ'ল

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}, \quad \gamma_1 = +\sqrt{\beta_1}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}, \quad \gamma_2 = \beta_2 - 3$$

টোকা ঃ এই চাৰিটা সহগ বক্রৰ আকৃতিৰ লগত জড়িত। এই চাৰিটা বিশুদ্ধ সংখ্যা।



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

প্রশ্ন নং ১ঃ 5 জন মানুহৰ পৰা লোৱা 1ml তেজত বেক্টেৰিয়াৰ সংখ্যা 2, 3, 7, 8, 10। মাধ্য সাপেক্ষে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় আৰু চতুর্থ ঘূর্ণক নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ঃ মান 5 সাপেক্ষে এটা চলকৰ প্রথম চাৰিটা ঘূর্ণক হ'ল 2, 20, 40 আৰু 50। মাধ্য সাপেক্ষে অনুৰূপ ঘূর্ণক নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ মান 4 সাপেক্ষে এটা চলকৰ প্রথম চাৰিটা ঘূর্ণক ক্রমে 1, 4, 10 আৰু 45। দেখুওৱাক যে মাধ্য 5, আৰু প্রসৰণ 3 আৰু μ_3 আৰু μ_4 ক্রমে 0 আৰু 26।

প্রশ্ন নং ৪ঃ মান 5 সাপেক্ষে এটা চলকৰ মান ক্রমে –4, 22, –117, আৰু 560। শূন্য সাপেক্ষে অনুৰূপ ঘূর্ণক নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ এটা বণ্টনৰ প্রথম চাৰিটা কেন্দ্রীয় ঘূর্ণক হ'ল 0, 2.5, 0.7 আৰু 18.75। β_1, আৰু β_2 নির্ণয় কৰক।

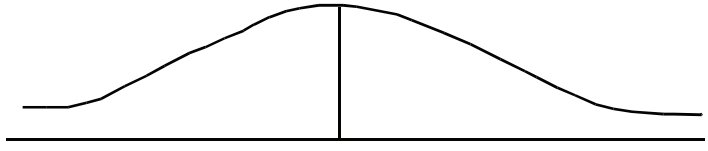
৯.৪ অপ্রতিসাম্য (SKEWNESS)

এটা বণ্টনৰ সমমিত (symmetrical) বলি কোৱা হয় যদি মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলক একে হয়। অপ্রতিসাম্যৰ (Skewness) অর্থ হ'ল সমমিতিৰ অভাৱ (lack of symmetry)।

এটা সমমিত বণ্টন এখন লেখ কাগজত সংস্থাপন কৰিলে ত্রুটিহীনভাৱে এটা বেল-আকৃতিৰ বক্ৰৰ (bell-shaped curve) সৃষ্টি হয়। যদি বাৰংবাৰতা বক্ৰটো সমমিত নহয়, তেনেহ'লে তাক বিষম বা অপ্রতিসাম্য (skew) বুলি কোৱা হয়।

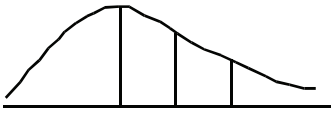
যদি বণ্টনটোৰ বক্ৰৰ সোঁপিনে এডাল দীর্ঘতৰ পুচ্ছ থাকে। তেনেহ'লে ইয়াক ধনাত্মকভাৱে বিষম (positively skew) বুলি কোৱা হয়। এই ক্ষেত্রত মাধ্য > মধ্যমা > বহুলক।

যদি বণ্টনটোৰ বক্ৰৰ বাওঁপিনে দীর্ঘতৰ পুচ্ছ থাকে, তেনেহ'লে বণ্টনটোক ঋণাত্মকভাৱে বিষম বুলি কোৱা হয়। এই ক্ষেত্রত মাধ্য < মধ্যমা < বহুলক।



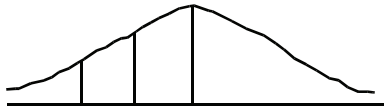
মাধ্য = মধ্যমা = বহুলক

সমমিত বক্ৰ



M_0 M_d M

ধনাত্মকভাৱে বিষম



M M_d M_0

ঋণাত্মকভাৱে বিষম

[উৎস ঃ **Biostatistics** by Dr. P N Arora and Dr. P K Malhan (Himalya Publishing House, 2010)]

৯.৪.১ অপ্রতিসাম্যৰ মাপ (Measures of Skewness)

সমমিত বক্ৰৰ পৰা এটা বক্ৰৰ বিৰূপণ (1) কিমানখিনি আৰু (2) কোনটো দিশত সেয়া নিৰূপণ কৰিবলৈ অপ্রতিসাম্যৰ মাপৰ প্রয়োজন।

অপ্রতিসাম্যৰ প্রথমমাপ (first measure of skewness) = মাধ্য – মধ্যমা

অপ্রতিসাম্যৰ দ্বিতীয় মাপ (second measure of skewness)

$= (Q_3 – \text{মধ্যমা}) – (\text{মধ্যমা} – Q_1)$

$= Q_3 + Q_1 – 2Q_2$.

কার্ল পিয়াৰছন অপ্রতিসাম্য সহগ (Karl Pearson's Coefficient of Skewness)

আমি জানো যে যদি এটা বণ্টন ধনাত্মকভাৱে বিষম, তেনেহ'লে

মাধ্য > মধ্যমা > বহুলক।

আনহাতেদি যদি এটা বণ্টন ঋণাত্মকভাৱে বিষম তেনেহ'লে

মাধ্য < মধ্যমা < বহুলক

(মাধ্য — বহুলক), এই অন্তৰক প্রামাণিক বিচলনেৰে হৰণ কৰিলে যি ৰাশি পোৱা যায়, তাক অপ্রতিসাম্যৰ সহগ হিচাপে লোৱা হয়। অর্থাৎ

$$S_k = \frac{\text{মাধ্য} — \text{বহুলক}}{\text{প্রামাণিক বিচলন}}$$

ইয়াক পিয়াৰছনৰ অপ্রতিসাম্যৰ প্রথম সহগ (pearson's first coefficient of skewness) বুলি কোৱা হয়।

আমি জানো যে তথ্যৰ সংহতি এটাৰ এটা মাত্র বহুলক নাথাকিবও পাৰে। ইয়াৰ দুটা বহুলক থাকিব পাৰে, ইয়াক কোৱা হয় দ্বিবহুলকীয় (bimodal)। ইয়াৰ বহু বহুলক থাকিব পাৰে, ইয়াক কোৱা হয় বহু-বহুলকীয় (multimodal)। এই ক্ষেত্রত বহুলক কুসংজ্ঞাৱদ্ধ (ill defined) বুলি কয়। যদি বহুলক কুসংজ্ঞাৱদ্ধ, তেনেহ'লে এটা মধ্যমীয়া অসমমিত বণ্টনৰ (moderately asymmetrical) বাবে, বহুলক = 3 মধ্যমা

– 2 মাধ্য, এই আনুভৱিক সম্বন্ধ ব্যৱহাৰ কৰি কার্ল পিয়াৰছনে উনুকিওৱা অপ্রতিসাম্যৰ দ্বিতীয় সহগ (second coefficient of skewness) এনেদৰে দিয়া হয়।

$$S_k = \frac{3\ (\text{মাধ্য} - \text{মধ্যমা})}{\text{প্রামাণিক বিচলন}}$$

টোকা ঃ উপৰিউক্ত অপ্রতিসাম্যৰ সহগ দুটা বিশুদ্ধ সংখ্যা, কিয়নো লৰ আৰু হৰ উভয়ৰে বিমা (dimension) একে। অপ্রতিসাম্যৰ প্রথম সহগৰ মান –3 আৰু 3 ৰ মাজত থাকে, আৰু দ্বিতীয় সহগৰ মান –1 আৰু 1 অৰ মাজত থাকে।

আকৌ, ঘূর্ণকৰ ওপৰত নির্ভৰ কৰি, অপ্রতিসাম্যৰ সহগ এনেদৰে দিয়া হয়

$$Sk = \frac{\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3)}{2(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}$$

য'ত β_1, আৰু β_2 ৰ সংজ্ঞা ইতিমধ্যে দিয়া হৈছে

এতিয়া, যদি $\beta_1 = 0$ বা $\beta_2 = 0$, তেনেহ'লে $S_k = 0$। কিন্তু সংজ্ঞাৰ পৰা $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$, আৰু ই ঋণাত্মক হ'ব নোৱাৰে।

$\therefore \beta_2$ ৰ মান –3. হ'ব নোৱাৰে। গতিকে $S_k = 0$ যদি আৰু যদিহে $\beta_1 = 0$। গতিকে দেখা গ'ল যে সমমিত বণ্টনৰ বাবে $\beta_1 = 0$।

উদাহৰণ 3: এটা বণ্টনৰ কার্ল পিয়াৰছনৰ অপ্রতিসাম্যৰ প্রথম সহগ 0.32, ইয়াৰ প্রামাণিক বিচলন 6.5 আৰু মাধ্য 29.6। বণ্টনটোৰ বহুলক নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে

$$\frac{29.6 - \text{বহুলক}}{6.5} = 0.32$$

বা $\quad 29.6 - \text{বহুলক} = 2.08$

$\therefore$ বহুলক = 29.6 – 2.08

অর্থাৎ, বহুলক = 27.52

৯.৫ ককুদতা (KURTOSIS)

ককুদ শব্দৰ অন্যতম হ'ল পর্বতৰ শৃংগ। ইয়াৰ পৰা ককুদতা শব্দটো সাধিত হৈছে। ইংৰাজীত ককুদতাক kurtosis বুলি কয়। kurtosis শব্দটো গ্রিক ভাষাৰ kurtos শব্দৰ পৰা আহিছে। Kurtos শব্দৰ অর্থ হ'ল 'curved, arching'। যদি দুটা বণ্টন থাকে, তেনেহ'লে সিহঁতৰ একে মাধ্য, একে প্রামাণিক বিচলন হ'ব পাৰে। সিহঁত সমভাৱে বিষমো হ'ব পাৰে। কিন্তু এটা আনটোতকৈ বেছি জোঙা হ'ব পাৰে। এই মাপক বক্রটোৰ ককুদতা (Kurtosis) বোলা হয়। ইয়ে বক্রটোৰ জোং কিমান তাৰ ধাৰণা দিয়ে।

৯.৫.১ ককুদতাৰ মাপ (Measures of Kurtosis)

সহগ β_2 বা ইয়াৰ পৰা পোৱা γ_2 ৰ সহায়ত ককুদতাৰ মাপ বুজোৱা হয়।

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2},\ \gamma_2 = \beta_2 - 3$$

টোকা ঃ 1. যেতিয়া $\beta_2 > 3$, বক্রটোক leptokurtic বুলি কয়।

2. যেতিয়া $\beta_2 = 3$, তেতিয়া বক্রটোক প্রসামান্য (normal) বা mesokurtic বুলি কয়।

3. যেতিয়া β_2 ৰ মান < 3, তেতিয়া বক্রটোক platykurtic বুলি কয়।

উদাহৰণ 4: এটা বণ্টনৰ প্রথম চাৰিটা কেন্দ্রীয় ঘূর্ণক 0, 2.5, 0.7 আৰু 18.75। বণ্টনটোৰ ককুদতা নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে $\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 2.5,\ \mu_3 = 0.7,\ \mu_4 = 18.75$

ককুদতাৰ মাপ $$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

$$= \frac{18.75}{(2.5)^2} = \frac{18.75}{6.25} = 3$$

টোকা ঃ যিহেতু $\beta_2 = 3$, বক্রটো প্রসামান্য।



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

প্রশ্ন নং ১ঃ এটা বণ্টনৰ $Q_3 + Q_1 = 70$, $Q_3 - Q_1 = 30$, আৰু মাধ্য 40। অপ্রতিসাম্যৰ মাপ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ঃ x = 4 সাপেক্ষে এটা বণ্টনৰ প্রথম চাৰিটা ঘূর্ণক ক্রমে 1, 4, 10 আৰু 45। দেখুওৱাক যে মাধ্য 5। মাধ্য সাপেক্ষে অনুৰূপ ঘূর্ণকবোৰ নির্ণয় কৰক। β_1 আৰু β_2 নির্ণয় কৰক আৰু সেই মানবোৰ সম্পর্কে অভিমত দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ এটা বণ্টনৰ মাধ্য = 45, মধ্যমা = 48, অপ্রতিসাম্যৰ সহগ = –0.4। প্রামাণিক বিচলন নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ এটা বণ্টনৰ কার্ল পিয়াৰছনৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ 0.4। ইয়াৰ প্রামাণিক বিচলন 8, আৰু মাধ্য 30। বণ্টনটোৰ বহুলক আৰু মধ্যমা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ এটা বণ্টনৰ প্রথম চাৰিটা কেন্দ্রীয় ঘূর্ণক ক্রমে 0, 2.3, 0.9 আৰু 15.65। বণ্টনটোৰ ককুদতা পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ দেখুওৱাক যে তলৰ বণ্টন দুটাৰ অপ্রতিসাম্যৰ মাত্রা (degree of skewness) একে।

বণ্টন A : মাধ্য 100, মধ্যমা 90, SD 10

বণ্টন B : মাধ্য 90, মধ্যমা 80, SD 10



৯.৬ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- ধৰা হ'ল এটা চলক x এ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ মান লয় আৰু ইহঁতৰ বাৰংবাৰতা ক্ৰমে $f_1, f_2, \ldots, f_n$।

  যিকোনো বিন্দু a সাপেক্ষে x-অৰ r-তম ঘূর্ণকক μ_r' এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

  $$\mu_r' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - 1)^r, \quad N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

  μ_r' -অক r-তম অপৰিণত ঘূর্ণক বুলি কোৱা হয়।

  মাধ্য $\bar{x}$ সাপেক্ষে x -অৰ ঘূর্ণকক μ_r -এৰে বুজোৱা হয়, আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়। $\mu_r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^r$

  μ_r অক r-তম কেন্দ্ৰীয় ঘূর্ণক বুলি কোৱা হয়।
- এটা বণ্টনক সমমিত বণ্টন বুলি কোৱা হয় যদি মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলক একে হয়। অপ্রতিসাম্যৰ অর্থ হ'ল সমমিতিৰ অভাৱ।
- এটা সমমিত বণ্টন এখন লেখ কাগজত সংস্থাপন কৰিলে ত্রুটিহীনভাৱে এটা বেল-আকৃতিৰ বক্ৰৰ (bell-shaped curve) সৃষ্টি হয়। যদি বাৰংবাৰতা বক্ৰটো সমমিত নহয়, তেনেহ'লে তাক বিষম বা অপ্রতিসাম্য বুলি কোৱা হয়।
- যদি বণ্টনটোৰ বক্ৰৰ সোঁপিনে এডাল দীর্ঘতৰ পুচ্ছ থাকে, তেনেহ'লে ইয়াক ধনাত্মকভাৱে বিষম বুলি কোৱা হয়। এই ক্ষেত্ৰত মাধ্য > মধ্যমা > বহুলক।
- যদি বণ্টনটোৰ বক্ৰৰ বাওঁপিনে দীর্ঘতম পুচ্ছ থাকে, তেনেহ'লে বণ্টনটোক ঋণাত্মকভাৱে বিষম বুলি কোৱা হয়। এই ক্ষেত্ৰত মাধ্য < মধ্যমা < বহুলক।
- কার্ল পিয়াৰছনৰ অপ্রতিসাম্যৰ প্রথম সহগ হ'ল

  $$S_k = \frac{\text{মাধ্য} - \text{বহুলক}}{\text{প্রামাণিক বিচলন}}$$
- কার্ল পিয়াৰছনৰ অপ্রতিসাম্যৰ দ্বিতীয় সহগ হ'ল

  $$S_k = \frac{3\,(\text{মাধ্য} - \text{মধ্যমা})}{\text{প্রামাণিক বিচলন}}$$
- যদি দুটা বণ্টন থাকে, তেনেহ'লে সিহঁতৰ একে মাধ্য, একে প্রামাণিক বিচলন হ'ব পাৰে। সিহঁত সমভাৱে বিষমো হ'ব পাৰে। কিন্তু এটা আনটোতকৈ বেচি জোঙা হ'ব পাৰে। এই মাপক বক্ৰটোৰ ককুদতা বোলা হয়। ইয়ে বক্ৰটোৰ জোং কিমান তাৰ ধাৰণা দিয়ে।
- সহগ β_2 বা ইয়াৰ পৰা পোৱা γ_2 ৰ সহায়ত ককুদতাৰ মাপ বুজোৱা হয়

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}, \quad \gamma_2 = \beta_2 - 3$$



৯.৭ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

1) Statistical Methods by N.G. Das, McGraw Hill Education (India) Private Ltd. 2009
2) Probability and Statistics by G.Shanker Rao, University Press (India) private Ltd. 2011
3) Introduction to probability and Statistics by Seymour Lipschutz, John J.Schiller, Tata McGraw Hill Education private Ltd. 2005
4) Probability, Random Process, Queueing theory and Statistics by Dr. S.Rajasekaran, Prof.A.Chandrasekaran & G.Kavitha, Dhanam Publications, Chennai-60042
5) Probability and Statistics by G.Balaji, G.Balaji Publishers, Chennai-33



৯.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এই ক্ষেত্রত $\bar{x} = \frac{2+3+7+8+10}{5} = 6$

আমি জানো যে মাধ্য সাপেক্ষে প্রথম ঘূর্ণক শূন্য।

$\therefore \mu_2 = 0$

$$\mu_2 = \frac{1}{N}\Sigma(x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{(2-6)^2 + (3-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2 + (10-6)^2}{5}$$

$$= \frac{16+9+1+4+16}{5} = \frac{46}{5} = 9.6$$

$$\mu_3 = \frac{(2-6)^3 + (3-6)^3 + (7-6)^3 + (8-6)^3 + (10-6)^3}{5}$$

$$= \frac{-64-27+1+8+64}{5} = \frac{-18}{5} = -3.6$$

$$\mu_4 = \frac{(2-6)^4 + (3-6)^4 + (7-6)^4 + (8-6)^4 + (10-6)^4}{5}$$

$$= \frac{256+81+1+16+256}{5} = \frac{610}{5} = 122$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে যে

$\mu_1' = 2,\ \mu_2' = 20,\ \mu_3' = 40,\ \mu_4' = 50$

এতিয়া $\mu_1 = 0$ (যিহেতু মাধ্য সাপেক্ষে প্ৰথম ঘূর্ণক শূন্য)

$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2 = 20 - 4 = 16$

$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2\mu_1'^3$

$= 40 - 3\times 20\times 2 + 2\times 2^3$

$= 40 - 120 + 16 = -64$

$\mu_4 = \mu_4' - 3\mu_3'\mu_1' + 6\mu_2'\mu_1'^2 - 3\mu_1'^4$

$= 50 - 4\times 40\times 2 + 6\times 20\times 2^2 - 3\times 2^4$

$= 50 - 320 + 480 - 48 = 162$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে যে $\mu_1' = 1,\ \mu_2' = 4,\ \mu_3' = 10,\ \mu_4' = 45$

এতিয়া $\mu_1' = \frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i - 4)$

বা, $\mu_1' = \bar{x} - 4$, সৰল কৰাৰ পিছত

$\therefore\ \bar{x} = \mu_1' + 4 = 1 + 4 = 5$

আমি জানো যে দ্বিতীয় কেন্দ্ৰীয় ঘূর্ণক হ'ল প্ৰসৰণ।

এতিয়া, $\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2 = 4 - 1 = 3$

$\therefore$ প্ৰসৰণ = 3

$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2\mu_1'^3$

$= 10 - 3\times 4\times 1 + 2\times 1$

$= 10 - 12 + 2 = 0$

$\mu_4 = \mu_4' - 3\mu_3'\mu_1' + 2\mu_2'\mu_1'^2 - 3\mu_1'^4$

$= 45 - 4\times 10\times 1 + 6\times 4\times 1 - 3\times 1$

$= 45 - 40 + 24 - 3 = 26$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে $\mu_1' = -4,\ \mu_2' = 22,\ \mu_3' = -117$

$\mu_4' = 560,$

এতিয়া, $\mu_1' = \frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i - 5)$

বা, $-4=\frac{\Sigma f_i x_i}{N}-5\frac{\Sigma f_i}{N}$

বা, $-4=\bar{x}-5$

$\therefore\ \bar{x}=\frac{\Sigma f_i x_i}{N}=-4+5=1$

$\therefore\ \left(\mu_1'\right)_0=\frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i-0)=\frac{\Sigma f_i x_i}{N}=1$

আকৌ, $\frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i-5)^2=\mu_2'$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i(x_1^2-10x_i+25)^2=22$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^2-10\frac{\Sigma f_i x_i}{N}+25\frac{\Sigma f_i}{N}=22$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^2-10\times1+25-22$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^2=22+10-25=7$

$\therefore\ \left(\mu_2'\right)_0=\frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i-0)^2=\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^2=7$

আকৌ $\frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i-5)^3=\mu_3'$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i^3-15x_i^2+75x_i-125)=-117$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^3-15\frac{\Sigma f_i x_i^2}{N}+75\frac{\Sigma f_i x_i}{N}-125\frac{\Sigma f_i}{N}=-117$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^3-15\times7+75\times1-125=-117$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^3-117+105-75+125=38$

$\therefore\ (\mu_3')_0=\frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i-0)^3$

$=\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^3=38$

আকৌ, $\frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i-5)^4=\mu_4'$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i^4 - 20x_i^3 + 150x_i^2 - 500x_i + 625) = 560$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^4 - 20\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^3 + 150\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^2 - 500\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i + 625\frac{1}{N}\Sigma f_i = 560$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^4 - 20\times 38 + 150\times 7 - 500\times 1 + 625 = 560$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^4 - 760 + 1050 - 500 + 625 = 560$

$\therefore \frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^4 = 560 + 760 - 1050 + 500 - 625 = 1820 - 1675 = 145$

$\therefore (\mu_4')_0 = \frac{1}{N}\Sigma f_i (x_i - 0)^4$

$= \frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^4 = 145$

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে যে

$\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 2.5,\ \mu_3 = 0.7,\ \mu_4 = 16.75$

এতিয়া $\beta_1 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{0.49}{15.625} = 0.03136$

$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{18.75}{6.25} = 3$

অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে যে $Q_3+Q_1 = 70$, $Q_3 - Q_1 = 30$

$\therefore 2Q_3 = 100 \Rightarrow Q_3 = 50$

$2Q_1 = 40 \Rightarrow Q_1 = 20$

আকৌ, মধ্যমা = $Q_2 = 40$.

$\therefore$ অপ্ৰতিসাম্যৰ মাপ $= Q_3 + Q_1 - 2Q_2$

$= 50 + 20 - 2 \times 40$

$= -10$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে যে

$\mu_1' = 1,\ \mu_2' = 4,\ \mu_3' = 10,\ \mu_4' = 4$

এতিয়া, $\mu_1' = \frac{1}{N}\Sigma f_i (x_i - 4)$

বা, $1 = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} - 4\frac{\Sigma f_i}{N}$

বা, $1 = \bar{x} - 4$

$\therefore\ \bar{x} = 1 + 4 = 6$

এতিয়া, $\mu_1 = 0$ (যিহেতু মাধ্য সাপেক্ষে প্রথম ঘূর্ণক শূন্য।)

$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2 = 4 - 1 = 3$

$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2\mu_1'^3$

= 10 – 3 x 4 x 1 + 2 x 1 = 10 –12 + 2 = 0

$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3'\mu_1' + 6\mu_2'\mu_1'^2 - 3\mu_1'^4$

= 45 – 4 x 10 x 1 + 6 x 4 x 1 – 3 x 1

= 45 – 40 + 24 – 3

= 26

এতিয়া $\beta_1 = \dfrac{\mu_3^2}{\mu_2^2} = \dfrac{0}{27} = 0$

$\beta_2 = \dfrac{\mu_4}{\mu_2^2} = \dfrac{26}{9} < 3$

যিহেতু $\beta_1 = 0$, বণ্টনটো সমমিত।

যিহেতু $\beta_2 < 3$, বক্রটো platykurtic।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ মাধ্য = 45, মধ্যমা = 48

অপ্রতিসাম্যৰ সহগ = – 0.4 (দিয়া আছে)

আমি জানো যে

$$\text{অপ্রতিসাম্যৰ সহগ} = \frac{3\ (\text{মাধ্য} - \text{মধ্যমা})}{\text{প্রামাণিক বিচলন}}$$

$\therefore\ -0.4 = \dfrac{3 \times (45 - 48)}{SD}$

$\therefore\ SD = \dfrac{9}{0.4} = 22.5$

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ = 0.4

SD = 8, মাধ্য = 30

আমি জানো যে

$$\text{অপ্রতিসাম্যৰ সহগ} = \frac{\text{মাধ্য} - \text{মধ্যমা}}{\text{প্রামাণিক বিচলন}}$$

বা, $0.4 = \dfrac{30 - \text{মধ্যমা}}{8}$

বা, 3.2 = 30 – বহুলক

$\therefore$ বহুলক = 30 – 3.2 = 26.8

আকৌ, অপ্রতিসাম্যৰ সহগ $= \dfrac{3\ (\text{মাধ্য} - \text{মধ্যমা})}{\text{প্রামাণিক বিচলন}}$

বা, $0.4 = \dfrac{3 \times (30 - \text{মধ্যমা})}{8}$

বা $3.2 = 90 - 3\ (\text{মধ্যমা})$

$\therefore$ 3(মধ্যমা) = 90 – 3.2 = 86.8

$\therefore$ মধ্যমা $= \dfrac{86.8}{3} = 28.93$

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে যে $\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 2.3,\ \mu_3 = 0.9,\ \mu_4 = 15.65$

ককুদতাৰ মাপ $\beta_2 = \dfrac{\mu_4}{\mu_2^2}$

$= \dfrac{15.65}{(2.3)^2}$

$= \dfrac{15.65}{5.29} = 2.9584$

টোকা ঃ $\because\ \beta_2 < 3$, বক্ৰটো platykurtic.

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ A বণ্টনটোৰ বাবে ঃ

অপ্রতিসাম্যৰ সহগ $= \dfrac{3\ (\text{মাধ্য} - \text{মধ্যমা})}{\text{প্রামাণিক বিচলন}}$

$= \dfrac{3 \times (100 - 90)}{10} = 3$

B বণ্টনটোৰ বাবে ঃ

অপ্রতিসাম্যৰ সহগ $= \dfrac{3\ (\text{মাধ্য} - \text{মধ্যমা})}{\text{প্রামাণিক বিচলন}}$

$= \dfrac{3 \times (90 - 80)}{10} = 3$

$\therefore$ A আৰু B বণ্টন দুটাৰ অপ্রতিসাম্যৰ মাত্রা একে।



৯.৯ আৰ্হি প্রশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্রশ্ন ১ঃ অপ্রতিসাম্য বুলিলে কি বুজা যায়? অপ্রতিসাম্য মাপ কৰাৰ উদ্দেশ্য কি?

প্রশ্ন ২ঃ চমুটোকা লিখক।

(a) শ্বেপার্ডৰ ঘূর্ণকৰ শুধৰণি

(b) অপ্রতিসাম্য আৰু ককুদতা

প্রশ্ন ৩ঃ এটা বণ্টনৰ পিয়াৰছনৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ 0.5। যদি মাধ্য আৰু বহুলক ক্রমে 40 আৰু 36, বিচৰণ গুণাংক নির্ণয় কৰক। যদি মধ্যমা 42, প্রামাণিক বিচলন নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৪ঃ এটা বণ্টনৰ কার্ল পিয়াৰছনৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ 0.32। ইয়াৰ প্রামাণিক বিচলন 6.5 আৰু মাধ্য 29.6। বণ্টনটোৰ মধ্যমা আৰু বহুলক নির্ণয় কৰক। যদি ওপৰৰ বণ্টনটোৰ বহুলক 24.8 হয়, প্রামাণিক বিচলন নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৫ঃ এটা সমমিত বণ্টনৰ প্রামাণিক বিচলন 5। বণ্টনটো (i) leptokurtic, (ii) mesokurtic আৰু (iii) platykurtic হ'বলৈ হ'লে মাধ্য সাপেক্ষে চতুর্থ ঘূর্ণক কি হ'ব লাগিব?

*** ***** ***

অধ্যায় ১০ ঃ সম্ভাৱিতা (PROBABILITY)

অধ্যায় গাঁথনি

১০.১ উদ্দেশ্য
১০.২ পৰিচয়
১০.৩ প্ৰাথমিক পাৰিভাষিক শব্দাৱলী
১০.৪ সম্ভাৱিতাৰ ধ্ৰুপদী সংজ্ঞা
১০.৫ সম্ভাৱিতা স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক সংজ্ঞা
১০.৬ সম্ভাৱিতাৰ কেইটামান উপপাদ্য
১০.৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১০.৮ অধিক জানিবলৈ
১০.৯ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান
১০.১০ আৰ্হি প্ৰশ্ন

১০.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- সম্ভাৱিতা অর্থ জানিব পাৰিব
- সম্ভাৱিতাৰ প্ৰাথমিক পাৰিভাষিক শব্দাৱলী জানিব পাৰিব
- সম্ভাৱিতাৰ ধ্ৰুপদী সংজ্ঞা সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- সম্ভাৱিতাৰ স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক সংজ্ঞা সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- সম্ভাৱিতাৰ কেইটামান উপপাদ্য সম্বন্ধে অৱগত হ'ব।

১০.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

সম্ভাৱিতা হ'ল অনিশ্চয়তাৰ মাপ। এই অধ্যায়ত আমি সম্ভাৱিতাৰৰ ধ্ৰুপদী সংজ্ঞা তথা স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক সংজ্ঞা সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম। লগতে আমি সম্ভাৱিতাৰ কেইটামান উপপাদ্য সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম।

১০.৩ প্ৰাথমিক পাৰিভাষিক শব্দাৱলী (BASIC TERMINOLOGIES)

সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞাৰ বাবে কিছুমান পাৰিভাষিক শব্দৰ প্ৰয়োজন। আমি সেই সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম।

1. **যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা (Random experiment) ঃ** 'অপৰিৱৰ্তনশীল অৱস্থা বা নিয়মাৱলীৰ মাজত বাৰে বাৰে সম্পাদন কৰা কোনো এটা পৰীক্ষা কাৰ্যক যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা (random

experiment) বোলা হয়।' যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ ফলত এটা ফল (outcome) পোৱা যায়।

যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ কেইটামান উদাহৰণ তলত দিয়া হ'ল।

(a) 'মুদ্রা এটাৰ উৎক্ষেপণ' (Tossing a coin) এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা। যদি এটা ফেৰ নোহোৱা মুদ্রা উৎক্ষেপণ কৰা হয়, সম্ভৱপৰ ফল দুটা, মুণ্ড (head, সংক্ষেপে H) আৰু পুচ্ছ (tail, সংক্ষেপে T)। যদিও আমি জানো যে সম্ভৱপৰ ফল দুটা, কোনটো সংঘটিত হ'ব সেয়া আমি ক'ব নোৱাৰোঁ।

(b) 'লুডুগুটি এটাৰ নিক্ষেপ' (Throwing a die) এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা। লুডুগুটি এটা গোটা ঘন। ইয়াৰ পার্শ্ব (face) ছয়টাত ক্রমে এটা, দুটা, তিনিটা, চাৰিটা, পাঁচটা, ছয়টা ফুট আছে। যদি এটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰা হয়, সম্ভৱপৰ ফল ছয়টা,– 1, 2, 3, 4, 5, 6।

(c) 'ভালদৰে মিহলি তাচপাতৰ জাপ এটাৰ পৰা এখিলা তাচপাত টানি অনা' (Drawing a card from a well-shuffled pack of cards) যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ অন্যতম উদাহৰণ। এজাপ তাচপাতত 52 খিলা তাচপাত থাকে,— ইয়াৰ চাৰিটা ভাগ (Suit), ইস্কাপন (Spades), ছিৱটন (Clubs), হৰতন (Hearts) আৰু ৰোহিতন (Diamonds)। ইস্কাপন আৰু ছিৱটন ক'লা ৰঙৰ। হৰতন আৰু ৰোহিতন ৰঙা ৰঙৰ। প্রতিটো ভাগত 13 খিলাকৈ তাচপাত থাকে। ইয়াৰে 9 খনত 2 অৰ পৰা 10 অলৈ সংখ্যাকেইটাৰে একোটা নম্বৰ থাকে। তদুপৰি প্রতিটো ভাগত এখন টেক্কা (ace), এখন ৰজা (king), এখন ৰাণী (queen), এখন গোলাম (jack or knave) থাকে। গতিকে মুঠ টেক্কাৰ সংখ্যা 4 খন, ৰজাৰ সংখ্যা 4 খন, ৰাণীৰ সংখ্যা 4 খন, গোলামৰ সংখ্যা 4 খন। টেক্কা, ৰজা, ৰাণী আৰু গোলামক ফেইচ কার্ড (face card) বোলে।

2. **অভিপ্রয়োগ (Trial) ঃ** এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ কার্যসম্পাদনক অভিপ্রয়োগ (trial) বুলি কয়।

3. **ঘটনা (Event) ঃ** এটা পৰীক্ষাৰ সম্ভৱপৰ সকলো ফলৰ সংগ্রহক ঘটনা (event) বুলি কোৱা হয়।

4. **সমশক্য ঘটনা (Equally likely events) ঃ** সকলো প্রাসংগিক দিশ বিবেচনা কৰাৰ পাছত ঘটনাবোৰৰ এটাক আনটোতকৈ অগ্রাধিকাৰ দি আশা কৰাৰ কোনো কাৰণ থাকিব নোৱাৰিলে ঘটনাবোৰ সমশক্য' (equally likely events)। এটা অনভিনত মুদ্রা নিক্ষেপ কৰিলে মুণ্ড (H) আৰু পুচ্ছ (T) পোৱা ঘটনা দুটা সমশক্য।

5. **পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা (Mutually exclusive events) ঃ** ঘটনাক পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা (mutually exclusive events) বুলি কোৱা হয় যদি এটাৰ সংঘটনে আনবোৰৰ সংঘটনত বাধা আৰোপ কৰে।

এটা মুদ্রা নিক্ষেপ কৰা হ'ল। মুণ্ড (H) আৰু পুচ্ছ (T) পোৱাৰ ঘটনা পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা। মুণ্ড পালে পুচ্ছ পোৱা নাযায়, পুচ্ছ পালে মুণ্ড পোৱা নাযায়।

তাচপাত এখিলা টনা হ'ল। ৰজা পোৱাৰ ঘটনা আৰু হৰতন পোৱাৰ ঘটনা পৰস্পৰান্তৰ নহয়। হৰতনত এখিলা ৰজা আছে।

6. **নিঃশেষী ঘটনা (Exhaustive events) ঃ** 'এটা অভিপ্রয়োগত ঘটিব পৰা সম্ভৱপৰ সকলো ঘটনাক' নিঃশেষী ঘটনা (exhaustive events) বোলা হয়। মুদ্রা এটা নিক্ষেপ কৰি পোৱা নিঃশেষী ঘটনাকেইটা হ'ল মুণ্ড (H), পুচ্ছ (T)।

7. **অনুকূল ঘটনা (Favourable events) ঃ** যিবিলাক ফলৰ সহায়ত এটা ঘটনা সংঘটিত হয়, সেইবিলাকক ঘটনাটোৰ বাবে অনুকূল (favourable) বুলি কোৱা হয়। লুডুগুটি এটা নিক্ষেপ কৰা হ'ল। মৌলিক সংখ্যাৰ দৃষ্টিগোচৰতাৰ বাবে 2, 3 আৰু 5 সংখ্যাকেইটা অনুকূল (favourable)।

১০.৪ সম্ভাৱিতাৰ ধ্রুংপদী সংজ্ঞা (CLASSICAL DEFINITION OF PROBABILITY)

ধৰা হ'ল n টা সমশক্য, পৰস্পৰান্তৰ আৰু নিঃশেষী ফল আছে, আৰু ইয়াৰ m টা E ঘটনাটোৰ বাবে অনুকূল। E ঘটনা সংঘটিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতাক P(E)ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$P(E) = \frac{\text{E ৰ সংঘটনৰ বাবে অনুকূল ফলৰ সংখ্যা}}{\text{সকলো সম্ভৱপৰ ফলৰ সংখ্যা}}$$

$$= \frac{m}{n}$$

ঘটনাৰ ব্যতিক্রম (Odds of an event) ঃ ধৰা হ'ল E ঘটনাটোৰ অনুকূল ফলৰ সংখ্যা m, আৰু E ৰ বাবে প্রতিকূল ফলৰ সংখ্যা n। তেনেহ'লে

(i) E ৰ সপক্ষে ব্যতিক্রম (odds in favour of E) $= \frac{m}{n}$

(ii) E ৰ বিপক্ষে ব্যতিক্রম (odds against E) $= \frac{n}{m}$

(iii) $P(E) = \frac{m}{m+n}$

উদাহৰণ 1: এটা ঘটনাৰ সংঘটনৰ সপক্ষে ব্যতিক্রম $\frac{3}{14}$ । এই ঘটনাটোৰ সংঘটনৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ অনুকূল ফলৰ সংখ্যা = 3

প্রতিকূল ফলৰ সংখ্যা = 14

$\therefore$ মুঠ ফলৰ সংখ্যা = 3 + 14 = 17

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাৱিতা $=\frac{3}{17}$

উদাহৰণ 2: যদি এটা ঘটনাৰ সংঘটনৰ সম্ভাৱিতা $\frac{6}{19}$ হয়,

(i) সংঘটনৰ সপক্ষে ব্যতিক্রম

(ii) সংঘটনৰ বিপক্ষে ব্যতিক্রম নির্ণয় কৰক

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল অনুকূল ফলৰ সংখ্যা m, আৰু প্রতিকূল ফলৰ সংখ্যা n।

$\therefore$ সম্ভাৱিতা $=\frac{m}{m+n}$

কিন্তু $\frac{m}{m+n}=\frac{6}{19}$, (দিয়া আছে)

বা, 19m = 6m + 6n

বা, 13m = 6n

$\therefore \frac{m}{n}=\frac{6}{13}$

$\therefore$ (i) সপক্ষে ব্যতিক্রম $=\frac{m}{n}=\frac{6}{13}$

(ii) বিপক্ষে ব্যতিক্রম $=\frac{n}{m}=\frac{13}{6}$

১০.৫ সম্ভাৱিতাৰ স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক সংজ্ঞা (AXIOMATIC APPROACH TO PROBABILITY)

যাদৃচ্ছিক পৰক্ষা এটাৰ সম্ভৱপৰ আটাইবোৰ ফলৰ সংহতিক **প্রতিদর্শ সমষ্টি** (sample space) বোলে। এই সংহতিটোক সাধাৰণতে ইংৰাজী বর্ণমালাৰ বৰফলাৰ S আখৰৰ দ্বাৰা বুজোৱা হয়। প্রতিদর্শ সমষ্টি এটাৰ প্রত্যেক মৌলক **প্রতিদর্শ বিন্দু** (sample point) বোলে।

দুটা মুদ্রা উৎক্ষেপন কৰা হয়। ফলকেইটা হ'ব HH, HT, TH, TT। HH অৰ অর্থ হ'ল প্রথম মুদ্রা আৰু দ্বিতীয় মুদ্রা দুয়োটাতে মুণ্ড (H) ওলাইছে। HT ৰ অর্থ হ'ল প্রথম মুদ্রাটোত মুণ্ড (H) ওলাইছে। দ্বিতীয় মুদ্রাটোত পুচ্ছ (T) ওলাইছে। বাকী দুটাৰ অর্থও এনেধৰণৰ। গতিকে

S = {HH, HT, TH, TT}।

প্রতিদর্শ বিন্দুকেইটা হ'ল HH, HT, TH, TT, অর্থাৎ চাৰিটা প্রতিদর্শ বিন্দু আছে।

প্রতিদর্শ সমষ্টি এটাৰ উপসংহতিক **ঘটনা** (event) বোলে।

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ S প্রতিদর্শ সমষ্টি আৰু $E \subseteq S$ অর্থাৎ E এটা ঘটনা।

E ঘটনাটো সংঘটিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতাক P(E) প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়। $P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}$

$$= \frac{\text{E ৰ মৌলৰ সংখ্যা}}{\text{S অৰ মৌলৰ সংখ্যা}}$$

টোকা ঃ $P(E)=\frac{n(E)}{n(S)} \geq 0, \because n(E) \geq 0$

উদাহৰণ 3: দুটা মুদ্ৰা একেলগে উৎক্ষেপণ কৰা হ'ল।

(i) এটা মুণ্ড ওলোৱাৰ,

(ii) দুটা মুণ্ড ওলোৱাৰ,

(iii) অন্ততঃ এটা মুণ্ড ওলোৱাৰ,

(iv) কোনো মুণ্ড নোলোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$\therefore$ S = {HH, HT, TH, TT}

(i) ধৰা হ'ল E_1 = এটা মুণ্ড ওলোৱাৰ ঘটনা

$\therefore$ E_1 = {HT, TH}

$\therefore P(E_1)=\frac{n(E_1)}{n(S)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

(ii) ধৰা হ'ল E_2 = দুটা মুণ্ড ওলোৱাৰ ঘটনা

$\therefore$ E_2 = {HH}

$\therefore P(E_2)=\frac{n(E_2)}{n(S)}=\frac{1}{4}$

(iii) ধৰা হ'ল E_3 = অন্ততঃ এটা মুণ্ড ওলোৱাৰ ঘটনা

$\therefore$ E_3 = {HT, TH, HH}

$\therefore P(E_3)=\frac{n(E_3)}{n(S)}=\frac{3}{4}$

(v) ধৰা হ'ল E_4 = এটাও মুণ্ড নোলোৱাৰ ঘটনা

$\therefore$ E_4 = {TT}

$\therefore P(E_4)=\frac{n(E_4)}{n(S)}=\frac{1}{4}$

এতিয়া আমি পুনৰ কেইটামান পাৰিভাষিক শব্দ সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম।

অসম্ভৱ ঘটনা (Impossible event) ঃ ধৰা হ'ল S এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি। আমি জানো যে $\phi \subseteq S$ ।

$\therefore$ ϕ এটা ঘটনা। ইয়াক অসম্ভৱ ঘটনা (impossible event) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ ঃ এটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰা হ'ল।

S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }, ই সকলো ফলৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল E = একতকৈ সৰু সংখ্যা পোৱাৰ ঘটনা।

স্পষ্টত ঃ $E = \phi$.

$\therefore$ E এটা অসম্ভৱ ঘটনা।

টোকা ঃ অসম্ভৱ ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা শূন্য।

ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাত S এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

ধৰা হ'ল E এটা অসম্ভৱ ঘটনা, অৰ্থাৎ $E = \phi$

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{n(\phi)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$$

নিশ্চিত ঘটনা ঃ ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাত S এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

স্পষ্টতঃ $S \subseteq S$

$\therefore$ S এটা ঘটনা। ইয়াক নিশ্চিত ঘটনা (sure event) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ : এটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰা হ'ল।

S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

ধৰা হ'ল E= সাততকৈ সৰু এটা সংখ্যা পোৱাৰ ঘটনা

স্পষ্টত ঃ E = 5

$\therefore$ E এটা নিশ্চিত ঘটনা।

টোকা ঃ নিশ্চিত ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা এক।

ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাত S এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

ধৰা হ'ল E এটা নিশ্চিত ঘটনা, অৰ্থাৎ, E = S

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

সৰল ঘটনা আৰু মিশ্ৰ ঘটনা (Elementary and Compound events) ঃ যিটো ঘটনাত মাত্ৰ এটাহে প্ৰতিদৰ্শ বিন্দু থাকে, তেনে ঘটনাক **সৰল ঘটনা** (elementary or simple event) বোলে।

সৰল ঘটনাৰ বাহিৰে অন্য ঘটনাক **মিশ্ৰ** ঘটনা (compound or composite event) বোলা হয়।

পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা (Mutually exclusive events) ঃ দুটা ঘটনা E_1 আৰু E_2 ক পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা (mutually exclusive events) বুলি কোৱা হয় যদি $E_1 \cap E_2 = \phi$.

টোকা ঃ (1) $E_1 \cap E_2$ ক E_1E_2 হিচাপেও লিখা হয়।

(2) যদি এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ঘটনা হয়, তেনেহ'লে $E_1, E_2, \ldots, E_n$

অক পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা বুলি কোৱা হয় যদি $E_i \cap E_j = \phi$, $i \neq j$ ।

গতিকে E_1, E_2, E_3 পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা যদি $E_1 \cap E_2 = \phi, E_2 \cap E_3 = \phi, E_3 \cap E_1 = \phi$

নিঃশেষী ঘটনা (Mutually exhaustive events) ঃ দুটা ঘটনা E_1 আৰু E_2 ক নিঃশেষী ঘটনা (mutually exhaustive events) বুলি কোৱা হয় যদি $E_1 \cup E_2 = S$, য'ত S হ'ল প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

টোকা ঃ (1) $E_1 \cup E_2$ ক $E_1 + E_2$ হিচাপেও লিখিব পাৰি, যদি $E_1 \cap E_2 = \phi$

(2) যদি এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n$ ঘটনা হয়, তেনেহ'লে $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n$ অক পৰস্পৰ নিঃশেষী ঘটনা বোলা হয় যদি $E_1 \cup E_2 \cup \ldots\ldots \cup E_n = S$, য'ত S হ'ল প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

পূৰক ঘটনা (Complementary event) ঃ ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি S। ধৰা হ'ল $E \subseteq S$, অৰ্থাৎ, E এটা ঘটনা। স্পষ্টতঃ E^c ও এটা ঘটনা, যিহেতু $E^c \subseteq S$ । E^c পূৰক ঘটনা (complementary event) বুলি কোৱা হয়। সাধাৰণতে ইয়াক $\overline{E}$ ৰে বুজোৱা হয়।

টোকা ঃ যদি এটা trial-অৰ ফল w হয়, আৰু $w \in E$, তেনেহ'লে ঘটনাটো সংঘটিত হোৱা বুলি কোৱা হয়। আনহাতেদি, যদি $w \notin E$, তেনেহ'লে ঘটনাটো সংঘটিত হোৱা নাই বুলি কোৱা হয়।

স্পষ্টতঃ

(i) E সংঘটিত হ'লে, $\overline{E}$ সংঘটিত নহয়,

(ii) $\overline{E}$ সংঘটিত হ'লে, E সংঘটিত নহয়।

ধৰ্ম ঃ

I. ধৰা হ'ল S এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি। ধৰা হ'ল $E_1 \subseteq S$, $E_2 \subseteq S$ অৰ্থাৎ, E_1, E_2 দুটা ঘটনা। যদি E_1, E_2 দুটা পৰস্পৰান্তৰ আৰু পৰস্পৰ নিঃশেষী ঘটনা, তেনেহ'লে $P(E_1)+P(E_2)= 1$।

প্ৰমাণ ঃ আমি জানো যে, $E_1 \cap E_2 = \phi$

আৰু $E_1 \cup E_2 = S$

ধৰা হ'ল $n(S) = x$, আৰু $n(E_1) = y$

$\therefore n(E_2) = x - y$, $\because E_1 \cap E_2 = \phi, E_2 \cup E_2 = S$

এতিয়া $P(E_1) + P(E_2) = \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)}$

$$= \frac{y}{x} + \frac{x-y}{x}$$

$$= \frac{y+x-y}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

II. ধৰা হ'ল S এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি, আৰু $E \subseteq S$, অৰ্থাৎ E এটা ঘটনা। তেনেহ'লে $P(E)+P(\overline{E})=1$, অৰ্থাৎ $P(\overline{E})=1-P(E)$

প্ৰমাণ ঃ আমি জানো যে E আৰু $\overline{E}$ দুটা পৰম্পৰান্তৰ আৰু পৰম্পৰ নিঃশেষী ঘটনা।

$\therefore$ আগৰ ফলটোৰ পৰা আমি পাইছোঁ যে $P(E)+P(\overline{E})=1$

অৰ্থাৎ $P(\overline{E})=1-P(E)$

III. ধৰা হ'ল E এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি, আৰু E_1, E_2 দুটা ঘটনা যাতে $E_1 \subseteq E_2$। তেনেহ'লে $P(E_1) \le P(E_2)$

প্ৰমাণ ঃ আমি জানো যে $E_1 \subseteq E_2$

$\therefore n(E_1) \le n(E_2)$, ($E_1$, E_2 সসীম)

বা, $\frac{n(E_1)}{n(S)} \le \frac{n(E_2)}{n(S)}$

$\therefore P(E_1) \le P(E_2)$

IV. ধৰা হ'ল S এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি, আৰু E এটা ঘটনা, অৰ্থাৎ $E \subseteq S$। তেনেহ'লে $0 \le P(E) \le 1$

প্ৰমাণ ঃ আমি জানো যে

$\phi \subseteq E$ আৰু $E \subseteq S$

$\therefore P(\phi) \le P(E)$ আৰু $P(E) \le P(S)$

বা, $0 \le P(E)$ আৰু $P(E) \le 1$

$\therefore 0 \le P(E) \le 1$

উদাহৰণ 4: দুটা লুডুগুটি একেলগে নিক্ষেপণ কৰা হ'ল। নিক্ষেপণত সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 9 হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল S এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$\therefore$ S = { (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), ...

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

[ইয়াত (1, 1) -অৰ অৰ্থ হ'ল প্ৰথম গুটিটোত 1 ওলাইছে, দ্বিতীয় গুটিটোতো 1 ওলাইছে, (1, 2)ৰ অৰ্থ হ'ল প্ৰথম গুটিটোত 1 ওলাইছে, দ্বিতীয় গুটিটোত 2 ওলাইছে। ইত্যাদি]

$\therefore$ n (S) = 6 x 6 = 36.

ধৰা হ'ল E = যোগফল 9 ওলোৱাৰ ঘটনা।

$\therefore$ E = { (3, 6), 4, 5), (5, 4), (6, 3) }

$\therefore$ n (E) = 4

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

উদাহৰণ 5: ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ আখৰ এটা যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'ল।

(i) আখৰটো ব্যঞ্জন বৰ্ণ (consonant) হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান,

(ii) আখৰটো 0 বৰ্ণটোৰ আগৰ আৰু এটা ব্যঞ্জন বৰ্ণ হোৱাৰ (বৰ্ণানুক্ৰমত) সম্ভাৱিতা কিমান,

(iii) আখৰটো 0 বৰ্ণটোৰ পিছৰ আৰু এটা ব্যঞ্জন বৰ্ণ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$\therefore$ S = {a, b, c, ..., x, y, z}

স্পষ্টতঃ n(S) = 26

(i) ধৰা হ'ল E_1 = এটা ব্যঞ্জন বৰ্ণ পোৱাৰ ঘটনা

আমি জানো যে ইংৰাজী বৰ্ণমালাত 21 টা ব্যঞ্জন বৰ্ণ আছে।

$$\therefore P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{21}{26}$$

(ii) ধৰা হ'ল E_2 = 0 বৰ্ণটোৰ আগৰ ব্যঞ্জন বৰ্ণ হোৱাৰ ঘটনা।

$\therefore$ E_2 = {b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n}

$n(E_2)$ = 11

$$\therefore P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{11}{26}$$

(iii) ধৰা হ'ল E_3 = 0 বৰ্ণটোৰ পিছৰ ব্যঞ্জন বৰ্ণ হোৱাৰ ঘটনা।

$\therefore$ E_3 = {p, q, r, s, t, v, w, x, y, z}

$n(E_3)$ = 10

$$\therefore P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

উদাহৰণ 6: ভালদৰে মিহলি 52 খিলা তাচপাতৰ জাপ এটাৰ পৰা 4 খিলা তাচপাত টনা হ'ল। দুখিলা ৰজা আৰু দুখিলা ৰাণী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান ঃ 52 খিলাৰ তাচপাত এজাপৰ পৰা 4 খিলা তাচপাত $^{52}C_4$ টা উপায়ে টানি আনিব পাৰি।

ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$$\therefore n(S) = {}^{52}C_4$$

ধৰা হ'ল E = দুখিলা ৰজা আৰু দুখিলা ৰাণী পোৱাৰ ঘটনা।

2 খিলা ৰজা $^4C_2$ টা উপায়ে টানিব পাৰি।

2 খিলা ৰাণী $^4C_2$ টা উপায়ে টানিব পাৰি।

$\therefore$ 2 খিলা ৰজা আৰু 2 খিলা ৰাণী ${}^4C_2 \times {}^4C_2$ টা উপায়ে টানিব পাৰি।

$\therefore n(E) = {}^4C_2 \times {}^4C_2$

$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

$= \frac{{}^4C_2 \times {}^4C_2}{{}^{52}C_4}$



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

প্রশ্ন নং ১ঃ ভালদৰে মিহলি 52 খিলা তাচপাতৰ জাপ এটাৰ পৰা এখিলা ছিৰটন পোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা বাকছত 6 টা ৰঙা, 8 টা ক'লা, 10 টা হালধীয়া, বল (ball) আছে। (i) এটা ৰঙা বল, (ii) এটা ক'লা বল, (iii) এটা বগা বল টানি অনাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন নং ৩ঃ এটা মুদ্রা ক্রমাগতভাৱে তিনিবাৰ উৎক্ষেপণ কৰা হ'ল। (i) 2 টা মুণ্ড, (ii) অতি কমেও 2 টা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ প্রথম 150 টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ পৰা এটা সংখ্যা যাদৃচ্ছিকভাৱে বছা হ'ল। বাছি উলিওৱা সংখ্যাটো 5 অৰ গুণিতক হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন নং ৫ঃ AMPLITUDE শব্দটোৰ পৰা এটা আখৰ যাদৃচ্ছিকভাৱে বছা হ'ল। আখৰটো স্বৰবর্ণ (vowel) হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন নং ৬ঃ দুটা লুডুগুটি একেলগে নিক্ষেপ কৰা হ'ল। নিক্ষেপণত (i) যোগফল 6, (ii) যোগফল 12, (iii) যোগফল 18 হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন নং ৭ঃ ভালদৰে মিহলি 52 খিলা তাচপাতৰ জাপ এটাৰ পৰা দুখিলা তাচপাত যাদৃচ্ছিকভাৱে টনা হ'ল। এখিলা ৰজা আৰু আনখিলা ৰাণী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন নং ৮ঃ ভালদৰে মিহলি 52 খিলা তাচপাতৰ জাপ এটাৰ পৰা দুখিলা তাচপাত যাদৃচ্ছিকভাৱে টনা হ'ল। দুখন হৰতন পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৯ঃ এটা বাকছত 4 টা বগা, 5 টা ক'লা আৰু 6 টা সেউজীয়া বল (ball) আছে। যদি যাদৃচ্ছিকভাৱে দুটা বল টানি অনা হয়, এটাও ক'লা নোহোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ১০ঃ ইংৰাজী বর্ণমালাৰ এটা বর্ণ যাদৃচ্ছিকভাৱে বছা হ'ল। বাছি উলিওৱা আখৰটো h অৰ আগৰ আৰু স্বৰবর্ণ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ১১ঃ যিকোনো এটা লিপ ইয়াৰত 53 টা সোমবাৰ থকাৰ সম্ভাৱিতা কিমান নির্ণয় কৰক।

১০.৬ সম্ভাৱিতাৰ কেইটামান উপপাদ্য (SOME THEOREMS ON PROBABILITY)

১০.৬.১ সম্ভাৱিতাৰ যোগ উপপাদ্য (Addition Theorem of Probability)

I. ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাত S এটা প্ৰতিদৰ্শন সমষ্টি। ধৰা হ'ল E_1, E_2 দুটা ঘটনা। তেনেহ'লে

$P(E_1$ বা $E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1$ আৰু $E_2)$

অৰ্থাৎ, $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

প্ৰমাণ ঃ $P(E_1 \cup E_2) = \frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)}$

$$= \frac{n(E_1) + n(E_2) - (E_1 \cap E_2)}{n(S)}$$

$$= \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)} - \frac{(E_1 \cap E_2)}{n(S)}$$

$$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2$$

অনুমিতি ঃ যদি E_1, E_2 পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা, তেনেহ'লে $E_1 \cap E_2 = \phi$ আৰু $\therefore P(E_1 \cap E_2) = P(\phi) = 0$. গতিকে, দুটা পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা E_1 আৰু E_2 ৰ বাবে

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + (E_2)$

এই ক্ষেত্ৰত আমি লিখোঁ

$P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

II. ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাত S এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি। ধৰা হ'ল E_1, E_2, E_3 তিনিটা ঘটনা।

তেনেহ'লে

$P(E_1$ বা E_2 বা $E_3)$

$= P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$

$= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_2 \cap E_3) - P(E_3 \cap E_1) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$

প্ৰমাণ ঃ আমি জানো যে

$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$

$$= \frac{n(E_1 \cup E_2 \cup E_3)}{n(S)}$$

$$= \frac{n(E_1) + n(E_2) + n(E_3) - n(E_1 \cap E_2) - n(E_2 \cap E_3) - n(E_3 \cap E_1) + n(E_1 \cap E_2 \cap E_3)}{n(S)}$$

$$= \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)} + \frac{n(E_3)}{n(S)} - \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(S)} - \frac{n(E_2 \cap E_3)}{n(S)} - \frac{n(E_3 \cap E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_1 \cap E_2 \cap E_3)}{n(S)}$$

$$= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_2 \cap E_3) - P(E_3 \cap E_1) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

অনুমিতি ঃ যদি E_1, E_2, E_3 পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা হয়, তেনেহ'লে

$E_1 \cap E_2 = \phi,\ E_2 \cap E_3 = \phi,\ E_3 \cap E_1 = \phi,\ E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \phi$

গতিকে, তিনিটা পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা E_1, E_2 আৰু E_3 ৰ বাবে

$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$

অর্থাৎ, $P(E_1+E_2+E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$

সেইদৰে, যদি if E_1, E_2, E_3, ..., E_n পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা, তেনেহ'লে

$P(E_1 + E_2 + \ldots\ldots + E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots\ldots P(E_n)$.

১০.৬.২ ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা S অৰ E_1, E_2 দুটা ঘটনা। তেনেহ'লে

(i) $P\left(\overline{E_1 \cup E_2}\right) = P\left(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}\right)$

(ii) $P\left(\overline{E_1 \cap E_2}\right) = P\left(\overline{E_1} \cup \overline{E_2}\right)$

প্ৰমাণ ঃ আমি জানো যে $E_1 \subseteq S,\ E_2 \subseteq S$

দ্য মৰ্গানৰ বিধি অনুসৰি, আমি পাওঁ

$(E_1 \cup E_2)^c = E_1^{\,c} \cap E_2^{\,c}$

অর্থাৎ, $\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2$

$\therefore P\left(\overline{E_1 \cup E_2}\right) = P\left(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2\right)$

আকৌ, $(E_1 \cap E_2)^c = E_1^{\,c} \cup E_2^{\,c}$

অর্থাৎ, $\left(\overline{E_1 \cap E_2}\right) = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2$

$\therefore\ P\left(\overline{E_1 \cap E_2}\right) = \left(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2\right)$

উদাহৰণ 7: দুটা লুডুগুটি একেলগে নিক্ষেপ কৰা হ'ল। এটা ডাব্‌লেট বা যোগফল 8 উলিওৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদর্শ সমষ্টি।

স্পষ্টতঃ $n(S) = 36$ [উদাহৰণ 4 দ্ৰষ্টব্য]

ধৰা হ'ল E_1 = এটা ডাব্‌লেট পোৱাৰ ঘটনা। [ডাব্‌লেট (Doublet) শব্দৰ অর্থ এই সন্দর্ভত এনে ধৰণৰ— দুটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰাত যদি দুয়োটাতে একে সংখ্যক ফুট ওলায়, তাক doublet বুলি কয়।]

$\therefore E_1 = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) \}$

ধৰা হ'ল E_2 = যোগফল 8 পোৱাৰ ঘটনা।

$\therefore E_2 = \{ (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) \}$

$E_1 \cap E_2 = \{(4, 4)\}$

গতিকে, $n(E_1) = 6$, $n(E_2) = 5$, $n(E_1 \cap E_2) = 1$

$\therefore$ $P(E_1$ বা $E_2)$

$$= P(E_1 \cup E_2)$$

$$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

$$= \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)} - \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(S)}$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{5}{36} - \frac{1}{36}$$

$$= \frac{6+5-1}{36}$$

$$= \frac{10}{36}$$

$$= \frac{5}{18}$$

উদাহৰণ 8: দুটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰা হ'ল। প্ৰথম গুটিটোত এটা অযুগ্ম সংখ্যা বা যোগফল 8 পোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$\therefore$ $n(S) = 36$

ধৰা হ'ল E_1 = প্ৰথম গুটিটোত এটা অযুগ্ম সংখ্যা পোৱাৰ ঘটনা।

$\therefore$ $n(E_1) = 3 \times 6 = 18$

[অযুগ্ম সংখ্যা তিনিটা, 1, 3, 5। প্ৰথম গুটিটোত ইয়াৰ যিকোনো এটা পাম। দ্বিতীয় গুটিটোত 1, 2, 3, 4, 5, 6 – ইয়াৰ যিকোনো এটা পাম।]

ধৰা হ'ল E_2 = যোগফল 8 পোৱাৰ ঘটনা

$\therefore$ $E_2 = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$

$n(E_2) = 5$

$E_1 \cap E_2 = \{(3, 5), (5, 7)\}$

$n(E_1 \cap E_2) = 2$

$$\therefore P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

$$= \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)} - \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(S)}$$

$$= \frac{18}{36} + \frac{5}{36} - \frac{2}{36}$$

$$= \frac{18+5-2}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

উদাহৰণ 9: ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিত পৰীক্ষাত E_1, E_2, E_3 তিনিটা পৰস্পৰান্তৰ আৰু পৰস্পৰ নিঃশেষী ঘটনা। যদি $P(E_1)=\frac{3}{2}P(E_2)$ আৰু $P(E_3)=\frac{1}{2}P(E_2)$, $P(E_1)$, $P(E_2)$, আৰু $P(E_3)$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$\therefore E_1 \cup E_2 \cup E_3 = S$ ($\because$ E_1, E_2, E_3 পৰস্পৰ নিঃশেষী ঘটনা)

$\therefore P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(S)$

বা, $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = P(S)$ ($\because E_1$, E_2, E_3 পৰস্পৰ নিঃশেষী ঘটনা)

বা, $\frac{3}{2}P(E_2) + P(E_2) + \frac{1}{2}P(E_2) = 1$

বা, $\left(\frac{3}{2}+1+\frac{1}{2}\right)P(E_2) = 1$

বা, $3P(E_2) = 1$

$\therefore P(E_2) = \frac{1}{3}$

$\therefore P(E_1) = \frac{3}{2}.P(E_2) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

$P(E_3) = \frac{1}{2}.P(E_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

উদাহৰণ 10: ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ E_1, E_2 দুটা ঘটনা।

যদি $P(E_1)=\frac{1}{2}$, $P(E_2)=\frac{1}{3}$ আৰু $P(E_1 \cap E_2)=\frac{1}{6}$,

(i) $P\left(\overline{E_1 \cap E_2}\right)$, (ii) $P\left(\overline{E_1 \cup E_2}\right)$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ (i) $P\left(\overline{E_1 \cap E_2}\right)$

$= 1 - P(E_1 \cap E_2)$ $[P(\overline{E}) = 1 - P(E)]$

$= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

(ii) $P\left(\overline{E_1 \cup E_2}\right)$

$= 1 - P(E_1 \cup E_2)$

$= 1 - [P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)]$

$= 1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

প্রশ্ন নং ১ঃ প্রথম 150 টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা সংখ্যা বছা হ'ল। এনেদৰে বাছি উলিওৱা সংখ্যাটো 4 অৰ গুণিতক বা 5 -অৰ গুণিতক হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ঃ ভালদৰে মিহলি 52 খিলা তাচপাতৰ জাপ এটাৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে এখিলা টনা হ'ল। এনেদৰে টনা তাচপাতখিলা ইস্কাপন বা ৰজা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ E_1, E_2 দুটা ঘটনা। যদি $P(E_1) = 0.3$, $P(E_2) = 0.2$, আৰু $P(E_1 \cap E_2) = 0.1$,

(i) $P\left(\overline{E_1 \cap E_2}\right)$, (ii) $P\left(\overline{E_1 \cup E_2}\right)$ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ E_1, E_2 দুটা পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা। যদি $P(E_1$ নহয়) = 0.45 আৰু $P(E_1$ বা $E_2) = 0.65$, $P(E_2)$ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ E_1, E_2 দুটা ঘটনা। যদি $P(E_1) = \frac{1}{2}$, $P(E_2) = \frac{1}{3}$, $P(E_1$ আৰু $E_2) = \frac{1}{6}$, (i) $P(E_1$ বা $E_2)$

(ii) P (E_1 নহয়, E_2 নহয়) নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ দুটা লুডুগুটি একেলগে নিক্ষেপ কৰা হ'ল। সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 3 ৰে বিভাজ্য নোহোৱা, 4 এৰেও বিভাজ্য নোহোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।



১০.৭ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- 'অপৰিৱর্তনশীল অৱস্থা বা নিয়মাৱলীৰ মাজত বাৰে বাৰে সম্পাদন কৰা কোনো এটা পৰীক্ষাকার্যক যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা বোলা হয়।' মুদ্রা এটাৰ উৎক্ষেপণ, লুডুগুটি এটাৰ নিক্ষেপ, ভালদৰে মিহলি তাচপাতৰ জাপ এটাৰ পৰা এখিলা তাচপাত টানি অনা আদি যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ উদাহৰণ।
- যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা এটাৰ সম্ভৱপৰ আটাইবোৰ ফলৰ সংহতিক প্রতিদর্শ সমষ্টি বোলে।
- প্রতিদর্শ সমষ্টি এটাৰ উপসংহতিক ঘটনা বোলে।
- E ঘটনাটো সংঘটিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতাক P(E) প্রতীকেৰে বুজোৱা হয়, আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয় $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

য'ত n(E) এ E ৰ মৌলৰ সংখ্যা বুজায়, আৰু n(S) এ প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি S অৰ মৌলৰ সংখ্যা বুজায়।

- ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ S এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি। ধৰা হ'ল E_1, E_2 দুটা ঘটনা।

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap_2)$$



১০.৮ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

1) Statistical Methods by N.G. Das, McGraw Hill Education (India) Private Ltd. 2009
2) Probability and Statistics by G.Shanker Rao, University Press (India) private Ltd. 2011
3) Introduction to probability and Statistics by Seymour Lipschutz, John J.Schiller, Tata McGraw Hill Education private Ltd. 2005
4) Probability, Random Process, Queueing theory and Statistics by Dr. S.Rajasekaran, Prof.A.Chandrasekaran & G.Kavitha, Dhanam Publications, Chennai-60042
5) Probability and Statistics by G.Balaji, G.Balaji Publishers, Chennai-33



১০.৯ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

ভালদৰে মিহলি 52 খিলা তাচপাতৰ পৰা এখিলা তাচপাত $^{52}C_1$ টা উপায়ে অৰ্থাৎ 52 টা উপায়ে টানিব পাৰি।

$\therefore$ n(S) = 52

ধৰা হ'ল E = ছিৰটন এখন টনাৰ ঘটনা।

এখন ছিৰটন $^{13}C_1$ টা উপায়ে অৰ্থাৎ 13 টা উপায়ে টানিব পাৰি।

$\therefore$ n(E) = 13

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ মুঠ বলৰ সংখ্যা = 6 + 8 + 10 = 24. এটা বল $^{24}C_1$ টা উপায়ে, অৰ্থাৎ 24

টা উপায়ে টানিব পাৰি।

ñ1±ýÃu S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$\therefore$ n(S) = 24

(i) ধৰা হ'ল E_1 = এটা ৰঙা বল টনাৰ ঘটনা

এটা ৰঙা বল ${}^6C_1$ টা উপায়ে, অৰ্থাৎ, 6 টা উপায়ে টানিব পাৰি।

$\therefore$ $n(E_1) = 6$

$$\therefore P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

(ii) ধৰা হ'ল E_2 = এটা ক'লা বল টনাৰ ঘটনা

এটা ক'লা বল ${}^8C_1$ টা উপায়ে, অৰ্থাৎ, 8 টা উপায়ে টানিব পাৰি।

$\therefore$ $n(E_2) = 8$

$$\therefore P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

(iii) ধৰা হ'ল E_3 = এটা বগা বল টনাৰ ঘটনা

বাকছটোত কোনো বগা বল নাই।

$$\therefore E_3 = \phi$$

$$\therefore P(E_3) = P(\phi) = 0$$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$\therefore$ S = {HHH, HTH, HHT, THH, HTT, TTH, THT, TTT}

(i) ধৰা হ'ল E_1 = দুটা মুণ্ড পোৱাৰ ঘটনা

$\therefore$ E_1 = { HTH, HHT, THH }

$$\therefore P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{3}{8}$$

(ii) ধৰা হ'ল E_2 = অন্ততঃ 2 দুটা মুণ্ড পোৱাৰ ঘটনা

$\therefore$ E_2 = { HTH, HHT, THH, HHH }

$$\therefore P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

প্ৰথম 150 টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ পৰা এটা সংখ্যা ${}^{150}C_1$ টা উপায়ে অৰ্থাৎ 150 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

$\therefore$ n(S) = 150

S = { 1, 2, 3, 4, ..., 149, 150 }

ধৰা হ'ল E = 5 অৰ গুণিতক এটা বছাৰ ঘটনা।

$\therefore$ E = { 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150 }

$\therefore$ n(E) = 30

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{30}{150} = \frac{1}{5}$$

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$\therefore$ n(S) = 9

ধৰা হ'ল E = এটা স্বৰ বৰ্ণ পোৱাৰ ঘটনা।

$\therefore$ n(E) = 4

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{9}$$

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$\therefore$ n(S) = 6 x 6 = 36

(i) ধৰা হ'ল E_1 = যোগফল 6 পোৱাৰ ঘটনা।

$\therefore$ E_1 = { (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) }

$n(E_1) = 5$

$$\therefore P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

(ii) ধৰা হ'ল E_2 = যোগফল 12 পোৱাৰ ঘটনা।

$\therefore$ E_2= {(6, 6)}

$$\therefore P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

(iii) ধৰা হ'ল E_3 = যোগফল 18 পোৱাৰ ঘটনা।

স্পষ্টতঃ, $E_3 = \phi$, যোগফল 18 হ'ব নোৱাৰে।

$$\therefore P(E_3) = P(\phi) = 0$$

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দুখিলা তাচপাত $^{52}C_2$ টা উপায়ে টানিব পাৰি।

ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$$\therefore n(S) = {}^{52}C_2 = \frac{52!}{2!50!} = \frac{52 \times 51 \times 50!}{2 \times 1 \times 50!} = 26 \times 51$$

4 খিলা ৰজা আছে আৰু 4 খিলা ৰাণী আছে।

এখিলা ৰজা $^4C_1$, টা উপায়ে, অৰ্থাৎ, 4 টা উপায়ে টানিব পাৰি।

এখিলা ৰাণী ${}^4C_1$ টা উপায়ে, অর্থাৎ 4 টা উপায়ে টানিব পাৰি।

ধৰা হ'ল E = এখিলা ৰজা আৰু এখিলা ৰাণী টনাৰ ঘটনা।

$\therefore$ n(E) = 4 x 4 = 16

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{16}{26 \times 51} = \frac{8}{13 \times 51} = \frac{8}{663}$$

৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$$\therefore n(S) = {}^{52}C_2 = 26 \times 51$$

ধৰা হ'ল E = দুখন হৰতন পোৱাৰ ঘটনা

$$\therefore n(S) = {}^{13}C_2 = \frac{13!}{2!11!} = \frac{13 \times 12 \times 11!}{2 \times 1 \times 11!} = 13 \times 6$$

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{13 \times 6}{26 \times 51} = \frac{1}{17}$$

৯ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ মুঠ বলৰ সংখ্যা = 4 + 5 + 6 = 15

15 টা বলৰ পৰা দুটা বল ${}^{15}C_1$ টা উপায়ে টানিব পাৰি।

ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$$\therefore n(S) = {}^{15}C_2 = \frac{15!}{2!13!} = \frac{15 \times 14}{2 \times 1} = 15 \times 7 = 105$$

যদি বল দুটাৰ এটাও ক'লা নহয়, তেনেহ'লে বল দুটা বগা আৰু সেউজীয়া বলৰ পৰা হ'ব লাগিব।

বগা আৰু সেউজীয়া বলৰ মুঠ সংখ্যা = 4 + 6 =10

ধৰা হ'ল E = দুটা বল (এটাৰ ক'লা নহয়) টনাৰ ঘটনা।

$$\therefore n(E) = {}^{10}C_2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{45}{105} = \frac{3}{7}$$

১০ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$\therefore$ n(S) = 26

ধৰা হ'ল E = h অৰ আগৰ আৰু এটা স্বৰ বৰ্ণ হোৱাৰ ঘটনা।

$\therefore$ E = { a, e }

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$$

১১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ আমি জানো যে এটা লিপইয়াৰত 366 দিন থাকে। 366 দিন = 52 সপ্তাহ

+ দিন। 52 সপ্তাহত 52 টা সোমবাৰ আছে।

বাকী দুটা দিন এনে ধৰণৰ হ'ব পাৰে,— ৰবিবাৰ আৰু সোমবাৰ, সোমবাৰ আৰু মংগলবাৰ, মংগলবাৰ আৰু বুধবাৰ, বুধবাৰ আৰু বৃহস্পতিবাৰ, বৃহস্পতিবাৰ আৰু শুকুৰবাৰ, শুকুৰবাৰ আৰু শনিবাৰ, শনিবাৰ আৰু ৰবিবাৰ। ওপৰৰ সাতটা সম্ভাৱনাৰ দুটাত সোমবাৰ আছে।

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাৱিতা $= \frac{2}{7}$

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S প্রতিদর্শ সমষ্টি।

$\therefore$ n(S) = 150

ধৰা হ'ল E_1 = 4 অৰ গুণিতক পোৱাৰ ঘটনা।

$\therefore$ $n(E_1) = 37$

ধৰা হ'ল E_2 = 5 অৰ গুণিতক পোৱাৰ ঘটনা।

$\therefore$ $n(E_2) = 30$

$\therefore E_1 \cap E_2$ = 4 আৰু 5 অৰ গুণিতক অর্থাৎ 20 পোৱাৰ ঘটনা

$\therefore n(E_1 \cap E_2) = 7$

এতিয়া, $P(E_1 \cup E_2)$

$$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

$$= \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)} - \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(S)}$$

$$= \frac{37}{150} + \frac{30}{150} - \frac{7}{150}$$

$$= \frac{60}{150} = \frac{2}{5}$$

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S প্রতিদর্শ সমষ্টি।

$\therefore n(S) = {}^{52}C_1 = 52$

ধৰা হ'ল E_1 = ইস্কাপন পোৱাৰ ঘটনা

$\therefore n(E_1) = {}^{13}C_1 = 13$

ধৰা হ'ল E_2 = ৰজা পোৱাৰ ঘটনা

$\therefore n(E_2) = {}^{4}C_1 = 4$

$E_1 \cap E_2$ = ইস্কাপন আৰু ৰজা পোৱাৰ ঘটনা

$\therefore n(E_1 \cap E_2) = 1$

$\therefore$ P (ইস্কাপন বা ৰজা পোৱা)

$= P(E_1 \cup E_2)$

$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$= \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)} - \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(S)}$

$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে যে $P(E_1) = 0.3$, $P(E_2) = 0.2$, $P(E_1 \cap E_2) = 0.1$

(i) $P\left(\overline{E_1 \cap E_2}\right) = 1 - P(E_1 \cap E_2) = 1 - 0.1 = 0.9$

(ii) $P\left(\overline{E_1 \cup E_2}\right) = 1 - P(E_1 \cup E_2)$

$= 1 - [P(E_1) + P(E_2) - P()]$

$= 1 - 0.3 - 0.2 + 0.1 = 0.6$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে যে $P(E_1$ নহয়$) = 0.45$

বা, $P(\overline{E_1}) = 0.45$

বা, $1 - P(E_1) = 0.45$

$\therefore P(E_1) = 1 - 0.45 = 0.55$

E_1, E_2 দুটা পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা।

$\therefore P(E_1$ বা $E_2) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

$\therefore P(E_1) + P(E_2) = 0.65$

বা, $0.55 + P(E_2) = 0.65$

$\therefore P(E_2) = 0.65 - 0.55 = 0.1$

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে যে $P(E_1) = \frac{1}{2}$, $P(E_2) = \frac{1}{3}$

$P(E_1$ আৰু $E_2) = P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$

(i) $P(E_1$ বা $E_2) = P(E_1 \cup E_2)$

$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(ii) $P(E_1$ নহয়, E_2ও নহয়)

$= P(\overline{E_1}$ আৰু $\overline{E_2})$

$= P(\overline{E_1} \cap \overline{E_2})$

$= P\left(\overline{E_1 \cup E_2}\right)$

$= 1 - P(E_1 \cup E_2)$

$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S প্রতিদর্শ সমষ্টি।

$\therefore n(S) = {}^6C_1 \times {}^6C_1 = 6 \times 6 = 36$

ধৰা হ'ল E_1 = যোগফল 3ৰে বিভাজ্য হোৱা ঘটনা।

$\therefore$ E_1 = { (1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3), 6, 6) }

$\therefore$ n (E_1) = 12.

ধৰা হ'ল E_2 = যোগফল 4 এৰ বিভাজ্য হোৱা ঘটনা।

$\therefore$ E_2 = {(1, 3), (2, 2), (2, 6), (3, 1), (3, 5), (4,4), (5, 3), (6, 2), (6, 6)}

$\therefore$ n(E_2) = 9

$E_1 \cap E_2$ = যোগফল 3 আৰু 4 উভয়েৰে বিভাজ্য হোৱা ঘটনা।

$\therefore E_1 \cap E_2 = \{(6, 6)\}, \quad \therefore n(E_1 \cap E_2) = 1$

P(E_1 নহয়, E_2ও নহয়)

= P($\overline{E}_1$ আৰু $\overline{E}_2$)

$= P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2)$

$= P\left(\overline{E_1 \cup E_2}\right)$

$= 1 - P(E_1 \cup E_2)$

$= 1 - [P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)]$

$= 1 - \left[\frac{12}{36} + \frac{9}{36} - \frac{1}{36}\right]$

$= 1 - \frac{5}{9}$

$= \frac{4}{9}$



১০.১০ আৰ্হি প্রশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্রশ্ন ১ঃ একেলগে এটা মুদ্রা আৰু এটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰা হ'ল। প্রতিদর্শ সমষ্টি নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ২ঃ মুদ্রা এটা নিক্ষেপ কৰা হ'ল। পুচ্ছ পোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন ৩ঃ তিনিটা মুদ্রা একেলগে নিক্ষেপ কৰা হ'ল। (i) এটা মুণ্ড, (ii) অন্ততঃ এটা মুণ্ড, (iii) দুটা

মুণ্ড, (iv) অন্ততঃ দুটা মুণ্ড, (v) আটাইকেইটা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্ৰশ্ন ৪ঃ দুটা লুডুগুটি একেলগে নিক্ষেপ কৰা হ'ল। যোগফল 9 বা 11 পোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্ৰশ্ন ৫ঃ এটা সাধাৰণ বৰ্ষত (লিপইয়াৰ নহয়) 53 টা সোমবাৰ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্ৰশ্ন ৬ঃ এটা টোপোলাত পোন্ধৰটা বল (ball) আছে। প্ৰতিটো বলত 1 অৰ পৰা 15 লৈ সংখ্যাকেইটাৰ পৰা একোটা নম্বৰ দিয়া হৈছে (যিকোনো দুটা বলৰ একে নম্বৰ হ'ব নোৱাৰে)। যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা বল টোপোলাটোৰ পৰা লোৱা হ'ল। বলটোৰ নম্বৰ 3 ৰ গুণিতক বা 4 অৰ গুণিতক হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

*** ***** ***

অধ্যায় ১১ ঃ চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতা

অধ্যায় গাঁথনি

১১.১ উদ্দেশ্য
১১.২ পৰিচয়
১১.৩ চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতা
১১.৪ সম্ভাৱিতাৰ গুণিতক উপপাদ্য
১১.৫ পূর্ণ সম্ভাৱিতা
১১.৬ বেইজৰ উপপাদ্য
১১.৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১১.৮ অধিক জানিবলৈ
১১.৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
১১.১০ আৰ্হি প্রশ্ন

১১.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা দাঙি ধৰিব পাৰিব
- সম্ভাৱিতাৰ গুণিতক উপপাদ্যৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- সম্ভাৱিতাৰ নিয়ম বর্ণনা কৰিব পাৰিব
- বেইজৰ উপপাদ্যৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।

১১.২ পৰিচয়

অধ্যায় ১০-ত আমি সম্ভাৱিতা আৰু ইয়াৰ সৈতে জড়িত কেইটামান গুৰুত্বপূর্ণ উপপাদ্যৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিছো। এই অধ্যায়টিত আমি চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ ধাৰণাটো আলোচনা কৰিম। ইয়াৰ লগতে অধ্যায়টিত আশ্রিত আৰু স্বতন্ত্র ঘটনা (dependent and independent events) বিষয়েও আলোচনা কৰা হ'ব। অধ্যায়টি পঢ়ি আপোনালোকে আশ্রিত আৰু স্বতন্ত্র ঘটনা গুণিতক উপপাদ্যৰ বিষয়েও জানিব পাৰিব। অধ্যায়টিত সম্ভাৱিতাৰ নিয়ম আৰু বেইজৰ উপপাদ্যৰ আলোচনাও সামৰি লোৱা হৈছে।

১১.৩ পৰিচয়

অধ্যায় ১০-ত আমি সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰাৰ পদ্ধতিবোৰ আলোচনা কৰিছো। ধৰা হ'ল, কোনো এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণত একেটা প্রতিদর্শ সমষ্টিৰ (sample space) পৰা আমি

দুটা ঘটনা লাভ কৰিছো। এতিয়া ইয়াৰে যিকোনো এটা ঘটনা আনটোৰ সম্ভাৱিতাত কিবা প্ৰভাৱ পেলাব নেকি? তলৰ উদাহৰণবোৰৰ সৈতে কথাটো পৰীক্ষা কৰি চাও আহক।

1. লুডো গুটি এটা দলিওৱাৰ যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণ

ধৰা হ'ল, S হৈছে প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি আৰু A হ'ল অযুগ্ম সংখ্যা ওলোৱা ঘটনা

$\therefore\ S=\{1,2,3,4,5,6\}$ আৰু $A=\{1,3,5\}$

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

এইবোৰ আন এটা ঘটনা ধৰি লোৱা হ'ল, B। B হ'ল সেইটো ঘটনা য'ত 3-তকৈ ডাঙৰ সংখ্যাবোৰ পোৱা যাব। অৰ্থাৎ $B=\{4,5,6\}$.

যেতিয়া আমি কওঁ যে, B ইতিমধ্যে ঘটিল, তেন্তে 3-তকৈ সৰু অথবা সমান সংখ্যাবোৰ পোৱাৰ ঘটনাটো ঘটা সম্ভৱ নহয়। অৰ্থাৎ, প্ৰতিদৰ্শন স্থানত লব্ধ উপাদনৰ সংখ্যা হ'ব মাত্ৰ 3 টা, যেনে $\{4,5,6\}$। এই তিনিওটা উপাদানৰ ভিতৰত দুটা $\{4,6\}$ হ'ল যুগ্ম সংখ্যা।

অৰ্থাৎ, আমি পালোঁ যে যদি ঘটনা B ইতিমধ্যে ঘটি যায়, তেন্তে $P(A)=\frac{2}{3}$। সেয়েহে, B ইতিমধ্যে ঘটি যোৱাৰ পাছত A-ৰ সম্ভাৱিতা হ'ব $P\left(\frac{A}{B}\right)$।

2. তিনিটা মুদ্ৰা দলিওৱাৰ যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণ

এই পৰীক্ষাৰ প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি হ'ল,

$$S=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}.$$

ধৰা হ'ল, E = অতি কমেও দুবাৰ 'টেইল' (T) ওলোৱা ঘটনা আৰু

F = প্ৰথম মুদ্ৰাটোৱে 'হেড' (H) দেখুওৱা ঘটনা

এতিয়া, ধৰা হ'ল, আমাক কোৱা হ'ল প্ৰথম মুদ্ৰাটোৱে 'হেড দেখুৱাইছে। অৰ্থাৎ, F ঘটনাটো ঘটিল। তেন্তে, এতিয়া আমি E ঘটনা ঘটাৰ সম্ভাৱিতা উলিয়াব লাগিব। F ঘটাৰ তথ্য জনাৰ লগে লগে আমি নিশ্চিত হ'লো যে প্ৰথম মুদ্ৰাটোৱে 'হেড' নেদেখুওৱা ফলাফলবোৰ E ৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয়ৰ সময়ত বিবেচনা কৰিব পৰা নাযাব। এই তথ্যই E ঘটনাৰ বাবে S সংহতিৰ পৰা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টিৰ পৰিমাণ কমাই F উপ-সংহতিৰ সমান কৰি তুলিলে। অন্য অৰ্থত, এই অতিৰিক্ত তথ্যৰ পৰা আমি গম পালো যে এই অৱস্থাটোক আমি এটা নতুন যাদৃচ্ছিক সম্পৰীক্ষা বুলি ধৰিব পাৰো য'ত প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টিত ঘটনা E-ৰ উপস্থিতিৰ অনুকূল ফলাফলবোৰহে কেৱল পোৱা যাব। অৰ্থাৎ, ঘটনা E-ৰ অনুকূল F প্ৰতিদৰ্শ ফলাফলটো হ'ব HTT। ইয়াৰ দ্বাৰা গম পোৱা গ'ল যে প্ৰতিদৰ্শ স্থান হিচাপে পৰীক্ষা কৰি চোৱাৰ পাছত E -ৰ সম্ভাৱিতা হ'ব $=\frac{1}{4}$। ঘটনা E -ৰ এই সম্ভাৱিতাকে E -ৰ চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতা বোলে [য'ত F ইতিমধ্যে সংঘটিত হৈছে]। ইয়াক P (E|F) চিহ্নৰে বুজোৱা হয়।

3. 52 খন তাচপাতৰ ডেক এটাৰ পৰা যিকোনো এখন পাত টনাৰ যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণ

ধৰা হ'ল আমি একাদিক্ৰমে পাত টানি এখন 'কুইন' পাত পালো। প্ৰথমবাৰ টানোতে

'কুইন' পাতখন পোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল $\frac{4}{52}$ । যদি দ্বিতীয়বাৰ পাত টনাৰ আগতে এই পাতখন পুনৰ ডেকত ৰখা নহয়, তেন্তে দ্বিতীয়বাৰ টানোতে 'কুইন' পাতখন পোৱাৰ সম্ভাৱনীয়তা প্ৰথম ঘটনাটোৰ ওপৰত নির্ভৰশীল হ'ব। এতিয়া, ডেকত মাত্ৰ 3 খন 'কুইন' পাত থাকিব। অর্থাৎ, দ্বিতীয়বাৰ টানোতে 'কুইন' পাত এখন পোৱাৰ সম্ভাৱিতাও হ'ল $\frac{3}{52}$ ।

ওপৰৰ উদাহৰণটোৰ পৰা আমি বুজিলো যে কোনো এক ঘটনাৰ সম্ভাৱনা ইতিমধ্যে ঘটি যোৱা আন এক ঘটনাৰ ওপৰত নির্ভৰশীল। সেয়েহে, E ঘটনাক এটা আশ্রিত ঘটনা বুলি কোৱা হয়, য'ত A ঘটাৰ সম্ভাৱনা ইতিমধ্যে ঘটি যোৱা F ঘটনাৰ ওপৰত নির্ভৰশীল। ইয়াক $P(E \mid F)$ চিহ্নৰে বুজোৱা হয়।

ওপৰৰ উদাহৰণবোৰৰ সহায়ত আমি তলত দিয়া ধৰণে চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা দাঙি ধৰিব পাৰো ঃ

E আৰু F হ'ল প্রতিদর্শ সমষ্টি S-ৰ সহায়ত লব্ধ দুটা ঘটনা।

ধৰা হ'ল, $P(F) > 0$, এতিয়া F ইতিমধ্যে ঘটি যোৱা ঘটনা হ'লে E-ৰ চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতা হ'ব $P(E \mid F)$ । ইয়াক তলত দিয়া ধৰণে গাণিতিকভাৱে প্রকাশ কৰা হ'ব ঃ

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, P(F) > 0$$

একেদৰে $P(F \mid E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}, P(E) > 0$

টোকা ঃ (1) $P(E \mid F)$ আৰু $P(F \mid E)$ -ক তলত দিয়া ধৰণেও প্রকাশ কৰিব পাৰি ঃ

$$P(E \mid F) = \frac{n(E \cap F)}{n(F)} \quad \text{আৰু} \quad P(F \mid E) = \frac{n(E \cap F)}{n(E)}.$$

(2) $P(E \mid F)$ -ক F ঘটনাটো ঘটি যোৱাৰ পাছত E ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা বুলি পঢ়া হয়।

চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ নিয়ম

(ক) যদি S প্রতিদর্শ সমষ্টিৰ E_1 আৰু E_2 যিকোনো দুটা ঘটনা হয় আৰু S-ৰ যিকোনো এটা ঘটনা A হয়, য'ত $P(A) \neq 0$, তেন্তে

$$P(E_1 \cup E_2 \mid A) = P(E_1 \mid A) + P(E_2 \mid A) - P(E_1 \cap E_2 \mid A)$$

আমি পাম, $P(E_1 \cup E_2 \mid A) = \frac{P((E_1 \cup E_2) \cap A)}{P(A)}$

$$= \frac{P(E_1 \cap A) \cup P(E_2 \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(E_1 \cap A) + P(E_2 \cap A) - P(E_1 \cap E_2 \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(E_1 \cap A)}{P(A)} + \frac{P(E_2 \cap A)}{P(A)} - \frac{P(E_1 \cap E_2 \cap A)}{P(A)}$$

$$= P(E_1 \mid A) + P(E_2 \mid A) - P(E_1 \cap E_2 \mid A)$$

(খ) $P(E' \mid F) = 1 - P(E \mid F)$

আমি পাম, $P(S \mid F) = 1$

$$\Rightarrow P(E' \cup E \mid F) = 1$$

$$\Rightarrow P(E' \mid F) + P(E \mid F) = 1$$

$$\Rightarrow P(E' \mid F) = 1 - P(E \mid F)$$

(গ) স্বতন্ত্র ঘটনা

যদি কোনো দুটা ঘটনাৰ অস্তিত্বই ইটোৱে সিটোক প্রভাৱিত নকৰে, তেন্তে তেনে ঘটনাক স্বতন্ত্র ঘটনা বোলে। ধৰা হ'ল, এটা মুদ্রা দলিয়াই চোৱা হ'ল। প্রথমবাৰ 'টছ' কৰোঁতে 'হেড' পোৱা ঘটনাটো দ্বিতীয়বাৰ 'টছ' কৰোতে 'হেড' পোৱা ঘটনাটোৰ প্রভাৱৰ পৰা মুক্ত অথবা স্বতন্ত্র। একে নিয়ম তাৰ পাছৰ 'টছ'বোৰৰ ক্ষেত্রতো প্রযোজ্য।

উদাহৰণ 1 ঃ এটা 52 খন তাচপাতৰ ডেকৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে এখন পাত টনা হ'ল।

ধৰা হ'ল, এচ (Ace) পাত ওলোৱাৰ ঘটনাক E-ৰে বুজোৱা হ'ল আৰু ক্লাব (club) পাত ওলোৱাৰ ঘটনাক F-ৰে বুজোৱা হ'ল। ইয়াত E আৰু F দুটা স্বতন্ত্র ঘটনা।

আশ্রিত ঘটনা

যদি কোনো এক ঘটনা আন এটা ঘটনাৰ উদ্ভৱ হোৱা কার্যক প্রভাৱিত কৰে, তেন্তে দ্বিতীয় ঘটনাটোক প্রথমটোৰ ওপৰত আশ্রিত ঘটনা বুলি কোৱা হয়। ওপৰৰ উদাহৰণটোত আমি যদি প্রথমবাৰ উলিয়াই অনা বলটো পুনৰ নভৰাও, তেন্তে ই বেগৰ ভিতৰত থকা বলবোৰৰ বিন্যাস সলনি কৰিব আৰু দ্বিতীয়বাৰ বল উলিওৱাৰ সময়ত সম্ভাৱিতাক প্রভাৱিত কৰিব। অর্থাৎ, দ্বিতীয়বাৰ 'এটা ৰঙা বল' উলিওৱা ঘটনাটো প্রথমবাৰ বল উলিওৱা (ৰঙা নাইবা বগা বল) ঘটনাটোৰ ওপৰত নির্ভৰশীল। একেদৰে, আমি যদি তাচপাতৰ ডেক এটাৰ পৰা পাত এখন টানো কিন্তু পুনৰ ডেকত নভৰাও, তেন্তে তাৰ পাছত যিমানবোৰ পাত টানিম তাৰ ফলাফল প্রথমবাৰৰ পাতখিলাৰ ওপৰত নির্ভৰশীল হ'ব।

উদাহৰণ ঃ দুটা সমান ডাইচ দলিওৱা হ'ল। প্রথম গুটিটোত 3 ওলাল। তাক E ঘটনা বুলি ধৰা হ'ল। F হ'ল যোগফল 6 হোৱা ঘটনা আৰু G হ'ল যোগফল 7 হোৱা ঘটনা। ইয়াত E আৰু F হ'ল দুটা আশ্রিত ঘটনা, কিন্তু E আৰু G হ'ল দুটা স্বতন্ত্র ঘটনা।

টোকা ঃ যদি ঘটনা A আৰু B স্বতন্ত্র। তেন্তে ইয়াৰে যিকোনো এটা সংঘটনৰ সম্ভাৱিতা হ'ল $P(E \mid F) = P(E)$ আৰু $P(F \mid E) = P(F)$।

১১.৪ সম্ভাৱিতা গুণিতক উপপাদ্য

এইবাৰ আমি স্বতন্ত্ৰ আৰু আশ্ৰিত ঘটনাৰ ক্ষেত্ৰত সম্ভাৱিতাৰ গুণিতক উপপাদ্য সম্পৰ্কে আলোচনা কৰিম।

স্বতন্ত্ৰ ঘটনাৰ বাবে সম্ভাৱিতাৰ গুণিতক উপপাদ্য

যদি, E আৰু F দুটা স্বতন্ত্ৰ ঘটনা হয়, তেন্তে দুয়োটা ঘটনা ঘটাৰ সম্ভাৱিতা প্ৰতিটোৰে একক সম্ভাৱিতাৰ পূৰণফলৰ সমান।

অৰ্থাৎ, $P(E \cap F) = P(E)P(F)$.

টোকা ঃ (1) এই উপপাদ্যটো তিনিটা অথবা ততোধিক স্বতন্ত্ৰ ঘটনাৰ ক্ষেত্ৰতো সমানে প্ৰযোজ্য। ধৰা হ'ল, E, F,G..... হ'ল স্বতন্ত্ৰ ঘটনা তেন্তে

$$P(E \cap F \cap G) = P(E)P(F)P(G).$$

(2) যদি E আৰু F স্বতন্ত্ৰ হয়, তেন্তে E আৰু F -ৰ পৰিপূৰকো স্বতন্ত্ৰ হ'ব।

অৰ্থাৎ, $P\left(\bar{E} \cap \bar{F}\right) = P\left(\bar{E}\right)P\left(\bar{F}\right)$

আশ্ৰিত ঘটনাৰ বাবে সম্ভাৱিতাৰ গুণিতক উপপাদ্য

যগি E আৰু F দুটা নিৰ্ভৰশীল ঘটনা হয়, অৰ্থাৎ কোনো এটা ঘটনাৰ অস্তিত্ব আনটোৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল হয়, তেন্তে A আৰু B ঘটাৰ সম্ভাৱনা হ'ল—

$$P(E \cap F) = P(E)P(F \mid E).$$

টোকা ঃ তিনিটা ঘটনা E, F, G -ৰ ক্ষেত্ৰত,

$P(E \cap F \cap G) = P(E)P(F \mid E)P(G \mid E \cap F)$ হ'ব। অৰ্থাৎ, E, F আৰু G সংঘটিত হোৱাৰ সম্ভাৱনা হ'ল E বাৰ সংঘটিত হোৱাৰ সমান য'ত F-ৰ সম্ভাৱিতা দিয়া আছে য'ত E সংঘটিত হৈছে, G সংঘটিত হোৱাৰ সম্ভাৱনাৰ সমান য'ত E আৰু F দুয়োটা সংঘটিত হৈছে।

বিস্তৃত উদাহৰণ

উদাহৰণ 1: ধৰা হ'ল, E আৰু F দুটা ঘটনা ইয়াত, $P(E) = 0.8$, $P(F) = 0.6$, $P(E \cap F) = 0.5$. এতিয়া, (i) $P(E \cup F)$ (ii) $P(F \mid E)$ আৰু (iii) $P(E \mid F)$-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ (i) $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

$$= 0.8 + 0.6 - 0.5$$
$$= 0.9$$

(ii) $P(F \mid E) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(E)} = \dfrac{0.5}{0.8} = \dfrac{5}{8}$

(iii) $P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{0.5}{0.6}=\frac{5}{6}$.

উদাহৰণ 2 : যদি $P(E)=0.5, P(F)=0.3$ আৰু $P(E\cap F)=0.15$ হয়, তেন্তে $P(E|F)$ৰ মান নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা অনুসৰি

$$P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$$

$$=\frac{0.15}{0.3}$$

$$=0.5$$

উদাহৰণ 3 : যদি $P(E)=0.9; P(F|E)=0.8,$ হয়, তেন্তে $P(E\cap F)$ৰ মান নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ : চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা অনুসৰি

$$P(F|E)=\frac{P(F\cap E)}{P(E)}$$

$$\Rightarrow P(F\cap E)=P(E).P(F|E)$$

$$=0.9\times 0.8$$

$$=0.72\cdot$$

উদাহৰণ 4 : 5 টা ৰঙা আৰু 7 টা বগা বল থকা মোনা এখনৰ পৰা 2 টা বগা বল একাদিক্রমে উলিয়াব পৰাৰ সম্ভাৱনা নির্ণয় কৰক। মোনাৰ পৰা উলিওৱা বলকেইটা পুনৰ মোনাত ভৰোৱা নহয়।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, E হ'ল প্রথমবাৰত বগা বল উলিওৱা ঘটনা F হ'ল দ্বিতীয়বাৰত বগা বল উলিওৱা ঘটনা

$$\therefore P(F\cap E)=P(E).P(F|E)$$

ইয়াত, $P(E)=\frac{7}{12}, P(F|E)=\frac{6}{11}$

$$\therefore P(F\cap E)=\frac{7}{12}.\frac{6}{11}=\frac{7}{22}.$$

উদাহৰণ 5 : কোনো এটা পৰীক্ষাত 30% ছাত্রই গণিত বিষয়ত, 20% ছাত্রই ৰসায়ন বিজ্ঞান বিষয়ত আৰু 10% ছাত্রই দুয়োটা বিষয়ত অনুতীর্ণ হৈছে। এজন ছাত্রক যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা হ'ল— যদি ছাত্রজনে ৰসায়ন বিজ্ঞানত অনুতীর্ণ হৈছে বুলি জনা যায় তেন্তে তেওঁৰ গণিতত অনুতীর্ণ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, E হ'ল গণিতত অনুতীর্ণ হোৱাৰ ঘটনা

$$\therefore P(E)=30\%=0.3$$

ধৰা হ'ল, F হ'ল ৰসায়ন বিজ্ঞানত অনুতীর্ণ হোৱাৰ ঘটনা

$$\therefore P(F) = 20\% = 0.2$$

ধৰা হ'ল, $E \cap F$ হ'ল দুয়োটা বিষয়তে অনুতীর্ণ হোৱাৰ ঘটনা

$$P(E \cap F) = 10\% = 0.1$$

ৰসায়ন বিজ্ঞানত অনুতীর্ণ হোৱা বুলি জ্ঞাত ছাত্রজনৰ গণিতত অনুতীর্ণ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল—

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0.1}{0.2}$$

$$= 0.5 \cdot$$

উদাহৰণ 5 : এখন মোনাত 5 টা বগা আৰু 3 টা ক'লা বল আছে। দুটাবল একাদিক্রমে মোনাৰ পৰা উলিওৱা হ'ল। বলকেইটা পুনৰ ভৰোৱা নহ'ল। দুয়োটা বল ক'লা ৰঙৰ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ প্রথমবাৰতে ক'লা বল এটা উলিওৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল—

$$P(E) = \frac{3}{5+3} = \frac{3}{8}$$

প্রথম বলটো ক'লা উলিওৱাৰ পাছত দ্বিতীয় বলটোও ক'লা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল—

$$P(F \mid E) = \frac{2}{5+2} = \frac{2}{7}$$

∴ দুয়োটা বলেই ক'লা ৰঙৰ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল—

$$P(E \cap F) = P(A) \times P(F \mid E) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28} .$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

প্রশ্ন নং ১ঃ দুটা সমান মুদ্রা দলিওৱা হ'ল। ইয়াৰে এটা হ'লেও 'মুণ্ড' হ'ব বুলি কোৱা হ'ল। দুয়োটা 'মুণ্ড' হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা বাকচত 8 টা ৰঙা আৰু 4 টা বগা বল আছে। আমি যাদৃচ্ছিকভাৱে তিনিটা বল উলিয়ালো। বলকেইটা পুনৰ বাকচত ভৰোৱা নহ'ব। তিনিওটা বলেই ৰঙা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ এটা 'ডাই' দলিওৱা হ'ল। যদি 'ডাই'টো অযুগ্ম সংখ্যাত ৰৈ যায়, তেন্তে সংখ্যাটো এটা মৌলিক সংখ্যা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন নং ৪ঃ এটা পৰিয়ালত দুটা সন্তান আছে। ইয়াৰে অতি কমেও এজনী ছোৱালী বুলি কোৱা হৈছে। দুয়োটা সন্তানেই ছোৱালী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

১১.৫ পূর্ণ সম্ভাৱিতা

পূর্ণ সম্ভাৱিতাৰ উপপাদ্য ঃ যদি E_1 আৰু E_2 দুটা পাৰস্পৰিকভাৱে অখণ্ড (mutually exclusive and exhaustive) ঘটনা আৰু $P(E_1) \neq 0$, $P(E_2) \neq 0$ হয়, তেন্তে S-ৰ যিকোনো ঘটনা A-ৰ বাবে।

$$P(A) = P(E_1)P(A \mid E_1) + P(E_2)P(A \mid E_2)$$

প্ৰমাণ ঃ যিহেতু E_1 আৰু E_2 দুটা (mutually exclusive and exhaustive) ঘটনা, আমি পাম $E_1 \cup E_2 = S$ আৰু $E_1 \cap E_2 = \phi$.

$$\therefore A = A \cap S$$
$$= A \cap (E_1 \cup E_2)$$
$$= (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \quad \text{.... (1)}$$

আকৌ, $(A \cap E_1) \cap (A \cap E_2) = A \cap (E_1 \cap E_2)$
$$= A \cap \phi$$
$$= \phi$$

$\therefore$ $A \cap E_1$ আৰু $A \cap E_2$ হ'ল দুটা (mutually exclusive and exhaustive) ঘটনা।

$\therefore$ (1)-ৰ পৰা আমি পালোঁ

$$P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2)$$
$$= P(E_1)P(A \mid E_1) + P(E_2)P(A \mid E_2)$$ [সম্ভাৱিতাৰ গুণিতক উপপাদ্য]

যদি E_1, E_2 আৰু E_3 তিনিটা পৰস্পৰৰ ঘটনা (mutually exclusive and exhaustive) ঘটনা হয়, আৰু $P(E_1) \neq 0, P(E_2) \neq 0$ আৰু $P(E_3) \neq 0$ হয়, (তেন্তে, S -ৰ যিকোনো ঘটনাৰ ক্ষেত্ৰত

$$P(A) = P(E_1)P(A \mid E_1) + P(E_2)P(A \mid E_2) + P(E_3)P(A \mid E_3)$$ হ'ব।

১১.৬ বেইজৰ উপপাদ্য

ওপৰৰ শিতানবোৰত আলোচনা কৰি অহা চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ ধাৰণাটোৱে কোনো এটা ঘটনাৰ সম্ভাৱিতাৰ বিষয়ে আগতীয়াকৈ ক'বলৈ আন এক ঘটনাৰ তথ্য বিচাৰ কৰি চায়। এই ধাৰণাটোক নতুন তথ্যৰ আধাৰত সম্ভাৱিতা সংশোধনৰ বাবে আৰু কোনো বিশেষ কাৰণত কোনো এক নির্দিষ্ট প্ৰভাৱ পৰিলক্ষিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰিবলৈকো ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি। এই সম্ভাৱিতাবোৰৰ সংশোধন প্ৰক্ৰিয়াটোকে বেইজৰ উপপাদ্য বুলি কোৱা হয়। 1763 চনত জন্ম লাভ কৰা টমাছ বেইজ (Thomas Bayes) হ'ল এই উপপাদ্যৰ জনক। এই উপপাদ্যৰ দ্বাৰা কোনো নির্দিষ্ট পূর্ববতী সম্ভাৱিতা সম্পর্কে ধাৰণা কৰি লৈ পৰৱর্তী সম্ভাৱিতাবোৰ লাভ কৰা হয়। সেয়েহে বেইজৰ উপপাদ্যক অনুৱর্তী সম্ভাৱিতা (Posteriori probabilities) বুলিও জনা যায়।

বেইজৰ উপপাদ্য অথবা নিয়ম

সত্যাপন ঃ ধৰা হ'ল $E_1, E_2, E_3, \cdots, E_n$ হ'ল এটা (mutually exclusive and collectively exhaustive) ঘটনাৰ n-সংখ্যক সংহতি। $P(E_1), P(E_2), P(E_3), \cdots, P(E_n)$ হ'ল ইয়াৰ অনুৰূপ সম্ভাৱিতা। যদি A আন এটা ঘটনা হয়, য'ত P(A) শূন্যৰ সমান নহয় আৰু ইয়াৰ অনুৱৰ্তী সম্ভাৱিতা $P(A \mid E_i)$ i =1, 2..., n বুলি জ্ঞাত, তেন্তে

$$P(E_i \mid A) = \frac{P(E_i)P(A \mid E_i)}{P(E_1)P(A \mid E_1) + P(E_2)P(A \mid E_2) + \cdots + P(E_n)P(A \mid E_n)}$$

অর্থাৎ, $$P(E_i \mid A) = \frac{P(E_i)P(A \mid E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A \mid E_i)}$$

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল, এটা যাদৃচ্ছিক সম্পৰীক্ষাটোৰ S হ'ল প্রতিদর্শ সমষ্টিৰ ঘটনা

$E_1, E_2, E_3, \cdots, E_n$ হ'ল $\quad \therefore S = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$

$$A = A \cap S \qquad [A \subset S]$$
$$= A \cap (E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n)$$
$$= (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup \cdots (A \cap E_n) \quad [\text{ বিতৰণ বিধি}]$$
$$\Rightarrow P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + \cdots + P(A \cap E_n)$$
$$= P(E_1)P(A \mid E_1) + P(E_2)P(A \mid E_2) + \cdots + P(E_n)P(A \mid E_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A \mid E_i) \quad \ldots. (1)$$

এতিয়া, $P(A \cap E_i) = P(A)P(E_i \mid A)$

$$\Rightarrow P(E_i \mid A) = \frac{P(A \cap E_i)}{P(A)}$$
$$= \frac{P(E_i)P(A \mid E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A \mid E_i)} \qquad [\text{ (1) ব্যৱহাৰ কৰি }]$$

টোকা ঃ (1) $P(E_1), P(E_2), \cdots, P(E_n)$ সম্ভাৱিতাক অগ্রৱর্তী সম্ভাৱিতা (a prori probabilites) বোলা হয়।

(2) $P(E_1 \mid A), P(E_2 \mid A), \cdots, P(E_n \mid A)$ সম্ভাৱিতাক অনুৱর্তী সম্ভাৱিতা (posteriori probabilities) বোলা হয়।

উদাহৰণ 1 : এখন মোনাত 6 টা ৰূপৰ আৰু 3 টা সোণৰ মুদ্রা আছে। আন এখন মোনাত 4 টা ৰূপৰ আৰু 5 টা সোণৰ মুদ্রা আছে। যাদৃচ্ছিকভাৱে এখন মোনা বাছনি কৰা হ'ল আৰু তাৰ পৰা মুদ্রা এটা বাহিৰ কৰা হ'ল। মুদ্রাটো ৰূপৰ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, E = প্ৰথম মোনাখন বাছনি কৰাৰ ঘটনা

F = দ্বিতীয় মোনাখন বাছনি কৰাৰ ঘটনা

A = ৰূপৰ মুদ্ৰা এটা বাহিৰ কৰাৰ ঘটনা

$\therefore P(E)=\frac{1}{2}$ আৰু $P(F)=\frac{1}{2}$

লগতে, $P(E|A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ আৰু $P(F|A)=\frac{4}{9}$

$\therefore$ প্ৰয়োজনীয় সম্ভাৱিতা $P(A)=P(E)P(A|E)+P(F)P(A|F)$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{6}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}$$

$$=\frac{10}{18}$$

$$=\frac{5}{9}$$

উদাহৰণ 2 : এটা বাকচত দুটা মুদ্ৰা আছে। এটা মুদ্ৰাৰ দুয়োপিঠি 'হেড' আৰু আনটো মুদ্ৰাৰ এটা পিঠি 'হেড' আৰু আনটো 'টেইল'। যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা মুদ্ৰা বাছনি কৰা হ'ল আৰু পিঠিখন পৰীক্ষা কৰা হ'ল। যদি পিঠিখন 'হেড' পোৱা হ'ল, তেন্তে আনখন পিঠিও 'হেড' হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল E = দুয়োপিঠি 'হেড' থকা মুদ্ৰাটো বাহিৰ কৰাৰ ঘটনা

F = এখন পিঠি 'হেড' আনখন 'টেইল' থকা মুদ্ৰাটো বাহিৰ কৰাৰ ঘটনা

A = দুয়োপিঠি 'হেড' থকা মুদ্ৰাটো বাহিৰ কৰাৰ ঘটনা

এতিয়া আমি $P(E|A)$ নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।

ইয়াত, $P(E)=P(F)=\frac{1}{2}$

$$P(A|E)=1, P(A|F)=\frac{1}{2}$$

বেইজৰ উপপাদ্য মতে আমি পাম,

$$P(E|A)=\frac{P(E)P(A|E)}{P(E)P(A|E)+P(F)P(A|F)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times 1}{\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}.$$

উদাহৰণ 3 : ধৰা হ'ল, এটা কাৰখানাত দুটা মেচিন আছে. পুৰণি তথ্য মতে মেচিন I-এ 20% সামগ্ৰী উৎপাদন কৰে আৰু মেচিন II-ই 80% সামগ্ৰী উৎপাদন কৰে। লগতে এই তথ্যও পোৱা গৈছে যে মেচিন I-এ উৎপাদন কৰা সামগ্ৰীবোৰৰ 6% আৰু মেচিন II-এ উৎপাদন কৰা সামগ্ৰীবোৰৰ 1% ত্ৰুটিপূৰ্ণ। যদি যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা ত্ৰুটিপূৰ্ণ সামগ্ৰী তুলি লোৱা যায়,তেন্তে সেইটো মেচিন I-এ উৎপাদন কৰা সামগ্ৰী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল E_1, E_2 হ'ল ক্ৰমে মেচিন I আৰু মেচিন II ই উৎপাদন কৰা সামগ্ৰী একোবিধ তুলি লোৱাৰ ঘটনা।

ধৰা হ'ল A হ'ল ত্ৰুটিপূৰ্ণ সামগ্ৰী এবিধ তুলি লোৱা ঘটনা।

আমি জানো যে, $P(E_1)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$, $P(E_2)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$

লগতে, আমি পাম $P(A|E_1)=\frac{6}{100}$, $P(A|E_2)=\frac{1}{100}$

বেইজৰ উপপাদ্যৰ পৰা, প্ৰয়োজনীয় সম্ভাৱিতা হ'ব—

$$P(E_1|A)=\frac{P(E_1).P(A|E_1)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)}$$

$$=\frac{\frac{1}{5}.\frac{6}{100}}{\frac{1}{5}.\frac{6}{100}+\frac{4}{5}.\frac{1}{100}}=\frac{6}{6+4}=0.6.$$

উদাহৰণ 4 : A, B আৰু C মেচিন 3 টাই বোল্ট নিৰ্মাণ কৰে। A-ই B-ৰ দুগুণ বোল্ট আৰু B আৰু C-এ সমান বোল্ট নিৰ্মাণ কৰে। A আৰু B-এ নিৰ্মাণ কৰা বোল্টৰ 2% আৰু C-এ নিৰ্মাণ কৰা বোল্টৰ 4% ত্ৰুটিপূৰ্ণ। আটাইবোৰ বোল্ট এঠাইত দমাই থোৱা হৈছে। তাৰ মাজৰ পৰা টো বোল্ট তুলি অনা হ'ল। বোল্টটো ত্ৰুটিপূৰ্ণ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল E_1, E_2, E_3 হ'ল ক্ৰমে A, B আৰু C মেচিনে নিৰ্মাণ কৰা বোল্টৰ ঘটনা। ইয়াত আমি সম্ভাৱিতাক পূৰ্ণ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰিব লাগিব।

B আৰু C-এ সমান সংখ্যক বোল্ট নিৰ্মাণ কৰে। A-ই B-ৰ দুগুণ বোল্ট নিৰ্মাণ কৰে।

$\therefore\ P(E_1)=50\%=\frac{50}{100}=0.50$

$P(E_2)=25\%=\frac{25}{100}=0.25$

$P(E_3)=25\%=\frac{25}{100}=0.25$

ধৰা হ'ল D হ'ল ত্রুটিপূর্ণ বোল্টটো তুলি অনা ঘটনা

$$P(D \mid E_1) = \frac{2}{100} = 0.02$$

$$P(D \mid E_2) = \frac{2}{100} = 0.02$$

$$P(D \mid E_3) = \frac{4}{100} = 0.04$$

সম্ভাৱিতাৰ পূর্ণ উপাপাদ্যৰ পৰা আমি পাওঁ—

$$\begin{aligned} P(D) &= P(E_1)P(D \mid E_1) + P(E_2)P(D \mid E_2) + P(E_3)P(D \mid E_3) \\ &= 0.5 \times 0.02 + 0.25 \times 0.02 + 0.25 \times 0.04 \\ &= 0.0250 \end{aligned}$$

উদাহৰণ 5 : মোনা A-ত 2 টা বগা আৰু 3 টা ৰঙা বল আছে। মোনা B-ত 4 টা বগা আৰু 5 টা ৰঙা বল আছে। এখন মোনাৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা বল উলিওৱা হ'ল। বলটো ৰঙা বুলি গম পোৱা গ'ল। বলটো মোনা B-ৰ পৰা উলিওৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি গম পালো যে মোনাৰ পৰা ৰঙা বল এটা উলিওৱা হৈছে। আমি মোনাখন B হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰিব লাগে।

ধৰা হ'ল, E_1 = মোনা A বাছনি কৰা ঘটনা

$$\therefore \quad P(E_1) = \frac{1}{2}$$

ধৰা হ'ল, E_2 = মোনা B বাছনি কৰা ঘটনা

$$\therefore \quad P(E_2) = \frac{1}{2}$$

ধৰা হ'ল, D = ৰঙা বল বাচনি কৰা ঘটনা

এতিয়া, মোনা A -ৰ পৰা ৰঙা বলটো বাছনি কৰাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল—

$$P(D \mid E_1) = \frac{3}{5}$$

একেদৰে, মোনা B -ৰ পৰা ৰঙা বলটো বাছনি কৰাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল

$$P(D \mid E_2) = \frac{5}{9}$$

আমি ৰঙা বলটো মোনা B-ৰ পৰা উলিওৱা হৈছে নেকি সেয়া পৰীক্ষা কৰিব লাগে। অর্থাৎ, $P(E_2 \mid D)$

বেইজৰ উপপাদ্যৰ পৰা—

$$P(E_2 \mid D) = \frac{P(E_2)P(D \mid E_2)}{P(E_1)P(D \mid E_1) + P(E_2)P(D \mid E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}}$$

$$= \frac{\frac{5}{18}}{\frac{3}{10}+\frac{5}{18}}$$

$$= \frac{\frac{5}{18}}{\frac{27+25}{90}}$$

$$= \frac{\frac{5}{18}}{\frac{52}{90}}$$

$$= \frac{25}{52}$$

উদাহৰণ 6 : বোল্ট নির্মাণকাৰী কাৰখানা এটাত মেচিন A, B, C -এ মুঠ বোল্টৰ ক্রমে 25%, 35% আৰু 40% নির্মাণ কৰে। মুঠ নির্মাণ সামগ্রীৰ মাজৰে ক্রমে 5%, 4% আৰু 2% হ'ল ত্রুটিপূর্ণ বোল্ট। যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা বোল্ট তুলি লোৱাৰ পাছত দেখা গ'ল বোল্টটো ত্রুটিপূর্ণ। বোল্টটো মেচিন B-এ নির্মাণ কৰাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, E_1, E_2, E_3 হ'ল ক্রমে A, B আৰু C মেচিনে বোল্ট নির্মাণ কৰা ঘটনা।

$$P(E_1) = 25\% = \frac{25}{100} = 0.25$$

$$P(E_2) = 35\% = \frac{35}{100} = 0.35$$

$$P(E_3) = 40\% = \frac{40}{100} = 0.40$$

ধৰা হ'ল, D হ'ল ত্রুটিপূর্ণ বোল্ট এটা তুলি লোৱা ঘটনা

$$\therefore\ P(D \mid E_1) = \frac{5}{100} = 0.05$$ ['A' মেচিনৰ ত্রুটিপূর্ণ বোল্ট]

$$P(D \mid E_2) = \frac{4}{100} = 0.04$$ ['B' মেচিনৰ ত্রুটিপূর্ণ বোল্ট]

$$P(D \mid E_3) = \frac{2}{100} = 0.02$$ ['C' মেচিনৰ ত্রুটিপূর্ণ বোল্ট]

এতিয়া, আমি উলিয়াব লাগে ত্রুটিপূর্ণ বোল্টটো মেচিন B-ৰ দ্বাৰা নির্মাণ কৰাৰ সম্ভাৱিতা, অর্থাৎ $P(E_2 \mid D)$।

বেইজৰ উপপাদ্য মতে,

$$P(E_2 \mid D) = \frac{P(E_2)P(D \mid E_2)}{P(E_1)P(D \mid E_1) + P(E_2)P(D \mid E_2) + P(E_3)P(D \mid E_3)}$$

$$= \frac{0.35 \times 0.04}{0.25 \times 0.05 + 0.35 \times 0.04 + 0.4 \times 0.02}$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল এটা কাৰখানাত 2 টা মেচিন আছে. লিখিত তথ্যৰ পৰা জনা গ'ল যে মেচিন I-এ 20% আৰু মেচিন II-ই 80% সামগ্রী উৎপাদন কৰে। লগতে ইয়াকো গম পোৱা গ'ল যে মেচিন I-এ উৎপাদন কৰা 6% আৰু মেচিন II-ই উৎপাদন কৰা 1% সামগ্রী ত্রুটিপূর্ণ হয়। এনে এবিধ ত্রুটিপূর্ণ সামগ্রী যাদৃচ্ছিকভাৱে তুলি অনা হ'ল। সামগ্রীবিধ মেচিন I-এ উৎপাদন কৰাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা কাৰখানাত থকা 3 টা মেচিন ক্রমে A, B আৰু C -এ মুঠ সামগ্রীৰ ক্রমে 60%, 30% আৰু10% উৎপাদন কৰে। মেচিনকেইটাৰ নিজস্ব উৎপাদনৰ পৰিমাণ শতকৰা হিচাপত ক্রমে 2%, 3% আৰু 4% । এবিধ সামগ্রী যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰাৰ পাছত ত্রুটিপূর্ণ পোৱা গ'ল। সামগ্রীবিধ মেচিন C-ৰ উৎপাদন হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান সেয়া নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ X মোনাখনত 2 টা বগা আৰু 3 টা ৰঙা বল আছে। Y মোনাখনত 4টা বগা আৰু 5 টা ৰঙা বল আছে। যিকোনো এখন মোনাৰ পৰা যিকোনো এটা বল উলিয়াই অনা হ'ল। বলটো ৰঙা। বলটো Y মোনাখনৰ পৰা উলিওৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান সেয়া নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ A কলহত 3 টা ৰঙা আৰু 4 টা বগা বল আছে। B কলহত 4 টা ৰঙা আৰু 5 টা বগা বল আছে। যিকোনো এটা কলহৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা বল উলিওৱা হ'ল। বলটো ৰঙা। বলটো B কলহৰ পৰা উলিওৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান সেয়া নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ এটা কাৰখানাৰ 3 টা উৎপাদন কেন্দ্র আছে। এই তিনিটা উৎপাদন I, II আৰু III-এ যথাক্রমে 20%, 30% আৰু 50% উৎপাদন কেন্দ্র কৰে। ত্রুটিপূর্ণ

সামগ্রী উৎপাদনৰ শতকৰা হাৰ হ'ল ক্রমে 15, 10 আৰু 2। এবিধ সামগ্রী যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছি লোৱাৰ পাছত ত্রুটিপূর্ণ পোৱা গ'ল। সামগ্রীবিধ উৎপাদন পন্থা I-ৰ দ্বাৰা উৎপাদিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?



১১.৭ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- যিকোনো দুটা ঘটনা E আৰু F-ৰ বাবে, **E** ঘটনা উদ্ভৱ হোৱাৰ সম্ভাৱিতাকে (য'ত F ইতিমধ্যে ঘটি গৈছে) চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতা, E-ৰ P(E|F) বোলে। ইয়াৰ গাণিতিক প্রকাশ হ'ল $P(E \mid F)=\frac{P(E \cap F)}{P(F)}$.
- যিকোনো দুটা ঘটনাৰ মাজৰে এটা উদ্ভৱ হোৱা অথবা নোহোৱা কার্যই যদি আনটোৰ ওপৰত কোনো প্রভাৱ নেপেলায় তেন্তে তাক **স্বতন্ত্র ঘটনা** বোলে। পৰস্পৰে পৰস্পৰক প্রভাৱিত কৰা ঘটনা **আশ্রিত ঘটনা** বোলে।
- যদি E আৰু F ঘটনা দুটা স্বতন্ত্র, $P(E)>0, P(F)>0$ হয়, তেন্তে $P(E \cap F)=P(E)P(F)$ আৰু $P(E \mid F)=P(E), P(F \mid E)=P(F)$.



১১.৮ অধিক জানিবলৈ

১) Rao. G. Shanker, Probability and Statistics, Universitis Press.

২) Statistics, R.S.N. Pillai and Bagavathi S. Chand and Company Ltd. New Delhi-110055.



১১.৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল

E = দুয়োটা মুদ্রা 'হেড' হোৱা ঘটনা

F = অতি কমেও এটা মুদ্রা 'হেড' হোৱা ঘটনা

এতিয়া, $P(E)=\frac{3}{4}, P(E\cap F)=\frac{1}{4}, P(F)=\frac{1}{4}$

$$\therefore P(E\mid F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}.$$

চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা ব্যৱহাৰ কৰি আমি পাম যে—

$$P(E\cap F)=P(F)P(E\mid F)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}.$$

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ i = 1; 2; 3, ধৰা হ'ল E_i = i-তম বলটো ৰঙা হোৱাৰ ঘটনা

এতিয়া, $P(E_1\cap E_2\cap E_3)=P(E_1)P(E_2\mid E_1)P(E_3\mid E_1E_2)$

$$=\frac{8}{12}.\frac{7}{11}.\frac{6}{10}=\frac{14}{55}.$$

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এটা ডাই ঘূৰি থকাৰ সময় প্রতিদর্শ সমষ্টি S হ'ল $=\{1,2,3,4,5,6\}$

ধৰা হ'ল, $E=$ অযুগ্ম সংখ্যা ওলোৱা ঘটনা $=\{1,3,5\}$

F = মৌলিক সংখ্যা ওলোৱা ঘটনা $=\{2,3,5\}$

Then, $E\cap F=\{3,5\}$

$\therefore P(E)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}, P(F)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ আৰু $P(E\cap F)=\frac{1}{3}.$

P (অযুগ্ম সংখ্যা এটা পোৱাৰ সময়তে মৌলিক সংখ্যা)

= P (মৌলিক সংখ্যা | অযুগ্ম সংখ্যা)

$=P(E\mid F)$

$=P(E\mid F)$

$$=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত প্ৰদত্ত প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি S হ'ল $=\{(b,b),(b,g),(g,b),(g,g)\}$

ধৰা হ'ল, E = দুয়োটা সন্তান ছোৱালী হোৱাৰ ঘটনা

F = অতি কমেও এজনী ছোৱালী সন্তান থকা ঘটনা

এতিয়া, $E=\{(g,g)\}$ আৰু $F=\{(b,g),(g,b),(g,g)\}$

$E\cap F=\{(g,g)\}$

$\therefore P(E)=\frac{3}{4}, P(E\cap F)=\frac{1}{4}$

$\therefore$ প্ৰয়োজনীয় সম্ভাৱিতা হ'ল $P(E\mid F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}$$

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল, E_1, E_2 হ'ল যথাক্ৰমে মেচিন I আৰু II-ৰ দ্বাৰা উৎপাদিত সামগ্ৰীৰ মাজৰ পৰা সামগ্ৰী তুলি লোৱা ঘটনা।

ধৰা হ'ল A = ত্ৰুটিপূৰ্ণ সামগ্ৰী তুলি লোৱা ঘটনা

আমি পালো, $P(E_1)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}, P(E_2)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$

লগতে আমি পালো, $P(A\mid E_1)=\frac{6}{100}, P(A\mid E_2)=\frac{1}{100}$

বেইজৰ উপপাদ্য অনুসৰি নিৰ্ণিত সম্ভাৱিতা হ'ল—

$$P(E_1\mid A)=\frac{P(E_1)P(A\mid E_1)}{P(E_1)P(A\mid E_1)+P(E_2)P(A\mid E_2)}$$

$$=\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{6}{100}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{6}{100}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{100}}=\frac{6}{6+4}=0.6.$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল E, F, G হ'ল যথাক্ৰমে মেচিন A, B, C-এ উৎপাদন কৰা সামগ্ৰী বাছনি কৰাৰ ঘটনা।

এতিয়া আমি পাম, $P(E)=\frac{60}{100}=0.6, P(F)=\frac{30}{100}=0.3, P(G)=\frac{10}{100}=0.1$

ধৰা হ'ল, D = যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা কিন্তু ত্রুটিপূর্ণ সামগ্রী পোৱা ঘটনা।

এতিয়া,

$$P(D \mid E) = \frac{2}{100} = 0.02, P(D \mid F) = \frac{3}{100} = 0.03, P(D \mid G) = \frac{4}{100} = 0.04$$

বেইজৰ উপপাদ্য প্রয়োগ কৰি আমি পাম,

$$P(G \mid D) = \frac{P(G)P(D \mid G)}{P(E)P(D \mid E) + P(F)P(D \mid F) + P(G)P(D \mid G)}$$

$$= \frac{(0.1)(0.04)}{(0.6)(0.02) + (0.3)(0.03) + (0.1)(0.04)}$$

$$= \frac{0.004}{0.012 + 0.009 + 0.004}$$

$$= \frac{0.004}{0.025}$$

$$= 0.16 .$$

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল

E_1 = X মোনাৰ পৰা বল উলিওৱা ঘটনা

E_2 : = Y মোনাৰ পৰা বল উলিওৱা ঘটনা

A = বলটো ৰঙা হোৱা ঘটনা

ইয়াত $P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$

লগতে, $P(A \mid E_1)$ = P (X মোনাৰ পৰা ৰঙা বল উলিওৱা ঘটনা)

$$= \frac{3}{5}$$

$P(A \mid E_2)$ = P (Y মোনাৰ পৰা ৰঙা বল উলিওৱা ঘটনা)

$$= \frac{5}{9}$$

বেইজৰ উপপাদ্য অনুসৰি আমি পাম,

$$P(E_2 \mid A) = \frac{P(E_1)P(A \mid E_1)}{P(E_1)P(A \mid E_1) + P(E_2)P(A \mid E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{5}{9}}{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{9}} = \frac{25}{52} .$$

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নির্ণিত সম্ভাৱিতা $=\frac{28}{45}$ [বেইজৰ উপপাদ্য অনুসৰি]

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ বেইজৰ উপপাদ্য অনুসৰি,

$$P(E_1 \mid A)=\frac{P(E_1)P(A \mid E_1)}{P(E_1)P(A \mid E_1)+P(E_2)P(A \mid E_2)}$$

$$=\frac{0.2\times 0.15}{0.2\times 0.15+0.3\times 0.10+0.5\times 0.02}$$

$$=0.069\cdot$$



১১.১০ আৰ্হি প্রশ্ন

প্রশ্ন ১ঃ E আৰু F এনে দুটা ঘটনা য'ত $P(E)=\frac{1}{2}, P(F)=\frac{1}{3}$ আৰু $P(E\cap F)=\frac{1}{4}$। তলত দিয়া সম্ভাৱিতাবোৰ নির্ণয় কৰক। (i) $P(E \mid F)$,(ii) $P(E\cup F)$ আৰু (iii) $P(E' \mid F')$।

প্রশ্ন ২ঃ তিনিগৰাকী ব্যক্তি, যথাক্রমে A, B আৰু C -এ কাৰখানাত যথাক্রমে $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}$ অনুপাতত কেঁচামাল যোগান ধৰে। তেওঁলোকে যোগান ধৰা কেঁচামালৰ ক্রমে $5\%,6\%,8\%$ ত্রুটিপূর্ণ। মুঠ যোগানৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে এবিধ কেঁচামাল বাছি লোৱা হ'ল। কেঁচামালবিধ A নাইবা B নাইবা C -এ যোগান ধৰাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন ৩ঃ দেখাত একে তিনিটা মুদ্রাৰ মাজৰে এটাৰ দুয়োখন পিঠি একে বাকী মুদ্রা দুটা টছ কৰিলে 'হেড' ওলোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল ক্রমে $\frac{1}{3}$ আৰু $\frac{2}{3}$। যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছি লোৱা মুদ্রা এটা টছ কৰাৰ পাছত 'হেড' ওলাল। মুদ্রাটোৰ দুয়োটা পিঠি একে হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৪ঃ অসমৰ এখন কলেজত কামৰূপ, নগাঁও আৰু যোৰহাট জিলাৰ পৰা অহা ছাত্রৰ সংখ্যা হ'ল যথাক্রমে 50%, 30% আৰু 20%। এই ছাত্রবোৰৰ মাজৰে জিলা ক্রম অনুসৰি 80%, 60% আৰু 40% ছাত্রই ধূতি পিন্ধে। ছাত্রবোৰৰ মাজৰ পৰা এজন ছাত্রক যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা হ'ল। তেওঁ ধূতি পিন্ধে। ছাত্রজন কামৰূপ জিলাৰ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন ৫ঃ X, Y আৰু Z ৰে'লগাড়ী তিনিখনে মুঠ যাত্রীৰ যথাক্রমে 25%, 35% আৰু 40%

অনা-নিয়া কৰে। অহা-যোৱা কৰা যাত্রীবোৰৰ ভিতৰত ৰে'লগাড়ীৰ ক্রম অনুসৰি 5%, 4% আৰু 3% মহিলা যাত্রী আছে। আটাইকেইখন ৰে'লগাড়ীৰ সর্বমুঠ যাত্রীৰ মাজৰ পৰা এগৰাকী যাত্রীক যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা হ'ল। যাত্রীগৰাকী মহিলা। প্রমাণ কৰা যে তেওঁ X নাইবা Y নাইবা Z ৰে'লগাড়ীৰ যাত্রী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা যথাক্রমে $\frac{25}{69}, \frac{28}{69}$ আৰু $\frac{16}{69}$ ।

প্রশ্ন ৬ঃ ল'ৰা-ছোৱালীৰ তিনিটা দল আছে। প্রথম দলত 3 জনী ছোৱালী আৰু এটা ল'ৰা আছে। দ্বিতীয় দলত 2 জনী ছোৱালী আৰু 2 টা ল'ৰা আছে। তৃতীয় দলত এজনী ছোৱালী আৰু 3 টা ল'ৰা আছে। প্রতিটো দলৰ পৰা এজনক যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা হ'ল। এজনী ছোৱালী আৰু 2 টা ল'ৰা বাছনি কৰাৰ সম্ভাৱিতা কিমান নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৭ঃ এখন মোনাত 5 টা বগা আৰু 7 টা ৰঙা বল আছে। যাদৃচ্ছিকভাৱে একেৰাহে দুবাৰ বল উলিওৱা হ'ল। এটা বল বগা আৰু এটা বল ৰঙা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৮ঃ এখন দৌৰ প্রতিযোগিতাত দুগৰাকী দৌৰবিদৰ বিজয়ৰ সম্ভাৱনা ক্রমে $\frac{1}{3}$ আৰু $\frac{1}{5}$ । দুয়োগৰাকীয়েই বিজয়ী নোহোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন ৯ঃ ভালদৰে মিহলাই লোৱা 52 খিলা তাচপাতৰ ডেক এটাৰ পৰা তলত দিয়া ধৰণে তাচপাত টানি উলিওৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক—

(i) এখনৰঙা কার্ড অথবা এখন এছ অথবা দুয়োটা।

(ii) এখন ডায়মণ্ড কার্ড অথবা এখন এছ অথবা দুয়োটা।

(iii) কিং অব ডায়মণ্ড কার্ড অথবা কিং অব হার্ট কার্ড অথবা দুয়োটা।

প্রশ্ন ১০ঃ 4 জন মানুহে 52 খিলা তাচপাত খেলি আছে। মাত্র এজনে চাৱিওখিলা কিং কার্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

*** ***** ***

অধ্যায় ১২ ঃ যাদৃচ্ছিক চলক আৰু সম্ভাৱিতা বণ্টন (RANDOM VARIABLES AND PROBABILITY DISTRIBUTION)

অধ্যায় গাঁথনি

১২.১ উদ্দেশ্য

১২.২ পৰিচয়

১২.৩ যাদৃচ্ছিক চলক

  ১২.৩.১ বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক

  ১২.৩.২ অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক

১২.৪ যাদৃচ্ছিক চলকৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন

  ১২.৪.১ যাদৃচ্ছিক চলকৰ মাধ্য আৰু প্রসৰণ

১২.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১২.৬ অধিক জানিবলৈ

১২.৭ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১২.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

১২.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- যাদৃচ্ছিক চলক সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- যাদৃচ্ছিক চলকৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

১২.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

তিনিটা মুদ্রা নিক্ষেপ কৰা হ'ল। কিমানটা মুণ্ড পৰিল, — সেয়া হয়তো কোনোবাই জানিব বিচাৰিব পাৰে। সেইদৰে দুটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰা হ'ল। লুডুগুটি দুটাত ওলোৱা বিন্দুকেইটাৰ যোগফলনো কি সেয়া কোনোবাই জানিব বিচাৰিব পাৰে। প্রত্যেক ক্ষেত্রতেই ফলৰ (outcome) লগত এটা বাস্তৱ সংখ্যা জড়িত হৈ আছে। যি নিয়মে প্রত্যেক ফলৰ লগত এটা বাস্তৱ সংখ্যা সংযোগ কৰে। তাক যাদৃচ্ছিক চলক (random variable) বোলে।

১০.৩ যাদৃচ্ছিক চলক (RANDOM VARIABLES)

ধৰা হ'ল এটা প্ৰদত্ত যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ (random experiment) লগত জড়িত S এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি (sample space) অৰ্থাৎ S এটা ফলৰ সংগ্ৰহ।

ধৰা হ'ল $\omega \in S$ অৰ্থাৎ ω এটা ফল।

যি নিয়ম X অৰ অধীনত S অৰ **প্ৰতিটো** মৌল ω এটা অদ্বিতীয় (unique) বাস্তৱ সংখ্যা X(ω) ৰ লগত যুক্ত হয় তাক যাদৃচ্ছিক চলক বোলে। দেখা গ'ল যে যাদৃচ্ছিক চলক এটা বাস্তৱ-মানবিশিষ্ট ফলন X, যিয়ে S অৰ প্ৰত্যেক ω কে এটা অদ্বিতীয় বাস্তৱ সংখ্যা X(ω)ৰ লগত যুক্ত কৰে।

তিনিটা মুদ্ৰা নিক্ষেপ কৰা হ'ল।

ধৰা হ'ল এই যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ লগত জড়িত প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টিটো S। গতিকে

S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

তলৰ ফলনটো লোৱা হ'ল

X : $S \to IR$, য'ত IR হ'ল বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি আৰু

X(w) = ω ত থকা মুণ্ডৰ সংখ্যা, $\omega \in S$

$\therefore$ X (HHH) = 3, X(HHT) = 2, X(HTH) = 2, X(THH) = 2

X(HTT) = 1, X(THT) = 1, X(TTH) = 1, X(TTT) = 0

ইয়াত X এটা যাদৃচ্ছিক চলক।

স্পষ্টতঃ পৰিসৰ (X) = {0, 1, 2, 3}

১২.৩.১ বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক (Discrete Random Variable)

যি যাদৃচ্ছিক চলকে সসীম সংখ্যক মান বা গণনীয়ভাৱে অসীম সংখ্যক মান লয়, তাক বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক (discrete rancom variable) বোলে।

উপৰিউক্ত উদাহৰণটো বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলকৰ উদাহৰণ। এই ক্ষেত্ৰত যাদৃচ্ছিক চলক X এ চাৰিটা মান লয়, যথা 0, 1, 2, 3।

১২.৩.২ অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক (Continuours Random Variable)

যি যাদৃচ্ছিক চলকে দুটা প্ৰদত্ত সীমাৰ মাজত যিকোনো মান লয়, তেনে যাদৃচ্ছিক চলকক অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক (continuous random variable) বুলি কোৱা হয়।

ধৰা হ'ল ইলেক্‌ট্ৰিক বাল্‌বৰ সৰ্বোচ্চ আয়ুস 2000 ঘণ্টা। অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক হ'ল $X(w) = \{x : 0 \le x \le 2000\}$

১২.৪ যাদৃচ্ছিক চলকৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন (PROBABILITY DISTRIBUTION OF RANDOM VARIABLES)

যদি এটা যাদৃচ্ছিক চলকৰ মানবোৰ অনুৰূপ সম্ভাৱতাৰ সৈতে দিয়া থাকে, তেনেহ'লে এই বর্ণনাটোক যাদৃচ্ছিক চলকটোৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন (probabity distribution) বুলি কোৱা হয়।

ধৰা হ'ল এট যাদৃচ্ছিক চলক X অৰ মানবোৰ $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ আৰু অনুৰূপ সম্ভাৱিতাবোৰ ক্ৰমে $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$। তেনেহ'লে X অৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন এনেধৰণৰ।

X	x_1	x_2	–	– – – –	x_n
P(x)	p_1	p_2	–	– – – – – –	p_n

টোকা ঃ ওপৰৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন তেতিয়াহে সংজ্ঞাৱদ্ধ হ'ব যেতিয়া

(a) প্ৰত্যেক $p_i \geq 0$

(b) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

উদাহৰণ 1: তিনিটা মুদ্ৰা একেলগে নিক্ষেপ কৰা হ'ল। ধৰা হ'ল X এটা যাদৃচ্ছিক চলক যাতে

X(w) = w ত থকা মুণ্ডৰ সংখ্যা।

X অৰ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো লিখক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টিটো S। গতিকে

S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

এতিয়া n(S) = 8

ইয়াত X = তিনিটা মুদ্ৰা নিক্ষেপ কৰাত পোৱা মুণ্ডৰ সংখ্যা

যিহেতু মুণ্ডৰ সংখ্যা 0 বা 1 বা 2 বা 3 হ'ব পাৰে, গতিকে X অৰ সম্ভৱপৰ মানবোৰ হ'ল 0, 1, 2, 3।

$\therefore$ P(X = 0) = P (এটাও মুণ্ড নাই)

= P(TTT) = $\frac{1}{8}$

P(X=1) = P (এটা মুণ্ড পোৱা যাব)

= P(HTT বা THT বা TTH) = $\frac{3}{8}$

P(X=2)= P (দুটা মুণ্ড পোৱা যাব)

= P(HHT বা HTH বা THH} = $\frac{3}{8}$

P(X=3) = P (তিনিটা মুণ্ড পোৱা যাব)

$= P(HHH) = \frac{1}{8}$

∴ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

টোকা ঃ ইয়াত প্রত্যেক $P_i > 0$

আকৌ $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

উদাহৰণ 2ঃ এটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰা হ'ল। যাদৃচ্ছিক চলক X অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$$X = \begin{cases} 1, \text{যদি ফলটো এটা যুগ্ম সংখ্যা হয়} \\ 0, \text{যদি ফলটো এটা অযুগ্ম সংখ্যা হয়} \end{cases}$$

X অৰ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো লিখক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল প্রতিদর্শ সমষ্টিটো S।

∴ S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

ইয়াত X এ দুটা মান 0, 1 লয়।

P(X = 0) = P (এটা অযুগ্ম সংখ্যা পোৱা যাব)

$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

P(X = 1) = P (এটা যুগ্ম সংখ্যা পোৱা যাব)

$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

∴ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1
P(X)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

প্রশ্ন নং ১ঃ এটা বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলকৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলকৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ দুটা মুদ্রা একেলগে নিক্ষেপ কৰা হ'ল। যাদৃচ্ছিক চলক X অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে।

X(w) = w ত থকা মুণ্ডৰ সংখ্যা

X অৰ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো লিখক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ এটা লুডুগুটি দুবাৰ নিক্ষেপ কৰা হয়। 'নিক্ষেপণ যুগ্ম সংখ্যা পোৱাটো সাফল্য বুলি বিবেচনা কৰা হয়।

প্রশ্ন নং ৫ঃ এটা লুডুগুটি দুবাৰ নিক্ষেপ কৰা হ'ল। 'নিক্ষেপত 4 অতকৈ ডাঙৰ সংখ্যা পোৱাটো' সাফল্য বুলি বিবেচনা কৰা হয়। সাফল্যৰ সংখ্যা সম্ভাৱিতা বণ্টন নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ ভালদৰে মিহলোৱা 52 খিলা তাচপাতৰ এটা জাপৰ পৰা দুখিলা একেলগে টানি অনা হ'ল। ৰাণীৰ সংখ্যাৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৭ঃ ভালদৰে মিহলোৱা 52 খিলা তাচপাতৰ এটা জাপৰ পৰা নসলোৱাকৈ দুখিলা টনা হ'ল। ফেইচ কার্ডৰ (face cards) সংখ্যাৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৮ঃ এটা কাৰখানাত প্রস্তুত কৰা বাল্ডৰ 20% খুঁট থকা যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা 4 টা বাল্‌বৰ এটা প্রতিদর্শত খুঁত থকা বাল্‌বৰ সংখ্যাৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন নির্ণয় কৰক।

১২.৪.১ যাদৃচ্ছিক চলকৰ মাধ্য আৰু প্রসৰণ (Mean and Variance of Random Variables)

ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক চলক X অৰ মানবোৰ $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, আৰু অনুৰূপ সম্ভাৱিতাবোৰ ক্রমে $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$।

প্রত্যেক $p_i \geq 0$, আৰু $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

X অৰ মাধ্যক μ ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \because \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

X অৰ মাধ্যক X অৰ প্রত্যাশিত মান (expected value) বুলিও কোৱা হয়। ইয়াক E(X) এৰে বুজোৱা হয়। গতিকে,

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

X অৰ প্রসৰণক σ^2 এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$\sigma^2 = \Sigma x_i^2 p_i - \mu^2$$

X অৰ প্রামাণিক বিচলনক σ ৰে বুজোৱা হয় আৰু ই হ'ল প্রসৰণৰ ধনাত্মক বর্গমূল।

উদাহৰণ 3ঃ অধোলিখিত সম্ভাৱিতা বণ্টনৰ মাধ্য আৰু প্ৰামাণিক বিচলন নিৰ্ণয় কৰক।

X	1	3	5	
P(X)	0.3	0.4	0.3	

সমাধান ঃ মাধ্য μ = 1 x 0.3 + 2 x 0.4 + 5 x 0.3

= 0.3 + 1.2 + 1.5

$SD = \sigma = \sqrt{\Sigma x_i^2 p_i - \mu^2}$

এতিয়া, $\Sigma x_i^2 p_i = 1\times 0.3 + 9\times 0.4 + 25\times 0.3$

= 0.3 + 3.6 + 7.5

= 11.4

$\therefore\ SD = \sigma = \sqrt{11.4 - 9} = \sqrt{2.4}$

উদাহৰণ 4ঃ এটা যাদৃচ্ছিক চলক X অৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন এনেধৰণৰ

X	0	1	2	3
P(X)	a	3a	3a	a

a ৰ মান নিৰ্ণয় কৰক। লগতে মাধ্য নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে $\Sigma p_i = 1$

$\therefore$ a + 3a + 3a + a = 1

বা, 8a = 1

$\therefore\ a = \frac{1}{8}$

দ্বিতীয় খণ্ড ঃ মাধ্য $\mu = \Sigma x_i p_i$

$$= 0\times\frac{1}{8} + 1\times\frac{3}{8} + 2\times\frac{3}{8} + 3\times\frac{1}{8}$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

উদাহৰণ 5ঃ এটা যাদৃচ্ছিক চলক X অৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন এনেধৰণৰ

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

X অৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰক। লগতে (i) P (X > 3), (ii) P(0 < X < 3)

সমাধান ঃ মাধ্য $\mu = 0\times\frac{1}{16} + 1\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{3}{8} + 3\times\frac{1}{4} + 4\times\frac{1}{16}$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 2$$

(i) $P(X > 3) = P(X = 4) = \frac{1}{16}$

(ii) $P(0 < X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2)$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2+3}{8} = \frac{5}{8}$$



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

প্রশ্ন নং ১ঃ এটা যাদৃচ্ছিক চলক X অৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন এনেধৰণৰ

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

মাধ্য আৰু প্রামাণিক বিচলন নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ঃ ভালদৰে মিহলোৱা 52 খিলা তাচপাতৰ এটা জাপৰ পৰা দুখিলা একেলগে টনা হ'ল। টেক্কাৰ (aces) সংখ্যাৰ মাধ্য আৰু প্রামাণিক বিচলন নির্ণয় কৰক।



১২.৫ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- ধৰা হ'ল এটা প্রদত্ত যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ লগত জড়িত S এটা প্রতিদর্শ সমষ্টি। যি নিয়ম X অৰ অধীনত S অৰ প্রতিটো মৌল ω এটা অদ্বিতীয় বাস্তৱ সংখ্যা X(ω)ৰ লগত যুক্ত হয় তাক যাদৃচ্ছিক চলক বোলে।
- যি যাদৃচ্ছিক চলকে সসীম সংখ্যক মান বা গণনীয়ভাৱে অসীম সংখ্যক মান লয়, তাক বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক বোলে।
- যি যাদৃচ্ছিক চলকে দুটা প্রদত্ত সীমাৰ মাজত যিকোনো মান লয়, তেনে যাদৃচ্ছিক চলকক অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক বুলি কোৱা হয়।
- যদি এটা যাদৃচ্ছিক চলকৰ মানবোৰ অনুৰূপ সম্ভাৱিতাৰ সৈতে দিয়া তাকে, তেনেহ'লে এই বর্ণনাটোক যাদৃচ্ছিক চলকটোৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন বুলি কোৱা হয়।
- ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক চলক X অৰ মানবোৰ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, আৰু অনুৰূপবোৰ সম্ভাৱিতাবোৰ ক্রমে $p_1, p_2, \ldots, p_n$।

  X অৰ মাধ্যক μ ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়। $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

  X অৰ প্রসৰণক σ^2 এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$\sigma^2 = \Sigma x_i^2 p_i - \mu^2$

X অৰ প্ৰামাণিক বিচলনক σ ৰে বুজোৱা হয় আৰু ই হ'ল প্ৰসৰণৰ ধনাত্মক বৰ্গমূল।



১২.৬ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

1) Statistical Methods by N.G. Das, McGraw Hill Education (India) Private Ltd. 2009
2) Probability and Statistics by G.Shanker Rao, University Press (India) private Ltd. 2011
3) Introduction to probability and Statistics by Seymour Lipschutz, John J.Schiller, Tata McGraw Hill Education private Ltd. 2005
4) Probability, Random Process, Queueing theory and Statistics by Dr. S.Rajasekaran, Prof.A.Chandrasekaran & G.Kavitha, Dhanam Publications, Chennai-60042
5) Probability and Statistics by G.Balaji, G.Balaji Publishers, Chennai-33



১২.৭ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলকৰ এটা উদাহৰণ ঃ

তিনিটা মুদ্ৰা একেলগে ভ্ৰক্ষেপ কৰা হ'ল। ধৰা হ'ল X এটা যাদৃচ্ছিক চলক যাতে X(w) = w ত থকা মুণ্ডৰ সংখ্যা।

এই ক্ষেত্ৰত যাদৃচ্ছিক চলক X এ চাৰিটা মান লয়, যথা, 0, 1, 2, 3। গতিকে এইটো এটা বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলকৰ এটা উদাহৰণ ঃ

ধৰা হ'ল ইলেক্ট্ৰিক বাল্বৰ সৰ্বোচ্চ আয়ুস 2000 ঘণ্টা। অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক হ'ল

$x(w) = \{x : 0 \le x \le 2000\}$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টিটো S।

$\therefore$ S = {HH, HT, TH, TT}

এতিয়া n(S) = 4

ইয়াত X = দুটা মুদ্রা নিক্ষেপ কৰোঁতে পোৱা মুণ্ডৰ সংখ্যা

যিহেতু মুণ্ডৰ সংখ্যা 0 বা 1 বা 2 হ'ব পাৰে, গতিকে X অৰ সম্ভাব্য মানবোৰ হ'ল 0, 1, 2।

$\therefore$ P(X = 0) = P (এটাও মুণ্ড পোৱা নাযায়)

$$= P(TT) = \frac{1}{4}$$

P (x = 1) = P (এটা মুণ্ড পোৱা যায়)

$$= P(HT \text{ বা } TH) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

P (x = 2) = P (দুটা মুণ্ড পোৱা যায়)

$$= P(HH) = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল যাদৃচ্ছিক চলকটো, অর্থাৎ সাফল্যৰ সংখ্যা X।

এটা লুডুগুটি দুবাৰ নিক্ষেপ কৰিলে সাফল্যৰ সংখ্যা 0 বা 1, বা 2 হ'ব পাৰে। গতিকে X এ 0, 1, 2 মান ল'ব পাৰে।

P(X = 0) = P (দুয়োটা নিক্ষেপতে সাফল্য নাই)

= P (প্ৰথম নিক্ষেণত সাফল্য নাই). P (দ্বিতীয় নিক্ষেপত সাফল্য নাই)

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

P(X = 1) = P (প্ৰথম নিক্ষেপত সাফল্য আৰু দ্বিতীয় নিক্ষেপত সাফল্য নাই) বা P (প্ৰথম নিক্ষেপত সাফল্য নাই আৰু দ্বিতীয় নিক্ষেপত সাফল্য)

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

P(X = 2) = P (দুয়োটা নিক্ষেপত সাফল্য)

=P(প্ৰথম নিক্ষেপত সাফল্য). P(দ্বিতীয় নিক্ষেপত সাফল্য)

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল যাদৃচ্ছিক চলকটো, অৰ্থাৎ সাফল্যৰ সংখ্যা X।

এটা লুডুগুটি দুবাৰ নিক্ষেপ কৰিলে, সাফল্যৰ সংখ্যা 0, বা 1, বা 2 হ'ব পাৰে।

$\therefore$ X এ 0, 1, 2 মান ল'ব পাৰে।

P(X = 0) = P (দুয়োটা নিক্ষেপতে সাফল্য নাই)

= P (প্ৰথম নিক্ষেপত সাফল্য নাই). P (দ্বিতীয় নিক্ষেপত সাফল্য নাই)

= P (4 অতকৈ সৰু বা সমান সংখ্যা পোৱা যায়). P (4 অতকৈ সৰু বা সমান সংখ্যা পোৱা যায়)

$$=\frac{4}{6}.\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$$

P(X = 1) = P (প্ৰথম নিক্ষেপত সাফল্য আৰু দ্বিতীয় নিক্ষেপত সাফল্য নাই) বা P (প্ৰথম নিক্ষেপত সাফল্য নাই আৰু দ্বিতীয় নিক্ষেপত সাফল্য)

= P (4 অতকৈ সৰু বা সমান এটা সংখ্যা পোৱা যায় আৰু 4 অতকৈ ডাঙৰ এটা সংখ্যা পোৱা যায়) বা P (4 তকৈ ডাঙৰ এটা সংখ্যা পোৱা যায় আৰু 4 অতকৈ সৰু বা সমান এটা সংখ্যা পোৱা যায়।

$$=\frac{4}{6}.\frac{2}{6}+\frac{2}{6}.\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$$

P(X = 2) = P (দুয়োটা নিক্ষেপত সাফল্য

= P(প্ৰথম নিক্ষেপত সাফল্য). P(দ্বিতীয় নিক্ষেপত সাফল্য)

$$=\frac{2}{6}.\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$$

$\therefore$ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2
P(X)	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ [তাচপাচৰ 52 খিলাৰ এটা জাপত 4খন ৰাণী (queen) কার্ড আছে।]

ধৰা হ'ল যাদৃচ্ছিক চলকটো, অৰ্থাৎ ৰাণীৰ সংখ্যা X।

দুখিলা তাচপাত টানিলে, ৰাণীৰ সংখ্যা 0, বা 1, বা 2 হ'ব পাৰে।

$\therefore$ X এ 0, 1, 2 মান ল'ব পাৰে।

P(X = 0) = P(এখনো ৰাণী পোৱা নাযায়।

= P(ৰাণী নোহোৱা 48খনৰ পৰা দুখন)

$$=\frac{^{48}C_2}{^{52}C_2}=\frac{188}{221}$$

P(X = 1) = P(এখন ৰাণী আৰু আনখন অ-ৰাণী কার্ড)

$$= \frac{{}^{4}C_1 . {}^{48}C_1}{{}^{52}C_2} = \frac{32}{221}$$

P(X = 2) = P(দুখন ৰাণী পোৱা যায়)

$$= \frac{{}^{4}C_2}{{}^{52}C_2} = \frac{1}{221}$$

∴ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2
P(X)	$\frac{188}{221}$	$\frac{32}{221}$	$\frac{1}{221}$

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ [গোলাম (jack), ৰাণী (queen) আৰু ৰজা (king) ফেইচ কার্ড (face card) বোলা হয়। গোলাম 4 খন, ৰাণী 4 খন, ৰজা 4 খন। মুঠতে 12 খন ফেইচ কার্ড আছে।]

ধৰা হ'ল যাদৃচ্ছিক চলকটো X অর্থাৎ ফেইচ কার্ডৰ সংখ্যা X।

দুখিলা কার্ড টানিলে, ফেইচ কার্ডৰ সংখ্যা 0, বা 1, বা 2 হ'ব পাৰে।

∴ X এ 0, 1, 2 মান ল'ব পাৰে।

P(X = 0) = P (এখনো ফেইচ কার্ড পোৱা নাযায়)

= P (40 খন অনা-ফেইচ কার্ডৰ পৰা দুখন)

$$= \frac{{}^{40}C_2}{{}^{52}C_2} = \frac{10}{17}$$

P(X = 1) = P (এখন ফেইচ কার্ড আৰু আনখন অনা-ফেইচ কার্ড পোৱা যায়)

$$= \frac{{}^{12}C_1 . {}^{40}C_1}{{}^{52}C_2} = \frac{80}{221}$$

P(X = 2) = P (দুখন ফেইচ কার্ড পোৱা যায়)

$$= \frac{{}^{12}C_2}{{}^{52}C_2} = \frac{11}{221}$$

∴ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2
P(X)	$\frac{10}{17}$	$\frac{80}{221}$	$\frac{11}{221}$

৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল বাল্‌বৰ সংখ্যা 100.

∴ খুঁত থকা বাল্‌বৰ সংখ্যা 20, আৰু খুঁত নথকা বাল্‌বৰ সংখ্যা 80।

ধৰা হ'ল যাদৃচ্ছিক চলকটো অর্থাৎ খুঁত থকা বাল্‌বৰ সংখ্যা X।

যিকোনো 4 টা বাল্‌ব লোৱাত, খুঁত থকা বাল্‌বৰ সংখ্যা 0, বা 1, বা 2, বা 3, বা 4 হ'ব

পাৰে।

∴ X এ 0, 1, 2, 3, 4 মান ল'ব পাৰে।

P(X = 0) = P (এটাও খুঁত থকা বাল্‌ব নাই)

$$= \frac{^{80}C_4}{^{100}C_4}$$

P(X = 1) = P(এটা খুঁত থকা বাল্‌ব আৰু তিনিটা খুঁত নথকা বাল্‌ব লোৱা হ'ল)

$$= \frac{^{20}C_1 \times ^{80}C_3}{^{100}C_4}$$

P(X = 2) = P(দুটা খুঁত থকা বাল্ড আৰু দুটা খুঁত নথকা বাল্‌ব লোৱা হ'ল)

$$= \frac{^{20}C_2 \times ^{80}C_2}{^{100}C_4}$$

P(X = 3) = P(তিনিটা খুঁত থকা বাল্‌ব আৰু এটা খুঁত নথকা বাল্ড লোৱা হ'ল)

$$= \frac{^{20}C_3 \times ^{80}C_1}{^{100}C_4}$$

P(X = 4) = P(চাৰিটা খুঁত থকা বাল্‌ব লোৱা হ'ল)

$$= \frac{^{20}C_4}{^{100}C_4}$$

∴ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{^{80}C_4}{^{100}C_4}$	$\frac{^{20}C_1 \times ^{80}C_3}{^{100}C_4}$	$\frac{^{20}C_2 \times ^{80}C_2}{^{100}C_4}$	$\frac{^{20}C_3 \times ^{80}C_1}{^{100}C_4}$	$\frac{^{20}C_4}{^{100}C_4}$

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

মাধ্য $\mu = \Sigma x_i p_i$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{10} = \frac{5+6+1}{10}$$

$$= \frac{12}{10} = 1.2$$

$$SD = \sigma = \sqrt{\Sigma x_i^2 p_i - \mu^2}$$

এতিয়া $\Sigma x_i^2 p_i$

$$= 0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+4\times\frac{3}{10}+9\times\frac{1}{30}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{6}{5}+\frac{3}{10}=\frac{5+12+3}{10}=\frac{18}{10}=1.8$$

$$\therefore\ SD=\sigma=\sqrt{1.8-1.44}=\sqrt{0.36}=0.6$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ [52 খিলা তাচপাতৰ এটা জাপত 4 খন টেক্কা থাকে।]

ধৰা হ'ল যাদৃচ্ছিক চলকটো অর্থাৎ টেক্কাৰ সংখ্যা X।

দুখিলা তাচপাত টানি অনাত, টেক্কাৰ সংখ্যা 0, বা 1, বা 2 হ'ব পাৰে।

$\therefore$ X এ 0, 1, 2 মান ল'ব পাৰে।

P(X = 0) = P(এখনো টেক্কা নাই)

= P(টেক্কা নথকা 48 খনৰ পৰা দুখন ল'ব লাগে)

$$=\frac{{}^{48}C_2}{{}^{52}C_2}=\frac{188}{221}$$

P(X = 1) = P(এখন টেক্কা আৰু এখন টেক্কা নহয়)

$$=\frac{{}^{4}C_1\cdot{}^{48}C_1}{{}^{52}C_2}=\frac{32}{221}$$

P(X = 2) = P(দুয়োখনেই টেক্কা)

$$=\frac{{}^{4}C_2}{{}^{52}C_2}=\frac{1}{221}$$

$\therefore$ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2
P(X)	$\frac{188}{221}$	$\frac{32}{221}$	$\frac{1}{221}$

মাধ্য $\mu=\Sigma x_i p_i=0\times\frac{188}{221}+1\times\frac{32}{221}+2\times\frac{1}{221}$

$$=\frac{32}{221}+\frac{2}{221}=\frac{34}{221}=\frac{2}{13}$$

$$SD=\sigma=\sqrt{\Sigma x_i p_i-\mu^2}$$

এতিয়া $\Sigma x_i p_i$

$$=0\times\frac{188}{221}+1\times\frac{32}{221}+4\times\frac{1}{221}=\frac{32}{221}+\frac{4}{221}$$

$$= \frac{36}{221}$$

$$\therefore\ SD = \sigma = \sqrt{\frac{36}{221} - \frac{4}{169}} = \sqrt{\frac{400}{2873}}$$



১২.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ এটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰা হ'ল। X হ'ল নিক্ষেপ কৰা বিন্দুৰ সংখ্যা। সম্ভাৱিতা বণ্টনটো লিখক আৰু মাধ্য নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ২ঃ এটা মুদ্ৰা দুবাৰ নিক্ষেপ কৰা হ'ল। মুণ্ডৰ সংখ্যাৰ মাধ্য আৰু প্ৰামাণিক বিচলন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ঃ এটা মুদ্ৰা তিনিবাৰ নিক্ষেপ কৰা হ'ল। মুণ্ডৰ সংখ্যাৰ মাধ্য আৰু প্ৰামাণিক বিচলন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ঃ এটা লুডুগুটি দুবাৰ নিক্ষেপ কৰা হ'ল। 'নিক্ষেপত 3 তকৈ ডাঙৰ সংখ্যা পোৱা' সাফল্য বুলি বিবেচনা কৰা হয়। সাফল্যৰ সংখ্যাৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন নিৰ্ণয় কৰক। লগতে সাফল্যৰ সংখ্যাৰ মাধ্য আৰু প্ৰামাণিক বিচলন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৫ঃ এযোৰ লুডুগুটিৰ চাৰিবাৰ নিক্ষেপত ডাবলেটৰ (doublet) সংখ্যাৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন নিৰ্ণয় কৰক।

[doublet শব্দৰ অৰ্থ এই সন্দৰ্ভত এনেধৰণৰ দুটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰাত যদি দুয়োটাতে একে সংখ্যক ফুট ওলায়, তাক doublet বুলি কয়।]

*** ***** ***

অধ্যায় ১৩ ঃ তাত্ত্বিক বণ্টন I (THEORETICAL DISTRIBUTION I)

অধ্যায় গাঁথনি

১৩.১ উদ্দেশ্য
১৩.২ পৰিচয়
১৩.৩ বার্ণ'লি অভিপ্রয়োগ
১৩.৪ দ্বিপদ (আৰু বার্ণ'লি) বণ্টন)
১৩.৫ পয়ছন বণ্টন
১৩.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১৩.৭ অধিক জানিবলৈ
১৩.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
১৩.৯ আৰ্হি প্রশ্ন

১৩.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- বার্ণ'লি অভিপ্রয়োগ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- দ্বিপদ (আৰু বার্ণ'লি) বণ্টন সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- পয়ছন বণ্টন সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

১৩.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

এইটো অধ্যায়ত আমি তাত্ত্বিক বিচ্ছিন্ন এক চলক বণ্টন (theoretical discrete univariate distribution) সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম। যাদৃচ্ছিক চলকৰ মানবোৰ নির্দিষ্ট সম্ভাৱিতাসহ কেনেদৰে বণ্টিত হয়, সেই বিধি ইয়াৰ সহায়ত পাব পাৰি। প্রধানকৈ আমি দুটা বণ্টন সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম, যথা দ্বিপদ বণ্টন (binomial distribution), আৰু পয়ছন বণ্টন (poisson distribution)।

১৩.৩ বার্ণ'লি অভিপ্রয়োগ (BERNOULLI TRIALS)

বার্ণ'লি অভিপ্রয়োগ (Bernoulli trial) এটা পৰীক্ষা আৰু ই তলৰ চর্তবোৰ সিদ্ধ কৰে।

1. সম্ভৱপৰ ফল মাত্র দুটা, যথা সফলতা (success), বা বিফলতা (failure) (এটা ঘটনাৰ সংগঠন হ'ল 'সফলতা', অসংঘটন হ'ল 'বিফলতা')।
2. প্রত্যেক অভিপ্রয়োগত সফলতাৰ (বা বিফলতাৰ) সম্ভাৱিতা একেই থাকে।
3. অভিপ্রয়োগবোৰ স্বতন্ত্র হ'ব লাগিব।

4. অভিপ্রয়োগৰ সংখ্যা সীমিত হ'ব লাগিব।
5. সফলতা আৰু বিফলতাৰ সম্ভাৱিতাৰ যোগফল 1।
6. সফলতা তথা বিফলতাৰ সম্ভাৱিতা একেবাৰে সৰু নহয়।

[গণিতজ্ঞ জেকব বার্ণ'লিৰ (Jacob Bernoulli, 1654-1705) নাম অনুসৰি এই অভিপ্রয়োগক বার্ণ'লি অভিপ্রয়োগ বুলি কোৱা হয়।]

১৩.৪ দ্বিপদ (আৰু বার্ণ'লি) বণ্টন (BINOMIAL (AND BERNOULLI) DISTRIBUTION)

ধৰা হ'ল n টা বার্ণ'লি অভিপ্রয়োগ আছে। ধৰা হ'ল যাদৃচ্ছিক চলক X এ এই অভিপ্রয়োগবোৰত সফলতাৰ সংখ্যা বুজায়। ধৰা হ'ল এটা অভিপ্রয়োগত সফলতা পোৱাৰ সম্ভাৱিতা p, আৰু বিফলতা পোৱাৰ সম্ভাৱিতা q। গতিকে $p + q = 1$। তেনেহ'লে $P(X=r)={}^nC_r\, p^r\, q^{n-r}$

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল S এ এটা সফলতা বুজায়, আৰু F এটা বিফলতা বুজায়।

n টা অভিপ্রয়োত r টা সফলতা পোৱা উপায় = ${}^nC_r$

$\therefore P(X = r) = {}^nC_r \,.\, P(\underbrace{SSS\ldots S}_{r\text{ বাৰ}}$ আৰু $\underbrace{FFF\ldots F}_{(n-r)\text{ বাৰ}})$

$$= {}^nC_r \,.\, \underbrace{P(S)\,P(S)\ldots P(S)}_{r\text{ বাৰ}} \,.\, \underbrace{P(F)\,P(F)\ldots P(F)}_{(n-r)\text{ বাৰ}}$$

$$= {}^nC_r\, p^r\, q^{n-r} \quad (P(S) = p,\ P(F) = q)$$

টোকা ঃ

1. $P(x = 0) = {}^nC_0\, p^0\, q^{n-0} = q^n$

   $P(x = 1) = {}^nC_1\, p\, q^{n-1}$

   $P(x = 2) = {}^nC_2\, p^2\, q^{n-2}$

   - - - - - - - - - - - -

   - - - - - - - - - - - -

   - - - - - - - - - - - -

   $P(x = n) = {}^nC_n\, p^n\, q^{n-n} = p^n$

   $\therefore$ বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2	.....	n
P(X)	q^n	${}^nC_1\ pq^{n-1}$	${}^nC_2\ p^2q^{n-2}$	.....	p^n

2. 0, 1, 2, ..., n সফলতাৰ সম্ভাৱিতাবোৰ ক্রমে q^n, ${}^nC_1\, pq^{n-1}$, ${}^nC_2\, p^2q^{n-2}$, ..., p^n, আৰু ইহঁত ক্রমে $(q + p)^n$ দ্বিপদ ৰাশিটোৰ ক্রমাগত পদ। সেইবাবে এই বণ্টনটোক দ্বিপদ বণ্টন বুলি কোৱা হয়।

3. সম্ভাৱিতাবোৰৰ যোগফল

   $= q^n, {}^nC_1\, pq^{n-1} + {}^nC_2\, p^2 q^{n-2} + \ldots . + p^n$

   $= (q + p)^n = 1$

4. X এ অকল অখণ্ড মান 0, 1, 2, ... , n লয়। গতিকে, দ্বিপদ বণ্টন এটা বিচ্ছিন্ন বণ্টন।

5. যিবোৰ যাদৃচ্ছিক চলকে দ্বিপদ বণ্টন মানি চলে, তেনে চলকক দ্বিপদ চলক (binomial variate) বুলি কয়।

6. আমি জানো যে

   $P(X = r) = {}^nC_r\, p^r\, q^{n-r}$

   গতিকে, দেখা গ'ল যে n, আৰু p(বা q) ৰ ওপৰত P(X = r) নির্ভৰ কৰে। এই ধ্ৰুৱক দুটাক প্ৰাচল (parameter) বুলি কয়। দ্বিপদ বণ্টনৰ প্ৰাচল দুটা।

মন্তব্য ঃ n = 1 হ'লে দ্বিপদ বণ্টনক বার্ণ'লি বণ্টন (binomial distribution) বুলি কয়।

উদাহৰণ 1 ঃ এটা মুদ্ৰাৰ 6 বাৰ উৎক্ষেপণত পোৱা মুণ্ডৰ সংখ্যাৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ যদি এটা মুদ্ৰা উৎক্ষেপণ কৰা হয়, S = { H, T}

$\therefore$ P (মুণ্ড পোৱা যায়) $= \frac{1}{2}$,

P (মুণ্ড পোৱা নাযায়) $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

ধৰা হ'ল X এ মুণ্ড সংখ্যাৰ যাদৃচ্ছিক চলক বুজায়।

6 টা অভিপ্ৰয়োগত মুণ্ডৰ সংখ্যা 0 বা 1 বা 2 বা 3 বা 4 বা 5 বা 6 হ'ব পাৰে।

$$P(X=0) = {}^6C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{6-0} = \frac{1}{64}$$

$$P(X=1) = {}^6C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = \frac{3}{32}$$

$$P(X=2) = {}^6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} = \frac{15}{64}$$

$$P(X=3) = {}^6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{6-3} = \frac{5}{16}$$

$$P(X=4) = {}^6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{6-4} = \frac{15}{64}$$

$$P(X=5) = {}^6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^{6-5} = \frac{3}{32}$$

$$P(X=6) = {}^6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^{6-6} = \frac{1}{64}$$

∴ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2	3	4	5	6
P(X)	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{64}$

টোকা ঃ সম্ভাৱিতাবোৰৰ যোগফল

$$=\frac{1}{64}+\frac{3}{32}+\frac{15}{64}+\frac{5}{16}+\frac{15}{64}+\frac{3}{32}+\frac{1}{64}=1$$

উদাহৰণ 2 ঃ এটা লুডুগুটি 3 বাৰ নিক্ষেপ কৰা হ'ল। অন্ততঃ এটা ছয় পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ যদি এটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰা হয়, S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6}

$$\therefore \text{ P (ছয় পোৱা যায়) } =\frac{1}{6}$$

$$\text{P (ছয় পোৱা নাযায়) } =1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

ধৰা হ'ল X এ ছয়ৰ সংখ্যা বুজোৱা যাদৃচ্ছিক চলক বুজায়।

3 টা অভিপ্রয়োগত ছয়ৰ সংখ্যা 0 বা 1 বা 2 বা 3 হ'ব পাৰে।

∴ অন্ততঃ এটা ছয় পোৱাৰ সম্ভাৱিতা

= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)

$$={}^3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1+\left(\frac{5}{6}\right)^{3-1}+\left(3\times\frac{1}{36}\times\frac{5}{6}\right)+\left(1\times\frac{1}{216}\times 1\right)$$

$$=\frac{25}{72}+\frac{5}{72}+\frac{1}{216}=\frac{75+15+1}{216}=\frac{91}{216}$$

দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য ঃ

ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ মান লয় আৰু ইয়াৰ সম্ভাৱিতা ক্ৰমে $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$। আমি জানো যে মাধ্য μ হ'ল

$$\mu=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

এতিয়া দ্বিপদ বণ্টনটো লোৱা হ'ল

$P(X = r) = {}^nC_r\, p^r\, q^{n-r}, \quad r = 0, 1, 2, 3, \ldots., n.$

$$\therefore \mu=\sum_{r=0}^{n} r\,.\,P(X=r)$$

$$=\sum_{r=0}^{n} r\,.\,{}^nC_r\, p^r q^{n-r}$$

$$= 0 + 1.{}^{n}C_1 pq^{n-1} + 2^{n}C_2 p^2 q^{n-2} + 3^{n}C_3 p^3 q^{n-3} + ...+ {}^{n}n.{}^{n}C_n p^n q^{n-n}$$

$$= 1.np.q^{n-1} + n(n-1)p^2 q^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2!} p^3 q^{n-3} + ... + np^n$$

$$= np\left[1.q^{n-1} + (n-1)pq^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2!} p^2 q^{n-3} + ... + p^{n-1} \right]$$

$$= np\left[{}^{n-1}C_0\, q^{n-1} + {}^{n-1}C_1\, q^{(n-1)-1}\ p + {}^{n-1}C_2\, q^{(n-1)-2} p2 + ... + {}^{n-1}C_{n-1}\, p^{n-1} \right]$$

$$= np(q+p)n-1$$

$$= np, \quad \therefore q + p = 1$$

দ্বিপদ বণ্টনৰ প্ৰসৰণ

আমি জানো যে প্ৰসৰণ σ^2 হ'ল

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 p_i - \mu^2$$

গতিকে উপৰিউক্ত দ্বিপদ বণ্টনৰ বাবে প্ৰসৰণ

$$= \sigma^2 = \sum_{r=0}^{n} r^2 p(X = r) - \mu^2$$

$$= \sum_{r=0}^{n} r^2\ {}^{n}C_r p^r q^{n-r} - n^2 p^2$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \left[r + r(r-1) \right] {}^{n}C_r p^r q^{n-r} - n^2 p^2$$

$$= \sum_{r=0}^{n} r\ .{}^{n}C_r p^r q^{n-r} + \sum_{r=0}^{n} r(r-1)^{n} C_r p^r q^{n-r} - n^2 p^2$$

$$= np + \sum_{r=2}^{n} r(r-1)\frac{n(n-1)}{r(r-1)}\ {}^{n-2}C_{r-2} p^r q^{r-2} - n^2 p^2$$

$$= np + n(n-1)p^2 \sum_{r=2}^{n}\ {}^{n-2}C_{r-2}\ p^{r-2} q^{n-r} - n^2 p^2$$

$$= np + n(n-1)p^2 - n^2 p^2$$

$$= np + n^2 p^2 - np^2 - n^2 p^2$$

$$= np - np^2$$

$$= np(1-p)$$

$$= npr, \quad \because\ p + q = 1$$

গতিকে প্ৰসৰণ $= \sigma^2 = npq$

$$\therefore\ SD = \sigma = \sqrt{npq}$$

দ্বিপদ বণ্টনৰ আৱৰ্তক সম্বন্ধ

আমি জানো যে

$$P(X=r)={}^nC_r p^r q^{n-r}$$

$$\therefore\ P(X=r+1)={}^nC_{r+1} p^{r+1} q^{n-r-1}$$

$$\therefore \frac{P(X=r+1)}{P(X=r)} = \frac{{}^nC_{r+1} p^{r+1} q^{n-r-1}}{{}^nC_r p^r q^{n-r}}$$

$$= \frac{n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!} \frac{r!(n-r)!}{n!} \cdot \frac{p}{q}$$

$$= \frac{n-r}{r+1} \cdot \frac{p}{q}$$

$$\therefore\ P(X=r+1) = \frac{(n-r)}{(r+1)} \cdot \frac{p}{q} \cdot P(X=r)$$

উদাহৰণ 3 ঃ এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য 5, আৰু প্রসৰণ 2.5। বণ্টনটো নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল X এটা দ্বিপদ বণ্টন আৰু ইয়াৰ প্রাচল n, আৰু p।

আমি জানো যে মাধ্য হ'ল np, আৰু প্রসৰণ হ'ল npq, q = 1 – p.

$\therefore$ np = 5, আৰু npq = 2.5

$\therefore$ 5q = 2.5 $\quad \Rightarrow q = \frac{2.5}{5} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ p = 1 – q = 1 – $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ n = 10

$\therefore$ বণ্টনটো হ'ল

$${}^{10}C_r \left(\frac{1}{2}\right)^r \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-r}, \qquad 0 \le r \le 10\,.$$

উদাহৰণ 4 ঃ এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য 4 আৰু প্রসৰণ $\frac{4}{3}$। $P(X \ge 1)$ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে np = 4, আৰু npq = $\frac{4}{3}$

$$\therefore\ 49 = \frac{4}{3} \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

$$\therefore\ p = 1 - q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore\ \frac{2n}{3} = 4 \quad \Rightarrow n = 6$$

এতিয়া $P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0)$

$$= 1 - {}^{6}C_0 p^0 q^{6-0} = 1 - q^6 = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6$$

$$= 1 - \frac{1}{729} = \frac{728}{729}$$

ধর্ম ঃ এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য, প্রসৰণতকৈ ডাঙৰ ঃ

› ¶ ± Ðধৰা হ'ল X এটা দ্বিপদ বণ্টন আৰু ইয়াৰ প্রাচল n আৰু p।

এতিয়া, মাধ্য = np

$> npq, \ \because \ 0 < q < 1$

= প্রসৰণ

উদাহৰণ 5 ঃ মাধ্য 5 আৰু প্রসৰণ 7.5 বিশিষ্ট এটা দ্বিপদ বণ্টন থাকিব পাৰেনে?

সমাধান ঃ আমি জানো যে এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য > প্রসৰণ।

এতিয়া 5 < 7.5

∴গতিকে, মাধ্য 5 আৰু প্রসৰণ 7.5 বিশিষ্ট দ্বিপদ বণ্টন থাকিব নোৱাৰে।



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

প্রশ্ন নং ১ঃ এটা মুদ্রাৰ 4 বাৰ উৎক্ষেপণত পোৱা পুচ্ছৰ সংখ্যাৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ঃ এযোৰ লুডুগুটিৰ তিনিবাৰ নিক্ষেপত পোৱা ডাবলেটৰ (doublets) সংখ্যাৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ এটা মুদ্রা 8 বাৰ উৎক্ষেপণ কৰা হ'ল। অন্ততঃ 2 টা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য 3, আৰু প্রসৰণ 2। দ্বিপদ বণ্টনটো নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ এটা দ্বিপদ যাদৃচ্ছিক চলক X অৰ বাবে n = 6, আৰু 9q(X = 4) = P(X = 2)। P নির্ণয় কৰক। লগতে বণ্টনটোৰ মাধ্য আৰু প্রসৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ ধৰা হ'ল X এটা দ্বিপদ চলক। ইয়াৰ মাধ্য, প্রামাণিক বিচলনৰ দুগুণ। যদি P(X = 0) = $\frac{1}{16}$, তেনেহ'লে X, অতি বেছি 1 হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৭ঃ এটা মুদ্রা 8 বাৰ উৎক্ষেপণ কৰা হ'ল। অন্ততঃ সাতটা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৮ঃ এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য 6 আৰু প্রামাণিক বিচলন $\sqrt{2}$ । বণ্টনটো লিখক।

প্রশ্ন নং ৯ঃ এটা দ্বিপদ চলক X অৰ প্রাচল দুটা n আৰু p, আৰু ইয়াৰ মাধ্য আৰু প্রসৰণ ক্রমে 16 আৰু 8। নির্ণয় কৰক (i) P (X = 0), (ii) P (X = 1),

(iii) $P(X \geq 2)$

প্রশ্ন নং ১০ঃ তলৰ উক্তি দুটা সত্যনে ? উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা প্রতিপন্ন কৰক।

(i) এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য 6, আৰু ইয়াৰ প্রামাণিক বিচলন 3।

(ii) এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য 5, আৰু ইয়াৰ প্রসৰণ 2।

১৩.৫ পয়ছন বণ্টন (POISSON DISTRIBUTION)

ফৰাচী গণিতজ্ঞ পয়ছনৰ নাম অনুসৰি (Simeon Devis Poisson, 1781-1840)

পয়ছন বণ্টন (Poisson distribution) হ'ল দ্বিপদ বণ্টনৰ সীমাৱস্থা আৰু ই তলৰ চর্তকেইটা মানি চলে।

1. অভিপ্রয়োগৰ সংখ্যা n অসীমভাৱে ডাঙৰ, অর্থাৎ, $n \to \infty$ ।
2. প্রত্যেকটো অভিপ্রয়োগৰ সফলতাৰ ধ্রুৱক সম্ভাৱিতা p অসীমভাৱে সৰু, অর্থাৎ, $p \to 0$
3. np = m (ধৰা হ'ল) সসীম।

আমি জানো যে

$$P(r) = P(X = r) = {}^nC_r p^r q^{n-r}$$

আমি জানো যে $P(0) = q^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} p(0) = \lim_{n\to\infty} q^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} (1-p)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n, \qquad \text{np = m অৰ পৰা}$$

$$= e^{-m}$$

আকৌ আমি জানো যে $\frac{P(r+1)}{P(r)} = \frac{n-r}{r+1} . \frac{p}{q}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{P(r+1)}{P(r)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-r}{r+1} . \frac{p}{q}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n-r}{r+1} . \frac{\frac{m}{n}}{1-\frac{m}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{r}{n}}{1-\frac{m}{n}} . \frac{m}{r+1} = \frac{m}{r+1}$$

এতিয়া, $\lim_{n\to\infty} P(r) = \lim_{n\to\infty} \frac{P(r)}{P(r-1)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{P(r-1)}{P(r-2)} \ldots\ldots \lim_{n\to\infty} \frac{P(1)}{P(0)} \cdot \lim_{n\to\infty} P(0)$

$$= \frac{m}{r} \cdot \frac{m}{r-1} \ldots\ldots \frac{m}{1} e^{-m}$$

$$= \frac{m^r e^{-m}}{r!}$$

সংজ্ঞা ঃ এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ পয়ছন বণ্টন মানি চলে বুলি কোৱা হয় যদি ই অঋণাত্মক মান লয় আৰু ইয়াৰ সম্ভাৱিতা এনেধৰণৰ।

$$P(X = x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}, x = 0,1,2,...m > 0$$
$$= 0 \text{ অন্যথাই}$$

টোকা ঃ

1. X এ অকল অখণ্ড মান 0, 1, 2, ... লয়। গতিকে, পয়ছন বণ্টন এটা বিচ্ছিন্ন বণ্টন।
2. পয়ছন বণ্টনত মাত্র এটা প্রাচল আছে, যথা m.

পয়ছন বণ্টন প্রয়োগ কৰিব পৰা কেইটামান উদাহৰণ

1. 100 খন ব্লেডৰ এটা পেকেটত থকা খুঁত থকা ব্লেডৰ সংখ্যা।
2. এখন কিতাপৰ প্রত্যেক পৃষ্ঠাত থকা ছপাৰ ভুলৰ সংখ্যা।
3. হৃদৰোগ অথবা সর্পদংশনত মৃত্যুৰ সংখ্যা।
4. কোনো বছৰত ভাৰতবর্ষত সংঘটিত বিমান দুর্ঘটনাৰ সংখ্যা।
5. দিনটোৰ ব্যস্ততাপূর্ণ সময়ত পথচাৰীয়ে ৰাজআলি পাৰ হোৱা ঠাইৰে পাৰ হৈ যোৱা কাৰৰ (car) সংখ্যা।

পয়ছন বণ্টনৰ মাধ্য

মাধ্য = μ

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x P(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-m} m m^{x-1}}{x(x-1)!}$$

$$= m e^{-m} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{m^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= m e^{-m} \left[1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \ldots . \infty \right]$$

$$= m e^{-m} e^{m}$$

$$= m$$

পয়ছন বণ্টনৰ প্ৰসৰণ

প্ৰসৰণ $= \sigma^2$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 P(X = x) - \mu^2$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{e^{-m}\ m^x}{x!} - m^2$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \left(x(x-1)\frac{e^{-m}\ m^x}{x!} + \frac{x e^{-m}\ m^x}{x!} \right) - m^2$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-m}\ m^x}{x(x-1)(x-2)!} + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x e^{-m}\ m^x}{x!} - m^2$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-m}\ m^2 m^{x-2}}{(x-2)!} + m - m^2$$

$$= e^{-m} m^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{m^{x-2}}{(m-2)!} + m - m^2$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x e^{-m}\ m^x}{x!} - m^2 = e^{-m} m^2 \left[1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \ldots\ldots\infty \right] + m - m^2$$

$$= e^{-m} m^2 e^{m} + m - m^2$$

$$= m^2 + m = m^2 = m$$

টোকা ঃ পয়ছন বণ্টনৰ মাধ্য

= প্ৰসৰণ

= m

পয়ছন বণ্টনৰ আৱৰ্তক সম্বন্ধ

আমি জানো যে $P(X = x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!},\ x = 0, 1, 2, \ldots\ldots\infty$

$$\therefore P(X = x+1) = \frac{e^{-m} m^{x+1}}{(x+1)!}$$

$$\therefore \frac{P(X = x+1)}{P(X = x)} = \frac{e^{-m} m^{x+1}}{(x+1)!} \frac{x!}{e^{-m} m^x}$$

$$= \frac{m}{x+1}$$

$$\therefore\ P(X=x+1)=\frac{m}{x+1}P(X=x)$$

উদাহৰণ 6 ঃ এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ পয়ছন বণ্টন মানি চলে, আৰু P(X = 0) = P(X = 1) = a। বণ্টনটোৰ মাধ্য নির্ণয় কৰক। লগতে a ৰ মান নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো $P(X=x)=\frac{e^{-m}m^{x}}{x!}$

এতিয়া, P(X = 0) = P (X = 1), (দিয়া আছে)

$$\therefore\ \frac{e^{-m}m^{x}}{0!}=\frac{e^{-m}m^{1}}{1!}$$

$$\therefore m=1$$

অর্থাৎ, মাধ্য = 1

আকৌ P (X = 0) = a

বা, $e^{-m} = a$

বা, $e^{-1} = a$

অর্থাৎ, $a=\frac{1}{e}$

উদাহৰণ 7 ঃ এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ পয়ছন বণ্টন মানি চলে, আৰু P(X = 1) = 2P(X = 2)। নির্ণয় কৰক P(X = 0), $P(X\geq 0)$ ।

সমাধান ঃ P(X = 1) = 2P(X = 2), দিয়া আছে

$$\therefore\ \frac{e^{-m}m^{1}}{1!}=2\,\frac{e^{-m}m^{2}}{2!}$$

বা, m = 1

$$\therefore P(X=0)=\frac{e^{-1}1^{0}}{0!}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

$$P(X\geq 0)$$
$$=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+....$$
$$=e^{-1}+\frac{e^{-1}}{1!}+\frac{e^{-1}}{2!}+\frac{e^{-1}}{3!}+\frac{e^{-1}}{4!}+.....$$
$$=e^{-1}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+.....\right)$$
$$=e^{-1}\ e$$
$$=e^{0}=1$$

উদাহৰণ 8 ঃ 6 টা মুদ্রা 6400 বাৰ উৎক্ষেপণ কৰা হ'ল। পয়ছন বণ্টন ব্যৱহাৰ কৰি r বাৰ 6 টা

মুণ্ড পোৱাৰ মোটামুটি সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ এই ক্ষেত্রত n = 6400

p = 6 টা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা

$$= \frac{1}{26}$$

$$\therefore\ m = np = \frac{6400}{2^6} = \frac{6400}{64} = 100$$

$$\therefore\ P(X = r) = \frac{e^{-m} m^r}{r!}$$

$$= \frac{e^{-100}\, 100^r}{r!}$$



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ পয়ছন বণ্টন মানি চলে আৰু P(X = 1) = P(X = 2)। P(X = 3) নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ পয়ছন বণ্টন মানি চলে আৰু P(X = 2) = 3 P(X = 3)। X, অন্ততঃ এক হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ তলৰ উক্তিটো সত্য হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

এটা পয়ছন বণ্টনৰ মাধ্য 3, আৰু প্রামাণিক বিচলন 4।

প্রশ্ন নং ৪ঃ এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ পয়ছন বণ্টন মানি চলে, আৰু P(X = 2) = 9P(X = 4)। X অৰ মাধ্য নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ পয়ছন বণ্টন মানি চলে, আৰু P(X = 2) = P(X = 3)। X অৰ প্রসৰণ নির্ণয় কৰক।



১৩.৬ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- বার্ণ'লি অভিপ্রয়োগ এটা পৰীক্ষা আৰু ই তলৰ চর্তবোৰ সিদ্ধ কৰে।
  1. সম্ভৱপৰ ফল মাত্র দুটা, যথা সফলতা বা বিফলতা (এটা ঘটনাৰ সংঘটন হ'ল 'সফলতা', অসংঘটন হ'ল 'বিফলতা')।
  2. প্রত্যেক অভিপ্রয়োগত সফলতাৰ (বা বিফলতাৰ) সম্ভাৱিতা একেই থাকে।
  3. অভিপ্রয়োগবোৰ স্বতন্ত্র হ'ব লাগিব।
  4. অভিপ্রয়োগৰ সংখ্যা সীমিত হ'ব লাগিব।
  5. সফলতা আৰু বিফলতাৰ সম্ভাৱিতাৰ যোগফল 1।

6. সফলতা তথা বিফলতাৰ সম্ভাৱিতা একেবাৰে সৰু নহয়।

- ধৰা হ'ল n টা বাৰ্ণ'লি অভিপ্ৰয়োগ আছে। ধৰা হ'ল যাদৃচ্ছিক চলক X এ এই অভিপ্ৰয়োগবোৰত সফলতাৰ সংখ্যা বুজায়। ধৰা হ'ল এটা অভিপ্ৰয়োগত সফলতা পোৱাৰ সম্ভাৱিতা p, আৰু বিফলতা পোৱাৰ সম্ভাৱিতা q। গতিকে p + q = 1। তেনেহ'লে
  $P(X = r) = {}^{n}C_{r}\, p^{r}\, q^{n-r}$
  ইয়াক দ্বিপদ বণ্টন বুলি কোৱা হয়।
- n = 1 হ'লে দ্বিপদ বণ্টনক বাৰ্ণ'লি বণ্টন বুলি কয়।
- এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য np, আৰু প্ৰসৰণ npq।
- পয়ছন বণ্টন হ'ল দ্বিপদ বণ্টনৰ সীমাৱস্থা, আৰু ই তলৰ চৰ্তকেইটা মানি চলে।
  1. অভিপ্ৰয়োগৰ সংখ্যা n অসীমভাৱে ডাঙৰ, অৰ্থাৎ, $n \to \infty$ ।
  2. প্ৰত্যেকটো অভিপ্ৰয়োগৰ সফলতাৰ ধ্ৰুৱক সম্ভাৱিতা p অসীমভাৱে সৰু, অৰ্থাৎ, $p \to 0$ ।
  3. np = m, (ধৰা হ'ল) সসীম।
- এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ পয়ছন বণ্টন মানি চলে বুলি কোৱা হয় যদি ই অঋণাত্মক মান লয় আৰু ইয়াৰ সম্ভাৱিতা এনেধৰণৰ

$$P(X = x)\begin{cases} = \dfrac{e^{-m} m^{x}}{x\,!}, & x = 0, 1, 2, \ldots, m > 0 \\ = 0 \end{cases}$$

- পয়ছন বণ্টনৰ মাধ্য অন্যথাই
  = প্ৰসৰণ
  = m



১৩.৭ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

1) Statistical Methods by N.G. Das, McGraw Hill Education (India) Private Ltd. 2009
2) Probability and Statistics by G.Shanker Rao, University Press (India) private Ltd. 2011
3) Introduction to probability and Statistics by Seymour Lipschutz, John J.Schiller, Tata McGraw Hill Education private Ltd. 2005
4) Probability, Random Process, Queueing theory and Statistics by Dr. S.Rajasekaran, Prof.A.Chandrasekaran & G.Kavitha, Dhanam Publications, Chennai-60042

5) Probability and Statistics by G.Balaji, G.Balaji Publishers, Chennai-33



১৩.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ যদি এটা মুদ্রা উৎক্ষেপণ কৰা হয়, S = {H, T}

$\therefore$ P (পুচ্ছ পোৱা যায়) $\frac{1}{2}$

P (পুচ্ছ পোৱা নাযায়) $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

ধৰা হ'ল যাদৃচ্ছিক চলক X এ পুচ্ছৰ সংখ্যা বুজায়। চাৰিটা অভিপ্রয়োগত পুচ্ছৰ সংখ্যা বুজায়।

চাৰিটা অভিপ্রয়োগত পুচ্ছৰ সংখ্যা 0 বা 1 বা 2 বা 3 হ'ব পাৰে।

$$P(X=0) = {}^4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-0} = \frac{1}{16}$$

$$P(X=1) = {}^4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=2) = {}^4C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=3) = {}^4C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=4) = {}^4C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-4} = \frac{1}{16}$$

$\therefore$ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ [ডাবলেট (doublet) শব্দৰ অর্থ এই সন্দর্ভত এনেধৰণৰ— দুটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰাত যদি দুয়োটাতে একে সংখ্যক ফুট ওলায়, তাক doublet বুলি কয়।]

যদি এযোৰ লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰা হয়, তেনেহ'লে 36 টা ফল পোৱা যাব।

S = { (1, 2), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), ..., (6, 1), (6, 2), (6, 3),

(6, 4), (6, 5), (6, 6)}

গতিকে n(s) = 36

সম্ভৱপৰ ডাবলেটবোৰ হ'ল (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6).

অর্থাৎ ডাবলেটৰ সংখ্যা 6.

$\therefore$ P (এটা ডাবলেট পোৱা যায়) $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$\therefore$ P (ডাবলেট পোৱা নাযায়) $= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

3 টা অভিপ্রয়োগত ডাবলেটৰ সংখ্যা 0 বা 1 বা 2 বা 3 হ'ব পাৰে।

$$P(X=0) = {}^3C_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$P(X=1) = {}^3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72}$$

$$P(X=2) = {}^3C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{5}{6} = \frac{5}{72}$$

$$P(X=3) = {}^3C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}$$

$\therefore$ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ যদি এটা মুদ্রা উৎক্ষেপণ কৰা হয়, S = {H, T}

$\therefore$ P (মুণ্ড পোৱা যায়) $= \frac{1}{2}$

P (মুণ্ড পোৱা নাযায়) $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore P(X=r) = {}^nC_r p^r q^{n-r}$

$$= {}^8C_r\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{8-r} = {}^8C_r\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$\therefore$ P (অন্ততঃ দুটা মুণ্ড পোৱা যায়)

$= P(X \geq 2)$

$= 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$

$$= 1 - \left[{}^{8}C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + {}^{8}C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^8 \right]$$

$$= 1 - \left[\frac{1}{256} + \frac{8}{256} \right]$$

$$= 1 - \frac{9}{256}$$

$$= \frac{247}{256}$$

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল দ্বিপদ চলকটো X।

দিয়া আছে মাধ্য = np = 3 (1)

প্রসৰণ = npq = 2 (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা, 3q = 2

$$\therefore\ q = \frac{2}{3}$$

$$\therefore\ p = 1 - q = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

আকৌ (1) অৰ পৰা, $\frac{n}{3} = 3$

$$\therefore\ n = 9$$

∴ বণ্টনটো হ'ল

$$P(X = r) = {}^{9}C_r \left(\frac{1}{3}\right)^r \left(\frac{2}{3}\right)^{9-r}, \qquad r = 0, 1, 2, 3, \ldots, 9.$$

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে

9p (x = 4) = p(x = 2)

বা, 9 ${}^{6}C_4\ p^4\ q^{6-4}$ = ${}^{6}C_2\ p^2\ q^{6-2}$, (n = 6 দিয়া আছে)

বা, $9p^2 = q^2$, $({}^{6}C_4 = {}^{6}C_2)$

বা, 3p = q

বা, 3p = 1 – p

বা 4p = 1

$$\therefore\ p = \frac{1}{4} \qquad \therefore\ q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \text{ মাধ্য } = np = 6 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

প্রসৰণ $= 6 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে

মাধ্য = 2 (প্রামাণিক বিচলন)

বা, $np = 2\sqrt{npq}$

বা, $n^2 p^2 = 4npq$

বা, np = 4q (1)

আকৌ, $P(X = 0) = \frac{1}{16}$ (দিয়া আছে)

$\therefore q^n = \frac{1}{16}$

বা, $q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ বা $q^n = \left(\frac{1}{4}\right)^2$

$\therefore$ যদি $q = \frac{1}{2},\ n = 4$ বা $q = \frac{1}{4},\ n = 2$

যদি $q = \frac{1}{2},\ n = 4$ তেনেহ'লে (1) অৰ পৰা

$4p = 4 \times \frac{1}{2}$ or $p = \frac{1}{2}$. $\therefore q = 1 - p = \frac{1}{2}$, যিটো সত্য।

যদি $q = \frac{1}{4},\ n = 2$ তেনেহ'লে (1) অৰ পৰা

$2p = 4 \times \frac{1}{4}$ বা 2p = 1 বা $p = \frac{1}{2}$

$\therefore\ q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ যিটো সত্য নহয়।

$\therefore\ q = \frac{1}{4},\ n = 2$ গ্ৰহণযোগ্য নহয়।

$\therefore n = 4,\ q = \frac{1}{4},\ p = \frac{1}{2}$

$\therefore$ P (X অৰ মান অতি বেছি 1)

$\therefore$ P(X = 0) + P(X = 1)

$= {}^4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-0} + {}^4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$$= \frac{1}{16} + \frac{4}{16}$$

$$= \frac{5}{16}$$

৭ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ যদি এটা মুদ্রা উৎক্ষেপণ কৰা হয়, S = {H, T}

$\therefore$ P (মুণ্ড পোৱা যায়) $= \frac{1}{2}$

P (মুণ্ড পোৱা নাযায়) $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore\ p = \frac{1}{2},\ \ q = \frac{1}{2}$

ধৰা হ'ল যাদৃচ্ছিক চলক X এ মুণ্ডৰ সংখ্যা বুজায়।

8 টা অভিপ্রয়োগত মুণ্ডৰ সংখ্যা 0 বা 1 বা 2 বা 3 বা 4 বা 5 বা 6 বা 7 বা 8 হ'ব পাৰে।

$\therefore$ P (অন্ততঃ 7 টা মুণ্ড পোৱা যায়)

$$= P(X = 7) + P(X = 8)$$

$$= {}^8C_7\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^{8-7} + \left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^{8-8}$$

$$= 8 \times \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^8}$$

$$= \frac{8}{256} + \frac{1}{256}$$

$$= \frac{9}{256}$$

৮ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে np = 6 (1)

$$\sqrt{npq} = \sqrt{2}$$

$$\therefore\ npq = 2$$

বা 6q = 2

$$\therefore q = \frac{1}{3}$$

$$\therefore\ p = 1 - q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ (1)অৰ পৰা $\frac{2n}{3} = 6$ বা n = 9

$$\therefore P(X = r) = {}^9C_r\left(\frac{2}{3}\right)^r\left(\frac{1}{q}\right)^{q-r}, \qquad r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9$$

৯ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে np = 16, (1)

npq = 8 (2)

$\therefore 16q = 8$ বা $q = \frac{1}{2}$

$\therefore p = 1 - q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ (1)অৰ পৰা, $\frac{n}{2} = 16$ বা n = 32

(i) $P(X = 0) = {}^{32}C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{32-0}$

$= \frac{1}{2^{32}}$

(ii) $P(X = 1) = {}^{32}C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{32-1}$

$= 32 \cdot \frac{1}{2^{32}} = \frac{2^5}{2^{32}} = \frac{1}{2^{27}}$

(iii) $P(X \geq 2)$

$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$

$= 1 - \left(\frac{1}{2^{32}} + \frac{1}{2^{27}}\right)$

১০ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) মাধ্য = 6, SD = 3

$\therefore$ প্রসৰণ = 9

আমি জানো যে দ্বিপদ বণ্টনৰ ক্ষেত্রত

মাধ্য > প্রসৰণ

এই ক্ষেত্রত মাধ্য = 6, প্রসৰণ = 9

$\therefore$ উক্তিটো সত্য নহয়।

(ii) মাধ্য = 5

প্রসৰণ = 2

আমি জানো যে দ্বিপদ বণ্টনৰ ক্ষেত্রত

মাধ্য > প্রসৰণ

এই ক্ষেত্রত মাধ্য = 5, প্রসৰণ = 2

$\therefore$ উক্তিটো সত্য।

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ আমি জানো যে পয়ছন বণ্টনৰ বাবে

$$P(X=x)=\frac{e^{-m}\,m^{x}}{x!}$$

এতিয়া P(X=1) = P(X=2), (দিয়া আছে)

$$\therefore \frac{e^{-m}m^{1}}{1!}=\frac{e^{-m}m^{2}}{2!}$$

$\therefore$ m = 2

$$\therefore\ P(X=3)=\frac{e^{-2}\,2^{3}}{3!}=\frac{4e^{-2}}{3}=\frac{4}{3e^{2}}$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে

$$P(X=x)=\frac{e^{-m}\,m^{x}}{x!}$$

P (x = 2) = 3 P (x = 3)

বা, $\frac{e^{-m}\,m^{2}}{2!}=3\,.\,\frac{e^{-m}\,m^{3}}{3!}$

বা, m = 1

$$\therefore\ P(X\geq x)$$

$$=1-P(X=0)$$

$$=1-\frac{e^{-1}1^{0}}{0!}$$

$$=1^{-e}-1\ =1-\frac{1}{e}\ =\frac{e-1}{e}=0.632$$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ আমি জানো যে এটা পয়ছন বণ্টনৰ মাধ্য = প্ৰসৰণ।

$\therefore$ প্ৰদত্ত উক্তিটো সত্য নহয়।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে $P(X=x)=\frac{e^{-m}\,m^{x}}{x\,!}$

এতিয়া P(x = 2) = 9 P(x = 4)

বা, $\frac{e^{-m}\,m^{2}}{2\,!}=9\,.\,\frac{e^{-m}\,m^{4}}{4\,!}$

বা, $\frac{m^{2}}{2}=\frac{3m^{4}}{8}$

বা, $\frac{3m^2}{4}=1$

বা, $m^2=\frac{4}{3}$

$\therefore m=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ মাধ্য = $m=\frac{2}{\sqrt{3}}$

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে

P(x = 2) = P(x = 3)

বা, $\frac{e^{-m}m^2}{2!}=\frac{e^{-m}m^3}{3!}$

বা, m = 3

$\therefore$ প্রসৰণ = m = 3



১৩.৯ আৰ্হি প্রশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্রশ্ন ১ঃ (i) মাধ্য যেতিয়া প্রসৰণতকৈ ডাঙৰ হয়,
(ii) মাধ্য যেতিয়া প্রসৰণৰ সমান হয়, তেতিয়া বিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বণ্টনৰ নাম কি?

প্রশ্ন ২ঃ দ্বিপদ বণ্টনৰ সীমাৰ ৰূপ হিচাপে পয়ছন বণ্টন নিগমন কৰক।

প্রশ্ন ৩ঃ 8 টা মুদ্রা একেলগে উৎক্ষেপণ কৰা হ'ল। অন্ততঃ 6 টা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৪ঃ ধৰা হ'ল X এটা দ্বিপদ চলক, আৰু মাধ্য = 1, প্রসৰণ = 0.75।
(i) P(x = 0), (ii) P (x > 0) নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৫ঃ কি চর্তৰ অধীনত দ্বিপদ বণ্টন এটা পয়ছন বণ্টন হয়?

প্রশ্ন ৬ঃ X পয়ছন চলক, আৰু $P(X=2)=\frac{2}{3}P(X=1)$।
P(x = 0) নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৭ঃ 5 টা অভিপ্রয়োগৰ বাবে এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য আৰু প্রসৰণৰ যোগফল 1.8। বণ্টনটো নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৮ঃ এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য আৰু প্রসৰণ ক্রমে 4 আৰু $\frac{4}{3}$। $P(X\geq 1)$ নির্ণয় কৰক।

*** ***** ***

অধ্যায় ১৪ ঃ তাত্ত্বিক বণ্টন II (THEORETICAL DISTRIBUTION II)

অধ্যায় গাঁথনি

১৪.১ উদ্দেশ্য

১৪.২ পৰিচয়

১৪.৩ অবিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বণ্টন

১৪.৪ প্রসামান্য বণ্টন

১৪.৪.১ প্রসামান্য বণ্টনৰ ধর্ম

১৪.৪.২ প্রামাণিক প্রসামান্য চলক

১৪.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১৪.৬ অধিক জানিবলৈ

১৪.৭ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১৪.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

১৪.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- অবিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বণ্টন আৰু সম্ভাৱিতা ঘনত্ব ফলন সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- প্রসামান্য বণ্টন সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- প্রামাণিক প্রসামান্য চলক সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- প্রসামান্য বণ্টনৰ ধর্ম সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

১৪.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

প্রসামান্য বণ্টন (normal distribution) এটা অবিচ্ছিন্ন (continuous) বণ্টন। ই দ্বিপদ বণ্টনৰ সীমাৱস্থা। ইয়াৰ প্রভূত প্রয়োগ আছে। ই সবাতোকৈ জনপ্রিয় আৰু সঘনাই ব্যৱহৃত হোৱা বণ্টন। আব্রাহাম দ্য মইভাৰে (Abraham de Moivre, 1667–1754) 1733 চনত এইটো আৱিষ্কাৰ কৰে।

১৪.৩ অবিচ্ছিন্ন সম্ভাৱতা বণ্টন (CONTINUOUS PROBABILITY DISTRIBUTION)

যদি এটা যাদৃচ্ছিক চলক অবিচ্ছিন্ন চলক হয়, ইয়াৰ সম্ভাৱিতা বণ্টনক অবিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বণ্টন (continuous probability distribution) বুলি কোৱা হয়।

এটা অবিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বণ্টনক তালিকাভুক্তিকৰণ ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি। অবিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বণ্টনক বৰ্ণনা কৰিবলৈ এটা সমীকৰণ বা সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰা হয়। অবিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বণ্টন বৰ্ণনা কৰিবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা সমীকৰণটোক সম্ভাৱিতা ঘনত্ব ফলন (probability density function, সংক্ষেপে p.d.f.) বুলি কোৱা হয়।

১৪.৪ প্ৰসামান্য বণ্টন (NORMAL DISTRIBUTION)

দুটা চৰ্তৰ অধীনত দ্বিপদ বণ্টনৰ পৰা প্ৰসামান্য বণ্টন (normal distribution) প্ৰতিপন্ন কৰা হয়। চৰ্ত দুটা হ'ল

(i) অভিপ্ৰয়োগৰ সংখ্যা n পৰ্যাপ্তভাৱে ডাঙৰ, অৰ্থাৎ, $n \to \infty$,

আৰু (ii) p আৰু q এটাও অতি সৰু নহয়।

এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ প্ৰসামান্য বণ্টন মানি চলে বুলি কোৱা হয় যদি আৰু যদিহে ইয়াৰ সম্ভাৱিতা ঘনত্ব ফলন এনেদৰে দিয়া থাকে

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

য'ত x হ'ল X-অৰ বাস্তৱ মান, অৰ্থাৎ, $-\infty < X < \infty$

X চলকটো মাধ্য μ আৰু প্ৰসৰণ σ^2 এৰে প্ৰসামান্যভাৱে বণ্টিত হয় বুলি কোৱা হয়। প্ৰতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে লিখা হয় $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. পঢ়োতে এনেদৰে পঢ়া হয়, 'X, $N(\mu, \sigma^2)$ হিচাপে বণ্টিত হয়'।

টোকা ঃ

1. (i) অৰ দ্বাৰা বৰ্ণিত সম্ভাৱিতা ঘনত্ব ফলনত দুটা প্ৰাচন আছে, যথা, μ আৰু σ। μ যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা হ'ব পাৰে, অৰ্থাৎ, $-\infty < \mu < \infty$। আনহাতেদি σ এটা ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা, অৰ্থাৎ, $\sigma > 0$।
2. আমি জানো যে সম্ভাৱিতা কেতিয়াও ঋণাত্মক হ'ব নোৱাৰে।
   $\therefore f(x) \geq 0, \forall x$
3. যদি $\mu = 0,\ \alpha = 1$, p.d.f টো হ'ল

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

এই ক্ষেত্ৰত $X \sim N(0, 1)$। এই ক্ষেত্ৰত X অক প্ৰামাণিতক প্ৰসামান্য বিচলন (standard normal variate) বুলি কোৱা হয় আৰু (2) ৰ দ্বাৰা বৰ্ণিত p.d.f অক প্ৰামাণিক প্ৰসামান্য বণ্টন (standard normal distribution) বোলে।

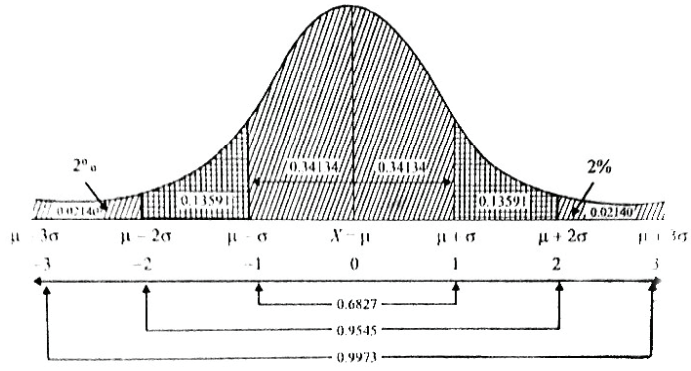
১৪.৪.১ প্রসামান্য বণ্টনৰ ধর্ম (Properties of Normal Distribution)

প্রসামান্য বণ্টনৰ বহুতো ধর্ম আছে। তলত কেইটামান দিয়া হ'ল।

1. প্রসামান্য সম্ভাৱিতা বক্ৰৰ সমীকৰণটো হ'ল

$$Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

ইয়াৰ আকৃতি তলত দিয়া ধৰণৰ। ই বেলৰ আকৃতিৰ (bell-shaped)।



[উৎস ঃ **Biostatistics** : Dr. P N Arora and Dr. P K Malhan (Himalya Publishing House, 2010)]

2. বক্ৰটো $x = \mu$ ৰেখা সাপেক্ষে সমমিত আৰু x-অৰ মান $-\infty$ আৰু $+\infty$ ৰ মাজত থাকে।

3. $x = \mu$, ত কোটি সর্বোচ্চ, আৰু ই হ'ল $Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

4. $-\infty$ ৰ পৰা ∞ সীমাৰ ভিতৰত প্রসামান্য বক্ৰৰ তলত মুঠ কালি 1, অর্থাৎ

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\, dx = 1$$

5. প্রসামান্য বক্ৰৰ তলত কালিৰ শতাংশ বণ্টন তলত দিয়া হৈছে, আৰু উপৰিউক্ত চিত্রত দেখুওৱা হৈছে।
   (i) প্রায় 68% কালি $\mu-\sigma$ আৰু $\mu+\sigma$ ৰ মাজত থাকে।
   (ii) প্রায় 95.5% কালি $\mu-2\sigma$ আৰু $\mu+2\sigma$ মাজত থাকে।
   (iii) প্রায় 99.7% কালি $\mu-3\sigma$ আৰু $\mu+3\sigma$ মাজত থাকে।

6. বক্ৰটোৰ মাত্র এটা শীর্ষ (peak) আছে, অর্থাৎ ই এটা মাত্র বহুলক বিশিষ্ট।

7. বণ্টনটো সমমিত। মাধ্য = মধ্যমা = বহুলক = μ ।

8. বক্ৰটো অনন্তস্পর্শী, অর্থাৎ, ই x-অক্ষক দুয়োটা মূৰত অসীমত মিলে।

তাত্ত্বিকভাৱে, বক্ৰটো কেতিয়াও x-অক্ষক স্পৰ্শ নকৰে।

9. বক্ৰকৰণ বিন্দু (inflexion points) হ'ল $x=\mu-\sigma$, আৰু $x=\mu+\sigma$. [য'ত ফলনটোৱে অৱতলতা সলনি কৰে, সেয়াই বক্ৰকৰণ বিন্দু।]

10. অপ্ৰতিসাম্যৰ সহগ = 0, আৰু ককুদতা = 3.

11. মাধ্য সাপেক্ষে মাধ্য বিচলন $\simeq \frac{4}{5}\sigma$

12. $Q.D.\simeq \frac{2}{3}\sigma$

১৪.৪.২ প্ৰামাণিক প্ৰসামান্য চলক (Standard Normal Variate)

ধৰা হ'ল এটা প্ৰসামান্য চলক X, $N(\mu, \alpha^2)$ হিচাপে বণ্টিত হয়। প্ৰসামান্য বক্ৰটোৰ অৱস্থান μ আৰু α ৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰে, য'ত $-\infty<\mu<\infty$, আৰু $\alpha>0$। সেয়ে কালিৰ বাবে কোনো নিয়ন্ত্ৰণক সাৰণী (master table) প্ৰস্তুত কৰিব নোৱাৰি। এটা নতুন চলক অৱতাৰণা কৰি এই অসুবিধা আঁতৰাব পাৰি। নতুন চলক Z অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

এই ক্ষেত্ৰত Z অক প্ৰামাণিক প্ৰসামান্য চলক বুলি কোৱা হয়।

এতিয়া আমি প্ৰমাণ কৰিম যে Z অৰ মাধ্য 0, আৰু প্ৰামাণিক বিচলন 1। তাৰ আগেয়ে আমি কেইটামান আনুষংগিক ধৰ্ম উল্লেখ কৰোঁ।

আমি জানো যে এটা যাদৃচ্ছিক চলক X অৰ মাধ্য হ'ল

মাধ্য $=E(X)=\Sigma x_i p_i$

আমি প্ৰমাণ কৰোঁ

(i) E(a) = a; a এটা ধ্ৰুৱক

(ii) E (aX + b) = aE(x) + b; a, b ধ্ৰুৱক

(iii) $E\left(X-\bar{X}\right)=0$

প্ৰমাণ ঃ (i) $E(a)=\Sigma a p_i$

$=a\,\Sigma p_i$

= a, $\because\ \Sigma p_i=1$

(ii) $\Sigma(aX+b)=\Sigma(ax_i+b)p_i$

$=a\Sigma x_i p_i+b\Sigma p_i$

$=a\,E(X)+b,\ \because\ \Sigma p_i=1$

(iii) $E\left(X-\overline{X}\right)$

$= E(X) - E(\overline{X})$

$= \overline{X} - \overline{X}, \quad \because \overline{X}$ এটা ধ্রুৱক

= 0

আকৌ, মন কৰিব লগীয়া যে

(iv) Var (aX) = a^2 Var (X), য'ত a এটা ধ্রুৱক।

(v) Var (aX $\pm b$) = a^2 Var (X), য'ত a, b ধ্রুৱক।

এতিয়া আমি প্রমাণ কৰিম যে Z অৰ মাধ্য 0, আৰু প্রামাণিক বিচলন 1।

মাধ্য = E (Z)

$= E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$

$= \frac{1}{\sigma} E(X-\mu),$ ধর্ম (ii)

$= \frac{1}{\sigma}\left[E(X)-\mu\right],$ ধর্ম (ii)

$= \frac{1}{\sigma}[\mu-\mu]$

= 0

প্রসাৰণ = Var (Z)

$= Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$

$= \frac{1}{\sigma^2}\text{var}(X-\mu),$ ধর্ম (v)

$= \frac{1}{\sigma^2}\text{var } X,$ ধর্ম (iv)

$= \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2$

= 1

গতিকে, $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, N (0, 1), হিচাপে বণ্টিত হয়, অর্থাৎ Z ~ N(0, 1).

প্রসামান্য চলকৰ আটাইবোৰ ধর্ম প্রামাণিক প্রসামান্য চলকৰ ক্ষেত্রতো প্রযোজ্য $(\mu = 0,\ \sigma = 1)$।

ধৰা হ'ল Z হ'ল প্রামাণিক প্রসামান্য চলক N(0, 1)। প্রামাণিক প্রসামান্য বক্রৰ কালি এখন সাৰণীত দিয়া থাকে। এই অধ্যায়ৰ শেহত সেই সাৰণীখন সন্নিৱিষ্ট

কৰা হৈছে।

আমি জানো যে $-\infty$ ৰ পৰা ∞, এই সীমাৰ ভিতৰত প্ৰসামান্য বক্ৰৰ তলৰ সম্পূৰ্ণ কালি 1। Z = 0 সাপেক্ষে প্ৰামাণিক প্ৰসামান্য বক্ৰ সমমিত। গতিকে, z = 0 ৰ বাওঁফালে কালি 0.5, আৰু z = 0 সোঁফালে কালি 0.5।

ধৰা হ'ল, আমি z = 0 আৰু z = 1.89 ৰ মাজৰ কালি উলিয়াব লাগে, অৰ্থাৎ, আমি $P(0 \le Z \le 1.89)$ উলিয়াব লাগে।

প্ৰথমতে আমি সাৰণীখনৰ একেবাৰে বাওঁপিনে 1.8 উলিয়াওঁ, আৰু সংখ্যাটো থকা শাৰীটো বাছি উলিয়াওঁ।

পাছত আমি সাৰণীখনৰ ওপৰত 0.09 উলিয়াওঁ আৰু সংখ্যাটো থকা স্তম্ভটো বাছি উলিয়াওঁ।

পাছত 1.8 থকা শাৰীটো আৰু 0.09 থকা স্তম্ভটো য'ত মিলিত হয়, সেই প্ৰৱিষ্টিটো উলিয়াওঁ। প্ৰৱিষ্টিটো 0.47062।

গতিকে $P(0 \le Z \le 1.89)$

= (z = 0 ৰ পৰা z = 1.89 অলৈ কালি)

= 0.47062.

উদাহৰণ 1 ঃ প্ৰামাণিক প্ৰসামান্য চলক Z অৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰক, য'ত Z, 1.09 অতকৈ ডাঙৰ।

সমাধান ঃ আমি জানো যে $-\infty$ ৰ পৰা ∞, এই সীমাৰ ভিতৰত প্ৰসামান্য বক্ৰৰ তলৰ সম্পূৰ্ণ কালি 1। গতিকে, Z = 0 ৰ সোঁপিনে কালি 0.5, যিহেতু বক্ৰটো Z = 0 সাপেক্ষে সমমিত।

$\therefore$ P(Z > 1.09) = 0.5 – 0.36214 = 0.13786

উদাহৰণ 2 ঃ প্ৰামাণিক প্ৰসামান্য চলক Z অৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰক, য'ত Z, 1.09 তকৈ সৰু।

সমাধান ঃ আমি জানো যে $-\infty$ ৰ পৰা $+\infty$, এই সীমাৰ ভিতৰত প্ৰসামান্য বক্ৰৰ তলৰ সম্পূৰ্ণ কালি 1। গতিকে, z = 0 ৰ বাওঁপিনে কালি 0.5, আৰু z = 0 ৰ সোঁপিনৰ কালি 0.5। আকৌ, সাৰণীৰ পৰা আমি পাওঁ যে z = 0 ৰ পৰা z = 1.09 অলৈ কালি 0.36214।

$\therefore$ P(z < 1.09)

= (z = 0 ৰ বাওঁপিনৰ কালি) + (z = 0 ৰ পৰা z = 1.09 অলৈ কালি)

= 0.5 + 0.36214

= 0.86214

উদাহৰণ 3 ঃ P(0.5 < z < 1.09) নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে z = 0 ৰ সোঁপিনে কালি 0.5। সাৰণীৰ পৰা z = 0 ৰ পৰা

z = 0.5 অলৈ কালি 0.19146। আকৌ z = 0 ৰ পৰা z = 1.09 অলৈ কালি 0.36214.

$\therefore$ P(0.5 < z < 1.09)

= (z = 0 ৰ পৰা z = 1.09 অলৈ কালি) – (z = 0 ৰ পৰা x = 0.5 অলৈ কালি)

= 0.36214 – 0.19146

= 0.17068

উদাহৰণ 4 ঃ বৃহৎ সংখ্যক জোখ-মাপ প্রসমান্যভাৱে বণ্টিত। ইয়াৰ মাধ্য 65.5 cm আৰু প্রামাণিক বিচলন 6.2 cm। 54.8 cm আৰু 68.8 cm অৰ মাজৰ জোখ-মাপৰ শতাংশ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল বৃহৎসংখ্যক জোখ-মাপ বুজোৱা প্রসামান্য চলকটো X।

দিয়া আছে $\mu = 65.5,\ \sigma = 6.2$

এতিয়া, $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-65.5}{6.2}$

যেতিয়া, X = 54.8 $Z = \frac{54.8-65.5}{6.2} = \frac{-10.7}{6.2} = -1.7$

যেতিয়া, X = 68.8, $Z = \frac{68.8-65.5}{6.2} = 0.5$

দেখা গ'ল যে X যেতিয়া 54.8 আৰু 68.8 অৰ মাজত থাকে, Z, –1.7 আৰু 0.5 অৰ মাজত থাকে।

এতিয়া P(–1.7 < X < 0.5)

= P(–1.7 < Z < 0) + P(0 < Z < 0.5)

= 0.45543 + 0.19146

= 0.64689 = 64.69%

$\therefore$ জোখ-মাপৰ শতাংশ 64.69%

উদাহৰণ 5 ঃ এটা পৰীক্ষাৰ পৰীক্ষার্থীসকলৰ গুণাংকৰ মাধ্য 14 আৰু প্রামাণিক বিচলন 2.5। বণ্টনটো প্রসামান্য হ'লে, যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা এজন পৰীক্ষার্থীয়ে 15 গুণাংকতকৈ বেছি পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল পৰীক্ষাৰ গুণাংক বুজোৱা প্রসামান্য চলকটো X।

দিয়া আছে $\mu = 14,\ \sigma = 2.5$

এতিয়া $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-14}{2.5}$

যেতিয়া X, $Z = \frac{15-14}{2.5} = \frac{1}{2.5} = 0.4$

$\therefore$ P(x > 15) = P(z > 0.4)

= 0.5 – (z = 0 আৰু Z = 0.4 অৰ মাজৰ কালি)

= 0.5 – 0.15542

= 0.34458.



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

প্রশ্ন নং ১ঃ নির্ণয় কৰক (i) P (Z > 2.58), (ii) P(Z < 1.96), (iii) P (Z > –3)

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা প্রসামান্য চলকৰ বাবে মাধ্য 50, আৰু প্রামাণিক বিচলন 5। $P(45 \le X \le 55)$ নির্ণয় কৰক, X এটা প্রসামান্য চলক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ এটা প্রসামান্য চলকৰ মাধ্য 100, আৰু প্রামাণিক বিচলন 4। X, 92 আৰু 108 অৰ মাজত থকাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ এটা পৰীক্ষাত বিদ্যার্থীৰ গুণাংকৰ বণ্টনটো প্রসামান্য। মাধ্য 45, আৰু প্রামাণিক বিচলন 5 হ'লে, 40 আৰু 50 ৰ ভিতৰত গুণাংক পোৱা বিদ্যার্থীৰ শতাংশ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ এটা পৰীক্ষাত বিদ্যার্থীৰ গুণাংকৰ বণ্টনটো প্রসামান্য। বণ্টনটোৰ মাধ্য 45, আৰু প্রামাণিক বিচলন 10। 1000 জন বিদ্যার্থী পৰীক্ষাত অৱতীর্ণ হৈছে। (i) গুণাংক 30 তকৈ কম পোৱা, আৰু (ii) গুণাংক 80 তকৈ বেছি পোৱা বিদ্যার্থীৰ সংখ্যা নির্ণয় কৰক।



১৪.৫ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- প্রসামান্য বণ্টন এটা অবিচ্ছিন্ন বণ্টন। ই দ্বিপদ বণ্টনৰ সীমাৱস্থা।
- দুটা চর্তৰ অধীনত দ্বিপদ বণ্টনৰ পৰা প্রসামান্য বণ্টন প্রতিপন্ন কৰা হয়। চর্ত দুটা হ'ল
  - (i) অভিপ্রয়োগৰ সংখ্যা n পর্যাপ্তভাৱে ডাঙৰ, অর্থাৎ, $n \to \infty$ আৰু
  - (ii) p আৰু q এটাও অতি সৰু নহয়।

  এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ প্রসামান্য বণ্টন মানি চলে বুলি কোৱা হয় যদি আৰু যদিহে ইয়াৰ সম্ভাৱিতা ঘনত্ব ফলন এনেদৰে দিয়া থাকে।

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\alpha}\right)^2}$$

য'ত x হ'ল X-অৰ বাস্তৱ মান, অর্থাৎ, $-\infty < X < \infty$

X চলকটো মাধ্য μ আৰু প্রসৰণ σ^2 এৰে প্রসামান্যভাৱে বণ্টিত হয় বুলি কোৱা হয়। প্রতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে লিখা হয় $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$। পঢ়োতে

এনেদৰে পঢ়া হয়, 'X, $N(\mu, \sigma^2)$ হিচাপে বণ্টিত হয়'

- প্ৰসামান্য বক্ৰটো বেলৰ আকৃতিৰ (bell-shaped)। বক্ৰটো $x = \mu$ ৰেখা সাপেক্ষে সমমিত, আৰু x-অৰ মান $-\infty$, আৰু $+\infty$ ৰ মাজত থাকে।
- $-\infty$ ৰ পৰা ∞ সীমাৰ ভিতৰত প্ৰসামান্য বক্ৰৰ তলত মুঠ কালি 1।
- যদি এটা নতুন চলক Z অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়, $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, তেনেহ'লে Z অক প্ৰামাণিক প্ৰসামান্য চলক বোলা হয়। Z অৰ মাধ্য 0, আৰু প্ৰামাণিক বিচলন 1।



১৪.৬ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

1) Statistical Methods by N.G. Das, McGraw Hill Education (India) Private Ltd. 2009
2) Probability and Statistics by G.Shanker Rao, University Press (India) private Ltd. 2011
3) Introduction to probability and Statistics by Seymour Lipschutz, John J.Schiller, Tata McGraw Hill Education private Ltd. 2005
4) Probability, Random Process, Queueing theory and Statistics by Dr. S.Rajasekaran, Prof.A.Chandrasekaran & G.Kavitha, Dhanam Publications, Chennai-60042
5) Probability and Statistics by G.Balaji, G.Balaji Publishers, Chennai-33



১৪.৭ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) আমি জানো যে $-\infty$ আৰু $+\infty$, এই সীমাৰ ভিতৰত প্ৰসামান্য বক্ৰৰ তলত মুঠ কালি 1। গতিকে z = 0 ৰ বাওঁপিনে কালি 0.5, আৰু z = 0 ৰ সোঁপিনে কালি 0.5। আকৌ সাৰণীৰ পৰা আমি পাওঁ যে z = 0 ৰ পৰা z = 2.58 অলৈ কালি 0.49506।

$\therefore$ P (z > 2.58)

= (z = 0 ৰ সোঁপিনে কালি) – (z = 0 ৰ পৰা z = 2.58 অলৈ কালি)

= 0.5 – 0.49506

= 0.00494

(ii) আমি জানো যে $-\infty$ আৰু $+\infty$, এই সীমাৰ ভিতৰত প্ৰসামান্য বক্ৰৰ তলত মুঠ কালি 1। গতিকে z = 0 ৰ বাওঁপিনে কালি 0.5, আৰু z = 0 ৰ সোঁপিনে কালি 0.5। আকৌ সাৰণীৰ পৰা আমি পাওঁ যে z = 0 ৰ পৰা z = 1.96 অলৈ কালি 0.47500।

$\therefore$ P (z < 1.96)

= (z = 0 ৰ বাওঁপিনে কালি) + (z = 0 ৰ পৰা z = 1.96 অলৈ কালি)

= 0.5 + 0.47500

= 0.97500

(iii) আমি জানো যে $-\infty$ আৰু ∞, এই সীমাৰ ভিতৰত প্ৰসামান্য বক্ৰৰ তলত কালি 1। গতিকে z = 0 ৰ বাওঁফালে কালি 0.5, আৰু z = 0 ৰসোঁফালে কালি 0.5।

এতিয়া P(Z > –3)

= (z = –3 ৰ পৰা z = 0 লৈ কালি) + (z = 0 ৰ সোঁপিনৰ কালি)

= (z = 0 ৰ পৰা z = 3 লৈ কালি) + (z = 0 ৰ সোঁপিনৰ কালি)

= 0.49865 + 0.5

= 0.99865

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ X এটা প্ৰসামান্য চলক।

দিয়া আছে $\mu = 50,\ \sigma = 5$

এতিয়া $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-50}{5}$

যেতিয়া X = 45 $Z = \frac{45-50}{5} = -1$

যেতিয়া X = 55, $Z = \frac{55-50}{5} = 1$

দেখা গ'ল যে, যেতিয়া X, 45 আৰু 55 অৰ মাজত থাকে, Z, –1 আৰু 1অৰ মাজত থাকে।

এতিয়া $P(-1 \le Z \le 1)$

$= P(-1 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 1)$

= 0.34134 + 0.34134

= 0.68268

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক?

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল গুণাংক দেখুওৱা প্ৰসামান্য চলকটো X।

দিয়া আছে যে $\mu = 45,\ \sigma = 10$

এতিয়া $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-45}{10}$

যেতিয়া X = 30, $Z = \frac{30-45}{10} = \frac{-15}{10} = -1.5$

যেতিয়া X = 80, $Z = \frac{80-45}{10} = \frac{35}{10} = 3.5$

(i) এতিয়া $P(X \le 30)$

$= P(z \le .1.5)$

= (z = 0 বাওঁপিনৰ কালি) – (z = – 1.5 অৰ পৰা z = 0 লৈ কালি)

(z = 0 ৰ বাওঁপিনৰ কালি) – (z = 0 ৰ পৰা z = 1.5 অলৈ কালি)

= 0.5 – 0.43319

= 0.06681

∴ উলিয়াবলগীয়া ছাত্রৰ সংখ্যা

= 1000 x 0.06681

= 67 (মোটামুটিভাৱে)

(ii) $P(Z \ge 80)$

$= P(Z \ge 3.5)$

= (z = 0 ৰ সোঁপিনৰ কালি) – (z = 0 ৰ পৰা z = 3.5 অলৈ কালি)

= 0.5 – 0.49977

= 0.00023

এতিয়া 1000 x 0.00023 = 0.23

∴ 80 তকৈ অধিক গুণাংক পোৱা কোনো বিদ্যার্থী নাই।



১৪.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ প্ৰামাণিক প্ৰসামান্য চলকৰ সংজ্ঞা লিখক, আৰু এই চলকটোৰ সম্ভাৱিতা ঘনত্ব ফলনটো লিখক।

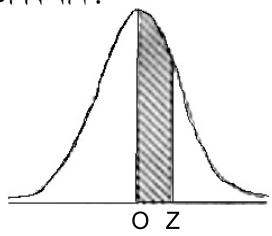
প্ৰশ্ন ২ঃ কি চৰ্তৰ অধীনত দ্বিপদ বণ্টনৰ সীমাৱস্থা হিচাপে প্ৰসামান্য বণ্টন পাব পাৰি?

প্ৰশ্ন ৩ঃ নিৰ্ণয় কৰক (i) $P(Z \le -1.96)$ (ii) $P(Z \le 1.96$ (iii) $P(Z > 2.58)$

প্ৰশ্ন ৪ঃ এটা প্ৰসামান্য চলক X অৰ মাধ্য 50 আৰু প্ৰামাণিক বিচলন 5। $P(40 \le X \le 60)$ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৫ঃ এটা প্ৰসামান্য চলকৰ মাধ্য 50 আৰু প্ৰামাণিক বিচলন 4। মুঠ বাৰংবাৰতাৰ কিমান শতাংশ 42.16 আৰু 57.84 অৰ মাজত থাকে?

প্রশ্ন ৬ঃ এটা অবিচ্ছিন্ন চলক X এ প্রসামান্য বণ্টন মানি চলে। ইয়াৰ মাধ্য 12 আৰু প্রামাণিক বিচলন 2। যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা প্রামাণিক বিচলন 2। যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা X অৰ মান এটা 11 আৰু 14 অৰ মাজত থকাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?



প্রামাণিক প্রসামান্য বক্ৰৰ তলৰ কালি

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.00000	.00399	.00798	.01197	.01595	.01994	.02392	.02790	.03188	.03586
0.1	.03983	.04383	.04776	.05172	.05567	.05962	.06356	.06749	.07142	.07535
0.2	.07926	.08317	.08706	.09095	.09483	.09871	.10257	.10642	.11026	.11409
0.3	.11791	.12172	.12552	.12930	.13307	.13683	.14058	.14431	.14803	.15173
0.4	.15542	.15910-	.16276	.16640	.17003	.17364	.17724	.18082	.18439	.18793
0.5	.19146	.19497	.19847	.20194	.20540	.20884	.21226	.21566	.21904	.22240
0.6	.22575	.22907	.23237	.23565	.23891	.24215	.24537	.24857	.25175	.25490
0.7	.25804	.26115	.26424	.26730	.27035	.27337	.27637	.27935	.28230	.28524
0.8	.28814	.29103	.29389	.29673	.29955	.30234	.30511	.30785	.31057	.31372
0.9	.31594	.31859	.32121	.32381	.32639	.32894	.33147	.33398	.33646	.33891
1.0	.34134	.34375	.34614	.34849	.35083	.35314	.35543	.35769	.35993	.36214
1.1	.36433	.36650	.36864	.37076	.37286	.37493	.37698	:37900	.38100	.38298
1.2	.38493	.38686	.38877	.39065	.39251'	.39435	.39617	.39796	.39973	.40147
1.3	.40320	.40490	.40658	.40824	.40988	.41198	.41309	.41466	.41621	.41774
1.4	.41924	.42073-	.42220	.42364	.42507	.42647	.42785	.42922	.43056	.43189
1.5	.43319	.43448	.43574	.43699	.43822	.43943	.44062	.44179	.44295	.44408
1.6	.44520	.44630	.44738	.44845	.44950	.45053	.45154	.45254	.45352	.45449
1.7	.45543	.45637	.45728	.45818	.45907	.45994	.46080	.46164	.46246	.46327
1.8	.46407	.46485	.46562	.46638	.46712	.46784	.46856	.46926	.46995	.47062
1.9	.47128	.47193	.47257	.47320	.47381	.47441	.47500	.47558	.47615	.47670
2.0	.47725	.47784	.47831	.47882	.47932	.47982	.48030	.48077	.48124	.48169
2.1	.48214	.48257	.48300	.48341	.48382	.48422	.48461	.48500	.48537	.48574
2.2	.48610	.48645	.48679	.48713	.48745	.48778	.48809	.48840	.48870	.48899

2.3	.48928	.48956	.48983	.49010	.49036	.49061	.49086	.49111	.49134	.49158
2.4	.49180	.49202	.49224	.49245	.49266	.49286	.49305	.49324	.49343	.49361
2.5	.49379	.49396	.49413	.49430	.49446	.49461'	.49477	.49492	.49506	.49520
2.6	.49534	.49547	.49560	.49573	.49585	.49598	.49609	.49621	.49632.	.49643
2.7	.49653	.49664	.49674	.49683	.49693	.49702	.49711	.49720	.49728	.49736
2.8	.49744	.49752	.49760	.49767	.49774	.49781	.49788	.49795	.49801	.49807
2.9	.49813	.49819	.49825	.49831	.49836	.49841	.49846	.49851	.49856	.49861
3.0	.49865	.49869	.49874	.49878	.49882	.49886	.49889	.49893	.49896	.49900
3.1	.49903	.49906	.49910	.49913	.49916	.49918	.49921	.49924	.49926	.49929
3.2	.49931	.49934	.49936	.49938	.49940	.49942	.49944	.49946	.49948	.49950
3.3	.49952	.49953	.49955	.49957	.49958	.49960	.49961	.49962	.49964	.49965
3.4	.49966	.49968	.49969	.49970	.49971	.49972	.49973	.49974	.49975	.49976
3.5	.49977	.49978	.49978	.49979	.49980	.49981	.49981	.49982	.49983	.49983
3.6	.49984	.49985	.49985	.49986	.49986	.49987	.49987	.49988	.49988	.49989
3.7	.49989	.49990	.49990	.49990	.49991	.49991	.49992	.49992	.49992	.49992
3.8	.49993	.49993	.49993	.49994	.49994	.49994	.49994	.49995	.49995	.49995
3.9	.49995	.49995	.49996	.49996	.49996	.49996	.49996	.49996	.49997	.49997
4.0	.49997	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4.5	.499997	-	-	-	-	-			-	-
5.0	.4999997	-	-	-	-	-	-	-	-	-

[উৎস ঃ **Basic statisties** : B. L. Agarwal (New Age International Publishers, 2009)]

*** ***** ***



REFERENCES

1. Statics : B. C. Das and B. N. Mukerjee U. N. Dhur and Pus.
2. A Text Book an statics by R. S. Verma.
3. An introduction to commercial Mathematics and statistics - Prof. Ajanta Mazumder, Dr. (Mrs) Runjan Phookun. S. Chand and Company Lt. R New Delhi.
4. Business Statistics - Dr. Nityananda Barman, Assam Book Depot.
5. Elementary Statistics by H.C. Saxena, S.Chand & company Ltd., 2002
6. Basic Statistics by B.L. Agarwal, New Age International Publishers, 2009
7. Biostatistics by Dr. P N Arora and Dr. P K Malhan, Himalaya publishing House, 2010
8. Fundamental of Statistics Volume one by A.M. Gun, M.K. Gupta, B. Dasgupta, world press 2005
9. Fundamental of Mathematical Statistics by S.C.Gupta, V.K.Kapoor by Sultan Chand & Sons, 2009