অধ্যায় ৫ঃ অনুক্রম আৰু শ্ৰেণী (SEQUENCE AND SERIES)

অধ্যায় গাঁথনি

৫.১ উদ্দেশ্য

৫.২ পৰিচয়

৫.৩ সমান্তৰ প্ৰগতি (A. P.) আৰু শ্ৰেণী

- ৫.৩.১ সমান্তৰ প্ৰগতি (A.P.)
- ৫.৩.২ সমান্তৰ প্ৰগতিৰ ধৰ্ম্ম
- ৫.৩.৩ সমান্তৰ শ্ৰেণী
- ৫.৩.৪ সমান্তৰ শ্ৰেণীৰ প্ৰথম ‘n’.টা পদৰ সমষ্টি
- ৫.৩.৫ তিনিটা দৰ্কাৰী সমষ্টি

৫.৪ গুনোত্তৰ প্ৰগতি (G.P.) আৰু শ্ৰেণী

- ৫.৪.১ গুনোত্তৰ প্ৰগতিৰ ধৰ্ম
- ৫.৪.২ গুনোত্তৰ শ্ৰেণী
- ৫.৪.৩ গুনোত্তৰ শ্ৰেণীৰ প্ৰথম ‘n’ টা পদৰ সমষ্টি

৫.৫ সমান্তৰ আৰু গুনোত্তৰ মাধ্য

- ৫.৫.১ সমান্তৰ মাধ্য (A.M.)
- ৫.৫.২ গুনোত্তৰ মাধ্য (G.M.)
- ৫.৫.৩ A.M. আৰু G.M. ৰ মাজৰ সম্পৰ্ক

৫.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৫.৭ অধিক জানিবলৈ

৫.৮ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

৫.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন

৫.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- সমান্তৰ প্ৰগতি আৰু গুনোত্তৰ প্ৰগতিৰ সংজ্ঞা দিব পাৰিব
- সমান্তৰ আৰু গুনোত্তৰ শ্ৰেণী বিষয়ে ব্যাখ্যা কৰিব পাৰিব
- সমান্তৰ আৰু গুনোত্তৰ মাধ্য সম্পৰ্কে জানিব পাৰিব।

৫.২ পৰিচয়

আমি সংখ্যাবিলাক কোনো আৰ্হি (Pattern) অনুসৰণ কৰি লিখিব পাৰো । এই অধ্যায়ত আমি সংখ্যাবিলাকৰ দুটা দৰ্কাৰী আৰ্হি সমান্তৰ প্ৰগতি আৰু গুনোত্তৰ প্ৰগতি সম্পৰ্কে অধ্যয়ন কৰিম । লগতে আমি সমান্তৰ শ্রেণী, গুনোত্তৰ শ্রেণী, সমান্তৰ মাধ্য আৰু গুনোত্তৰ মাধ্য সম্পৰ্কেও অধ্যয়ন কৰিম । ইয়াৰোপৰি আমি সমান্তৰ মাধ্য আৰু গুনোত্তৰ মাধ্যৰ মাজৰ সম্পৰ্ক নিৰ্গমন কৰিম ।

৫.৩ সমান্তৰ প্ৰগতি আৰু শ্রেণী (ARITHMETIC PROGRESSION AND SESIES)

তলত দিয়া সংখ্যাৰ অনুক্রমণ দুটা বিবেচনা কৰো হ'ক ঃ

1. 1, 2, 3, 4, ...

2. 5, 8, 11, 14, ...

আমি পৰ্যবেক্ষণ কৰি পাওঁ যে ক্রমশঃ পিছৰ সংখ্যা বিলকা (1) ত 1 যোগ কৰি আৰু (2) ত 3 যোগ কৰি পাব পাৰি । সংখ্যাৰ এই ধৰণৰ অনুক্রমনক অনুক্রম আৰু প্রতিটো সংখ্যাক অনুক্রমটোৰ পদ বোলে ।

৫.৩.১ সমান্তৰ প্ৰগতি (Arithmetic Progression সংক্ষেপে A.P.)

যদি এটা অনুক্রমৰ প্রথম পদটোৰ বাহিৰে আন পদবিলাকৰ প্রতিটো পদ তাৰ পূৰ্বৱৰ্তী পদটোৰ লগত এটা স্থিৰ সংখ্যা যোগ কৰি পোৱা যায়, তেন্তে অনুক্রমটোক সমান্তৰ প্ৰগতি বোলে। স্থিৰ সংখ্যাটোক সাধাৰণ অন্তৰ (Common Difference, সংক্ষেপে C.D.) বোলে ।

যদি এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ সীমিত সংখ্যক পদ থাকে, তেন্তে তাক সসীম সমান্তৰ প্ৰগতি (Finite A.P.) আৰু যদি সমান্তৰ প্ৰগতিটোৰ অসীম সংখ্যক পদ থাকে, তেন্তে তাক অসীম সমান্তৰ প্ৰগতি (Infinit A.P.) বোলে ।

মন্তব্য ঃ এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ সাধাৰণ অন্তৰ ধনাত্মক, ঋনাত্মক নাইবা শূন্য হ'ব পাৰে।

এটা সমান্তৰ প্ৰগতিৰ প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ইত্যাদি পদ বিলাকক ক্রমে t_1, t_2, t_3 ইত্যাদিৰে প্রকাশ কৰা হয়।

উদাহৰণ ঃ

1. 1, 2, 3, ..., 20 এটা সসীম A.P. ইয়াৰ প্রথম পদ = 1, সা ঃ অ ঃ (C.D) =1

2. 5, 8, 11, ... এটা অসীম A.P. ইয়াৰ প্রথম পদ = 5 আৰু সাঃ অঃ (C.D) = 3

3. 12, 8, 4, ..., -8 এটা সসীম A.P. ইয়াৰ প্রথম পদ =12 আৰু C.D. = -4

মন্তব্য ঃ এটা সমান্তৰ প্রগতি (A.P.) ৰ সাধাৰণ অন্তৰ (C.D.)

= দ্বিতীয় পদ - প্রথম পদ

$= t_2 - t_1$

আমি সাধাৰণতে এটা সমান্তৰ প্রগতিৰ প্রথম পদক a ৰে আৰু সাধাৰণ অন্তৰক d ৰে প্রকাশ কৰোঁ । তেতিয়াহ'লে সমান্তৰ প্রগতিটো তলত দিয়া ধৰণে লিখিব পাৰি ঃ

a, a + d, a + 2d, a + 3d, ...

গতিকে সমান্তৰ প্রগতিটোৰ n তম পদ = a + (n - 1) d আৰু ইয়াক t_n ৰে বুজোৱা হয় ।

উদাহৰণ ঃ (i) 4, 10, 16, 22, ... সমান্তৰ প্রগতিটোৰ প্রথম পদ আৰু সাধাৰণ অন্তৰ ক্রমে 4 আৰু 6 । গতিকে সমান্তৰ প্রগতিটোৰ n তম পদ,

$t_n = 4 + (n - 1)6 = -2 + 6n = 2(3n - 1)$

(ii) $1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 3, \ldots\ldots$ সমান্তৰ প্রগতিটোৰ প্রথম পদ আৰু সাধাৰণ অন্তৰ ক্রমে 1 আৰু

$$\frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$$

গতিকে সমান্তৰ প্রগতিটোৰ n তম পদ

$$t_n = 1 + (n-1)\frac{2}{3} = \frac{1}{3} + \frac{2n}{3} = \frac{1}{3}(1 + 2n)$$

অনুশীলনী - ১

16, 11, 6, ... সমান্তৰ প্রগতিটোৰ কোনটো পদ '- 79' ?

সমাধান ঃ ইয়াৰ প্রথম পদ a = 16 আৰু সাধাৰণ অন্তৰ = -5

ধৰা হ'ল সমান্তৰ প্রগতিটোৰ n তম = -79

তেতিয়া হ'লে,

$16 + (n - 1)) \times (-5) = -79 = 5n = 21 + 79 = 5n = 100 = n = 20$

গতিকে '- 79', সমান্তৰ প্রগতিটোৰ 20 তম পদ।

অনুশীলনী - ২

কোনো এটা সমান্তৰ প্রগতিৰ 9 তম আৰু 15 তম পদ দুটা ক্রমে 39 আৰু 63 হ'লে 21 তম পদটো নির্ণয় কৰক ।

সমাধান ঃ এই সমস্যাটোত আমি দেখিছো যে যদি প্রথম পদ 'a' আৰু সাধাৰণ অন্তৰ 'd' হয়, তেন্তে 9- তম আৰু 15- তম পদ দুটাক ক্রমে a + 8d আৰু a +14d হিচাপে লিখিব পাৰি। গতিকে a + 8d আৰু a + 14d ক ক্রমে 39 আৰু 63 ৰ সমান পাতি আমি পাওঁ,

a + 8d = 39, a + 14d = 63

এই সমীকৰণ দুটা সমাধান কৰি আমি পাওঁ যে a = 7, d = 4

∴ 21 তম পদ = a + 20d = 7 + 80 = 87

৫.৩.২ সমান্তৰ প্রগতিৰ ধর্ম (Properties of an A.P.)

সমান্তৰ প্রগতিৰ তলৰ ধর্ম কেইটা সহজে প্রতিপন্ন কৰিব পাৰি ।

(1) যদি এটা সমান্তৰ প্রগতিৰ প্রতিটো পদ এটা সংখ্যাৰে বঢ়োৱা (বা কমোৱা) হয়, তেন্তে লব্ধ অনুক্রমটো একে সাধাৰণ অন্তৰ বিশিষ্ট এটা সমান্তৰ প্রগতি হ'ব।

ধৰাহ'ল a, a + d, a + 2d, a + 3d, ... সমান্তৰ প্রগতিটোৰ প্রতিটো পদৰ লগত অশূল্য সংখ্যা k যোগ কৰা হ'ল । গতিকে লব্ধ অনুক্রমটো হ'ব ঃ

a + k, a + d + k, a + 2d + k, a + 3d + k, ...

ওপৰৰ সংখ্যাৰ নতুন অনুক্রমটো এটা সমান্তৰ প্রগতি যাৰ প্রথম পদ = a + k আৰু সাধাৰণ অন্তৰ = (a + d + k) - (a + k) = d

(2) যদি এটা সমান্তৰ প্রগতিৰ প্রতিটো পদক এটা অশূণ্য সংখ্যা k ৰে পূৰণ (বা হৰণ) কৰা হয়, তেন্তে লব্ধ অনুক্রমটো পুনৰ সমান্তৰ প্রগতি হ'ব যাৰ সাধাৰণ অন্তৰ মূল সমান্তৰ প্রগতিটোৰ সাধাৰণ অন্তৰৰ k গুণ (বা $\frac{1}{k}$ গুণ) ৰ সমান ।

আজি a, a + d, a + 2d, a + 3d, ... সমান্তৰ প্রগতিটোৰ প্রত্যেক পদক অশূণ্য সংখ্যা k ৰে পূৰণ কৰো হ'ক । গতিকে লব্ধ অনুক্রমটো হ'ব ঃ

ka, k (a + d) , k (a + 2d), k (a + 3d), ...

ওপৰৰ সংখ্যাৰ নতুন অনুক্রমটো এটা সমান্তৰ প্রগতি যাৰ প্রথম = ka আৰু সাধাৰণ অন্তৰ = k (a + d) - ka = kd

৫.৩.৩ সমান্তৰ শ্রেণী (Arithmetic Series)

যদি এটা সমান্তৰ প্রগতিৰে $t_1, t_2, t_3, \ldots\ldots t_n, \ldots\ldots\ldots$ পদ বিলাক একে ক্রমত যোগ কৰা হয়, তেন্তে $t_1 + t_2 + t_3 + \ldots\ldots + t_n + \ldots\ldots\ldots$ শ্রেণীটোক সমান্তৰ শ্রেণী (বা সংক্ষেপে A.P. শ্রেণী) বোলে ।

উদাহৰণ ঃ

(i) 1 + 2 + 3 + ... 20 এটা সমান্তৰ শ্রেণী

(ii) 5 + 8 + 11 + ... + 35 এটা সমান্তৰ শ্রেণী

৫.৩.৪ সমান্তৰ শ্রেণীৰ প্রথম n টা পদৰ সমষ্টি (Sum of first n terms of an A.P. Series)

প্রথম পদৰ পৰা n টা পদ বিশিষ্ট তলৰ সমান্তৰ শ্রেণীটো বিবেচনা কৰোহ'ক।

a + (a +d) + (a + 2d) + ... { a + (n -1) d }

ধৰাহ'ল শ্রেণীটোৰ যোগফল Sn । পদ বিলাক ওলোটা ক্রমত লিখি আমি পাওঁ -

Sn = {a + (n -1) d} + { a + (n - 2) d} + ... + (a +d) + a

দুয়োটা শ্রেণীৰ পদ বিলাক যোগ কৰি আমি পাওঁ -

2Sn = { 2a + (n -1) d} + { 2a + (n -1) d} + ... + { 2a + (n - 1) d }

= n { 2a + (n-1) d} = n {a + (n -1) d } = n (a +l)

Sn = $\frac{n}{2}$ {2a + (n-1) d} = $\frac{n}{2}$ (a + l)

য'ত l হ'ল শ্রেণীটোৰ n-তম পদ ।

অনুশীলনী - ৩

তলৰ যোগফল বিলাক নির্ণয় কৰক ঃ

(1) (-9) + (-3) + 3 + ...25 তম পদ লৈ

(2) 4 + 1 + (- 2) + ... + (- 53)

সমাধান ঃ

(1) ইয়াত প্রথম পদ a = - 9

সাধাৰণ অন্তৰ d = 6, n = 25

. নির্ণেয় যোগফল ঃ $S_{25} = \frac{25}{2}\{2\times(-9)+(25-1)\times 6\} = 1575$

(2) ইয়াত আমি পাওঁ যে - প্রথমপদ a = 4 আৰু সাধাৰণ অন্তৰ d = -3 আৰু n-তম পদ l= - 53

কিন্তু আমি n ৰ মান নাজানো। যোগফল উলিয়াবলৈ আমি n ৰ মান জানিব লাগিব ।

এতিয়া, n-তম পদ, l = a + (n -1) d = 4 + (n - 1) x (-3) আৰু এইটো '-53' ৰ সমান ।

অর্থাৎ 4 + (n-1) x (-3) = -53। n ৰ বাবে সমাধান কৰি আমি পাওঁ যে

n = 20।

গতিকে নির্ণেয় যোগফল $S_{20} = \frac{20}{2}\{4+(-53)\} = -490$

অনুশীলনী - ৪

এজন মানুহে বছৰি 8% সৰল সুতত 15,000 টা ধাৰ ললে আৰু 20 টা মাহেকীয়া সমান কিস্তিত সুতসহ মূলধন পৰিশোধ কৰিবলৈ ঠিক কৰিলে । যদি প্রতিটো কিস্তিৰ ধন তাৰ পূর্বৱর্তী কিস্তিতকৈ 50 টকা বেছি হয়, তেন্তে প্রথম আৰু শেষ কিস্তিৰ ধন নির্ণয় কৰক ।

সমাধান ঃ 15,000 টকাৰ বছৰি 8% সৰল সুতত 20 মাহৰ

সুত $= \frac{15000 \times 8 \times 20}{100 \times 12}$ টকা = 2,000 টকা

∴ সবৃদ্ধিমূল = 15000 টকা + 2000 টকা = 17,000 টকা

ধৰাহ'ল - প্ৰথম কিস্তি x টকা

প্ৰশ্নমতে, x + (x + 50) + (x + 100) + ... (20 তম পদলৈ)

= 17000 ..... (1)

ইয়াত বাওঁপক্ষৰ শ্ৰেণীটো এটা সমান্তৰ শ্ৰেণী, য'ত

প্ৰথম পদ a = x

সাধাৰণ অন্তৰ d = 50, n = 20

∴ x + (x + 50) + (x + 100) + ... (20 তম পদলৈ)

$= \frac{20}{2}(2 \times x + 19 \times 50)$

= 10 (2x + 950)

= 20x + 9500

∴ (1) ৰ পৰা, 20x + 9500 = 17,000

=> 20x = 17,000 - 9,500 = 7500

=> $x = \frac{7500}{20} = 375$

∴ প্ৰথম কিস্তি = 375 টকা

শেষ কিস্তি = (x + 19 x 50) টকা

= (375 + 950)টকা = 1,325 টকা

৫.৩.৫ তিনিটা দৰ্কাৰী যোগফল (Three important Sums)

(1) $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ...+ n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + ...+ n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

প্ৰমাণ ঃ

(1) এই শ্ৰেণীটো এটা সমান্তৰ শ্ৰেণী, ইয়াৰ প্ৰথম পদ a = 1 আৰু সাধাৰণ অন্তৰ d = 1 গতিকে, $Sn = \frac{n}{2}\{2 \times 1 + (n-1) \times 1\} = \frac{n(n+1)}{2}$

(2) লক্ষ্য কৰক, এইটো সমান্তৰ শ্ৰেণী নহয়। গতিকে আমি 2, 3, 4, ত দিয়া সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰি যোগফল নিৰ্ণয় কৰিব নোৱাৰো ।

আমি পাওঁ , $r^3 - (r-1)^3 = 3r^2 - 3r + 1.....(A)$

(A) ত ক্রমশঃ r = 1, 2, 3, ..., n বহুৰাই আমি পাওঁ

$1^3 - o^3 = 3\times1^2 - 3\times1 + 1$

$2^3 - 1^3 = 3\times2^2 - 3\times2 + 1$

.....

.....

$n^2 - (n-1)^2 = 3\times n^2 - 3\times n + 1$

ওপৰৰ অভেদ কেইটাৰ দুয়োফালে যোগ কৰি আমি দেখো যে

$n^3 - o^3 = 3\times\left[1^2 + 2^2 + ... + n^2\right) - 3\times(1 + 2 + ... + n\right]$

+ (1 + 1 + ... + 1]

$\Rightarrow 1^2 + 2^2 ..... + n^2 = \frac{1}{3}\left[n^3 - 3x\frac{n(n+1)}{2} - n\right]$

$= \frac{n(n + 1(n + 2)}{6}$

(3) এই শ্রেণীটোও সমান্তৰ শ্রেণী নহয়। সেয়ে ২, ৩, ৪ ত দিয়া সূত্র ব্যৱহাৰ কৰি শ্রেণীটোৰ যোগফল নির্ণয় কৰিব নোৱাৰি ।

আমি পাওঁ ,

$(r+1)^2 - (r-1)^2 = 4r$

$\Rightarrow r^2(r+1)^2 - r^2(r-1)^2 = 4r^3 .....(A)$

(A) ত ক্রমশঃ r = 1, 2, 3.....,n বহুৰাই আমি পাওঁ -

$1^2\times2^2 - 1^2\times0^2 = 4\times1^3$

$2^2\times3^2 - 2^2\times1^2 = 4\times2^3$

$3^2\times4^2 - 3^2\times2^2 = 4\times3^3$

দুয়োফালে যোগকৰি আমি পাওঁ,

$n^2\times(n+1)^2 - 0 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$

$n^2 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}$

৫.৪ গুনোত্তৰ প্রগতি আৰু শ্রেণী (GEOMETIC PROGRESSION AND SERIES)

সংখ্যাৰ অনুক্রমণ 4, 12, 36, 108,..... বিবেচনা কৰক । ইয়াত আমি লক্ষ্য কৰিছো যে প্রথম পদটোৰ বাহিৰে আন প্রত্যেক পদ তাৰ পূর্ববর্তী পদটোৰ 3 গুণৰ সমান । যদি এটা

সংখ্যৰ অনুক্রমনৰ প্রথম পদটোৰ বাহিৰে প্রত্যেক পদ তাৰ পূর্ববর্তী পদক এটা স্থিৰ সংখ্যাৰে পূৰণ কৰি পাব পাৰি, তেন্তে তাক গুনোত্তৰ প্রগতি (Geometic Progression ,সংক্ষেপে G.P.) বোলে । স্থিৰ সংখ্যাটোক গুনোত্তৰ প্রগতিটোৰ সাধাৰণ অনুপাত (Common Ratio,সংক্ষেপে C.R.) বোলে ।

যদি এটা গুনোত্তৰ প্রগতিৰ পদৰ সংখ্যা সীমিত হয় তেন্তে তাক সসীম গুনোত্তৰ প্রগতি (Finite G.P.) আৰু গুনোত্তৰ প্রগতিটোৰ পদৰ সংখ্যা অসীম হ'লে তাক অসীম গুনোত্তৰ প্রগতি (Infinite G.P. বোলে ।

উদাহৰণ ঃ (i) 2, 8, 32, 128, ...এটা গুনোত্তৰ প্রগতি আৰু ইয়াৰ সাধাৰণ অনুপাত =4

(ii) 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... এটা গুনোত্তৰ প্রগতি আৰু ইয়াৰ সাধাৰণ অনুপাত = $\frac{1}{2}$

মন্তব্য ঃ যদি এটা গুনোত্তৰ প্রগতিৰ প্রথম আৰু দ্বিতীয় পদ ক্রমে t_1 আৰু t_2 তেন্তে সাধাৰণ অনুপাত $(C.R) = \frac{t_2}{t_1}$

সাধাৰণতে আমি এটা গুনোত্তৰ প্রগতিৰ প্রথম পদ t_1 ক a ৰে সাধাৰণ অনুপাত (C.R) ক r ৰে বুজাওঁ । তেনেক্ষেত্রত গুনোত্তৰ প্রগতিটো তলত দিয়া ধৰণে লিখিব পাৰি ঃ

$$\boxed{a, a\times r, a\times r^2, a\times r^3, ...}$$

গতিকে গুনোত্তৰ প্রগতিটোৰ n-তম পদ $n = a\times r^{n-1}$ আৰু ইয়াক t_n ৰ দ্বাৰা বুজোৱা হয় ।

অনুশীলনী - ৫

-6, 18, -54, 162, -, ... গুনোত্তৰ প্রগতিটোৰ নৱম পদটো নির্ণয় কৰা ।

সমাধান ঃ ইয়াত প্রথম পদ a = -6 আৰু সাধাৰণ অনুপাত $r = \frac{18}{-6} = -3$

গতিকে $t_9 = 9\times r^8 = (-6)\times(-3)^8 = -39,366$

অনুশীলনী - ৬

1, -2, 4, - 8, ... গুনোত্তৰ প্রগতিটো কোনটো পদ 1024 ৰ সমান ?

সমাধান ঃ ইয়াত a = 1, r = $\frac{-2}{1}$ = -2

ধৰাহ'ল G.P. টোৰ n-তম পদ 1024 ৰ সমান ।

গতিকে, $a\times r^{n-1} = 1024 \Rightarrow (-2)^{n-1} = 1^{10} \Rightarrow n-1 = 10 \Rightarrow n = 11$

. গুনোত্তৰ প্রগতিটোৰ 11 তম পদ = 1024

৫.৪.১ গুনোত্তৰ প্রগতিৰ ধর্ম (PROPERTIES OF A G.P.)

সমান্তৰ প্রগতিৰ ক্ষেত্রত দেখুওৱা ধৰণে গুনোত্তৰ প্রগতিৰ সংজ্ঞাৰ পৰা তলৰ ধর্মকেইটা প্রতিপন্ন কৰিব পাৰি ।

(1) যদি এটা গুনোত্তৰ প্রগতিৰ প্রত্যেক পদক এটা অশূণ্য সংখ্যাৰে পূৰণ নাইবা হৰণ কৰা হয় তেন্তে লব্ধ পদ বিলাকে গুনোত্তৰ প্রগতিত থাকে আৰু ইয়াৰ

সাধাৰণ অনুপাত মূল গুনোত্তৰ প্রগতিটোৰ সাধাৰণ অনুপাতৰ সৈতে একে।
অর্থাৎ যদি a, ar, ar^2, ... এটা গুনোত্তৰ প্রগতি যাৰ সাধাৰণ অনুপাত = r, তেন্তে ba, bar, bar^2,..... ও এটা গুনোত্তৰ প্রগতি আৰু ইয়াৰ সাধাৰণ অনুপাত $\frac{bar}{ba} = r$

(2) যদি a, ar, ar^2, ... এটা গুনোত্তৰ প্রগতি আৰু সাধাৰণ অনুপাত = r, তেন্তে ইয়াৰ পদ বিলাকৰ প্রতিক্রম $\frac{1}{a}, \frac{1}{ar}, \frac{1}{ar^2}$, ... ও এটা গুনোত্তৰ প্রগতি আৰু ইয়াৰ সাধাৰণ অনুপাত $\frac{1/ar}{1/a} = \frac{1}{r}$

(3) (i) যদি a > 0, r >1, তেন্তে গুনোত্তৰ প্রগতিটোৰ দ্বিতীয় পদ, প্রথম পদতকৈ ডাঙৰ হ'ব, তৃতীয় পদ দ্বিতীয় পদকৈ ডাঙৰ হ'ব, ইত্যাদি ।
এইক্ষেত্রত গুনোত্তৰ শ্রেণীটোক বর্ধমান বুলি কোৱা হয়।

(ii) যদি a > 0, 0 < r < 1, তেন্তে গুণোত্তৰ প্রগতিটোক হ্রাসমান বুলি কোৱা হয়।

(iii) যদি a < 0, r >,1 তেন্তে গুণোত্তৰ প্রগতিটোক হ্রাসমান বুলি কোৱা হয়।

(iv) যদি a<0, 0< r < I, তেন্তে গুণোত্তৰ প্রগতিটোক বর্দ্ধমান বুলি কোৱা হয়।

৫.৪.২ গুণোত্তৰ শ্রেণী (GEOMETRIC SERIES)

যদি এটা গুণোত্তৰ প্রগতিৰ $t_1, t_2, t_3, ... t_n$,..... পদ বিলাক একে ক্রম ৰাখি যোগ কৰা হয়, তেন্তে $t_1 + t_2 + t_3 + ...+ t_n + ...$ শ্রেণীটোক গুণোত্তৰ শ্রেণী (সংক্ষেপে G.P. Series) বোলে ।

উদাহৰণ ঃ (i) 1 + 2 + 4 + ... + 64 এটা গুণোত্তৰ শ্রেণী
(ii) 5 + 15 + 45 + ... + 1215 এটা গুণোত্তৰ শ্রেণী

৫.৪.৩ গুণোত্তৰ শ্রেণীৰ প্রথম n টা পদৰ সমষ্টি (SUM OF FIRST N TERMS OF A G.P. SERIES)

ধৰাহ'ল a, ar, ar^2 ..... গুণোত্তৰ প্রগতিটোৰ প্রথম n টা পদৰ সমষ্টি Sn.

$\therefore Sn = a + ar + ar^2 + ...+ ar^{n-1}$.....(1)

(1) ৰ দুয়োফলক r ৰে পূৰণ কৰি আমি পাওঁ -

$rSn = ar + ar^2 + ar^3 + ...+ ar^n$.....(2)

(1) ৰ পৰা (2) বিয়োগ কৰি আমি পাওঁ -

$$Sn - rSn = a - nr^n \Rightarrow (1-r)Sn = a(1-r^n) \Rightarrow Sn\frac{a(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$$

মন্তব্য ঃ যদি (a = 1) তেন্তে $1+r+r^2+.....+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}$

উদাহৰণ ঃ (i)

$$1+2+4+.....+64=1+2+2^2+.....+2^6=\frac{1\times(1-2^7)}{1-2}=127$$

(ii) 5 + 15 + 45 + ...গুনোত্তৰ শ্ৰেণীটোৰ প্ৰথম 6 টা পদৰ সমষ্টি হ'ল

$$S_6=\frac{5\times(1-3^6)}{1-3}=1820$$

অনুশীলনী - ৯

শ্ৰেণীটোৰ প্ৰথম n টা পদৰ সমষ্ঠি নিৰ্ণয় কৰক ঃ 4 + 44 + 444 + ...

সমাধান ঃ ধৰাহ'ল সমষ্টি = Sn

এতিয়া Sn = 4 + 44 + 444 + ...n তম পদলৈ

= 4 (1 + 11 + 111 + ...) [Θ প্ৰত্যেক পদৰ 4এটা উৎপাদক]

= $\frac{4}{9}$(9 + 99 + 999 + ...) [প্ৰত্যেক পদক 9 ৰে হৰণ আৰু পূৰণ কৰি]

= $\frac{4}{9}$(10-1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + ...]

= $\frac{4}{9}$(10 + 10^2 + 10^3 + ...n তম পদলৈ)

- (1 + 1 + 1 +.....n তম পদলৈ)]

কিন্তু 10 + 10^2 + 10^3..... শ্ৰেণীটো এটা গুনোত্তৰ শ্ৰেণী ।

ইয়াৰ প্ৰথম পদ a = 10 সাধাৰণ অনুপাত r = 10, n = n

∴ 10 + 10^2 + 10^3 ..... n তম পদলৈ $\frac{10(10^n-1)}{10-1}=\frac{10(10^n-1)}{9}$

আকৌ 1 + 1 + 1 + ... n তম পদলৈ = n x 1 = n

∴ (1) ৰ পৰা আমি পাওঁ -

$$Sn=\frac{4}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{9}-n\right]=\frac{40}{81}(10^n-1)-\frac{4n}{9}$$



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ - ১

প্ৰশ্ন নং ১ঃ তলৰ উক্তিসমূহ শুদ্ধ নে অশুদ্ধ নিৰ্ণয় কৰক -

(ক) 18, 11, 4, -3, ... এটা সমান্তৰ প্ৰগতি আৰু ইয়াৰ সাধাৰণ অন্তৰ = - 7(শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

(খ) 12, $14\frac{1}{2}$, 17, ...সমান্তৰ প্রগতিটোৰ n-তম পদ $\frac{1}{2}(Sn+17)$ ৰ সমান (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

(গ) 10 আৰু 100 ৰ মাজত থকা 5 ৰ গুণিতক বিলাকে এটা সমান্তৰ প্রগতি গঠন কৰে। (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

(ঘ) 15, 23, 31,..... সমান্তৰ প্রগতিটোৰ 143 এটা পদ হয়। (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

(ঙ) এটা সমান্তৰ প্রগতিৰ 7-তম আৰু 13-তম পদ দুটা ক্রমে 35 আৰু 63 হ'লে 19তম পদটো 93 হ'ব । (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

(চ) এটা সমান্তৰ প্রগতিৰ n-তম পদটো 3n- 1 হলে সাধাৰণ অন্তৰ 3 ৰ সমান। (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

প্রশ্ন নং ২ঃ খালী ঠাই পূৰ্ণ কৰক ঃ

(ক) $1^2 + 2^2 + 3^2 + ...+ 10^2 = ...$

(খ) $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = ...$

প্রশ্ন নং ৩ঃ তলৰ উক্তিসমূহ শুদ্ধ নে অশুদ্ধ নির্ণয় কৰক -

(ক) 0.3 + 0.03 + 0.003+ .....এটা গুনোত্তৰ শ্রেণী আৰু ইয়াৰ সাধাৰণ অনুপাত $\frac{1}{10}$ (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

(খ) 2, -1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ গুনোত্তৰ প্রগতিটোৰ নৱম পদ - 192 (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

(গ) 1, $-\frac{4}{5}$, $\frac{16}{25}$,..... ৰ ষষ্ঠ পদ $-\frac{32}{3225}$ (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

(ঘ) $\sqrt{2}$, 1, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}$, ...গুনোত্তৰ প্রগতিটোৰ $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ এটা পদ (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

(ঙ) এটা গুনোত্তৰ প্রগতিৰ পঞ্চম আৰু অষ্টম পদ দুটা ক্রমে16 আৰু 17 হ'লে দশম পদটো 512 হ'ব । (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

৫.৫ সমান্তৰ আৰু গুনোত্তৰ মাধ্য (ARITHMATIC AND GEOMATRIC MEANS)

৫.৫.১ সমান্তৰ মাধ্য (Arithmetic Mean)

যদি a, b, c সংখ্যা তিনিটা এনেকুৱা যে ইহঁত সমান্তৰ প্রগতিত থাকে, তেন্তে b ক a আৰু c ৰ সমান্তৰ মাধ্য (সংক্ষেপে A.M.) বোলে । যিহেতু a,b,c সমান্তৰ প্রগতিত আছে, গতিকে - b -a = c - b $\Rightarrow b = \frac{a+c}{2}$

গতিকে a আৰু c সংখ্যাদুটাৰ A.M. সিহঁতৰ গড়ৰ সমান । যদি a, m_1, m_2, ..., m_n, b সমান্তৰ প্রগতিত থাকে, তেন্তে m_1, m_2, ..., m_n, ক a আৰু b ৰ মাজৰ n সংখ্যক সমান্তৰ মাধ্য বোলে ।

এতিয়া a, m_1, m_2, ..., m_n, b সমান্তৰ প্রগতিত আছে আৰু ইয়াত স্পষ্টকৈ n + 2 সংখ্যক পদ আছে । যদি সাধাৰণ অন্তৰ d, তেন্তে (n+2) তম পদ হ'ব ঃ a + [(n + 2) - 1] d = a + (n+1) d আৰু এইটো b ৰ সমান হ'ব । গতিকে

$$a+(n+1)d=b \Rightarrow d=\frac{b-c}{n+1}$$

d ৰ এই মানৰ সহায়ত আমি পাওঁ,

$$m_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1} \ldots\ldots, \quad m_n = a + nd = 1 + n\,\frac{b-a}{n+1}$$

অনুশীলনী - ৮

যদি 3, p, q, r, - 17 সমান্তৰ প্রগতিত থাকে, তেন্তে p, q আৰু r নির্ণয় কৰক ।

সমাধান ঃ ধৰাহ'ল প্রদত্ত সমান্তৰ প্রগতিটোৰ সাধাৰণ অনুপাত = d

তেতিয়াহ'লে,

a + 4d = - 17 => 3 + 4d = - 17 => d = - 5

. p = 3 + d = - 2, q = 3 + 2d = -7, r = 3 + 3d = -12

৫.৫.২ গুনোত্তৰ মাধ্য (Geometric Mean)

যদি a, b, c সংখ্যা তিনিটা গুনোত্তৰ প্রগতিত থাকে, তেনেহ'লে b ক a আৰু c ৰ গুণোত্তৰ মাধ্য (সংক্ষেপে G.M.) বোলে। a, b, c গুণোত্তৰ প্রগতিত থকা কাৰণে আমি পাওঁ

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = ac \Rightarrow b = \sqrt{ac}$$

গতিকে a আৰু c সংখ্যা দুটাৰ গুণোত্তৰ মাধ্য সিহঁতৰ গুণ ফলৰ বর্গমূলৰ সমান । যদি a, m_1, m_2, ...m_n, b গুণোত্তৰ প্রগতিত থাকে তেন্তে m_1, m_2, ...m_n, ক a আৰু b ৰ n সংখ্যক গুণোত্তৰ মাধ্য বোল ।

এতিয়া a, m_1, m_2, ...m_n, b গুণোত্তৰ প্রগতিত আছে। নিঃসন্দেহে প্রগতিটোত n + 2 সংখ্যক পদ আছে। যদি সাধাৰণ অনুপাত r হয় তেন্তে (n+2) তম পদ = $a\times r^{(n+2)-1} = a\times r^{n+1}$ আৰু এই পদটো b ৰ সমান ।

$$\therefore a\times r^{n+1} = b \Rightarrow r^{n+1} = \frac{b}{a} \Rightarrow r = \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}$$

r ৰ এই মানৰ সহায়ত আমি পাওঁ -

$$m_1 = a\times r = a\times\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \ldots\ldots, m_n = a\times r^n = a\times\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

অনুশীলনী - ৯

3 আৰু 192 ৰ মাজত 5 টা গুণোত্তৰ মাধ্য নির্ণয় কৰক ।

সমাধান ঃ ধৰাহ'ল 3 আৰু 192 ৰ মাজত 5 টা গুণোত্তৰ মাধ্য G_1, G_2, G_3, G_4 আৰু G_5 ইয়াত a =3 আৰু সপ্তম পদ = 192 যদি সাধাৰণ অনুপাত = r, তেন্তে

$$a\times r^6 = 192 = \ 3\times r^6 = 196 = \ r^6 = 64 = 2^6 = \ r = 2$$

এতেকে $G_1 = 3\times 2 = 6$, $G_2 = 3\times 2^2 = 12$, $G_3 = 24$, $G_4 = 48, G_5 = 96$

৫.৫.৩ সমান্তৰ মাধ্য আৰু গুণোত্তৰ মাধ্যৰ মাজৰ সম্পর্ক (Relation between A.M. and G.M)

ধৰাহ'ল a আৰু b দুটা বাস্তৱ সংখ্যা ।এতেকে সিহঁতৰ সমান্তৰ মাধ্য (A.M) আৰু গুণোত্তৰ মাধ্য (G.M.) ক্রমে $\frac{a+b}{2}$ আৰু $\sqrt{ab}$ হ'ব ।

এতিয়া A. M. - G.M. = $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} + \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$

$= \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b}\}^2 .....(1)$

আকৌ যিকোনা দুটা বাস্তৱ সংখ্যা a আৰু b ৰ ক্ষেত্রত -

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0....(2)$$

(1) আৰু (2) ৰ পৰা আমি পাওঁ- A.M. $\geq$ G.M.

বিশেষ পৰিস্থিতি ঃ

(i) যদি a $\neq$ b, তেন্তে $\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 > 0$ আৰু এতেকে A.M. > G.M.

(ii) যদি a = b, তেন্তে A.M. = G.M.

অনুশীলনী - ১০

যদি a আৰু b ৰ মাজৰ দুটা সমান্তৰ মাধ্য p. q আৰু গুণোত্তৰ মাধ্য G, তেন্তে প্রমাণ কৰক যে $G^2 = (2p-q)(2q-p)$

সমাধান ঃ ইয়াত a, p, q, b A.P. ত আছে।

এতেকে $P = \frac{a+q}{2}$ আৰু $q = \frac{p+b}{2}$

=> a = 2p - q , b = 2q - p

আকৌ G^2 = ab => G^2 = (2p - q) (2q - p)



৫.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

এই অধ্যায়ত আমি সংখ্যাবিলাকৰ দুটা পৃথক আৰ্হিসমান্তৰ প্ৰগতি (A.P.) আৰু গুণোত্তৰ প্ৰগতি (G.P.) সম্পৰ্কে শিকিলো। A.P. শ্রেণী আৰু G.P. শ্রেণীৰ প্ৰথম n সংখ্যক পদৰ সমষ্টি নিৰ্ণয় কৰাৰ কাৰণে সূত্ৰ নিৰ্গমন কৰিছো । ইয়াৰোপৰি আমি সমান্তৰ মাধ্য আৰু গুণোত্তৰ মাধ্য আৰু সিহঁতৰ মাজৰ সম্পৰ্কৰ বিষয়েও শিকিছো ।



৫.৯ অধিক জানিবলৈ

1) Business Mathematics, Qafi Zameeruddin, V.K. Khanna, and S.K. Bhambri, Vikas Publishing House Pvt. Ltd., Second Reprint, 1995.

2) Business Mathematics, Dr. P.L. Hazarika, S. Chand.



৫.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ - **১**

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (ক) শুদ্ধ (খ) অশুদ্ধ (গ) শুদ্ধ (ঘ) শুদ্ধ (ঙ) অশুদ্ধ (চ) শুদ্ধ

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (ক) 385 (খ) n^2

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (ক) শুদ্ধ (খ) অশুদ্ধ (গ) শুদ্ধ (ঘ) শুদ্ধ (ঙ) শুদ্ধ



৫.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ঃ 25 + 17 + 9 + ... শ্রেণীটোৰ দ্বাদশ আৰু পঞ্চদশ পদ দুটা নিৰ্ণয় কৰক ।

প্ৰশ্ন ২ঃ 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2^2}$,..... অনুক্রমটোৰ পঞ্চম আৰু সপ্তম পদদুটাৰ অনুপাত নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ঃ 12 + 15 + 81 +..... শ্রেণীটোৰ প্ৰথমৰ পৰা কিমানটা পদৰ সমষ্টি 495 হ'ব ?

প্ৰশ্ন ৪ঃ A.P. ত থকা চাৰিটা সংখ্যাৰ যোগফল 20 আৰু সিহঁতৰ বৰ্গৰ যোগফল 120 হ'লে সংখ্যা চাৰিটা নিৰ্ণয় কৰক ।

প্রশ্ন ৫ঃ এটা সমান্তৰ প্রগতিৰ p তম আৰু q তম পদ দুটা ক্রমে a আৰু b। প্রমান কৰক যে ইয়াৰ প্রথম (p+q) টা পদৰ সমষ্টি $\frac{p+q}{2}\left(a+b+\frac{a-b}{p-q}\right)$

প্রশ্ন ৬ঃ এটা গুণোত্তৰ প্রগতিৰ পঞ্চম আৰু সপ্তম পদ ক্রমে 81 আৰু 729 হ'লে ষষ্ঠ পদটো নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৭ঃ সমান্তৰ প্রগতিত থকা তিনিটা সংখ্যাৰ যোগফল 21, যদি ইহঁতৰ লগত যথাক্রমে 1, 2, 15 যোগ কৰা হয়, তেন্তে লব্ধ সংখ্যা কেইটা গুণোত্তৰ প্রগতিত থাকে । সংখ্যা তিনিটা নির্ণয় কৰা।

প্রশ্ন ৮ঃ তলৰ শ্রেণীকেইটাৰ যোগফল নির্ণয় কৰক ঃ

(i) 11 + 15 + 19 + ... 20 তম পদলৈ

(ii) 2 -8 + 32 - 128 + ... + 8192

(iii) -13 - 8 - 3 + 2 + ... + 132.

(iv) 7 + 77 + 777 + ...n তম পদলৈ

প্রশ্ন ৯ঃ তিনিটা সংখ্যা x , y, z গুণোত্তৰ প্রগতিত আছে । যদি x আৰু y ৰ মাজৰ সমান্তৰ মাধ্য a আৰু y আৰু z ৰ মাজৰ সমান্তৰ মাধ্য b, তেন্তে প্রমাণ কৰক যে $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$

প্রশ্ন ১০ঃ(ক) 5 আৰু 23 ৰ মাজৰ 5 টা সমান্তৰ মাধ্য নির্ণয় কৰক ।

(খ) 9 আৰু 729 ৰ মাজৰ 3 টা গুণোত্তৰ মাধ্য নির্ণয় কৰক ।

প্রশ্ন ১১ঃযদি a, b, c সংখ্যা তিনিটা A.P. ত আৰু x , y, z সংখ্যা তিনিটা G.P. ত থাকে তেন্তে প্রমাণ কৰক যে $x^{a-b}y^{b-c}z^{c-a}=1$

প্রশ্ন ১২ঃ এজন মানুহে বছৰি 8% হাৰ সৰল সুতত 10,000 টকা ধাৰ ললে । তেখেতে16 টা মাহেকীয়া কিস্তিত সুত সহ ঋণ পৰিশোধ কৰিবলৈ স্থিৰ কৰিলে । যদি প্রতিটো কিস্তিৰ ধন তাৰ পূর্ববর্তী কিস্তিতকৈ 40 টকা বেছি হয়, তেন্তে প্রথম কিস্তিৰ টকাৰ পৰিমান নির্ণয় কৰক। প্রথম 10 টা কিস্তি দিয়াৰ পিছত মানুহজনে কিমান টকা পৰিশোধ কৰিবলৈ বাকী থাকিব ?

*** ***** ***