GCM S2 01

ব্যৱসায়িক পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান

দ্বিতীয় ষাণ্মাসিক

স্নাতক বাণিজ্য

খণ্ড ঃ ১



কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

বিষয় বিশেষজ্ঞ মণ্ডলী

অধ্যাপক নয়ন বৰুৱা, গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়
অধ্যাপক হেমচন্দ্র গৌতম, গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়
ড° এচ. কে. মহাপাত্র, গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়

সমন্বয়ৰক্ষীঃ হৰেকৃষ্ণ ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

প্রস্তুতি গোটৰ সদস্য

অধ্যায়	*অৱিহণা যোগাইছে*	*ভাষান্তৰকাৰী*
১, ২ আৰু ৩	ড^0 পদ্মলোচন হাজৰিকা গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়	অধ্যায় ১, ২, ৩, ৫ আৰু ৬ শ্রী পঞ্চানন বর্মন, অৱসৱপ্রাপ্ত শিক্ষক
৪	অজন্তা মজুমদাৰ গুৱাহাটী বাণিজ্য মহাবিদ্যালয়	আম্ৰিখোৱা উচ্চতৰ মাধ্যমিক বিদ্যালয় সর্থেবাৰী
৫ আৰু ৬	ড^0 জয়দ্বীপ বৰুৱা, অ'. কে. ডি. ইনষ্টিটিউট অৱ চ'চিয়েল চেইঞ্জ এণ্ড ডেভ'লপমেণ্ট মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়	অধ্যায় ৪ গীতাঞ্জলী মেধি, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

সম্পাদনাঃ

বিষয়বস্তু সম্পাদনা ঃ ড^0 দিলীপ কুমাৰ শর্মা, কটন কলেজ
ড^0 সঞ্জয় দত্ত, গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়

গাঁথনিক সম্পাদনা ঃ হৰেকৃষ্ণ ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

প্রথম প্রকাশ ঃ জানুৱাৰী, ২০১৮

This Self Learning Material (SLM) of the Krishna Kanta Handiqui State Open University is made available under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike4.0 License (international): http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ৰ হৈ পঞ্জীয়কৰ দ্বাৰা মুদ্রিত আৰু প্রকাশিত

মূখ্য কার্যালয় ঃ পাটগাঁও, ৰাণীগেট, গুৱাহাটী-৭৮১০১৭
উপমূখ্য কার্যালয় ঃ হাউচফেড কমপ্লেক্স, দিচপুৰ, গুৱাহাটী-৭৮১০০৬
Web : www.kkhsou.in

এই শিক্ষণ সামগ্রী প্রস্তুতিৰ বাবে আর্থিক অনুদান আগবঢ়োৱা
দূৰ শিক্ষা ব্যুৰো, বিশ্ববিদ্যালয় অনুদান আয়োগৰ ওচৰত বিশ্ববিদ্যালয় কৃতজ্ঞ।

পাঠ্যবিষয় পৰিচয়

'ব্যৱসায়িক পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান' পাঠ্যবিষয়টি স্নাতক বাণিজ্যৰ দ্বিতীয় ষাণ্মাসিকত সন্নিবিষ্ট কৰা হৈছে। ব্যৱসায়িক পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান পাঠ্যবিষয়টোৱে পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানৰ ওপৰত আলোকপাত কৰিব। এই পাঠ্যবিষয়টি দুটা খণ্ডত ভাগ কৰা হৈছে। প্ৰথম খণ্ডটি ছটা আৰু দ্বিতীয় খণ্ডটি সাতটা অধ্যায়ৰে গঠিত।

প্ৰথম খণ্ডটিৰ প্ৰথম অধ্যায়টিত পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান কিছুমান মৌলিক ধাৰণাৰ ওপৰত আলোকপাত কৰা হৈছে। এই খণ্ডটিত কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপ আৰু বিক্ষেপণৰ মাপৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হৈছে। প্ৰতিসাম্য, আঘুৰ্নবেগ আৰু কুকুদ বক্ৰতাৰ বিষয়েও এই খণ্ডটিত আলোচনা কৰা হ'ব। সহসম্বন্ধ, সহসম্বন্ধৰ প্ৰকাৰ আৰু সহসম্বন্ধৰ সহজ (বা গুণাংক) বিষয়েও এই খণ্ডটিত জানিব পাৰিব। তেনেদৰে সমাশ্ৰয়ন, ৰৈখিক সমাশ্ৰয়ন আৰু সমাশ্ৰয়ন সমীকৰণৰ বিষয়ে এই খণ্ডটি বিশদভাৱে আলোচনা কৰা হ'ব।

দ্বিতীয় খণ্ডটিত সম্ভাৱিতা আৰু চৰ্তসাপেক্ষে সম্ভায়িতাৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব। যাদৃচ্ছিক চলক আৰু ইয়াৰ সম্ভাৱিতা বণ্টনৰ বিষয়ে এই খণ্ডটিত আলোচনা কৰা হ'ব। বিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বিভাজনৰ বিষয়ে এই খণ্ডটিত আলোকপাত কৰা হৈছে। এই খণ্ডটিত সূচকাংক আৰু সময় শ্ৰেণীৰ বিষয়েও আলোচনা কৰা হৈছে। তেনেদৰে, প্ৰতিচয়নৰ মৌলিক ধাৰণাৰ ওপৰত এই খণ্ডটিত আলোকপাত কৰা হ'ব।

খণ্ড পৰিচয়

এই খণ্ডটি 'ব্যৱসায়িক পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান' পাঠ্যবিষয়টিৰ প্ৰথম খণ্ড। এই খণ্ডটিত সৰ্বমুঠ ছটা অধ্যায়েৰে গঠিত।

প্ৰথম অধ্যায়টিত পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানৰ কিছুমান মৌলিক ধাৰণাৰ ওপৰত আলোচনা কৰা হ'ব। এই অধ্যায়ত তথ্য সংগ্ৰহৰ বিভিন্ন পদ্ধতি, তথ্যৰ তালিকাকৰণ আৰু পৰিসংখ্যিকীয় তথ্যৰ উপস্থাপনৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব।

দ্বিতীয় অধ্যায়ত কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপৰ বিষয়ে বিশদভাৱে আলোচনা কৰা হ'ব।

তৃতীয় অধ্যায়ত আমি বিক্ষেপণৰ মাপৰ বিষয়ে আলোচনা কৰক।

চতুৰ্থ অধ্যায়ত প্ৰতিসাম্য, আঘুৰ্নবেগ আৰু কুকুদ বক্ৰতা বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব।

পঞ্চম অধ্যায়ত সহসম্বন্ধ, প্ৰকীৰ্ণ আলেখন, সহসম্বন্ধৰ প্ৰকাৰ আৰু সহসম্বন্ধ সহগ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব।

ষষ্ঠ অধ্যায়ত সমাশ্ৰয়ন, ৰৈখিক সমাশ্ৰয়ন, সমাশ্ৰয়ন সমীকৰণ আদিৰ ওপৰত আলোকপাত কৰা হ'ব।

এই পাঠ্যবিষয়টি অধ্যয়ন কৰোঁতে মূল পাঠৰ সোঁ তথা বাওঁফালে কিছুমান আয়তাকাৰ বাকচ লক্ষ্য কৰিব। এইবোৰত মূল পাঠত থকা নতুন শব্দ আৰু পৰিভাষাসমূহৰ অৰ্থ সন্নিবিষ্ট হৈছে। সেইদৰে— 'জানি থোৱা ভাল' বাকচবোৰত মূল পাঠৰ সৈতে জড়িত কিছু গুৰুত্বপূৰ্ণ তথ্যৰ সম্ভেদ আছে। প্ৰতিটো অধ্যায়ত থকা 'অনুশীলনী'সমূহে অধ্যয়ন অধিক সক্ৰিয় আৰু ফলপ্ৰসূ হোৱাত সহায় কৰিব। আকৌ, 'অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ' যোগে আগবঢ়োৱা প্ৰশ্নাৱলীয়ে অধ্যয়নৰ অগ্ৰগতি সম্পৰ্কে স্ব-পৰীক্ষণৰ সুবিধা দিব। অধ্যয়নৰ লগে লগে উক্ত প্ৰশ্নাৱলীৰ উত্তৰসমূহ লিখি শেষত দিয়া 'অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান'ৰ সৈতে ৰিজাই চোৱাটো অধিক লাভদায়ক হ'ব। অধ্যায়বোৰৰ শেষত 'আৰ্হি প্ৰশ্ন' হিচাপে কেইটিমান প্ৰশ্নৰ আৰ্হিও তুলি দিয়া হৈছে।

বিষয় সূচী

পৃষ্ঠা নং

অধ্যায় ১ঃ **পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানৰ পৰিচয়** ৫-৪০

পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানৰ অর্থ আৰু গুৰুত্ব; বাৰংবাৰতা বিভাজন; তথ্যৰ তালিকাকৰণ; পৰিসংখ্যিকীয় তথ্যৰ উপস্থাপনৰ পদ্ধতি।

অধ্যায় ২ঃ **কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপ** ৪১-৬২

কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপৰ অর্থ; কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপৰ প্রকাৰ।

অধ্যায় ৩ঃ **বিক্ষেপণৰ মাপ** ৬৩-৮৩

বিক্ষেপণৰ অর্থ; বিক্ষেপণৰ বিভিন্ন মাপ; বৈষম্যৰ প্রকাৰ আৰু মাপ।

অধ্যায় ৪ঃ **অপ্রতিসাম্য, আঘুর্নবেগ আৰু কুকুদ বক্রতা** ৮৪-১০৭

অপ্রতিসাম্য, অপ্রতিসাম্যৰ জোখ, ঘুর্নক মান, কুকুদ বক্রতা।

অধ্যায় ৫ঃ **সহসম্বন্ধ** ১০৮-১১৯

সহসম্পন্ধৰ অর্থ; প্রকীর্ণ আলেখন আৰু সহসম্বন্ধ; সহসম্বন্ধৰ প্রকাৰ; সহসম্বন্ধ সহগ·

অধ্যায় ৬ঃ **সমাশ্রয়ন** ১২০-১২৭

সমাশ্রয়নৰ অর্থ; ৰৈখিক সমাশ্রয়ন আৰু সমাশ্রয়ন সমীকৰণ; সহসম্বন্ধ আৰু সমাশ্রয়ন বিশ্লেষণ ঃ এক তুলনা।

অধ্যায় ১ঃ পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানৰ পৰিচয় (INTRODUCTION TO STATISTICS)

অধ্যায় গাঁথনি

১.১ উদ্দেশ্য

১.২ পৰিচয়

১.৩ পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানৰ অর্থ আৰু সংজ্ঞা

১.৪ বাৰংবাৰতা বিভাজন

- ১.৪.১ তথ্যৰ শ্রেণীকৰণ
- ১.৪.২ শ্রেণীকৰণৰ প্রকাৰ

১.৫ তথ্যৰ তালিকাকৰণ বা সাৰণীকৰণ

- ১.৫.১ তালিকাকৰণৰ সুবিধা বা গুৰুত্ব
- ১.৫.২ এখন তালিকাৰ বিভিন্ন অংগ
- ১.৫.৩ তালিকাৰ প্রকাৰ
- ১.৫.৪ শ্রেণী বাৰংবাৰতাৰ অভিগণনা আৰু বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা প্রস্তুতকৰণ

১.৬ পৰিসংখ্যিকীয় তথ্যক উপস্থাপন কৰাৰ পদ্ধতিসমূহ

১.৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১.৮ অধিক জানিবলৈ

১.৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১.১০ আৰ্হি প্রশ্ন

১.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি —

- পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানৰ সংজ্ঞা দিব পাৰিব
- পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানৰ ব্যৱহাৰ সম্পর্কে জানিব পাৰিব
- বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ধাৰণা সম্পর্কে জানিব পাৰিব
- তথ্যৰ শ্রেণীকৰণ আৰু তালিকাকৰণৰ লগতে শ্রেণীকৰণ আৰু তালিকাকৰণৰ গুৰুত্বৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিব পাৰিব
- তথ্যক কিদৰে চিত্রাত্মক আৰু লৈখিকভাৱে উপস্থাপন কৰিব পাৰি তাৰ বর্ণনা কৰিব পাৰিব।

১.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

এইটো নিশ্চিত কৰা হৈছে যে 'পৰিসংখ্যা' শব্দটো লেটিন শব্দ 'status' বা ইটালী শব্দ 'statista' বা জার্মান শব্দ 'statistical'ৰ পৰা আহিছে। এই শব্দকেইটাৰ প্ৰত্যেকে 'a political state' অৰ্থাৎ এখন ৰাজনৈতিক ৰাষ্ট্ৰ'ক বুজায়। পুৰণি কালত statistics শব্দটোৱে এখন ৰাষ্ট্ৰৰ প্ৰশাসনিক আৰু ৰাজনৈতিক কাম-কাজৰ লগত জড়িত যেনে— ৰাষ্ট্ৰখনৰ সৈন্যৰ সংখ্যা, অস্ত্ৰ-শস্ত্ৰৰ পৰিমাণ, কৰ-কাতলৰ পৰিমাণ ইত্যাদি ৰাশিসমূহক বুজাইছিল। তেতিয়া statistics শব্দটোক ৰজাৰ বিজ্ঞান (Science of Kings) বুলিও আখ্যা দিয়া হৈছিল। কিন্তু আধুনিক যুগত পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানৰ পৰিসৰ যথেষ্ট বহল হৈছে। আজিকালি পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানৰ প্ৰয়োগ বিভিন্ন ক্ষেত্ৰ যেনে— কৃষি, অৰ্থনীতি, সমাজ বিজ্ঞান, মনোবিজ্ঞান, ব্যৱসায়, ব্যৱস্থাপনা ইত্যাদিলৈ বিস্তাৰিত হৈছে। তলত পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানৰ কেইটামান সংজ্ঞা আলোচনা কৰা হৈছে।

১.৩ পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানৰ অৰ্থ আৰু সংজ্ঞা (MEANING AND DEFINITION OF STATISTICS)

ভিন ভিন লেখকে বিভিন্ন সময়ত 'statistics' শব্দটো ভিন ভিন ধৰণে সংজ্ঞাকৃত কৰিছে। শব্দটোৱে দুটা ভিন্ন অৰ্থ বহন কৰে— এটা বহুবচন অৰ্থত আৰু আনটো একবচন অৰ্থত। বহুবচন অৰ্থত ই ঘটনা বা তথ্যৰ সাংখিকীয় বিবৃতিক বুজায়। একবচন অৰ্থত ই গণিত, অৰ্থনীতি, পদাৰ্থবিজ্ঞান ইত্যাদি বিষয়ৰ নিচিনাকৈ পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান বিষয়টোক বুজায়। উদাহৰণ স্বৰূপে বহুবচন অৰ্থত statistics (পৰিসংখ্যা) শব্দটোৱে ভিন ভিন বছৰত উৎপাদনৰ পৰিমাণ, ভিন ভিন বছৰত ৰপ্তানি আৰু আমদানিৰ পৰিমাণ, ভিন ভিন ঠাইত সামগ্ৰীৰ মূল্য ইত্যাদিক বুজায়। একবচন অৰ্থত ব্যৱহৃত হ'লে 'statistics' শব্দটোৱে পৰিসাংখ্যিকীয় পদ্ধতিসমূহক (Statistical Methods) বা পৰিসংখ্যাৰ বিজ্ঞান (Science of statistics)ক বুজায়।

বিশেষ টোকা ঃ

তথ্য (Data) ঃ আবেক্ষণসমূহক (observations) জুখি বা গণনা কৰি সংখ্যাত প্ৰকাশ কৰিলে তথ্য (data) বোলে। উদাহৰণ স্বৰূপে যদি আমি কিছুমান বস্তুৰ ওজনৰ আবেক্ষণসমূহক সংখ্যাত প্ৰকাশ কৰো, তেন্তে এই সংখ্যাবিলাকক তথ্য বুলি কোৱা হয়।

এটা বিষয় হিচাপে 'statistics'ৰ কেইটামান সংজ্ঞা তলত উল্লেখ কৰা হৈছে।

১। 'Statistics is the science which deals with the method of collecting, classifying, presenting, comparing and interpreting numerical data collected to throw some light on any sphere of enquiry'

– Selligman.

অৰ্থাৎ 'অনুসন্ধানৰ যিকোনো বিষয়ত আলোকপাত কৰাৰ উদ্দেশ্যে সাংখ্যিকীয় তথ্যৰ সংগ্ৰহ প্ৰণালী, শ্ৰেণীকৰণ, উপস্থাপন, তুলনামূলক অধ্যয়ন আৰু তাৎপৰ্য নিৰ্ণয় কৰাৰ বিজ্ঞানেই হ'ল পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান' — ছেলিগমেন।

২। 'Statistics may be regarded as a body of methods for making wise decisions in the face of uncertainty'

– Wallis and Roberts.

অর্থাৎ 'অনিশ্চয়তাৰ ক্ষেত্ৰত সুবিবেচনাপূর্ণ সিদ্ধান্ত লোৱাৰ প্ৰণালীসমূহৰ সমষ্টিক পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান হিচাপে গণ্য কৰিব পাৰি।'

— ৱালিচ আৰু ৰবার্টচ

৩। 'Statistics may be defined as the science of collection, presentation, analysis and interpretation of numerical data'

–Croxton and Cowden.

অর্থাৎ 'পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানক সাংখ্যিকীয় তথ্যৰ সংগ্ৰহ, উপস্থাপন, বিশ্লেষণ আৰু তাৎপর্য নির্ণয়ৰ বিজ্ঞান হিচাপে সংজ্ঞাকৃত কৰিব পাৰি।'

— ক্ৰবস্‌টন আৰু কাউডেন্‌

১.৪ বাৰংবাৰতা বিভাজন (FREQUENCY DISTRIBUTION)

বাৰংবাৰতা বিভাজন হ'ল এক সৰনীকৃত উপস্থাপন যিয়ে সাধাৰণতে তথ্যক শ্ৰেণী অন্তৰাল হিচাপত কিছুমান শ্ৰেণীত সংগঠিত কৰে আৰু প্ৰত্যেক শ্ৰেণীত অন্তর্ভুক্ত হোৱা আবেক্ষণৰ সংখ্যা, যাক বাৰংবাৰতা বুলি কোৱা হয়, প্ৰদর্শন কৰে। 'a–b' (পঢ়ক ঃ a ৰ পৰা b লৈ)ৰ নিচিনা অন্তৰাল এটাই বুজোৱা শ্ৰেণী একোটাক **শ্ৰেণী অন্তৰাল** বা শ্ৰেণী বিভাগ (class interval) বোলে। কোনো এটা আবেক্ষণ বা মান যিমান বাৰ ওলায় তাক সৰল বাৰংবাৰতা (simple frequency) বা বাৰংবাৰতা (frequency) বোলে। আনহাতে, এটা শ্ৰেণীত যিমান সংখ্যক মান অন্তর্ভুক্ত হয়, তাক সেই শ্ৰেণীটোৰ বাৰংবাৰতা বোলে। আকৌ যেতিয়া আমি এটা আবেক্ষণৰ বাৰংবাৰতা (শ্ৰেণী অন্তৰাল), পূর্ববর্তী বাৰংবাৰতা বিলাক (শ্ৰেণী অন্তৰাল বিলাক)ৰ লগত যোগ কৰো, তেতিয়া সেই যোগফলক, সেই আবেক্ষণ (শ্ৰেণী অন্তৰাল)ৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বা ক্ৰম যৌগিক বাৰংবাৰতা (cumulative frequency) বোলে।

এটা চলক যুক্ত বাৰংবাৰতা বিভাজনক এক চলক (বা একবিচৰ) বাৰংবাৰতা বিভাজন বোলে। উদাহৰণস্বৰূপে, যদি কোনো এটা শ্ৰেণীৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলক তেওঁলোকৰ উচ্চতাৰ ভিত্তিত শ্ৰেণীবিভক্ত কৰা হয়, তেন্তে বিভাজনটো একচলক বিভাজন হ'ব। ইয়াত চলক (বিচৰ) টো হ'ল ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলৰ উচ্চতা। দ্বিচলক বাৰংবাৰতা বিভাজন আৰু বহুচলক বাৰংবাৰতা বিভাজন বুলি কোৱা আন দুটা বিভাজন আছে।

বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজন (Discrete Frequency Distribution) ঃ বিচ্ছিন্ন চলক এটা এনেকুৱা চলক যিয়ে পৃথকীকৃত মান বা নির্দিষ্ট মানহে লয়। এটা বিচ্ছিন্ন চলকৰ মানবিলাক গনিব পাৰি অর্থাৎ ই গণনাৰ ফল। বিচ্ছিন্ন চলকৰ বাবে প্ৰস্তুত কৰা বাৰংবাৰতা বিভাজনক বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজন বোলা হয়। এই বাৰংবাৰতা বিভাজন শ্ৰেণী অন্তৰালবিহীন বা শ্ৰেণী

অন্তৰালযুক্ত হ'ব পাৰে।

তলত শ্রেণী অন্তৰাল অবিহনে বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ এটা উদাহৰণ দিয়া হৈছে।

ছাত্রৰ প্রাপ্ত নম্বৰ (x)	30	33	45	55	63
ছাত্রৰ সংখ্যা (f)	5	7	4	5	6

তলৰ উদাহৰণটো শ্রেণী অন্তৰালযুক্ত বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজন ঃ

পৰিয়ালৰ আকাৰ	1–2	3–4	5–6	6–7	7–8
পৰিয়ালৰ সংখ্যা	5	8	3	2	3

যদিও দেখাত ওপৰৰ বিভাজনটো অবিচ্ছিন্ন বিভাজন যেন লাগে, তথাপি ই তেনেকুৱা নহয়। এটা পৰিয়ালৰ সদস্যৰ সংখ্যা আৰু পৰিয়ালৰ আকাৰ ভগ্নাংশ সংখ্যা যেনে —$1\frac{1}{2}$, $3\frac{3}{4}$ ইত্যাদি হ'ব নোৱাৰে। গতিকে পৰিয়ালৰ আকাৰ বুজোৱা চলকটো বিচ্ছিন্ন চলক।

অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজন (Continuous frequency distribution) ঃ এটা অবিচ্ছিন্ন চলক এনেকুৱা এটা চলক যিয়ে মানৰ এক নির্দিষ্ট পৰিসৰৰ ভিতৰত যিকোনো অখণ্ড বা ভগ্নাংশ মান ল'ব পাৰে। অবিচ্ছিন্ন চলক হ'ল মাপ (measurement) ৰ ফল। কোনো অবিচ্ছিন্ন চলকৰ বাবে শ্রেণী অন্তৰাল হিচাপত প্রস্তুত কৰা বাৰংবাৰতা বিভাজনক অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজন বোলে। (শ্রেণী অন্তৰাল অবিহনে বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনক **সৰল বা অসমূহিত বাৰংবাৰতা বিভাজন বোলে** আৰু শ্রেণী আন্তৰালযুক্ত বাৰংবাৰতা বিভাজনক (বিচ্ছিন্ন বা অবিচ্ছিন্ন) **সমূহিত বাৰংবাৰতা বিভাজন** (grouped frequency distribution) ও বোলে।

তলত দিয়াটো অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ এটা উদাহৰণ ঃ

ছাত্রৰ উচ্চতা (ছেঃ মিঃত)	ঃ	120–130	130–140	140–150
ছাত্রৰ সংখ্যা	ঃ	10	17	10
ছাত্রৰ উচ্চতা (ছেঃ মিঃ)	ঃ	150–160	160–170	
ছাত্রৰ সংখ্যা	ঃ	11	9	

ওপৰৰ উদাহৰণটোত চলকটো হ'ল ছাত্রৰ উচ্চতা আৰু ইয়াৰ মান 120 ছেঃ মিঃ আৰু 170 ছেঃ মিঃৰ মাজত যিকোনো হ'ব পাৰে। উদাহৰণ স্বৰূপে এজন ছাত্রৰ উচ্চতা 120.17 ছেঃ মিঃ, 133.25 ছেঃ মিঃ ইত্যাদি হ'ব পাৰে। সেয়ে ছাত্রৰ উচ্চতা বুজোৱা চলকটো এটা অবিচ্ছিন্ন চলক।

আমি ওপৰত উল্লেখ কৰিছিলো যে এটা শ্রেণীক বুজোৱা অন্তৰাল এটাক শ্রেণী অন্তৰাল বোলে। উদাহৰণ স্বৰূপে 0–9,10–19, 20–29,..... বা 0–5, 5–10, 10–15, ... ৰ নিচিনা বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ প্রত্যেককে শ্রেণী অন্তৰাল বোলে। এটা শ্রেণী অন্তৰালৰ মূৰৰ সংখ্যা দুটাক **শ্রেণী সীমা** (class limits) বোলে। ইহঁতৰ সৰু সংখ্যাটোক নিম্ন শ্রেণী সীমা (lower class limit) আৰু ডাঙৰ সংখ্যাটোক উচ্চ শ্রেণীসীমা (upper class limit) বোলে। **এটা শ্রেণী অন্তৰালৰ দৈর্ঘ্য (Length of a class interval)** হ'ল শ্রেণী অন্তৰালটোৰ নিম্নসীমা আৰু থিক তাৰ পিছৰ শ্রেণী অন্তৰালটোৰ নিম্ন সীমাৰ পার্থক্য। এইটো মন কৰিবলগীয়া

যে এটা শ্রেণী অন্তৰালৰ দৈর্ঘ্যক 'শ্রেণী অন্তৰালৰ বেধ' বা 'শ্রেণী অন্তৰালৰ আকাৰ' ও বোলে। যদি কোনো বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বিচ্ছিন্ন বা অবিচ্ছিন্ন যিটোৱে নহওক, প্রত্যেক শ্রেণী অন্তৰালৰ দৈর্ঘ্য সমান হয়, তেন্তে সেই বিভাজনক সমান শ্রেণী অন্তৰাল বিশিষ্ট বাৰংবাৰতা বিভাজন বোলে। উদাহৰণ স্বৰূপে 0–9, 10–19, 20-29, 30–39, 40–49, 50–59 আৰু 0–10, 10–20, 20–30, 30–40, 40–50, 50–60 শ্রেণী অন্তৰাল বিশিষ্ট বাৰংবাৰতা বিভাজন দুটা সমান শ্রেণী অন্তৰাল বিশিষ্ট বাৰংবাৰতা বিভাজন। বিভাজন দুটাৰ প্রত্যেকতে শ্রেণী দৈর্ঘ্য 10ৰ সমান। আনহাতে, যদি কোনো বাৰংবাৰতা বিভাজনত আটাইবিলাক শ্রেণী অন্তৰালৰ দৈর্ঘ্য সমান নহয়, তেন্তে এনেকুৱা বিভাজনক অসমান শ্রেণী অন্তৰালযুক্ত বাৰংবাৰতা বিভাজন বোলে। এনেকুৱা বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ এটা উদাহৰণ হ'ল ঃ 0–10, 10–20, 20–35, 35–55, 55–70।

যদি কোনো বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ শ্রেণী অন্তৰাল, ধৰক, 0–9, 10–19, 20–29, ... ধৰণৰ হয়, তেন্তে এটা শ্রেণীৰ (অন্তৰাল হিচাপে সংজ্ঞাকৃত) নিম্নসীমা আৰু উচ্চসীমা দুয়োটাকে সেই শ্রেণীৰ অন্তর্ভুক্ত কৰা হয়। লক্ষ্য কৰক, শ্রেণী অন্তৰাল 10–19ৰ দ্বাৰা বুজোৱা শ্রেণীটোত নিম্নসীমা আৰু উচ্চ সীমা ক্রমে 10 আৰু 19 দুয়োটাই শ্রেণীটোৰ অন্তর্ভুক্ত। ইয়াত 10–19 শ্রেণী অন্তৰালটোৱে বুজোৱা শ্রেণীটোত 10ৰ সমান বা 10তকৈ ডাঙৰ আৰু 19তকৈ সৰু বা 19ৰ সমান সংখ্যা বিলাক অন্তর্ভুক্ত হ'ব। শ্রেণী অন্তৰাল হিচাপে তথ্য ৰাশিসমূহক শ্রেণীকৰণৰ পদ্ধতিত যদি যিকোনো এটা শ্রেণীৰ (শ্রেণী অন্তৰালৰ) নিম্নসীমা আৰু উচ্চ সীমা উভয়কে সেই শ্রেণীৰ (শ্রেণী অন্তৰালত) অন্তর্ভুক্ত হয়, তেন্তে পদ্ধতিটোক **শ্রেণীকৰণৰ অন্তর্ভুক্তি পদ্ধতি** (Inclusive method of classification) হিচাপে জনা যায়।

আনহাতে অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ক্ষেত্রত, যেনে 0–10, 10–20, 20–30, ...ৰ ক্ষেত্রত এটা শ্রেণীৰ নিম্ন সীমাক সেই শ্রেণীত অন্তর্ভুক্ত কৰা হয়। কিন্তু উচ্চ সীমাক অন্তর্ভুক্ত কৰা নহয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, 0–10 শ্রেণী অন্তৰালটোৱে বুজোৱা শ্রেণীটোৱে সেইবোৰ সংখ্যাক অন্তর্ভুক্ত কৰে যিবিলাক শূন্যতকে ডাঙৰ বা শূন্যৰ সমান কিন্তু 10তকৈ সৰু হয়। শ্রেণী অন্তৰাল হিচাপত শ্রেণীকৰণৰ পদ্ধতিটোত যদি যিকোনো এটা শ্রেণীৰ নিম্ন সীমা সেই শ্রেণীটোত অন্তর্ভুক্ত হয়, কিন্তু উচ্চ সীমা অন্তর্ভুক্ত নহয়, তেনেহ'লে পদ্ধতিটোক **শ্রেণীকৰণৰ বিবর্জিত পদ্ধতি** (exclusive method of classification) হিচাপে জনা যায়।

শ্রেণীকৰণৰ অন্তর্ভুক্তি পদ্ধতিৰে কৰা বাৰংবাৰতা বিভাজনক **অন্তর্ভুক্তি বাৰংবাৰতা বিভাজন** (inclusive frequency distribution) আৰু বিবর্জিত শ্রেণীকৰণ পদ্ধতিৰে কৰা বাৰংবাৰতা বিভাজনক **বিবর্জিত বাৰংবাৰতা বিভাজন** (exclusive frequency distribution) বোলে।

এতেকে শ্রেণী অন্তৰালযুক্ত বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজন হ'ল এক অন্তর্ভুক্তি বাৰংবাৰতা বিভাজন আৰু অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজন হ'ল এক বিবর্জিত বাৰংবাৰতা বিভাজন।

শ্রেণী অন্তৰালৰ শ্রেণী পৰিবন্ধ বা প্রকৃত সীমা [Class boundaries or Real (True) Limits] ঃ

অবিচ্ছিন্ন চলকৰ প্ৰায়ভাগ জোখ মাখত আটাইবিলাক তথ্য ৰাশিক কোনো এটা এককৰ নিকতম হিচাপত নথিভুক্ত কৰা হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, যেতিয়া এজন মানুহৰ উচ্চতা 160 ছেঃমিঃ হিচাপে নথিভুক্ত কৰা হয়, তেতিয়া মানুহজনৰ প্ৰকৃত উচ্চতা 159.5 ছেঃমিঃত কৈ বেছি হ'ব বা তাৰ সমান হ'ব পাৰে কিন্তু 160.5তকৈ কম হ'ব। যদি অখণ্ড মানত নথিভুক্ত কৰা তথ্যৰাশিসমূহক অন্তৰ্ভুক্তি পদ্ধতিত যেনে — 155–159, 160–164, 165–169 ইত্যাদি হিচাপত শ্ৰেণীকৰণ কৰা হয়, তেন্তে 160–164 শ্ৰেণীটোৱে 159.5 ছেঃমিঃৰ সমান বা তাতকৈ বেছি কিন্তু 164.5 ছেঃমিঃতকৈ কম উচ্চতা বিশিষ্ট সকলো ব্যক্তিকে অন্তৰ্ভুক্ত কৰিব। 159.5 আৰু 164.5 সীমা দুটাক অন্তৰ্ভুক্তি শ্ৰেণী অন্তৰাল '160–164'য়ে বুজোৱা শ্ৰেণীটোৰ যথাক্ৰমে নিম্ন আৰু উচ্চ পৰিবন্ধ (lower and upper boundaries) বা নিম্ন আৰু উচ্চ প্ৰকৃত সীমা (lower and upper real limits) বোলে। এতেকে 160 আৰু 164ক অন্তৰ্ভুক্তি প্ৰকাৰৰ 160–164 শ্ৰেণী অন্তৰালটোৰ যথাক্ৰমে **নিম্নসীমা** আৰু **উচ্চসীমা** বোলা হয়, 159.5 আৰু 164.5ক সেই একে 160–164 শ্ৰেণী অন্তৰালটোৰ যথাক্ৰমে **নিম্ন পৰিবন্ধ** আৰু **উচ্চ পৰিবন্ধ** বোলা হয়। এইটো স্পষ্ট যে সীমা আৰু পৰিবন্ধৰ একক 'ছেণ্টিমিটাৰ'। এইটো লক্ষ্য কৰিব লগীয়া যে এটা অন্তৰ্ভুক্তি প্ৰকাৰৰ শ্ৰেণী অন্তৰালৰ নিম্ন পৰিবন্ধ তাৰ নিম্নসীমাতকৈ 0.5 কম আৰু উচ্চ পৰিবন্ধ উচ্চ সীমাতকৈ 0.5 বেছি। অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত অৰ্থাৎ বিবৰ্জিত বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত এটা শ্ৰেণীৰ উচ্চসীমা ঠিক পিছৰ শ্ৰেণীটোৰ নিম্নসীমাৰ সমান হয় আৰু এই ক্ষেত্ৰত এটা শ্ৰেণীৰ শ্ৰেণী সীমা আৰু শ্ৰেণী পৰিবন্ধ একে হয়। **শ্ৰেণী সীমাক শ্ৰেণী পৰিবন্ধলৈ পৰিবৰ্তন কৰিবলগীয়া হয় যেতিয়া অবিচ্ছিন্ন চলকবোৰক বিচ্ছিন্ন ৰূপত নথিভুক্ত কৰি অন্তৰ্ভুক্তি প্ৰকাৰৰ শ্ৰেণী অন্তৰালৰ সহায়ত শ্ৰেণীভুক্ত কৰা হয়।** যেতিয়া অন্তৰ্ভুক্তি বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ শ্ৰেণী সীমা বিলাক শ্ৰেণী পৰিবন্ধলৈ পৰিবৰ্তন কৰা হয়, তেতিয়া অন্তৰ্ভুক্তি বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বিবৰ্জিত বাৰংবাৰতা বিভাজনলৈ পৰিবৰ্তন ঘটে।

শ্ৰেণী অন্তৰালৰ মধ্যবিন্দু বা মধ্যমান

এটা শ্ৰেণী অন্তৰালৰ মধ্যবিন্দু বা মধ্যমান হ'ল শ্ৰেণী অন্তৰালটোৰ সঠিক সোমাজৰ এটা বিন্দু বা মান। এই বিন্দু বা মান তলত দিয়া ধৰণে পোৱা যায়।

মধ্যবিন্দু বা মধ্যমান = $\frac{1}{2}$ (নিম্ন শ্ৰেণী সীমা + উচ্চ শ্ৰেণী সীমা)

মধ্যবিন্দু বা মধ্যমান = $\frac{1}{2}$ (নিম্ন শ্ৰেণী পৰিবন্ধ + উচ্চ পৰিবন্ধ)

গতিকে 10–19 আৰু 5–10 শ্ৰেণী অন্তৰাল দুটাৰ কাৰণে মধ্যবিন্দু বা মধ্যমান ক্ৰমে $= \frac{10+19}{2} = 14.5$

আৰু $= \frac{5+10}{2} = 7.5$

মধ্যমান এইদৰেও গণনা কৰিব পাৰি ঃ

মধ্যমান = নিম্নসীমা + $\frac{1}{2}$ (উচ্চসীমা — নিম্নসীমা)

নাইবা, মধ্যমান = নিম্ন পৰিবন্ধ + $\frac{1}{2}$ (উচ্চ পৰিবন্ধ — নিম্ন পৰিবন্ধ)

খোলা-মূৰযুক্ত বিভাজন (Open-end Distribution)

খোলা-মূৰযুক্ত বিভাজন হ'ল এনেকুৱা এটা বিভাজন যাৰ এটা বা দুটা শ্ৰেণীৰ এটা শ্ৰেণী সীমা নাথাকে। কোনো এক বাৰংবাৰতা বিভাজনত এইটো সম্ভৱ হ'ব পাৰে যে বিভাজনটোৰ প্ৰথম শ্ৰেণীটোৰ নিম্নসীমা নাই আৰু অন্তিম শ্ৰেণীটোৰ উচ্চ সীমা নাই। এনেকুৱা বিভাজনক খোলা মূৰযুক্ত বিভাজন বোলে। আমি এনেকুৱা এটা বিভাজন তলত উপস্থাপন কৰিছো ঃ

গণিতত নম্বৰ	ঃ	10 তকৈ কম	10–20	20–30
ছাত্ৰৰ সংখ্যা	ঃ	10	17	15
গণিতত নম্বৰ	ঃ	30–40	40 আৰু তাৰ ওপৰৰ	
ছাত্ৰৰ সংখ্যা	ঃ	5	7	

ওপৰৰ বিভাজনত প্ৰথম শ্ৰেণীটো '10তকৈ কম'— হিচাপত উপস্থাপন কৰা হৈছে আৰু সেয়ে প্ৰথম শ্ৰেণীটোৰ নিম্নসীমা নাই। আকৌ অন্তিম শ্ৰেণীটো "40 আৰু তাৰ ওপৰৰ' হিচাপে উপস্থাপন কৰা হৈছে আৰু সেয়ে এই শ্ৰেণীটোৰ উচ্চ সীমা নাই। এই দুয়োটা শ্ৰেণী অন্তৰালৰ প্ৰত্যেককে **খোলা-মূৰযুক্ত শ্ৰেণী** অন্তৰাল বোলে।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১ঃ বাৰংবাৰতা বিভাজন বুলিলে কি বুজে ?

প্ৰশ্ন নং ২ঃ বিছিন্ন আৰু অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজন বাছি উলিৱাওক।

(ক)	x :	5 – 10	11 – 16	17 – 22	23 – 28
	f :	5	2	8	9
(খ)	x :	2 – 8	8 – 14	14 – 20	20 – 26
	f :	4	7	9	10

১.৪.১ তথ্যৰ শ্ৰেণীকৰণ (Classification of Data)

কেঁচা তথ্য বা কেঁচা সামগ্ৰীৰ শ্ৰেণীকৰণ বুলিলে সামগ্ৰীসমূহক সিহঁতৰ সাদৃশ্যতা আৰু অনুৰূপতাৰ ভিত্তিত দলগত বা শ্ৰেণীগতভাৱে সজোৱা কাৰ্যক বুজায়। তলত দুটা সংজ্ঞা উদ্ধৃত কৰা হৈছে ঃ

'Classification is the process of arranging data into sequences and groups according to their common characters or separating them into different on related parts'– Secrist.

'A classification is a scheme for breaking a category into a set of parts, called classes, according to some precisely defined different characteristics possessed by all the elements of the category'– Tuttle, A.M.

শ্রেণীকৰণে তথ্যক বোধগোম্য কৰি তোলে আৰু ইয়াৰ প্রকৃত তাৎপর্য বেকত কৰে। সংগৃহীত তথ্যৰ বিশ্লেষণৰ কাৰণে শ্রেণীকৰণ অপৰিহার্য। উদাহৰণ স্বৰূপে, যদি আমি এটা কাৰখানাত কর্মৰত কর্মীসকলক লিংগ (পুৰুষ আৰু মহিলা), বয়স (0–10 বছৰৰ ভিতৰত, 10–20 বছৰৰ ভিতৰত, ইত্যাদি), শিক্ষা (H.S.L.Cৰ তলৰ, H.S.L.C) ইত্যাদি অনুসৰি শ্রেণীকৰণ কৰো, তেন্তে তেতিয়াহে তথ্যটো বিশ্লেষণৰ কাৰণে উপযোগী হ'ব।

শ্রেণীকৰণৰ সুবিধা বা গুৰুত্ব (Advantage or Importance of Classification) :

(ক) শ্রেণীকৰণে কেঁচা তথ্যসমূহক সংক্ষিপ্ত আৰু সৰল ৰূপত উপস্থাপন কৰাত সহায় কৰে।

(খ) ইয়ে কেঁচা তথ্যসমূহক সিহঁতৰ সাদৃশ্যতা আৰু অনুৰূপতাৰ ভিত্তিত বিভক্ত কৰি তুলনা কৰাৰ বাবে সুবিধা প্রদান কৰে।

(গ) শ্রেণীকৰণে তথ্যৰ সাৰণীকৰণ (Tabulation) আৰু বিশ্লেষণৰ (Analysis) ভিত্তি প্রদান কৰে।

(ঘ) শ্রেণীকৰণে তথ্যসমূহৰ সম্ভৱপৰ লক্ষণবিলাক চিনাক্ত কৰিবলৈ আমাক সক্ষম কৰি তোলে।

১.৪.২ শ্রেণীকৰণৰ প্রকাৰ (Types of Classification)

তথ্যৰ শ্রেণীকৰণ তলত উল্লেখ কৰাৰ দৰে চাৰি প্রকাৰৰ—

(১) ভৌগলিক শ্রেণীকৰণ (Geographical Classification) ঃ

ভৌগলিক শ্রেণীকৰণত তথ্যক ঠাই বা ভৌগলিক অৱস্থানৰ ভিত্তিত শ্রেণীকৰণ কৰা হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে যদি আমি অসমৰ বিভিন্ন জিলাৰ বিপৰীতে সেই জিলাৰ জনসংখ্যা লিখো, তেনেহ'লে জনসংখ্যাৰ তথ্যটোৰ শ্রেণীকৰণক ভৌগলিক শ্রেণীকৰণ বুলি কোৱা হ'ব। স্থান বা ভৌগলিক অৱস্থানৰ ভিত্তিত সজোৱা তথ্য শ্রেণীক স্থানিক শ্রেণী (Spatial Series) বোলে।

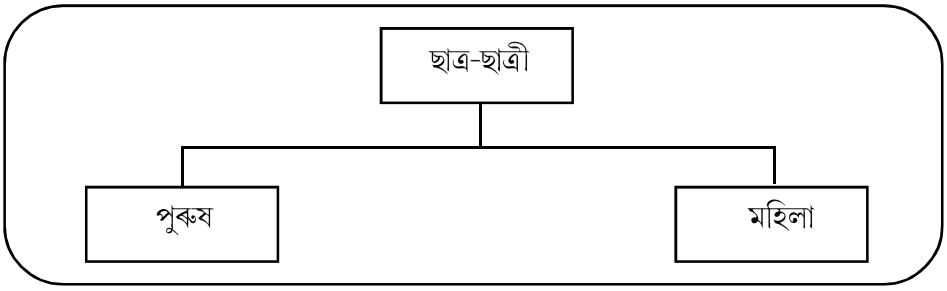
(২) কালানুক্রমিক শ্রেণীকৰণ (Chronological Classification) ঃ

সময়ৰ ভিত্তিত কৰা তথ্যৰ শ্রেণীকৰণক কালানুক্রমিক শ্রেণীকৰণ বোলে। সময় সাপেক্ষে সজোৱা তথ্য শ্রেণীক কালশ্রেণী (time series) বোলে। যদি আমি এখন দেশৰ বিভিন্ন বছৰৰ সঞ্চয় ক্রমশঃ বছৰৰ বিপৰীতে লিখো, তেনেহ'লে দেশখনৰ সঞ্চয় জড়িত তথ্যৰ এনেকুৱা ধৰণৰ শ্রেণীকৰণক কালানুক্রমিক শ্রেণীকৰণ বুলি কোৱা হ'ব।

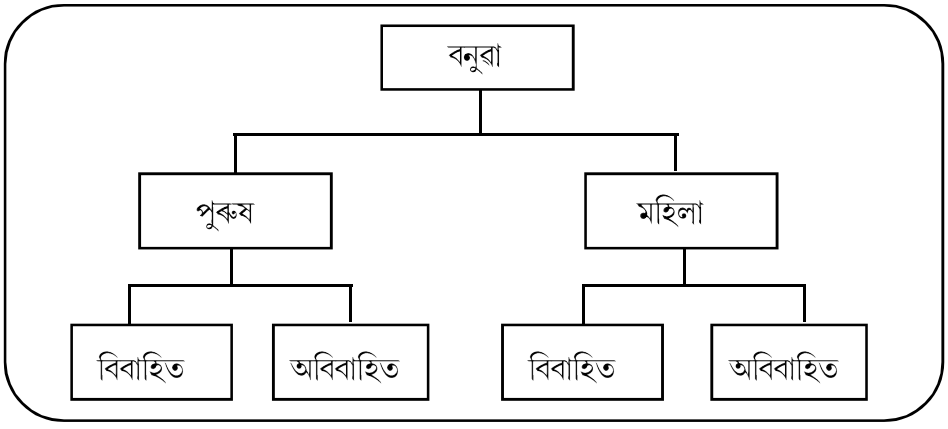
(৩) গুণাত্মক শ্রেণীকৰণ (Qualitative Classification) বা লক্ষণ অনুযায়ী শ্রেণীকৰণ (Classification According to Attributes) ঃ

এটা গুণ বা লক্ষণ হ'ল জুখিব নোৱাৰা এক বৈশিষ্ট্য, যেনে— শিক্ষা, লিংগ, ধর্ম, জাতি ইত্যাদি। যেতিয়া বস্তু বা ব্যক্তিবিলাকক এটা বা তাতকৈ বেছি লক্ষণৰ ভিত্তিত শ্রেণীকৰণ কৰা হয়, তেতিয়া তেনেকুৱা ধৰণৰ বিভাজনক লক্ষণ অনুযায়ী শ্রেণীকৰণ বোলে। যদি এটা লক্ষণৰ ওপৰত ভিত্তিত কৰি বিভাজন কৰা হয় তেন্তে সেই বিভাজনক সৰল শ্রেণীকৰণ (Simple classification) বোলে। যদি এটাতকৈ বেছি লক্ষণ অনুযায়ী বস্তু বা ব্যক্তিবিলাকক শ্রেণীকৰণ কৰা হয় তেন্তে সেই শ্রেণীকৰণক জটিল শ্রেণীকৰণ বা বহুক্রম শ্রেণীকৰণ (manifold classification) বোলে।

যদি আমি এখন মহাবিদ্যালয়ৰ ছাত্র-ছাত্রীসকলক লিংগ ভিত্তিত শ্রেণীকৰণ কৰো, তেন্তে এইটো হ'ব এক সৰল শ্রেণীকৰণ। তলত ইয়াক দেখুৱা হৈছে ঃ



আকৌ যদি আমি এটা কাৰখানাৰ বনুৱাসকলৰ লিংগ আৰু বৈবাহিক মর্যাদাৰ ভিত্তিত শ্রেণীভুক্ত কৰোঁ, তেন্তে এইটো হ'ব এক জটিল বা বহুক্রম শ্রেণীকৰণ।



(৪) সংখ্যাত্মক শ্রেণীকৰণ বা চলক বা শ্রেণী-অন্তৰাল অনুযায়ী শ্রেণীকৰণ (Qualitative Classification or Classification According to Variables or Class Intervals) ঃ

যদি তথ্যসমূহক সিহঁতৰ জোখ-মাখ ল'ব পৰা লক্ষণ যাক চলক বুলি কোৱা হয়, যেনে— উচ্চতা, ওজন, নম্বৰ, দূৰত্ব ইত্যাদিৰ ভিত্তিত শ্রেণীকৰণ কৰা হয়, তেন্তে তেনেকুৱা শ্রেণীকৰণক চলক অনুযায়ী শ্রেণীকৰণ বোলে। যদি এই ধৰণৰ শ্রেণীকৰণত তথ্যসমূহক শ্রেণীগত বা দলগত হিচাপে সংগঠিত কৰি প্রত্যেক শ্রেণীত অন্তর্ভুক্ত হোৱা আবেক্ষণৰ (observation) সংখ্যা দেখুৱাই দিয়া হয়, তেন্তে সেই শ্রেণীকৰণক '**শ্রেণী অন্তৰাল (বা শ্রেণী বিভাগ) অনুসৰি শ্রেণীকৰণ**' ও বোলে। এই ধৰণৰ তথ্যৰ শ্রেণীকৰণত তথ্যসমূহ বাৰংবাৰতা বিভাজন ৰূপত উপস্থাপিত হয়।

১.৫ তথ্যৰ তালিকাকৰণ বা সাৰণীকৰণ (TABULATION OF DATA)

সংগৃহীত তথ্যসমূহ শ্রেণীকৰণ কৰাৰ পিছত, সিহঁতক তালিকাবদ্ধ ৰূপ দিয়াৰ কাৰণে শাৰী আৰু স্তম্ভত নথিভুক্ত কৰা হয়। তথ্যসমূহৰ তালিকাবদ্ধ উপস্থাপনক, যাক বেছি সুচলভাৰে তালিকাকৰণ বুলি জনা যায়, এইদৰে সংজ্ঞাকৃত কৰিব পাৰি ঃ

'তালিকাকৰণ হ'ল — সংখ্যাত্মক তথ্যসমূহৰ শাৰী আৰু স্তম্ভত এক সুশৃংখলিত আৰু প্রণালীবদ্ধ উপস্থাপন, ইয়াক পৰিকল্পনা কৰা হয় যাতে বিবেচিত সমস্যাটো স্পষ্ট কৰাৰ লগতে সংখ্যাবিলাকৰ মাজত তুলনা কৰাটো সহজসাধ্য হৈ পৰে।'

Tabulation may be defined as "the orderly or systematic presentation of numerical data in rows and columns designed to clarify the problem under consideration and to facilitate the comparison between the figures".

১.৫.১ তালিকাকৰণৰ সুবিধা বা গুৰুত্ব (Advantages or Importance of Tabulation)

তালিকাকৰণৰ সুবিধাবিলাক হ'ল—

(ক) তালিকাকৰণে জটিল তথ্যক সৰল ৰূপত প্রকাশ কৰে।

(খ) তালিকাকৰণে সংখ্যাত্মক তথ্যসমূহক সংক্ষিপ্ত আৰু ঘনীভূত ৰূপত উপস্থাপন কৰে।

(গ) ই তথ্যসমূহৰ তুলনা সহজসাধ্য কৰি তোলে।

(ঘ) তথ্যৰ তালিকাকৃত ৰূপত উপস্থাপনে সেই তথ্যৰ বিশ্লেষণ আৰু তাৎপর্য ব্যাখ্যাৰ ভিত্তি প্রদান কৰে।

তালিকাকৰণৰ উদ্দেশ্য (Objectives of Tabulation) ঃ

তালিকাকৰণৰ উদ্দেশ্য তালিকাকৰণৰ সুবিধাবোৰত অন্তর্নিহিত হৈ আছে। এতেকে

তালিকাকৰণৰ উদ্দেশ্যসমূহ হ'ল ঃ (ক) জটিল তথ্যক সৰল কৰাটো (খ) সাংখ্যিক তথ্যসমূহক সংক্ষিপ্ত আৰু ঘনীভূত ৰূপত উপস্থাপন কৰাটো ইত্যাদি।

১.৫.২ এখন তালিকাৰ বিভিন্ন অংগ (Different Parts of a Table)

এখন তালিকা তলত দিয়া অংগবিলাকৰ দ্বাৰা গঠিত। **এই বিলাকক এখন সন্তোষজনক তালিকাৰ আৱশ্যকীয় অংগ হিচাপে বিবেচনা কৰা হয়।**

(ক) **তালিকাৰ নম্বৰ (Table number)** ঃ প্ৰতিখন তালিকা এটা সংখ্যাৰে চিনাক্তকৰণ কৰিব লাগে। ইয়াৰ ফলত প্ৰসঙ্গ পোৱাটো সহজ হৈ পৰে। তালিকাৰ নম্বৰটো তালিকাৰ শিৰোনামাৰ আগত বা তাৰ ওপৰৰ মাজভাগত লিখিব পাৰি।

(খ) **শিৰোনামা (Title)** ঃ এখন তালিকাৰ শিৰোনামা থাকিব লাগিবই। শিৰোনামাটো তালিকা নম্বৰৰ তলত বা তাৰ পিছত একে শাৰীত লিখিব লাগে।

(গ) **ষ্টাব (Stub)**ঃ তালিকাখনৰ একেবাৰে বাওঁফালৰ যিটো স্তম্ভত শাৰীৰ শিতানবিলাক থাকে, তাক ষ্টাব বোলে।

(ঘ) **কেপচন (Caption)** ঃ স্তম্ভবিলাকৰ শিতানবিলাকক কেপচন বোলে। এইখিনি তালিকাখনৰ ওপৰৰ অংশ প্ৰতিটো কেপচনত উপ-শিতান বা উপ-কেপচন থাকিব পাৰে।

(ঙ) **ব'ডি (Body)** ঃ এইটো তালিকাখনৰ প্ৰধান অংগ আৰু ইয়াত সংখ্যাবিলাক থাকে।

(চ) **মুঠ (Total)** ঃ আটাইবিলাক শাৰী আৰু স্তম্ভৰ মুঠ আৰু উপ মুঠ (sub totals) বিলাক তালিকাখনত দিব লাগে।

(ছ) **পদটীকা (Footnote)** ঃ তালিকাখনৰ ঠিক তলফালে তালিকাখনৰ সম্পৰ্কত লিখা যিকোনো ব্যাখ্যাসূচক টোকাক পদটীকা বোলে। তালিকাখনত দেখুওৱা কিছুমান বিশেষ বিষয় স্পষ্ট কৰাটোৱে পদটীকাৰ উদ্দেশ্য।

(জ) **উৎস (Source)** ঃ যদি তালিকাত সংগঠিত কৰা তথ্যসমূহ গৌন উৎসৰ পৰা সংগ্ৰহ কৰা হয়, তেন্তে উৎস বা উৎসবিলাক তালিকাখনৰ তলফালে উল্লেখ কৰিব লাগে। ইয়াক পদটীকাৰ তলত দিব লাগে।

১.৫.৩ তালিকাৰ প্ৰকাৰ (Types of Tables)

তালিকা বিলাকক (ক) সৰল তালিকা আৰু (খ) জটিল তালিকা হিচাপত শ্ৰেণীভুক্ত কৰা হয়।

(ক) **সৰল তালিকা (Simple table)** ঃ সংগৃহীত তথ্যসমূহৰ এটা মাত্ৰ লক্ষণক ভিত্তি কৰি প্ৰস্তুত কৰা তালিকাক সৰল তালিকা বোলে। সৰল তালিকাক প্ৰথম ক্ৰমৰ তালিকা (one-way table) ও বোলে।

উদাহৰণ - ১

তালিকা

100 জন বিশ্ববিদ্যালয়ৰ ছাত্ৰৰ বিভাগ অনুযায়ী শ্ৰেণীকৰণ —

বিভাগ	ছাত্ৰৰ সংখ্যা
পদাৰ্থ বিজ্ঞান	30
ৰসায়ন	25
গণিত	20
পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান	25
মুঠ	100

(খ) **জটিল তালিকা (Complex tables) ঃ** যি তালিকাত তথ্যৰ এটাতকৈ বেছি লক্ষণ দেখুওৱা হয়, তাক জটিল তালিকা বোলে। আমি দুটা লক্ষণ দেখুওৱা দ্বিতীয় ক্ৰমৰ জটিল তালিকা (Two-way complex table) তিনিটা লক্ষণ দেখুওৱা তৃতীয় ক্ৰমৰ জটিল তালিকা (Three-way complex table) আৰু কেইবাটাও লক্ষণ দেখুওৱা বহুক্ৰমৰ জটিল তালিকা (multi-way complex table) পাব পাৰোঁ। দ্বিতীয় ক্ৰমৰ, তৃতীয় ক্ৰমৰ আৰু বহুক্ৰমৰ জটিল তালিকাক ক্ৰমে দ্বিতীয় খাপৰ, তৃতীয় খাপৰ আৰু বহু খাপৰ জটিল তালিকা বোলে।

উদাহৰণ - ২ দ্বিতীয় ক্ৰমৰ জটিল তালিকা

তালিকা

100 জন বিশ্ববিদ্যালয়ৰ ছাত্ৰৰ বিভাগ অনুযায়ী শ্ৰেণীকৰণ

বিভাগ	ছাত্ৰৰ সংখ্যা		
	পুৰুষ	মহিলা	মুঠ
পদাৰ্থ বিজ্ঞান	20	10	30
ৰসায়ন	18	7	25
গণিত	15	5	20
পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান	12	13	25
মুঠ	65	35	100

উদাহৰণ - ৩ তৃতীয় ক্ৰমৰ জটিল তালিকা

তালিকা

100 জন বিশ্ববিদ্যালয়ৰ ছাত্ৰৰ বিভাগ, লিংগ আৰু ধৰ্ম অনুসৰি শ্ৰেণীকৰণ

বিভাগ	পুৰুষ			মহিলা			মুঠ		
	হিন্দু	অন্যান্য	মুঠ	হিন্দু	অন্যান্য	মুঠ	হিন্দু	অন্যান্য	মুঠ
পদাৰ্থ বিজ্ঞান	16	4	20	8	2	10	24	6	30
ৰসায়ন	14	4	18	6	1	7	20	5	25

গণিত	13	2	15	5	0	5	18	2	20
পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান	6	6	12	10	3	13	16	9	25
মুঠ	49	16	65	29	6	35	78	22	100

উদাহৰণ - ৪ কোনো এক প্ৰতিচয়ন সম্পৰ্কীয় অধ্যয়নত দুখন চহৰত চাহ খোৱাৰ অভ্যাস থকা আৰু নথকা মানুহৰ তথ্য তলত দিয়া ধৰণে পোৱা গ'ল।

চহৰ A : 40% মহিলা , মুঠতে 45% য়ে চাহ খায়, আৰু 20% পুৰুষে চাহ নাখায়। আৰু 20% মহিলাই চাহ খায়।

চহৰ B : 55% পুৰুষ, 30% পুৰুষে চাহ নাখায় আৰু 15% মহিলাই চাহ খায়।

লুপ্ত তথ্য যোগান ধৰক আৰু ওপৰৰ তথ্যখিনি সাৰণীয়ন কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল প্ৰতিখন চহৰৰ জনসংখ্যা 100। এতিয়া আমি প্ৰদত্ত তথ্য সাৰণীয়ন কৰি পাওঁ ঃ

বিভাগ	চহৰ ঃ A			চহৰ ঃ B		
	পুৰুষ	মহিলা	মুঠ	পুৰুষ	মহিলা	মুঠ
চাহ খোৱাৰ অভ্যাস থকা মানুহ	40	5	45	25	15	40
চাহ খোৱাৰ অভ্যাস নথকা মানুহ	20	35	55	30	30	60
মুঠ	60	40	100	55	45	100

ব্যাখ্যা ঃ প্ৰথমতে চহৰ Aক বিবেচনা কৰোহ'ক। যিহেতু চহৰখনত মুঠ মানুহৰ সংখ্যা 100 বুলি ধৰা হৈছে, গতিকে 40% মহিলা মানে 40 জনী মহিলা অৰ্থাৎ চহৰখনত 40 জনী মহিলা আছে। গতিকে চহৰ Aত পুৰুষৰ সংখ্যা = 100 – 40 = 60। চহৰখনত 45% অৰ্থাৎ 45 জনৰ (পুৰুষ আৰু মহিলাক ধৰি) চাহ খোৱাৰ অভ্যাস আছে, আকৌ চাহ খোৱাৰ অভ্যাস নথকা পুৰুষ 20% অৰ্থাৎ 20 জন। গতিকে চাহ খোৱাৰ অভ্যাস নথকা মহিলাৰ সংখ্যা = 55 – 20 = 35। যিহেতু মুঠ পুৰুষৰ সংখ্যা 60 আৰু চাহ খোৱাৰ অভ্যাস নথকা পুৰুষৰ সংখ্যা 20, গতিকে চাহ খোৱাৰ অভ্যাস থকা পুৰুষৰ সংখ্যা = 60 – 20 = 40 সেইদৰে তালিকাখনত দেখুওৱা চহৰ Bৰ লগত জড়িত তথ্য উলিয়াব পাৰি।

১.৫.৪ শ্ৰেণী বাৰংবাৰতাৰ অভিগণনা আৰু বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা প্ৰস্তুতকৰণ (Calculation of Class Frequencies and Formation of Frequency Distribution Table)

কেঁচা তথ্য ৰাশিসমূহৰ বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ লগত জড়িত শ্ৰেণী অন্তৰালৰ সংখ্যা আৰু দৈর্ঘ্য তথ্য ৰাশিসমূহৰ পৰিসৰৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি থিৰাং কৰা হয়।

সাধাৰণতে শ্ৰেণী অন্তৰালৰ সংখ্যা 5 তকৈ কম আৰু 15 তকৈ বেছি হ'ব নালাগে। তথ্য ৰাশিসমূহৰ ভিতৰত আটাইতকৈ ডাঙৰ আৰু আটাইতকৈ সৰু তথ্য ৰাশি দুটাৰ পাৰ্থক্যক পৰিসৰ বা প্ৰসাৰ (range) বোলে।

অঋণাত্মক তথ্যৰ বাবে প্ৰথম শ্ৰেণীটোৰ নিম্ন সীমা সাধাৰণতে শূন্য বা 5ৰ গুণিতকত লোৱা হয়। উদাহৰণস্বৰূপে, যদি আটাইতকৈ সৰু তথ্যটো শূন্য বা শূন্যতকৈ ডাঙৰ কিন্তু 5তকৈ সৰু হয়, তেন্তে প্ৰথম শ্ৰেণী অন্তৰালটো বিবৰ্জিত বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত 0–5 হিচাপে আৰু অন্তৰ্ভুক্তি বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত 0–4 হিচাপে ল'ব পাৰি। সেইদৰে, যদি আটাইতকৈ সৰু তথ্যৰাশিটো 30 তকৈ ডাঙৰ বা 30ৰ সমান কিন্তু 40তকৈ সৰু অখণ্ড সংখ্যা হয় আৰু যদি শ্ৰেণী দৈৰ্ঘ্য 10 নিৰ্বাচন কৰা হয় (যাতে শ্ৰেণী অন্তৰালৰ সংখ্যা 5 আৰু 15ৰ মাজত থাকে), তেন্তে প্ৰথম শ্ৰেণী অন্তৰালটো 30–39 হিচাপে (অন্তৰ্ভুক্তি বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত) বা 30–40 হিচাপে (বিবৰ্জিত বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত) ল'ব লাগিব।

আমি এতিয়া কেঁচা তথ্যৰাশিসমূহৰ পৰা বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা গঠনত আৱশ্যক হোৱা পৰ্যায়বিলাক তলত এটা এটাকৈ বৰ্ণনা কৰিম।

(ক) তিনিটা স্তম্ভ যুক্ত বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা গঠন কৰিব লাগে।

(খ) শ্ৰেণী অন্তৰালকেইটা গঠন কৰি সিহঁতক প্ৰথম স্তম্ভত বহুৱাব লাগে।

(গ) প্ৰতিটো তথ্য ৰাশিৰ বাবে তাৰ অনুৰূপ শ্ৰেণী অন্তৰালৰ বিপৰীতে দ্বিতীয় স্তম্ভত (দাগচিহ্ন শীৰ্ষক স্তম্ভত) একোটা দাগ চিহ্ন (উলম্ব দণ্ডিকা) দিব লাগে।

(ঘ) চাৰিটা দাগচিহ্ন দিয়াৰ পিছত পঞ্চম দাগ চিহ্নটো ||||| ক ~~||||~~ ধৰণে দিব লাগে।

(ঙ) আটাইবিলাক তথ্যৰাশিৰ কাৰণে দাগচিহ্ন দিয়াৰ পিছত শ্ৰেণী অন্তৰালবোৰৰ দাগচিহ্নবিলাক গণনা কৰি প্ৰত্যেক শ্ৰেণী অন্তৰালৰ মুঠ দাগ চিহ্নৰ সংখ্যা শ্ৰেণী অন্তৰালৰ বিপৰীতে তালিকাখনৰ তৃতীয় স্তম্ভত (বাৰংবাৰতা শীৰ্ষক স্তম্ভত) বহুৱাব লাগে।

(চ) শ্ৰেণী অন্তৰালবিলাকৰ (সৰল) বাৰংবাৰতাবিলাক যোগ কৰিব লাগে আৰু এই যোগফলক N আখৰটোৰে বুজাব লাগে।

উদাহৰণ -৫ এটা বিশেষ শ্ৰেণীৰ 100 জন ছাত্ৰই এটা বিশেষ বিষয়ত তলৰ নম্বৰ বিলাক পালে। এখন উপযুক্ত বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা গঠন কৰক।

75	80	66	56	50	82	66	45	68	56
80	69	87	74	80	76	81	64	57	68
58	60	73	74	66	87	84	98	79	64
80	63	58	87	96	77	72	74	79	78
86	66	76	76	80	82	63	75	83	34
76	68	74	41	68	40	59	90	35	94
65	88	85	84	79	87	76	65	76	80
75	82	96	95	73	60	52	80	88	63
76	83	60	79	72	77	57	92	67	52
72	86	72	86	73	78	78	79	75	60

সমাধান ঃ [ওপৰৰ তথ্য ৰাশিবিলাকক অসমূহিত (ungrouped) বা অবিন্যস্ত (unclassified) বা কেঁচা তথ্য (raw data) বোলে]। এইবিলাকৰ পৰা এনেধৰণৰ প্ৰশ্নবিলাকৰ উত্তৰ দিয়াটো সহজ নহয়। যেনে (ক) কিমানজন ছাত্ৰ উত্তীৰ্ণ হৈছে? (খ) কিমানজন ছাত্ৰই 70–79 ৰ ভিতৰত নম্বৰ পাইছে? (গ) কিমানজন ছাত্ৰই লেটাৰ নম্বৰ পাইছে? ইত্যাদি।

আমি লক্ষ্য কৰিছো যে প্ৰদত্ত তথ্যটোত গৰিষ্ঠতম নম্বৰ 96 আৰু লঘিষ্ঠতম নম্বৰ 34। সুবিধাৰ কাৰণে আমি এই সংখ্যা দুটাক দুটা ক্ষুদ্ৰ বৃত্তৰ ভিতৰত অন্তৰ্ভুক্ত কৰি লওঁ। এতিয়া আমি শ্ৰেণী অন্তৰালবিলাক 30–39, 40–49, 50–59,....., হিচাপে গঠন কৰিব পাৰো। এই ক্ষেত্ৰত মনত ৰাখিব লাগিব যে শ্ৰেণী অন্তৰালৰ সংখ্যা 5তকৈ কম আৰু 15তকৈ বেছি হ'ব নালাগে।

(আমি শ্ৰেণী অন্তৰালবোৰ 30–40, 40–50, 59–60,..... হিচাপেও ল'ব পাৰো। কাৰণ যেতিয়া তথ্যৰাশি বিলাকৰ মান অখণ্ড সংখ্যা হয়, তেতিয়া অন্তৰ্ভুক্তি পদ্ধতি বা বিবৰ্জিত পদ্ধতিত শ্ৰেণী অন্তৰালবোৰ ল'ব পাৰি)। কিন্তু কোনো ৰাশিৰ মান ভগ্নাংশ হ'লে, বিবৰ্জিত পদ্ধতিত শ্ৰেণী অন্তৰালবিলাক ল'ব লাগিব। এতিয়া ১.৫.৪ খণ্ডত বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা গঠন সম্পৰ্কত উল্লেখ কৰি অহা পৰ্যায়বিলাক অনুসৰণ কৰি তলৰ বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকাখন পাওঁ।

তালিকা

নম্বৰ পোৱা অনুসৰি ছাত্রসকলৰ বিভাজন।

শ্রেণী অন্তৰাল	দাগ চিহ্ন	বাৰংবাৰতা
30–39	||	2
40–49	|||	3
50–59	⧸⧸⧸⧸ ⧸⧸⧸⧸ |	11
60–69	⧸⧸⧸⧸ ⧸⧸⧸⧸ ⧸⧸⧸⧸ ⧸⧸⧸⧸	20
70–79	⧸⧸⧸⧸ ⧸⧸⧸⧸ ⧸⧸⧸⧸ ⧸⧸⧸⧸	32
80–89	⧸⧸⧸⧸ ⧸⧸⧸⧸ ⧸⧸⧸⧸ ⧸⧸⧸⧸ ⧸⧸⧸⧸	25
90–99	⧸⧸⧸⧸ ||	7
	মুঠ	N = 100

ওপৰৰ বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকাৰ পৰা আমি অতি সহজে তলৰ প্রশ্নবিলাকৰ উত্তৰ দিব পাৰো।

(ক) কিমানজন ছাত্রই 40 আৰু 49 ৰ ভিতৰত নম্বৰ পাইছে। (উত্তৰ 3)

(খ) কিমান সংখ্যক ছাত্রই 70 আৰু 79 ৰ ভিতৰত নম্বৰ পাইছে? (উত্তৰ 32)

(গ) কিমানজন ছাত্রই 50 আৰু 79ৰ ভিতৰত নম্বৰ পাইছে?
(উত্তৰ 11+20+32 = 53)

(ঘ) কিমানজন ছাত্রই 40 বা 40ৰ বেছি নম্বৰ পাইছে? (উত্তৰ 98)

(ঙ) কিমানজন ছাত্রই 60ৰ কম নম্বৰ পাইছে? (উত্তৰ 16)

(চ) কিমান শতাংশ ছাত্রই 80 বা তাৰ বেছি নম্বৰ পাইছে? (উত্তৰ 32%)



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৩ঃ তলৰ উক্তিবিলাক শুদ্ধ নে অশুদ্ধ উল্লেখ কৰক ঃ

(ক) গুণ (বা লক্ষণ) জুখিব পাৰি। (শুদ্ধ বা অশুদ্ধ)

(খ) এটা বিচ্ছিন্ন চলকে যিকোনো ভগ্নাংশ মান ল'ব পাৰে। (শুদ্ধ বা অশুদ্ধ)

(গ) এটা অবিচ্ছিন্ন চলকে দুটা নির্ধাৰিত সীমাৰ ভিতৰত যিকোনো মান ল'ব পাৰে। (শুদ্ধ বা অশুদ্ধ)

(ঘ) এটা শ্রেণী অন্তৰালৰ সম্ভৱপৰ সর্বনিম্নমাপক সেই শ্রেণীটোৰ নিম্নসীমা বোলে। (শুদ্ধ বা অশুদ্ধ)

(ঙ) বিবর্জিত শ্রেণী অন্তৰালবিলাকৰ শ্রেণীসীমা আৰু শ্রেণী পৰিবন্ধবিলাক একে। (শুদ্ধ বা অশুদ্ধ)

(চ) অন্তর্ভুক্তি শ্রেণী অন্তৰালবিলাকৰ শ্রেণী সীমা আৰু শ্রেণী পৰিবন্ধবিলাক একে। (শুদ্ধ বা অশুদ্ধ)

(ছ) খোলা-মূৰযুক্ত বিভাজনে মধ্যমান নির্ণয় কৰাত অসুবিধাৰ সৃষ্টি কৰে। (শুদ্ধ বা অশুদ্ধ)

(জ) এটা শ্রেণী অন্তৰালৰ মধ্যমান, শ্রেণীটোৰ নিম্নসীমা আৰু উচ্চ সীমাৰ পার্থক্যৰ আধাৰ যোগফলৰ সমান। (শুদ্ধ বা অশুদ্ধ)

(ঝ) এটা বিচ্ছিন্ন চলক গণনাৰ ফল। (শুদ্ধ বা অশুদ্ধ)

(ঞ) এটা অবিচ্ছিন্ন চলক গণনাৰ ফল। (শুদ্ধ বা অশুদ্ধ)

১.৬ পৰিসাংখ্যিকীয় তথ্যক উপস্থাপন কৰাৰ পদ্ধতিসমূহ (METHODS OF PRESENTING STATISTICAL INFORMATION)

চিত্র আৰু লেখ হ'ল বৃহৎ সংখ্যক সাংখ্যিক তথ্য উপস্থাপনৰ পদ্ধতিসমূহ, যিবিলাকক এনেকুৱা ভাৱে পৰিকল্পনা কৰা হয় যাতে তথ্যসমূহ তৎক্ষণাৎ তুলনা কৰিব পৰা হয় আৰু মনোগ্রাহী আৰু সহজে বোধগম্য হোৱাৰ লগতে দৃষ্টি নিক্ষেপ কৰোতাজনক আনন্দ দিয়ে।

সাধাৰণতে তথ্যসমূহক তলৰ চিত্রবিলাকৰ সহায়ত উপস্থাপন কৰা হয়।

১। দণ্ড চিত্র [Bar Diagram (Chart)]

২। আয়ত আৰু বর্গ চিত্র [Rectangular and Squar Diagrams (Chart)]

৩। বৃত্তচিত্র বা পাইচিত্র (Circular or Pie Diagrams or Pie Chart)।

আমি আমাৰ আলোচনা ভিন্ ভিন্ প্রকাৰৰ দণ্ড চিত্র আৰু পাইচিত্রত সীমাবদ্ধ কৰি ৰাখিম, যিহেতু প্রধানকৈ এই চিত্রবিলাক বহুলভাৱে ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

১। দণ্ড চিত্র ঃ দণ্ডচিত্রত দৈর্ঘ্যহে বিবেচনা কৰা হয়, প্রস্থ যিকোনো সীমিত মাপৰ হ'ব পাৰে। দণ্ড চিত্রবোৰক তলত দিয়া ধৰণে তিনিটা ভাগত ভগাব পাৰি। যেনে—

(ক) সৰল দণ্ড চিত্র (Simple Bar diagram)

(খ) বহুদণ্ড চিত্র (Multiple Bar diagram)

(গ) খণ্ডদণ্ড চিত্র (Sub-divided or Component Bar diagram)

(ক) সৰল দণ্ড চিত্র ঃ একেটা প্রকাৰৰ তথ্যসমূহক সৰল দণ্ডচিত্রৰ সহায়ত উপস্থাপন কৰা হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে অসমত যোৱা পাঁচ বছৰৰ ধানৰ উৎপাদনৰ পৰিমাণ সৰল দণ্ডচিত্রৰ সহায়ত উপস্থাপন কৰিব পাৰি। সৰল দণ্ডচিত্রৰ অংকন কৰাৰ কাৰণে প্রতিটো তথ্যৰাশিৰ কাৰণে একোটা দণ্ড অংকন কৰিব লাগে। আটাইবিলাক দণ্ড একে সাধাৰণ ভূমিৰ ওপৰত থাকিব। দণ্ডবিলাকৰ উচ্চতা তথ্য ৰাশিৰ মান অনুসৰি হ'ব। প্রত্যেক দণ্ডৰ প্রস্থ সমান হ'ব লাগিব। সিহঁতৰ মাজৰ ফাঁকবিলাকো পৰস্পৰ সমান হ'ব লাগিব। সাধাৰণতে দুটা ক্রমিক দণ্ডৰ মাজৰ ফাঁক এটা দণ্ডৰ প্রস্থৰ আধাতকৈ কম হ'ব নালাগিব। দণ্ডবিলাকৰ সধাৰণ ভূমি অনুভূমিক বা উলম্ব হ'ব লাগিব। দণ্ডবিলাকৰ উচ্চতাৰ সহায়ত তথ্য ৰাশিসমূহৰ মাজত সহজে তুলনা কৰিব পাৰি।

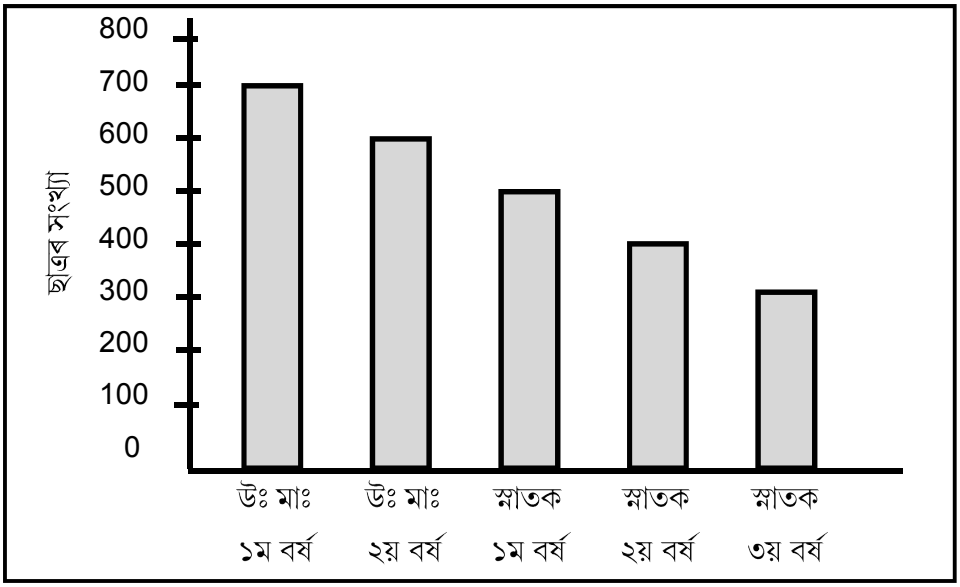
উদাহৰণ - ১ ঃ এখন মহাবিদ্যালয়ৰ ছাত্ৰৰ সংখ্যাৰ বাবে উলম্ব সৰল দণ্ড চিত্ৰ অংকন কৰক ঃ

উচ্চতৰ মাধ্যমিক ১ম বর্ষ ঃ 700,উচ্চতৰ মাধ্যমিক

২ম বর্ষ ঃ 560, স্নাতক ১ম বর্ষ ঃ 500, স্নাতক

২ম বর্ষ ঃ 440, স্নাতক ৩য় বর্ষ ঃ 400

সমাধান ঃ মহাবিদ্যালয়খনৰ ভিন্ ভিন্ শ্ৰেণীৰ ছাত্ৰৰ সংখ্যা উপস্থাপন কৰাৰ কাৰণে তলৰ উলম্ব সৰল দণ্ডচিত্ৰটো অংকন কৰা হ'ল।

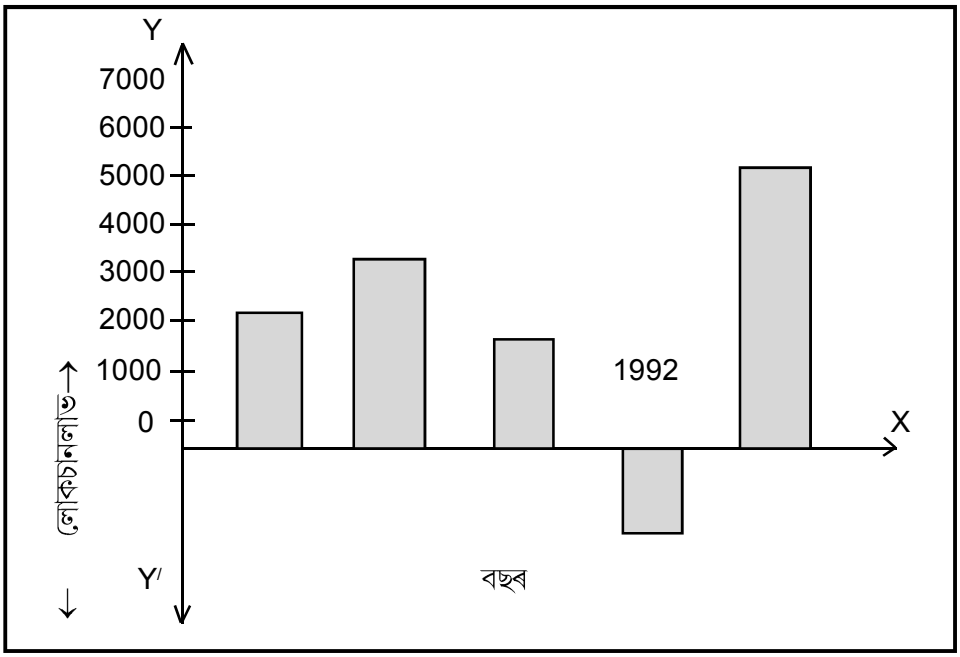


উদাহৰণ - ২ ঃ এটা ব্যৱসায়ৰ 1989ৰ পৰা 1903 লৈ বছৰকেইটাত হোৱা লাভ আৰু লোকচানৰ পৰিমাণ তলত দিয়া হৈছে।

বছৰ	ঃ	1989	1990	1991	1992	1993
লাভ (টকাত)	ঃ	3000	4000	2500	–	6000
লোকচান (টকাত)	ঃ	–	–	–	2000	–

তথ্যটো দণ্ডচিত্ৰৰ দ্বাৰা উপস্থাপন কৰক।

সমাধান ঃ আমি ব্যৱসায়টোৰ লাভ আৰু লোকচানৰ পৰিমাণ উপস্থাপন কৰাৰ কাৰণে তলৰ সৰল দণ্ডচিত্ৰটো অংকন কৰিছো।



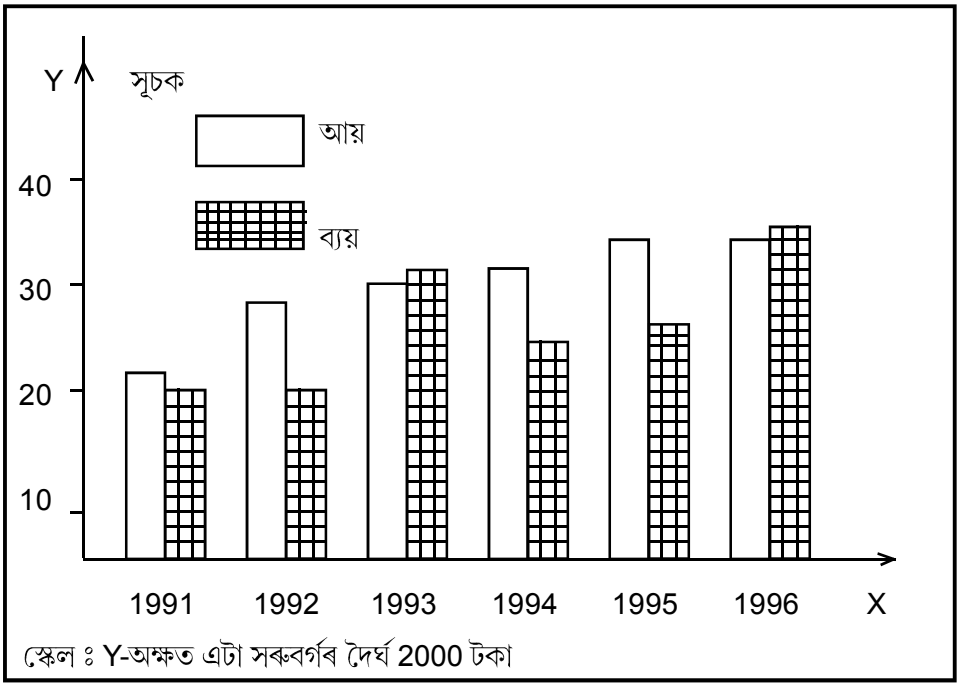
(খ) বহুদণ্ড চিত্ৰ (Multiple Bar Diagram) ঃ বহুদণ্ড চিত্ৰ সহায়ত একাধিক প্ৰকাৰৰ তথ্যৰ মানসমূহৰ ২টা, ৩টা বা ৪টা শ্ৰেণীক তুলনা কৰাৰ কাৰণে এবাৰতে লগালগিকৈ দণ্ড আঁকি উপস্থাপন কৰিব পাৰি। উদাহৰণ স্বৰূপে কোনো এক ব্যৱসায়ৰ কেইবছৰমানৰ লাভ আৰু লোকচানবিলাক প্ৰদৰ্শন কৰিবলৈ প্ৰতি বছৰৰ লাভ আৰু লোকচান বুজোৱা হিচাপত এযোৰকৈ দণ্ড লগালগিকৈ অংকন কৰিব লাগিব। সুচল হোৱাৰ বাবে ওচৰা-ওচৰিকৈ থকা দণ্ড দুডালক পৃথকে পৃথকে আচ্ছাদিত কৰা হয়। চিত্ৰটো স্পষ্ট হোৱাৰ কাৰণে ওচৰাওচৰিকৈ থকা ভিন্ ভিন্ দণ্ডৰ দলবিলাকৰ মাজত ফাঁক ৰখা হয়।

উদাহৰণ - ৩ কোনো ব্যৱসায় আয় আৰু ব্যয় (হাজাৰ টকাত) তলত দিয়া হৈছে।

বছৰ	1991	1992	1993	1994	1995	1996
আয়	22.0	27.3	28.2	30.3	37.7	33.3
ব্যয়	19.5	21.7	30.0	25.6	26.1	34.2

বহুদণ্ড চিত্ৰৰ সহায়ত প্ৰদত্ত তথ্যটো উপস্থাপন কৰক।

সমাধান ঃ ব্যৱসায়টোৰ লগত জড়িত আয় আৰু ব্যয় তলত দেখুওৱা ধৰণে বহু দণ্ড চিত্ৰ অংকন কৰি উপস্থাপন কৰা হৈছে।

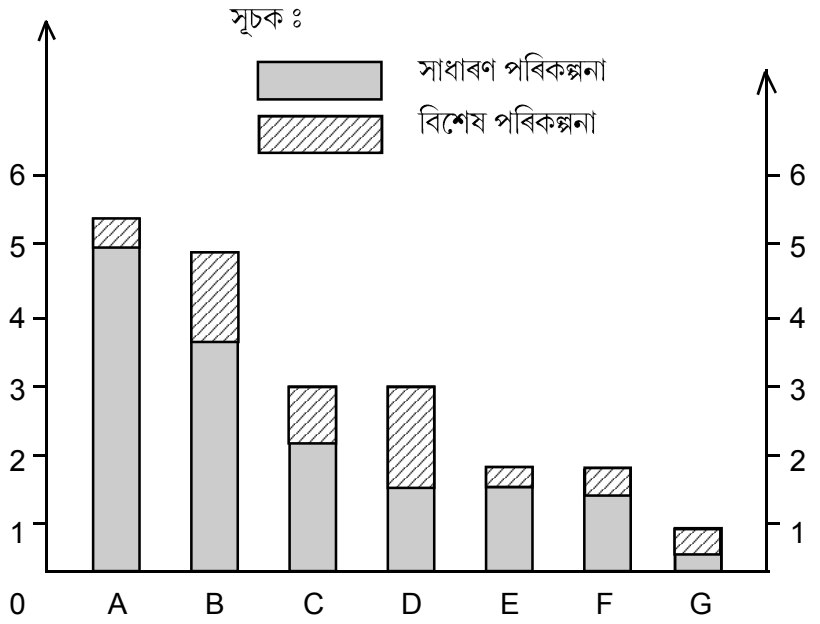


(গ) **খণ্ড দণ্ডচিত্র (Sub-divided Bar Diagram) ঃ** যিবিলাক তথ্যক অংশ হিচাপত প্রদর্শন কৰিব লাগে, নাইবা যিবিলাক তথ্য উপাংশৰ সমষ্টি, সিবিলাক তথ্যক উপস্থাপন কৰিবলৈ খণ্ডদণ্ড চিত্র ব্যৱহাৰ কৰা হয়। এটা বিষয়ক সম্পূর্ণকৈ বুজাবলৈ এটা দণ্ড অংকন কৰা হয় আৰু তাৰ পিছত বিষয়টোৰ অংশবিলাকৰ মানৰ অনুপাতে দণ্ড ডালক ভিন্ ভিন্ খণ্ড বা উপাংশত বিভক্ত কৰা হয়। ভিন্ ভিন্ উপাংশবোৰৰ এটাৰ পৰা আনটো পৃথক হিচাপে দেখুৱাবলৈ পৃথকে পৃথকে ৰং দিব বা আচ্ছাদিত কৰিব পাৰি। খণ্ড দণ্ড চিত্র তথ্যৰ পৰম মান বা শতাংশ হিচাপত অংকন কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ - ৪ কোনো এখন ৰাজ্যৰ চতুর্থ পঞ্চবার্ষিক পৰিকল্পনাৰ ভিন্ ভিন্ বিভাগীয় শিতানত খৰচৰ তালিকা তলত দিয়া হৈছে। এই তথ্যবিলাক খণ্ড দণ্ডচিত্রৰ দ্বাৰা উপস্থাপন কৰক।

	বিভাগ	সাধাৰণ পৰিকল্পনা (লাখ টকাত)	বিশেষ পৰিকল্পনা (লাখ টকাত)	মুঠ
A	জলসিঞ্চন আৰু বিদ্যুৎ	5074	226	5300
B	সামাজিক উন্নয়ন	3647	1245	4892
C	কৃষি	2170	1030	3200
D	যাতায়ত আৰু পৰিবহন	1075	1740	2815
E	শিল্প আৰু খনিজ	1210	100	1310
F	সমবায়	738	377	1115
G	অন্যান্য	156	212	368

সমাধান ঃ প্রদত্ত তথ্যটোৰ কাৰণে তলৰ খণ্ড দণ্ড চিত্রটো অংকন কৰা হৈছে।



A ঃ জলসিঞ্চন আৰু বিদ্যুৎ

B ঃ সামাজিক উন্নয়ন

C ঃ কৃষি

D ঃ যাতায়ত আৰু পৰিবহন

E ঃ শিল্প আৰু খনিজ

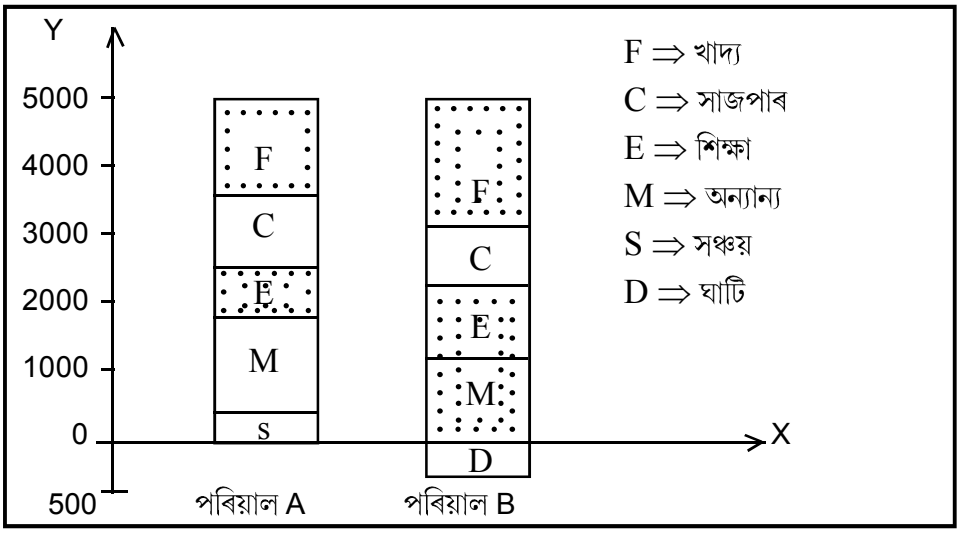
F ঃ সমবায়

G ঃ অন্যান্য

উদাহৰণ - ৫ উপযুক্ত চিত্রৰ সহায়ত তলৰ তথ্যটো উপস্থাপন কৰক।

খৰচৰ শিতান	পৰিয়াল- A (আয় ঃ 5000 টকা)	পৰিয়াল- B (আয় ঃ 3000 টকা)
খাদ্য	1500	1500
সাজপাৰ	1250	600
শিক্ষা	250	500
অন্যান্য	1900	700
সঞ্চয় বা ঘাটি	+100	–300

সমাধান ঃ প্রদত্ত তথ্যটো তলত দেখুওৱা ধৰণে খণ্ড দণ্ড চিত্রৰ সহায়ত উপস্থাপন কৰিব পাৰি।



পাই-চিত্ৰ (পাই-সংচিত্ৰ) ঃ পাইচিত্ৰ (বা পাই-সংচিত্ৰ) হ'ল এটা বৃত্ত, ইয়াৰ ব্যাসার্ধ খুউব বেছি ডাঙৰ বা খুউব বেছি সৰু ও নহয়। ইয়াৰোপৰি সম্পূৰ্ণ তথ্যটোৰ যিমানটো উপাংশ থাকে, বৃত্তটোৰ কালিক সিমানটা বৃত্তকলাত(sector)ত বিভক্ত কৰা হয়। এই কাম বৃত্তৰ কেন্দ্ৰৰ পৰা পৰিধিলৈ ৰেখাখণ্ড টানি সমাধা কৰা হয়। বৃত্তকাৰ খণ্ডৰ কালিয়ে সম্পূৰ্ণ তথ্যটো প্ৰদৰ্শন কৰে আৰু এইটো 360^0 ৰ সমপৰ্যায়ৰ। প্ৰত্যেক বৃত্তকলাৰ কালি তথ্যটোৰ অনুৰূপ উপাংশৰ মনৰ সমানুপাতিক। বৃত্তকলা বিলাকৰ কেন্দ্ৰস্থ কোণৰ সমানুপাতিক।

উদাহৰণ - ৬ এখন চৰকাৰ এক পঞ্চবাৰ্ষিক পৰিকল্পনাত বিভিন্ন শিতানত প্ৰস্তাৱিত ব্যয় তলত দিয়া ধৰণৰ।

শিতান	ধনৰ পৰিমাণ (কোটি টকাত)
কৃষি	12,000
শিল্প আৰু খনিজ	9,000
জলসিঞ্চন আৰু বিদ্যুৎ	6,000
শিক্ষা	8,000
যাতায়ত	5,000

পাই চিত্ৰৰ সহায়ত তথ্যটো উপস্থাপন কৰক।

সমাধান ঃ তলত পাই চিত্ৰৰ কাৰণে ভিন্ ভিন্ কোণবিলাক গণনা কৰি উলিওৱা হ'ল।

খৰচৰ শিতান	খৰচৰ পৰিমাণ (কোটি টকাত)	কোণৰ মাপ (ডিগ্ৰীত)
কৃষি	12,000	108
শিল্প আৰু খনিজ	9,000	81
জলসিঞ্চন আৰু বিদ্যুৎ	6,000	54
শিক্ষা	8,000	72
যাতায়ত	5,000	45
মুঠ	40,000	360

কোণৰ অভিগণনা ঃ

40,000 কোটি টকাক বুজোৱা কোণৰ পৰিমাণ = 360^0

1,000 কোটি টকাক বুজোৱা কোণৰ পৰিমাণ $= \frac{360}{40} = 9^0$

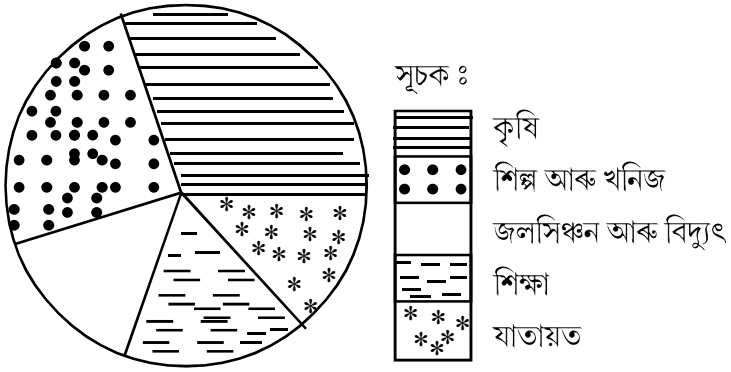
12,000 কোটি টকাক বুজোৱা কোণৰ পৰিমাণ = 108^0

9,000 কোটি টকাক বুজোৱা কোণৰ পৰিমাণ = $9^0 \times 9 = 81^0$

6,000 কোটি টকাক বুজোৱা কোণৰ পৰিমাণ = $9^0 \times 6 = 54^0$

8,000 কোটি টকাক বুজোৱা কোণৰ পৰিমাণ = $9^0 \times 8 = 72^0$

5,000 কোটি টকাক বুজোৱা কোণৰ পৰিমাণ = $9^0 \times 5 = 45^0$



উদাহৰণ - ৭ এটা নিৰ্বাচনত ভোটদানৰ সংখ্যা 72,000। চাৰিজন প্ৰাৰ্থীৰ প্ৰথম জনে 24,000, দ্বিতীয়জনে 20,000, তৃতীয়জনে 18,000 আৰু চতুৰ্থজনে 10,000 টা ভোট পায়। এই তথ্যৰ বাবে এটা পাইচিত্ৰ অংকন কৰক।

সমাধান ঃ ধৰাহ'ল 72,000 টা ভোটক বুজোৱা কোণ = 360^0

$$\therefore \quad 1 \quad ,, \quad ,, \quad = \left(\frac{360}{72000}\right)^0$$

$$= \left(\frac{1}{200}\right)^0$$

প্ৰথমজন প্ৰাৰ্থীয়ে পোৱা 24,000 টা ভোটক বুজোৱা কোণ

$$= \left(\frac{1}{200} \times 24{,}000\right)^0 = 120^0$$

দ্বিতীয়জন প্ৰাৰ্থীয়ে পোৱা 20,000 টা ভোটক বুজোৱা কোণ

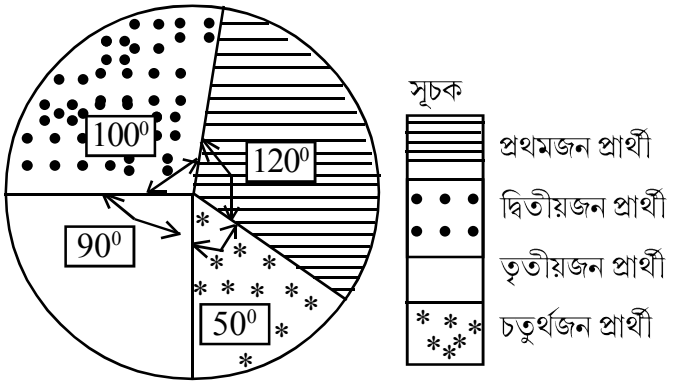
$$= \left(\frac{1}{200} \times 20{,}000\right)^0 = 100^0$$

তৃতীয়জন প্ৰাৰ্থীয়ে পোৱা 18,000 ভোটক বুজোৱা কোণ

$$= \left(\frac{1}{200} \times 18,000\right)^0 = 90^0$$

চতুর্থজন প্রার্থীয়ে পোৱা 10,000 ভোটক বুজোৱা কোণ

$$= \left(\frac{1}{200} \times 10,000\right)^0 = 50^0$$



চিত্রৰ সুবিধা (Advantage of Diagrams) :

(ক) পৰিসাংখ্যিকীয় তথ্যক চিত্রৰ সহায়ত উপস্থাপন কৰিলে তথ্যৰ লক্ষণবিলাক বুজি পোৱাত সহজ হয়।

(খ) কেতিয়াবা কেতিয়াবা চিত্র বা সংচিত্রই জটিল সমস্যা এটাক স্পষ্ট কৰি তোলে আৰু তাত লুকাই থকা যিবিলাক কথা আন উপায়ে চিনাক্ত কৰিব নোৱাৰি সিবিলাক প্রকাশ কৰে।

(গ) অর্থশাস্ত্রৰ বহুতো জটিল তত্ত্ব বা সূত্র চিত্রৰ সহায়ত সহজে ব্যাখ্যা কৰিব পাৰি।

চিত্রৰ সীমাবদ্ধতা (Limitations of Diagrams) :

(ক) চিত্রই তথ্যক বিস্তৃতভাৱে প্রদর্শন নকৰে। এখন তালিকাত বৃহৎ সংখ্যক বিষয় বস্তু বা পৰস্পৰ সম্পর্কযুক্ত বিষয়বস্তু, অতিৰিক্তভাৱে শাৰী আৰু স্তম্ভৰ ব্যৱস্থা কৰি প্রদর্শন কৰিব পাৰি।

(খ) তালিকাত পৰিসাংখ্যিকীয় তথ্য সম্পূর্ণ শুদ্ধভাৱে দেখুৱাব পাৰি। কিন্তু চিত্রত পৰিসাংখ্যিকীয় তথ্য মোটামুটিভাৱেহে দেখুৱাব পাৰি।

চিত্রৰ ব্যৱহাৰ (Use of Diagrams) :

পৰিসাংখ্যিকীয় তথ্যক চিত্রৰ দ্বাৰা উপস্থাপন কৰিলে দেখাত আকর্ষণীয় আৰু সহজে বুজিব পৰা হোৱা হেতুকে এনেকুৱা চিত্রাত্মক উপস্থাপন অর্থনীতি, ব্যৱসায় আৰু বাণিজ্যত অধিক গুৰুত্ব লাভ কৰিছে। ভিন্ ভিন্ ব্যৱসায়িক প্রতিষ্ঠানে প্রকাশ কৰা ভিন্ ভিন্ বিজ্ঞাপনত চিত্র অপৰিহার্য হৈ পৰিছে। সদা ব্যস্ত ব্যৱসায়ীসকলৰ বাবে চিত্রবিলাক বৰ গুৰুত্বপূর্ণ, কাৰণ তেওঁলোকে আন উপায়েৰে পৰিসাংখ্যিকীয় তথ্যৰ লক্ষণবিলাক অধ্যয়ন কৰিবলৈ সময় নাপায়। চিত্রত চকুফুৰায়ে তেওঁলোকে ব্যৱসায়ৰ অৱস্থাৰ বুজ ল'ব পাৰে।

লেখৰ সহায়ত বাৰংবাৰতা বিভাজন বৰ্ণাব পাৰি। চিত্ৰৰ তুলনাত লেখ অধিক স্পষ্ট আৰু তুলনামূলকভাৱে চিত্ৰতকৈ লেখ অংকন কৰাটো সহজ। বাৰংবাৰতা বিভাজন আৰু সময়-শ্ৰেণীৰ (time series) তথ্যসমূহ সাধাৰণতে লেখৰ সহায়ত উপস্থাপন কৰা হয়। সাধাৰণতে তুলনামূলক অধ্যয়নৰ কাৰণে চিত্ৰাংকন কৰা হয়। কিন্তু চিত্ৰই চলকবোৰৰ মাজত থকা সম্পৰ্ক অধ্যয়ন কৰাত স্পষ্টভাৱে বৰ্ণনা নকৰে। লেখৰ সহায়ত চলকবিলাকৰ মাজৰ সম্পৰ্ক অধ্যয়ন কৰিব পাৰি। পৰিসাংখ্যিকীয় বিশ্লেষণত চিত্ৰতকৈ লেখৰ গুৰুত্ব বেছি।

কাৰ্য ক্ষেত্ৰত অনেক প্ৰকাৰৰ লেখ ব্যৱহাৰ কৰা হয়। এই লেখসমূহক বহলভাৱে দুটা ভাগত ভগাব পাৰি ঃ

১। বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ লেখ (Graphs of frequency distribution)

২। কাল-শ্ৰেণীৰ লেখ (Graphs of time series)

বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ লেখ (Graphs of frequency distribution) ঃ বাৰংবাৰতা বিভাজন সহজে বোধগম্য কৰিবৰ কাৰণে তিনি প্ৰকাৰৰ লেখ অংকন কৰা হয়। এইবিলাক হ'লঃ

(ক) হিষ্ট'গ্ৰাম বা স্তম্ভ চিত্ৰ (Histogram or Column diagram)

(খ) বাৰংবাৰতা বহুভুজ (Frequency Polygon)

(গ) সঞ্চীয় বাৰংবাৰতা বক্ৰ বা তোৰণ (Cumulative frequency curve)

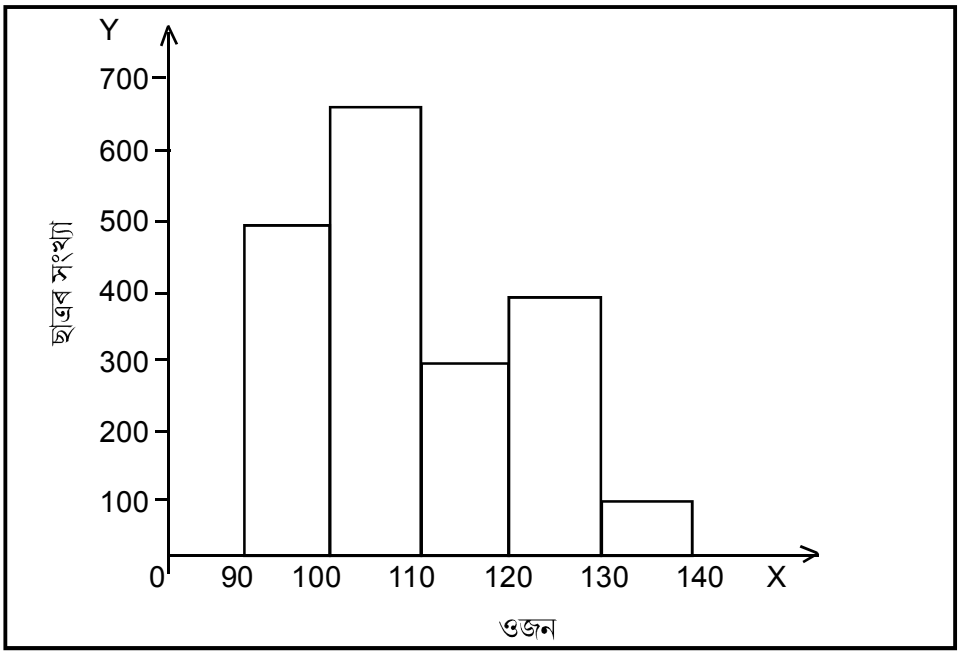
(ক) হিষ্ট'গ্ৰাম বা স্তম্ভ চিত্ৰ (Histogram or Column diagram) ঃ যি লেখৰ সহায়ত বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ শ্ৰেণীসমূহৰ বাৰংবাৰতাসমূহক উলম্বভাৱে লগালগিকৈ থকা আয়তৰ দ্বাৰা উপস্থাপন কৰা হয়, তাকে হিষ্ট'গ্ৰাম বা স্তম্ভচিত্ৰ বোলে। পোনপ্ৰথমতে উপযুক্ত স্কেল লৈ X অক্ষত প্ৰকৃত শ্ৰেণী অন্তৰালবোৰ চিহ্নিত কৰিব লাগে। তাৰ পিছত সেইবিলাকক ভূমি হিচাপেলৈ সিহঁতৰ ওপৰত একেলেঠাৰিকৈ আয়ত বিলাক আঁকিব লাগে। যেতিয়া **শ্ৰেণী অন্তৰালবোৰ সমান হয়, তেতিয়া আয়ত বিলাকৰ উচ্চতা অনুৰূপ বাৰংবাৰতা বিলাকৰ সমানুপাতিক হয়, কিন্তু যদি শ্ৰেণী অন্তৰালবিলাক সমান নহয়, তেন্তে আয়তবিলাকৰ উচ্চতা, অনুৰূপ বাৰংবাৰতা আৰু শ্ৰেণী অন্তৰালৰ দৈৰ্ঘ্যৰ অনুপাতৰ সমানুপাতিক হয়।**

উদাহৰণ - ৮ তলৰ বণ্টনটোক হিষ্ট'গ্ৰাম আঁকি উপস্থাপন কৰক।

(2000 জন ছাত্ৰৰ ওজনৰ বাৰংবাৰতা বিভাজন)

ওজন (পাউণ্ডত)	90–100	100–110	110–120	120–130	130–140
ছাত্ৰৰ সংখ্যা	500	700	300	400	100

সমাধান ঃ ওপৰৰ বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ শ্ৰেণী অন্তৰালবিলাক সমান দৈৰ্ঘ্য বিশিষ্ট। প্ৰথমতে X অক্ষত শ্ৰেণী অন্তৰালবিলাক চিহ্নিত কৰা হ'ল আৰু তাৰ পিছত সিহঁতৰ ওপৰত অনুৰূপ শ্ৰেণীৰ অন্তৰালৰ বাৰংবাৰতাৰ সমানুপাতিক উচ্চতা বিশিষ্ট একোটাকৈ আয়ত আঁকা হ'ল।



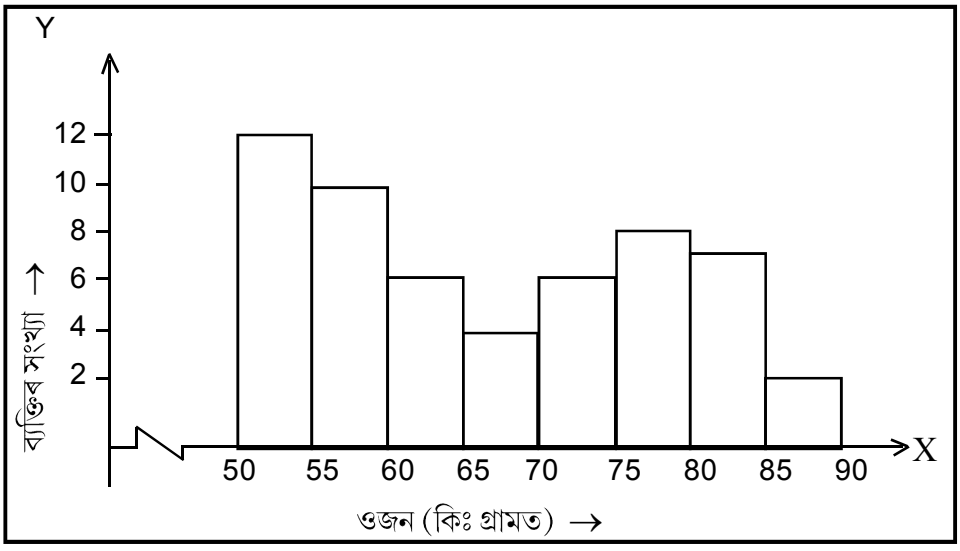
উদাহৰণ - ৯ তলত 50 জন ব্যক্তিৰ ওজনৰ (কিঃ গ্ৰামত) বিভাজন দিয়া হৈছে।

ওজন (কিঃগ্ৰাঃত)	50–55	55–60	60–65	65–70	70–75	75–80	80–85	85–90
ব্যক্তিৰ সংখ্যা	12	8	5	4	5	7	6	3

ওপৰৰ তথ্যটোৰ কাৰণে হিষ্ট'গ্ৰাম অংকন কৰক।

সমাধান ঃ আমি উপযুক্ত একক লৈ X- অক্ষত শ্ৰেণী সীমাবিলাক আৰু উপযুক্ত স্কেললৈ Y-অক্ষত অনুৰূপ বাৰংবাৰতাবিলাক উপস্থাপন কৰিছোঁ।

যিহেতু Xৰ ওপৰত স্কেল 50ত আৰম্ভ হৈছে, গতিকে মূল বিন্দুৰ ওচৰত যিটো ভাজ বা ভঙা অংশ অংকন কৰা হৈছে, সেইটোৱে লেখ অংকনৰ স্কেল 0ত আৰম্ভ নহৈ 50ত আৰম্ভ হোৱাৰ ফাঁক (gap)টোক বুজাইছে।



(খ) **বাৰংবাৰতা বহুভুজ (Frequency Polygon) ঃ** এটা হিষ্ট'গ্রামৰ লগালগিকৈ থকা আয়তবিলাকৰ শীৰ্ষৰ অনুভূমিক বাহুৰ মধ্যবিন্দুবিলাক ৰেখাখণ্ডৰে সংযোগ কৰি পোৱা লেখকে বাৰংবাৰতা বহুভুজ বোলে। বাৰংবাৰতা বহুভুজ হিষ্ট'গ্রামৰ পৰা পৰোক্ষভাৱে অংকন নকৰাকৈ প্ৰত্যক্ষভাৱে অংকন কৰিব পাৰি। ইয়াৰ কাৰণে X-অক্ষত শ্ৰেণী বিভাগবিলাকৰ মধ্যবিন্দুবিলাক ল'ব লাগে আৰু বাৰংবাৰতা বিলাক অনুৰূপ শ্ৰেণীবিভাগবিলাকৰ মধ্যবিন্দুৰ বিপৰীতে Y-অক্ষৰ সহায়ত স্থাপন কৰিব লাগে। ইয়াৰ পিছত এনেকৈ স্থাপন কৰি পোৱা বিন্দুবিলাক একাদিক্ৰমে ৰেখা খণ্ডৰ সহায়ত সংযোগ কৰিব লাগে।

পৰোক্ষ বা প্ৰত্যক্ষ দুয়োটা ক্ষেত্ৰতে পোৱা লেখৰ দুই মূৰৰ বিন্দু দুটা, প্ৰথম শ্ৰেণী অন্তৰালৰ পূৰ্ববৰ্তী হিচাপে আৰু অন্তিম শ্ৰেণী অন্তৰালৰ পৰবৰ্তী হিচাপে লোৱা বাৰংবাৰতাবিহীন শ্ৰেণী অন্তৰাল দুটাৰ মধ্যবিন্দুৰ লগত যথাক্ৰমে সংযোগ কৰিব লাগে। এনেদৰে পোৱা লেখটোৱে আমি বিচৰা বাৰংবাৰতা বহুভুজ হ'ব।

বিশেষ টোকা ঃ বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ শ্ৰেণী অন্তৰালবিলাকৰ দৈৰ্ঘ্য সমান নহ'লে সাধাৰণতে বাৰংবাৰতা বহুভূজ অংকন কৰা নহয়।

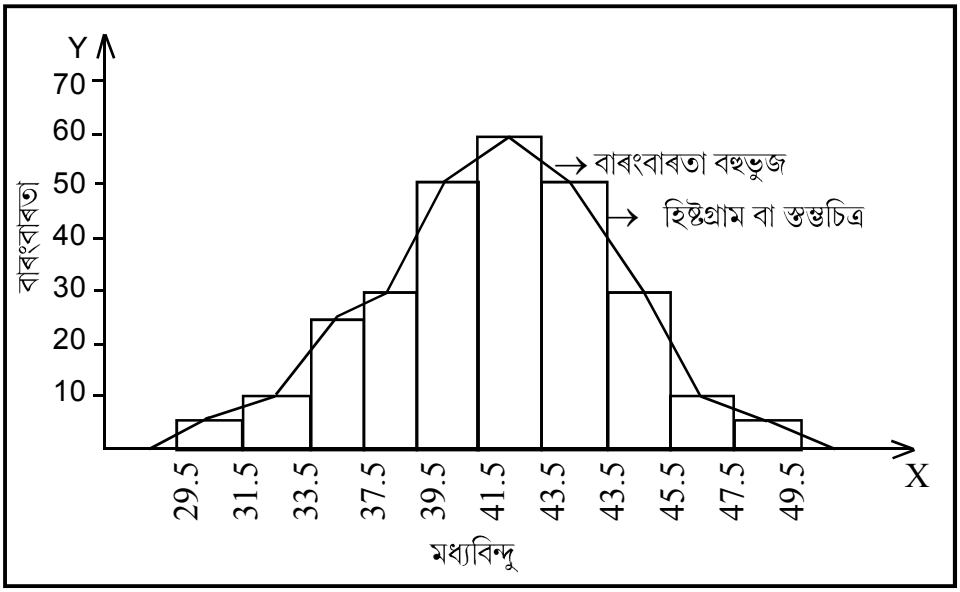
উদাহৰণ - ১০ সিপিঠিৰ বাৰংবাৰতা বিভাজনটোৰ (ক) হিষ্ট'গ্রাম আৰু (খ) বাৰংবাৰতা বহুভুজ অংকন কৰক।

সাপ্তাহিক মজুৰি (টকাত)	কৰ্মীৰ সংখ্যা
30–31	2
32–33	9
34–35	25
36–37	30
38–39	49
40–41	62
42–43	39
44–45	20
46–47	11
48–49	3

সমাধান ঃ হিষ্ট'গ্রাম আৰু বাৰংবাৰতা বহুভুজ অংকন কৰাৰ আগতে তলৰ তালিকাখন প্ৰস্তুত কৰিব লাগিব।

শ্ৰেণী অন্তৰাল	প্ৰকৃত শ্ৰেণীসীমা	মধ্যবিন্দু	বাৰংবাৰতা
30–31	29.5–31.5	30.5	2
32–33	31.5–33.5	32.5	9
34–35	33.5–35.5	34.5	25

36–37	35.5–37.5	36.5	30
38–39	37.5–39.5	38.5	49
40–41	39.5–41.5	40.5	62
42–43	41.5–43.5	42.5	39
44–45	43.5–45.5	44.5	20
46–47	45.5–47.5	46.5	11
48–49	47.5–49.5	48.5	3



টোকা ঃ ইয়াত আমি বাৰংবাৰতা বহুভুজটো আয়তবিলাকৰ শীৰ্ষৰ অনুভূমিক বাহুবিলাকৰ মধ্যবিন্দুবিলাক ৰেখাখণ্ডৰে সংযোগ কৰি অংকন কৰিছো। প্ৰত্যক্ষভাৰে বাৰংবাৰতা বহুভূজ অংকন কৰিবলৈ হ'লে আমি X-অক্ষত শ্ৰেণী অন্তৰালবিলাকৰ মধ্যবিন্দুবিলাক আৰু অনুৰূপ শ্ৰেণী অন্তৰালৰ বাৰংবাৰতাবিলাক Y-অক্ষত লওঁ। তাৰ পিছত (30.5, 2), (32.5, 9), ..., (48.5, 3) বিন্দুবিলাক লেখ কাগজত স্থাপন কৰি ৰেখাখণ্ড টানি সিহঁতক সংযোগ কৰোঁ। পৰোক্ষ বা প্ৰত্যক্ষ দুয়োটা পদ্ধতিত প্ৰথম শ্ৰেণী অন্তৰালটোৰ আগৰ শ্ৰেণীৰ মধ্যবিন্দু আৰু শেষৰ শ্ৰেণী অন্তৰালৰ পিছৰ শ্ৰেণীৰ মধ্যবিন্দুৰ লগত লেখৰ মূৰ বিন্দু দুটা সংযোগ কৰিব লাগে। (এই শ্ৰেণী দুটাৰ প্ৰত্যেকৰে বাৰংবাৰতা শূন্য)। এনেকৈ পোৱা লেখটোৱে অংকন কৰিবলগীয়া বাৰংবাৰতা বহুভুজ হ'ব।

(গ) **সঞ্চীয় বাৰংবাৰতা বক্ৰ বা তোৰণ (Cumulative Frequency Curve or Ogive)** ঃ সঞ্চয়ী (বা ক্ৰম যৌগিক) বাৰংবাৰতাৰ লৈখিক উপস্থাপনক সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বক্ৰ বা তোৰণ বোলে। পোনপ্ৰথমে কেঁচা তথ্যসমূহৰ পৰা বা বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ পৰা এখন সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা তালিকা গঠন কৰা হয়। ইয়াৰ পিছত X-অক্ষত শ্ৰেণী

অন্তৰালবিলাকৰ উৰ্ধ সীমাবিলাক (বা উৰ্ধশ্রেণী পৰিবন্ধবিলাক) চিহ্নিত কৰা হয় আৰু Y-অক্ষৰ দিশত সিহঁতৰ অনুৰূপ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাবিলাক দেখুৱাই বিন্দু স্থাপন কৰা হয়। এই বিন্দুবিলাক মুক্তহস্তে মসৃণ বক্ৰৰ দ্বাৰা সংযোগ কৰিব লাগে। এই বক্ৰটোৱে সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বক্ৰ বা তোৰণ। বক্ৰটোৰ অংকনৰ আৰ্হিৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি আমি দুই প্ৰকাৰৰ তোৰণ পাওঁ, যেনে— ক্ষুদ্রতৰ তোৰণ (less than ogive) আৰু বৃহত্তৰ তোৰণ (more than ogive)। **ক্ষুদ্রতৰ তোৰণ আৰু বৃহত্তৰ তোৰণৰ অংকন প্ৰণালী তলত ব্যাখ্যা কৰা হৈছে।** তোৰণৰ সহায়ত মধ্যমা (median), চতুৰ্থক (quartile), দশাংশক (deciles) আদি নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ - ১১ তলৰ বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ কাৰণে (ক) ক্ষুদ্রতৰ তোৰণ আৰু (খ) বৃহত্তৰ তোৰণ অংকন কৰক।

নম্বৰ	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
ছাত্ৰৰ সংখ্যা	4	8	11	15	12	6	3

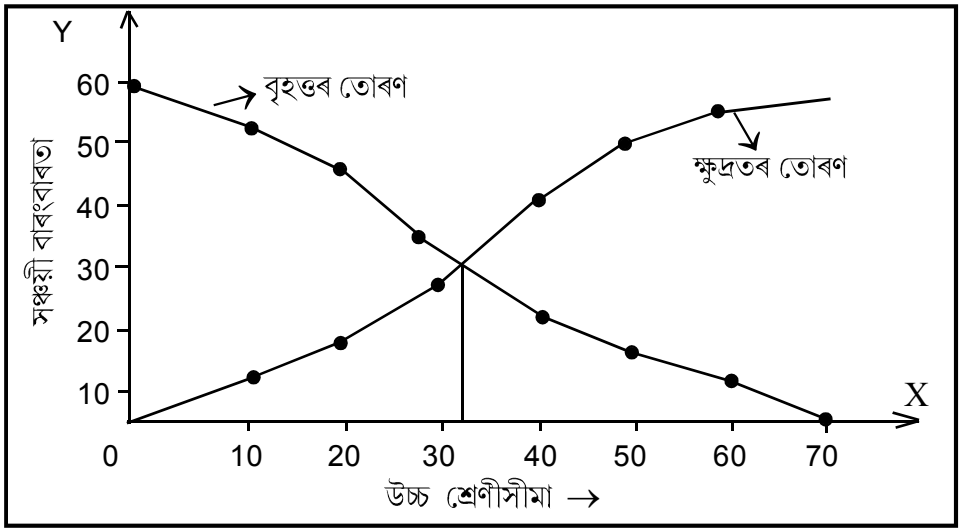
সমাধান ঃ ইয়াত শ্রেণী বিভাগবিলাক বিবৰ্জিত পদ্ধতিত গঠিত হৈছে। গতিকে প্ৰত্যেক শ্রেণীৰ নিম্ন শ্রেণী পৰিবন্ধ আৰু উচ্চ শ্রেণী পৰিবন্ধ, সেই শ্রেণীৰ নিম্ন সীমা আৰু উচ্চ সীমা হ'ব।

শ্রেণীবিভাগ	বাৰংবাৰতা	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা	
		ক্ষুদ্রতৰ	বৃহত্তৰ
0–10	4	4	59
10–20	8	12	55
20–30	11	23	47
30–40	15	38	36
40–50	12	50	21
50–60	6	56	9
60–70	3	59	3

ক্ষুদ্রতৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা স্তম্ভৰ পৰা আমি পাওঁ যে এটা নিৰ্দিষ্ট শ্রেণীৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাই সেই শ্রেণীৰ উচ্চ সীমাতকৈ কম মান বিশিষ্ট যিমানবিলাক আবেক্ষণ অন্তৰ্ভুক্ত হয় সিবিলাকৰ সংখ্যাক বুজায়। উদাহৰণ স্বৰূপে 30–40 শ্রেণীবিভাগটোৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা হ'ল 38। ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল এই যে 40তকৈ সৰু আবেক্ষণৰ সংখ্যা 38। আকৌ বৃহত্তৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা স্তম্ভৰ পৰা আমি পাওঁ যে এটা শ্রেণীৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাই প্ৰদত্ত বিভাজনটোত থকা সেই শ্রেণীটোৰ নিম্নসীমাৰ সমান বা তাতকৈ ডাঙৰ আবেক্ষণৰ সংখ্যাক বুজায়। এইদৰে প্ৰথম শ্রেণীৰ (0–10ৰ দ্বাৰ প্ৰদৰ্শিত) সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা 59 বোলতে ইয়াকে বুজিব লাগিব যে প্ৰদত্ত বিভাজনটোৰ 0ৰ সমান বা 0তকৈ ডাঙৰ আবেক্ষণৰ সংখ্যা হ'ল 59।

ক্ষুদ্রতৰ তোৰণৰ ক্ষেত্ৰত শ্রেণী অন্তৰালবিলাকৰ উচ্চ শ্রেণী সীমাবিলাক X-অক্ষত

চিহ্নিত কৰা হয় আৰু অনুৰূপ শ্ৰেণী অন্তৰালৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিলাক Y-অক্ষৰ দিশত লৈ বিন্দুবিলাক স্থাপন কৰা হয়। বিন্দুবিলাক মসৃণ বক্ৰৰ দ্বাৰা মুক্ত হস্তে সংযোগ কৰা হয়। ইয়াৰ পিছত বক্ৰৰ তলৰ মূৰটো প্ৰথম শ্ৰেণী অন্তৰালৰ নিম্নসীমাৰ লগত সংযোগ কৰা হয়। তলত বৃহত্তৰ তোৰণ অংকন কৰি দেখুৱা হৈছে আৰু ইয়াক চাই ছাত্ৰসকলে বৃহত্তৰ তোৰণৰ অংকন পদ্ধতিটোৰ বিষয়ে সহজে ধাৰণা কৰি ল'ব পাৰিব।



বিভাজনটোৰ মধ্যমা পাবলৈ ক্ষুদ্ৰতৰ তোৰণ আৰু বৃহত্তৰ তোৰণ দুটাৰ ছেদ বিন্দুৰ পৰা X-অক্ষৰ ওপৰত এডাল লম্ব টানিব লাগিব। X-অক্ষত মূলবিন্দু আৰু লম্বডালৰ পাদবিন্দুৰ মাজৰ দূৰত্বই হ'ব উলিয়াব লগা মধ্যমা। প্ৰদত্ত বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ পৰা মধ্যমাৰ আসন্ন মান 35.6 নম্বৰ পোৱা গৈছে।

টোকা ঃ শূন্যতকৈ সৰু আবেক্ষণৰ সংখ্যা শূন্য। সেয়ে ক্ষুদ্ৰতৰ তোৰণৰ নিম্ন মূৰ বিন্দুটো মূলবিন্দুত আছে। আকৌ 70তকৈ ডাঙৰ মানবিশিষ্ট আবেক্ষণৰ সংখ্যাও শূন্য। সেয়ে বৃহত্তৰ তোৰণৰ নিম্ন মূৰ বিন্দুটো X-অক্ষত 70ৰ অনুৰূপ বিন্দুত আছে।

উদাহৰণ - ১২ তলৰ তথ্যটো 100 টা কোম্পানীৰ বিক্ৰীৰ সৈতে জড়িত। দুয়োবিধ তোৰণ অংকন কৰক। যিবিলাক কোম্পানীৰ বিক্ৰী (ক) 13 লাখ টকাতকৈ কম আৰু (খ) 36 লাখ টকাতকৈ বেছি, সিবিলাকৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰক ঃ

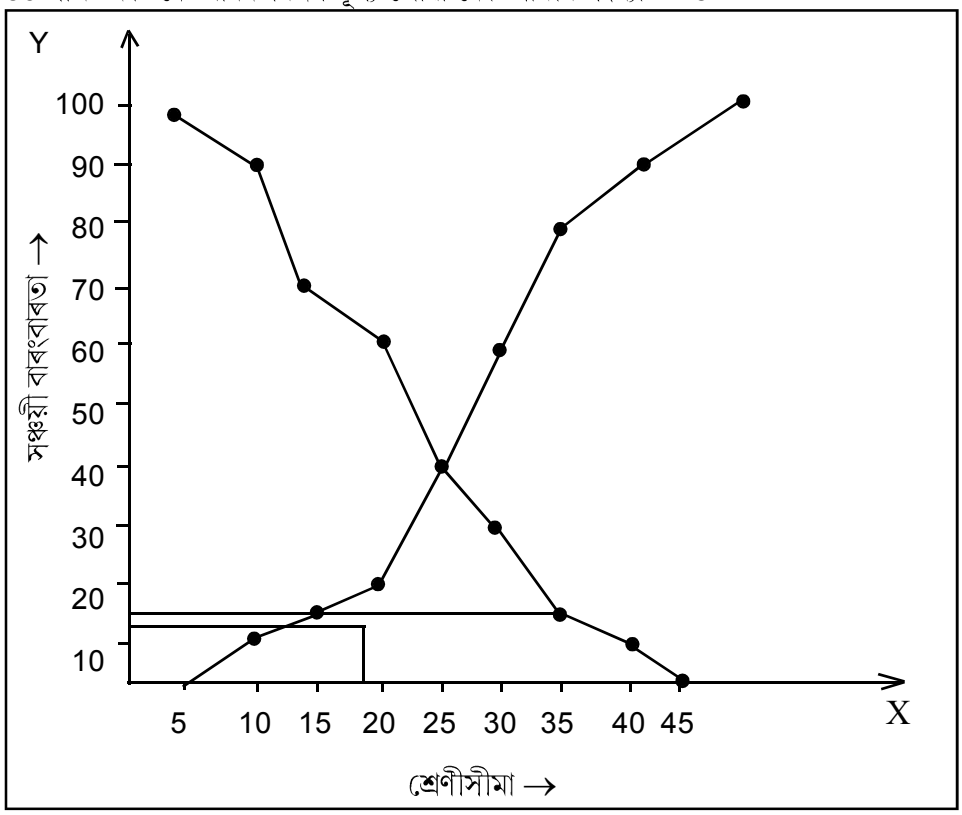
বিক্ৰী (লাখ টকাত)	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45
কোম্পানীৰ সংখ্যা	5	12	13	20	18	15	10	7

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ শ্ৰেণী অন্তৰালবিলাক বিবৰ্জিত পদ্ধতিত গঠিত আৰু সেয়ে ইহঁতৰ নিম্নসীমা আৰু উচ্চ সীমাবিলাকক প্ৰকৃত নিম্নসীমা আৰু উচ্চ সীমা হিচাপে ল'ব পাৰি।

শ্রেণীবিভাগ	বাৰংবাৰতা	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা	
		ক্ষুদ্রতৰ	বৃহত্তৰ
5–10	5	5	100
10–15	12	17	95
15–20	13	30	83
20–25	20	50	70
25–30	18	68	50
30–35	15	83	32
35–40	10	93	17
40–45	7	100	7

ক্ষুদ্রতৰ তোৰণৰ ক্ষেত্রত সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাবিলাক অনুৰূপ শ্রেণী অন্তৰালৰ উচ্চ সীমাৰ বিপৰীতে লেখ কাগজত স্থাপন কৰা হৈছে আৰু বৃহত্তৰ তোৰণৰ ক্ষেত্রত সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাবিলাক অনুৰূপ শ্রেণী অন্তৰালৰ নিম্নসীমাৰ বিপৰীতে লেখ কাগজত স্থাপন কৰা হৈছে।

X-অক্ষত একোটা ক্ষুদ্র বর্গৰ বাহুৰ দৈর্ঘ্যক এক একক আৰু Y-অক্ষত একোটা ক্ষুদ্রবর্ণ বাহুৰ দৈর্ঘ্যৰ 5 একক ধৰি দুয়োবিধ তোৰণ (ক্ষুদ্রতৰ আৰু বৃহত্তৰ) অংকন কৰা হৈছে। এইটো দেখা গৈছে যে (ক) 13 লাখ টকাতকৈ বেছি বিক্রী মূল্য পোৱা কোম্পানীৰ সংখ্যা = 13 আৰু (খ) 36 লাখ টকাতকৈ অধিক বিক্রী মূল্য পোৱা কোম্পানীৰ সংখ্যা = 15





অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৪ঃ তলৰ তথ্য সমষ্টিৰ প্রত্যেককে উপস্থাপন কৰিবৰ কাৰণে আটাইতকৈ উপযুক্ত চিত্র কি হ'ব?

(ক) পৃথক পৃথক পঞ্চবার্ষিকী পৰিকল্পনাত অসমৰ কাৰণে পৰিকল্পনা ব্যয়।

(খ) 2001 চনৰ লোকপিয়ল অনুযায়ী উত্তৰ পূর্বাঞ্চলৰ ভিন ভিন ৰাজ্যৰ জন্ম আৰু মৃত্যুৰ হাৰ।

(গ) এক নির্ধাৰিত বছৰত ভাৰতৰ মুঠ ঘৰুৱা উৎপাদন (GDP) লৈ বিভিন্ন খণ্ডৰ বৰঙণি।

প্রশ্ন নং ৫ঃ উপযুক্ত শব্দ/শব্দবোৰৰ দ্বাৰা খালী ঠাই পূর্ণ কৰক ঃ

(ক) বাৰংবাৰতা বহুভুজ ———————— ৰ সহায়ত অংকন কৰিব পাৰি।

(খ) ক্ষুদ্রতৰ আৰু বৃহত্তৰ ধৰণৰ বিভাজনৰ তোৰণ দুটাই ———————— ত কটাকটি কৰে।

(গ) পাই চিত্র সদায় ———————— হয়।



১.৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান হ'ল তথ্যৰ সাংখিকীয় উপস্থাপন।
- অর্থনীতি, জীৱন বীমা কোম্পানী, ব্যৱসায়, বেংক আদিত পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি।
- বাৰংবাৰতা বিভাজন হ'ল তথ্যৰ সাৰণীকৃত উপস্থাপন।
- তথ্যবিলাকক ভৌগলিক, কালানুক্রমিক, গুণগত আৰু সংখ্যাগত কাৰক অনুযায়ী বিভক্ত কৰিব পাৰি।

পৰিসাংখ্যিকীয় তথ্যৰ উপস্থাপন

- চিত্রাত্মক উপস্থাপন
  - (ক) দণ্ড চিত্র
  - (খ) পাই চিত্র
- লৈখিক উপস্থাপন
  - (ক) হিষ্ট'গ্রাম
  - (খ) বাৰংবাৰতা বহুভূজ
  - (গ) সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বক্র



১.৮ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

১) Agarwal, D. R. (2006). Business Statistics. Delhi, Vrinda Publications.

২) Gupta S.C. (1994). Fundamentals of statistics. New Delhi, Himalayan Publishing House.

৩) Rajagopalan, S. P. & Sattanthan R. (2009).Business Statistics and Operations Research. New Delhi, Tata McGraw-Hill

৪) Sharma, J. K. (2007). Business Statistics. New Delhi. Pearson Education Ltd.

৫) Verma, A. P. (2007). Business Statistics. Guwahat, Asian Books Private Limited.



১.৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ বাৰংবাৰতা বিভাজন হ'ল এক সাৰনীকৃত উপস্থাপন যিয়ে তথ্যক শ্রেণী অন্তৰাল হিচাপত শ্রেণীত সংগঠিত কৰে।

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (ক) বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজন।

(খ) অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজন।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ১। (ক) অশুদ্ধ (খ) অশুদ্ধ (গ) শুদ্ধ (ঘ) শুদ্ধ
(ঙ) শুদ্ধ (চ) অশুদ্ধ (ছ) শুদ্ধ (জ) শুদ্ধ
(ঝ) শুদ্ধ (ঞ) অশুদ্ধ

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (ক) সৰল দণ্ডচিত্র(খ) বহুদণ্ড চিত্র (গ) পাই চিত্র

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (ক) হিষ্ট'গ্রাম (খ) মধ্যমা (গ) বৃত্তাকাৰ



১.১০ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

১। বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ সংজ্ঞা দিয়ক। বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ গঠন পদ্ধতি সম্পৰ্কে ব্যাখ্যা কৰক।

২। 50 জন ছাত্ৰই পোৱা নম্বৰবিলাক তলত দিয়া হৈছে। শ্ৰেণী দৈৰ্ঘ্য 10 লৈ অন্তৰ্ভুক্তি বা বিবৰ্জিত পদ্ধতিৰে এখন বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা প্ৰস্তুত কৰক ঃ

34	54	10	21	51	52	12	43	48	36
48	22	39	26	34	19	10	17	47	28
13	30	30	60	15	59	07	18	40	49
40	51	55	32	41	22	30	35	53	25
14	18	19	40	43	04	17	45	25	43

৩। এখন চহৰৰ 50 জন ব্যক্তিৰ মৃত্যুৰ সময়ত বয়স (বছৰত) তলত দিয়া হৈছে।

36	48	50	45	49	31	50	48	43	42
37	32	40	39	41	47	45	39	43	47
38	39	37	40	32	52	56	31	54	36
51	46	41	55	58	31	42	53	32	44
53	36	60	59	41	53	58	36	38	60

(ক) তথ্যটো 10টা শ্ৰেণী অন্তৰালযুক্ত বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকাত সজাই লওঁক।

(খ) প্ৰতিটো অন্তৰালৰ শতকৰা বাৰংবাৰতা নিৰ্ণয় কৰক।

৪। তলৰ তথ্যটোৰ বাবে এখন বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা প্ৰস্তুত কৰক। তালিকাৰ পৰা তলৰ প্ৰশ্নবিলাকৰ উত্তৰ দিয়ক।

(ক) শতকৰা কেইজন ছাত্ৰই 30তকৈ বেছি নম্বৰ পাইছে?

(খ) শতকৰা কেইজন ছাত্ৰই 30তকৈ কম নম্বৰ পাইছে?

প্ৰাপ্ত নম্বৰ ঃ 5, 27,23, 32, 49, 19, 50, 38, 37, 25, 30, 29, 42, 37, 18, 12, 13, 9, 18, 27, 50, 32, 47, 48, 29, 30, 32, 37, 27, 41

ইংগিত ঃ ইয়াত বিস্তাৰ = 50–5 = 45, প্ৰত্যেক শ্ৰেণী বিভাগৰ দৈৰ্ঘ্য $= \frac{45}{10} = 4.5$ অৰ্থাৎ 5। শ্ৰেণী বিভাগসমূহ ঃ 5–10, 10–15, ..., 50–55 । এতিয়া 30তকৈ বেছি নম্বৰ পোৱা ছাত্ৰৰ সংখ্যা = (5+4+2+3+2)–2=14 [উত্তৰ (ক) 46.67% (খ) 46.67%]

৫। শ্ৰেণীকৰণ বুলিলে আপুনি কি বুজে? শ্ৰেণীকৰণৰ উদ্দেশ্য কি কি?

ইংগিত ঃ শ্ৰেণীকৰণৰ উদ্দেশ্যৰ কাৰণে শ্ৰেণীকৰণৰ সুবিধা চাওঁক। আপুনি উদ্দেশ্যবিলাক

এইদৰে লিখিব লাগিব ঃ

(ক) কেঁচা তথ্যৰাখিসমূহক সংক্ষিপ্ত আৰু সৰল ঠাঁচত উপস্থাপন।

(খ) কেঁচা তথ্যৰাশিসমূহৰ সাদৃশ্যতা আৰু অনুৰূপতাৰ ভিত্তিত বিভক্ত কৰি তুলনামূলক অধ্যয়নৰ সুবিধা প্রদান, ইত্যাদি।

৬। বিভিন্ন প্রকাৰৰ শ্রেণীকৰণ সম্পর্কে আলোচনা কৰক।

৭। গুণগত অনুসৰি শ্রেণীকৰণ আৰু চলক অনুসৰি শ্রেণীকৰণৰ মাজত পার্থক্য বিচাৰ কৰক।

৮। পৰিসাংখ্যিকীয় বিশ্লেষণত শ্রেণীকৰণৰ গুৰুত্ব সম্পর্কে আলোচনা কৰক।

৯। তালিকাকৰণ কি? ইয়াৰ উদ্দেশ্যবিলাক কি কি?

ইংগিত ঃ উদ্দেশ্যসমূহৰ কাৰণে তালিকাকৰণৰ সুবিধা চাওঁক। উদ্দেশ্যবিলাক এনেদৰে লিখিব লাগিব ঃ

(ক) জটিল তথ্যক সৰলীকৃতকৰণ (খ) সাংখ্যিকীয় তথ্য ৰাশিসমূহক সংক্ষিপ্ত আৰু ঘনীভূত ৰূপত প্রকাশ (গ) তথ্যক তুলনা কৰাত সুবিধা প্রদান (ঘ) তথ্যৰ বিশ্লেষণ আৰু অর্থ ব্যাখ্যা কৰাৰ ভিত্তি প্রদান।

১০। কোনো এটা প্রতিচয়ন অধ্যয়নত দুখন গাঁৱৰ মানুহৰ চাহ-খোৱাৰ অভ্যাস থকা নথকা সম্পর্কত তলৰ তথ্যটো পোৱা গ'ল।

গাঁও-ক ঃ 70% পুৰুষ, 80% য়ে চাহ খায় আৰু 62% পুৰুষে চাহ খায়।

গাঁও-খ ঃ 55% পুৰুষ, 35% য়ে চাহ খায় আৰু 52% পুৰুষে চাহ খায়।

ওপৰৰ তথ্যটোৰ লুপ্ত হৈ থকা আৱশ্যকীয় অংশ যোগান ধৰি সাৰনীকৃত কৰক।

১১। তলৰ তথ্যটোৰ পৰা এখন তালিকা প্রস্তুত কৰক ঃ 1987 চনত এটা কাৰখানাৰ 1,750 জন বনুৱাৰ ভিতৰত 1200 জন এটা শ্রমিক সংঘৰ সদস্য আছিল। নিয়োজিত 200 মহিলা বনুৱাৰ ভিতৰত 175 গৰাকী শ্রমিক সংঘটোৰ সদস্য নাছিল। 1988 চনত সংঘটোৰ সদস্য সংখ্যা 1580 লৈ বৃদ্ধি পাইছিল আৰু এইসকলৰ ভিতৰত 1290 গৰাকী মহিলা আছিল। আনহাতে শ্রমিক সংঘৰ সদস্য নোহোৱা বনুৱাৰ সংখ্যা 208 লৈ হ্রাস পালে আৰু এইসকলৰ ভিতৰত 180 গৰাকী মহিলা আছিল।

১২। সাধাৰণতে পৰিসাংখ্যিকীয় তথ্যক উপস্থাপন কৰাৰ কাৰণে বিভিন্ন ধৰণৰ কি কি চিত্র ব্যৱহাৰ কৰা হয়?

১৩। পৰিসাংখ্যিকীয় তথ্যৰ লৈখিক উপস্থাপন কি? এনেকুৱা বিভিন্ন লেখবিলাক কি কি?

১৪। চমুটোকা লিখক ঃ

(ক) হিষ্ট'গ্রাম

(খ) বাৰংবাৰতা বহুভুজ

(গ) পাই চিত্র

১৫। কোনো এক ব্যৱসায় সম্পর্কত হোৱা লাভ আৰু লোকচান (লাখ টকাত) তলত দিয়া হ'ল ঃ

বছৰ	ঃ	1999	2000	2001	2002	2003
লাভ (লাখ টকাত)	ঃ	36	–	22	38	–
লোকচান (লাখ টকাত)	ঃ	–	10	–	–	15

ওপৰৰ তথ্যটো মাৰি চিত্ৰৰে উপস্থাপন কৰক।

১৬। তলৰ তালিকাখনে দুটা ক্ৰমিক বছৰৰ বিভিন্ন উপাংশৰ মুঠ ব্যয় (টকাত) দশাইছে।

উপাংশ / বছৰ	1990	1991
প্ৰত্যক্ষ লাগতিয়াল উপকৰণ	4,000	5,500
প্ৰত্যক্ষ বনুৱা	5,000	6,000
প্ৰত্যক্ষ ব্যয়	1,200	1,500
সাধাৰণ শিতান	2,500	2,000

তথ্যটো উপযুক্ত চিত্ৰৰ সহায়ত উপস্থাপন কৰক।

ইংগিত ঃ তথ্যটো খণ্ড দণ্ড চিত্ৰৰ সহায়ত উপস্থাপন কৰিব পাৰি।

১৭। তলৰ তথ্যটো পাই চিত্ৰৰ দ্বাৰা উপস্থাপন কৰক। তথ্যটো এখন ৰাজ্যৰ দ্বিতীয় পঞ্চবাৰ্ষিক পৰিকল্পনাৰ সময়ত বিভিন্ন শিতানত ধাৰ্য কৰা ব্যয়ৰ (কোটি টকাত) লগত জড়িত।

শিল্প	127.00
জলসিঞ্চন	92.50
কৃষি	100.00
পৰিবহন আৰু যাতায়ত	92.50
অন্যান্য	480.00

১৮। তলত কোনো এখন চাহ বাগিচাৰ বনুৱাৰ সাপ্তাহিক মজুৰিৰ তালিকা দিয়া হৈছে। এই তথ্যসমূহৰ কাৰণে এটা হিষ্টগ্ৰাম অংকন কৰক।

মজুৰি (টকাত)	ঃ	200–210	210–220	220–230	230–240	240–250
বনুৱাৰ সংখ্যা	ঃ	8	15	21	35	62

*** ***** ***

অধ্যায় ২ঃ কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপ (MEASURES OF CENTRAL TENDENCY)

অধ্যায় গাঁথনি

২.১ উদ্দেশ্য

২.২ পৰিচয়

২.৩ কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপসমূহ বা গড়সমূহ

২.৩.১ সংজ্ঞা

২.৩.২ 'Σ' প্রতীক

২.৩.৩ কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপৰ বিভিন্ন প্রকাৰ

২.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

২.৫ অধিক জানিবলৈ

২.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

২.৭ আৰ্হি প্রশ্ন

২.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি —

- কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপ বা গড়ৰ অর্থ শিকিব পাৰিব
- বিভিন্ন প্রকাৰৰ গড়ৰ লগতে সিহঁতৰ সুবিধা, সীমাবদ্ধতা আৰু ব্যৱহাৰ সম্পর্কে শিকিব পাৰিব
- ভাৰিত মাধ্যৰ সংজ্ঞা দিব পাৰিব

২.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

অধ্যায়-১ত আমাক তথ্যৰ শ্রেণীকৰণ, তালিকাকৰণ, চিত্রাত্মক আৰু লৈখিক উপস্থাপনে পৰিসাংখিকীয় তথ্যৰ প্রকৃত তাৎপর্য জনাত সহায় কৰিছে। আমাক এনেকুৱা এটা সংখ্যাত্মক ৰাশিৰ প্রয়োজন যিটোৱে অধ্যয়নৰত শ্রেণী এটাৰ লক্ষণসমূহ সংক্ষিপ্ত ৰূপত প্রকাশ কৰিব পাৰে। সাধাৰণতে গড় বুলি জনাজাত 'কেন্দ্রীয় অৱস্থানৰ মাপ' বা 'কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপ'-য়ে এই উদ্দেশ্য সাধন কৰিব পাৰে। মানৰ শ্রেণী এটাক প্রতিনিধিত্ব কৰা সংখ্যাটো স্পষ্টতঃ ক্ষুদ্রতম মানতকৈ ডাঙৰ আৰু বৃহত্তম মানতকৈ সৰু হ'ব। এই সংখ্যাটো উক্ত সীমা দুটাৰ অন্তৰ্বর্তী কোনো স্থানত থাকিব লাগিব আৰু সম্ভৱত যিটো অঞ্চলত শ্রেণীটোৰ প্রায়ভাগ মান কেন্দ্রীভূত হয়, তাৰ কেন্দ্রত থাকিব। এনেকুৱা সংখ্যাটোকে কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপ বুলি কোৱা হয়।

এটা নির্দিষ্ট তথ্য শ্রেণীৰ কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপ শ্রেণীটোৰ সম্পূর্ণভাৱে প্রতিনিধিত্বমূলক

নহয়। এই হ'বলৈ পায়, যেতিয়া গড় বা আন মান সাপেক্ষে মানবিলাকৰ নিজ নিজ বিচৰণৰ পৰিসৰ বেছি হয়। উদাহৰণস্বৰূপে তলৰ শ্রেণী তিনিটা পর্যবেক্ষণ কৰোহঁক ঃ

শ্রেণী A	40	40	40	40	40
শ্রেণী B	35	39	41	42	43
শ্রেণী C	10	18	35	57	80

প্রথম শ্রেণীটোৰ সমান্তৰ মাধ্য বা সংক্ষেপে মাধ্য (Arithmetic mean or mean) (মানবিলাকৰ সমষ্টিক মানৰ সংখ্যাৰে হৰণ) হ'ল 40 আৰু ৰাশিবিলাকৰ মানবিলাক একে আৰু প্রত্যেকে 40ৰ সমান। গতিকে মাধ্যটোৱে সামগ্রীকভাৱে শ্রেণীটোক আৰু বিশেষকৈ গাইগুটীয়াভাৱে প্রত্যেক মানক সম্পূর্ণৰূপে প্রতিনিধিত্ব কৰিছে। তথ্যটো (ৰাশিসমূহ বা আবেক্ষণসমূহ) মুঠেও বিক্ষিপ্ত নহয়।

দ্বিতীয় শ্রেণীটোৰ যদিও গড় 40, ৰাশিবিলাক বেছি বিক্ষিপ্ত নহয়, যিহেতু শ্রেণীটোৰ লঘিষ্ঠমান 35 আৰু গৰিষ্ঠমান 43। গতিকে দ্বিতীয় শ্রেণীটোৰ মাধ্যই ও শ্রেণীটোক ভালধৰণে প্রতিনিধিত্ব কৰে। যদিও ৰাশিকেইটাৰ কোনোটোৰ মান মাধ্যৰ সমান নহয়, মাধ্য আৰু এটা ৰাশিৰ পার্থক্যৰ বিসংগতি বেছি গুৰুত্বপূর্ণ নহয়। তৃতীয় শ্রেণীটোৰ ক্ষেত্রত আমি লক্ষ্য কৰিছো যে ৰাশিসমূহ পৃথক পৃথক আৰু শ্রেণীটোৰ মাধ্য 40। এই শ্রেণীটোৰ ক্ষেত্রত ৰাশিবিলাক বহলভাৱে সিঁচৰিত। স্পষ্টতঃ এই শ্রেণীটোৰ ক্ষেত্রত মাধ্যই সামগ্রীকভাৱে শ্রেণীটোক নাইবা বিশেষভাৱে পৃথক পৃথক ৰাশিকো প্রতিনিধিত্ব নকৰে। এতেকে আমি লক্ষ্য কৰিছো যে যদিও তিনিওটা শ্রেণীৰ গড় (সমান্তৰ মধ্য হ'ল গড় জোখৰ এক পদ্ধতি) একেটাই, গঠন হিচাপত পৰস্পৰ এটাৰ পৰা আনটো যথেষ্ট পৃথক। যেতিয়া কোনো বিভাজন বা শ্রেণীৰ মানবিলাকৰ (ৰাশি বা আবেক্ষণ বিলাকৰ) গড় বা আন মান সাপেক্ষে বিচৰণ (বিচলন বা বিক্ষেপন)ৰ পৰিসৰ ডাঙৰ হয়, তেতিয়া বিভাজনটোক কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপ বা গড় বিলাকে প্রতিনিধিত্ব কৰিব নোৱাৰে। সেয়ে যিকোনো অনুসন্ধানৰ ক্ষেত্রত এটা বিভাজনৰ কেৱল কোনো এক প্রকাৰৰ গড় মাধ্য (mean), মধ্যমা (median) আৰু বহুলক (mode) জানিলেই নহ'ব, বিভাজনটোৰ মানসমূহৰ বৈষম্য (scatteredness) জনাটোও গুৰুত্বপূর্ণ হ'ব।

২.৩ কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপসমূহ বা গড়সমূহ (MEASURES OF CENTRAL TENDENCY OR AVERAGES)

২.৩.১ সংজ্ঞা (Definition)

কোনো এক বিভাজন (অর্থাৎ উচ্চতা, ওজন, আয় ইত্যাদি চলক ৰাশিৰ মানসমূহৰ বিভাজন)ৰ গড় হ'ল বিভাজনটোৰ প্রতিনিধিত্বমূলক মান। সাধাৰণতে এই প্রতিনিধিত্বমূলক মান বিভাজনটোৰ কেন্দ্রীয় অংশত থাকে। "**কোনো এক বিভাজনৰ কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপ বা গড়, বিভাজনটোৰ প্রতিনিধিত্বমূলক মানৰ বাহিৰে আন**

একো নহয়, যিয়ে একেটা প্রচেষ্টাতে আমাক সম্পূর্ণ বিভাজনটোৰ তাৎপর্য বুজি পাবলৈ সক্ষম কৰি তোলে।"

গড়ৰ একক (Unit of Average) ঃ এটা বিভাজনৰ এককেই হ'ল বিভাজনটোৰ গড়ৰ একক।

২.৩.২ 'Σ' প্রতীক ('Σ' Symbol)

সমষ্টি (কিছুমান সংখ্যা বা ৰাশিৰ যোগফল) বুজাবলৈ গ্রীক আখৰ 'Σ' (কেপিট্‌ল চিগ্‌মা) ব্যৱহাৰ কৰা হয়। উদাহৰণস্বৰূপে, যদি চলক xৰ মানবিলাক x_1, x_2, .., x_n হয়, তেন্তে চলকটোৰ এই মানবিলাকৰ সমষ্টি অর্থাৎ $(x_1+x_2+x_3+.....+x_n)$ ক $\sum_{i=1}^{n} x_i$ বা Σx ৰ দ্বাৰা বুজোৱা হয়। $\sum_{i=1}^{n} x_i$ প্রতীকটোৱে ইয়াকে বুজায় যে i ৰ নিম্নসীমা 1 আৰু Σ প্রতীকটোৱে বুজায় যে i = 1, 2, 3, ..., n ৰ কাৰণে x_i ৰ আটাইবিলাক মান যোগ কৰা হৈছে। এতেকে $\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1+x_2+x_3+.....+x_n$. আকৌ Σx প্রতীকটোৱে 'x ৰ আটাইবিলাক মান যোগ' কৰাক বুজায়।

২.৩.৩ কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপৰ বিভিন্ন প্রকাৰ (Different Types of Measures of Central Tendency)

তলত দিয়া তিনি প্রকাৰৰ কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপ বা গড় ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

(ক) মাধ্য (খ) মধ্যমা আৰু (গ) বহুলক।

(ক) মাধ্য (Mean) ঃ মাধ্যৰ তিনিটা প্রকাৰ আছে। যেনে—

(i) সমান্তৰ মাধ্য [Arithmetic Mean (A.M.)]

(ii) গুণোত্তৰ মাধ্য [Geomentric Mean (G.M.)]

(iii) হৰাত্মক মাধ্য [Harmonic Mean (H.M.)]

এই পর্যন্ত মাধ্য বুলি কওঁতে আমি কেৱল সমান্তৰ মাধ্য সম্পর্কে আলোচনা কৰিম, কাৰণ বিভিন্ন প্রকাৰৰ মাধ্যৰ ভিতৰত সমান্তৰ মাধ্য পদ্ধতিটো আটাইতকৈ সৰবৰহী। ইয়াত আমি সমান্তৰ মাধ্যৰ লগত জড়িত কিছুমান বিশেষ ক্ষেত্র বা পৰিস্থিতিৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

*** সমূহিত বা বর্গীকৃত বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ সমান্তৰ মাধ্য [Arithmetic Mean (A.M.) of grouped frequency distribution]:**

সমূহিত বাৰংবাৰতা বিভাজন এটাৰ সমান্তৰমাধ্য নির্ণয় কৰাৰ কাৰণে আমি এই ধাৰণা কৰি লওঁ যে এটা শ্রেণী অন্তৰালৰ অন্তর্ভুক্ত ৰাশি (আবেক্ষণ) বিলাক শ্রেণী অন্তৰালটোৰ কেন্দ্রৰ চাৰিওকাষে থূপ খায়। উদাহৰণস্বৰূপে, কেইজনমান ছাত্রই পোৱা নম্বৰৰ বিভাজন এটাত যদি 50-60 শ্রেণী অন্তৰালটোৰ বাৰংবাৰতা 8 হয়, তেন্তে আমি ধৰি লম যে 8 জন ছাত্রৰ প্রত্যেকেই পোৱা নম্বৰ প্রায় 55। সমূহিত বাৰংবাৰতা

বিভাজনৰ সমান্তৰ মাধ্য নির্ণয় কৰাৰ কাৰণে আমি শ্রেণী অন্তৰালৰ বাৰংবাৰতা বিলাকক অনুৰূপ শ্রেণী অন্তৰালবিলাকৰ মাধ্যমানৰ বাৰংবাৰতা হিচাপে ল'ম। এনে কৰাৰ ফলত সমূহিত বাৰংবাৰতা বিভাজনটো বিচ্ছিন্ন (অসমূহিত) বাৰংবাৰতা বিভাজনলৈ ৰূপান্তৰিত হ'ব। গতিকে বিচ্ছিন্নতা (বা অসমূহিত) বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ সমান্তৰ মাধ্য নির্ণয় কৰাৰ সূত্রটো প্রয়োগ কৰি সমূহিত বাৰংবাৰতা বিভাজনটোৰ সমান্তৰ মাধ্য নির্ণয় কৰিব পাৰিম।

উদাহৰণ - ১ তলৰ বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ সমান্তৰমাধ্য (A. M.) নির্ণয় কৰক ঃ

x :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f :	7	11	16	17	26	31	11	1	1

সমাধান ঃ প্রথমতে আমি তলৰ বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকাখন প্রস্তুত কৰিম।

x	f	fx
1	7	7
2	11	22
3	16	48
4	17	68
5	26	130
6	31	186
7	11	77
8	1	8
9	1	9
	N = 121	Σfx = 555

$$\text{AM.}(\bar{x}) = \frac{\sum fx}{N} = \frac{555}{121} = 4.59 \text{ (প্রায়)}$$

উদাহৰণ - ২ তলৰ বিভাজনটোৰ মাধ্য নির্ণয় কৰক ঃ

দৈনিক মজুৰি ঃ 0-10, 10-20, 20-30, 30-40, 40-50, 50-60, 60-70 (টকাত)

বনুৱাৰ সংখ্যা ঃ	6	5	8	15	7	6	3

সমাধান ঃ যিহেতু মাধ্য পোৱাৰ তিনিটা পদ্ধতি আছে, যেনে সমান্তৰ মাধ্য (A.M) পদ্ধতি, গুণোত্তৰ মাধ্য (G.M) পদ্ধতি আৰু হৰাত্মক মাধ্য (H.M) পদ্ধতি, আমি প্রদত্ত বিভাজনটোৰ মাধ্য নির্ণয় কৰিবলৈ A.M. পদ্ধতিটো ব্যৱহাৰ কৰিম। (পিছত আমি দেখিম যে সমান্তৰ মাধ্য (A.M) ই হ'ল আটাইতকৈ সৰ্ববৰহীভাৱে ব্যৱহৃত কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপ)।

সমান্তৰ মাধ্য পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰি মাধ্য নিৰ্ণয় কৰিবলৈ আমি তলৰ তালিকাখন প্ৰস্তুত কৰিছো ঃ

দৈনিক মজুৰি (টকাত)	মধ্যমান $x = \frac{l_1 + l_2}{2}$	বনুৱাৰ সংখ্যা f	fx
0-10	5	6	30
10-20	15	5	75
20-30	25	8	200
30-40	35	15	525
40-50	45	7	315
50-60	55	6	330
60-70	65	3	195
		N=50	$\Sigma fx=1670$

মাধ্য $(\bar{x}) = \frac{\sum fx}{N}$

$= \frac{1670}{50} = 33.4$

অৰ্থাৎ উলিয়াবলগীয়া মাধ্য (অৰ্থাৎ গড়) মজুৰি 33.4 টকা

টোকা ঃ l_1 আৰু l_2 য়ে ক্ৰমে এটা শ্ৰেণী অন্তৰালৰ নিম্নসীমা আৰু উচ্চ সীমা বুজাইছে।

A.M. নিৰ্ণয় কৰাৰ বিকল্প পদ্ধতি (Alternative method of finding A.M.):

(a) **গৃহীত (কল্পিত) মাধ্য পদ্ধতি** (Assumed Mean Method) **বা সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি** (Short-cut Method) ঃ

এই পদ্ধতিত তলৰ সূত্ৰটো প্ৰয়োগ কৰি A.M., $\bar{x}$ নিৰ্ণয় কৰা হয়।

$\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{N}$, য'ত A=x ৰ কল্পিত মাধ্য, d=x-A, N= মুঠ বাৰংবাৰতা।

যেতিয়া 'd' ৰ কোনো সাধাৰণ উৎপাদক নাথাকে, তেতিয়া এই সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

(b) ক্ৰম-বিচলন পদ্ধতি (Step-deviation method) ঃ

যদি ওপৰৰ সূত্ৰটোত (d = x–A) ৰ এটা বা এটাতকৈ বেছি সাধাৰণ উৎপাদক থাকে, তেন্তে এই পদ্ধতিটো ব্যৱহাৰ কৰা হয়। এই পদ্ধতিত ব্যৱহাৰ কৰা সূত্ৰটো হ'ল—

$\bar{x} = A + \frac{\sum fd'}{N} \times h$, য'ত $d' = \frac{d}{h}$, h = d ৰ গৰিষ্ঠ সাধাৰণ উৎপাদক। সমান অন্তৰাল বিশিষ্ট সমূহিত বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত h ৰ মান শ্ৰেণী দৈৰ্ঘ্যৰ সমান হয়।

গৃহীত মাধ্য সম্পর্কত টোকা (A note on assumed mean) ঃ

যদিও চলক x ৰ যিকোনো মানক x ৰ কল্পিত মাধ্য হিচাপে বিবেচনা কৰিব পাৰি তথাপি চলকৰ মানসমূহৰ কেন্দ্রীয় অঞ্চলৰ পৰা কল্পিত মাধ্য ল'ব লাগে।

উদাহৰণ - ৩ তলৰ বণ্টনটোৰ সমান্তৰ মাধ্য নির্ণয় কৰক ঃ

উচ্চতা (ছেঃমিত)	ঃ	130-134	134-139	140-144	145-149
বাৰংবাৰতা	ঃ	5	15	28	24
উচ্চতা (ছেঃমিত)	ঃ	150-154	155-159	160-614	
বাৰংবাৰতা	ঃ	17	10	1	

সমাধান ঃ আমি উচ্চতাক x চলকটোৰে বুজাইছো আৰু x ৰ কল্পিত মাধ্য Aক 147 হিচাপে লৈছো।

শ্রেণী অন্তৰাল	মধ্যমান (x)	বাৰংবাৰতা (f)	d=x-A A=147	$d' = \frac{d}{h}$ h=5	fd′
130-134	132	5	–15	–3	–15
135-139	137	15	–10	–2	–30
140-144	142	28	–5	–1	–28
145-149	147	24	0	0	0
150-154	152	17	5	1	17
155-159	157	10	10	2	20
160-164	162	1	15	3	3
		N=100			Σ fd′ = –33

এতিয়া, $\text{A.M.}(\bar{x}) = A + \frac{\sum fd'}{N} \times h$

$= 147 + \frac{-33}{100} \times 5$

$= 147 + \frac{-33}{20}$

=147–1.65

= 145.35

অর্থাৎ নির্ণেয় A.M. = 145.35 cm.

সমান্তৰমাধ্য (A.M.)ৰ ধর্ম (Properties of A.M) ঃ

ধর্ম-১ ঃ যদি কোনো এটা চলকৰ প্রতিটোমান এটা ধ্রুৱক c ৰে বৃদ্ধি (বা হ্রাস) কৰা হয়, তেন্তে নতুন মানবিলাকৰ সমান্তৰ মাধ্য cৰে বৃদ্ধি (বা হ্রাস) পাব। যদি এটা চলকৰ প্রতিটো মানক ধ্রুৱক cৰে গুণ কৰা হয়, তেন্তে নতুন মানবিলাকৰ সমান্তৰ মাধ্য আগৰ মানবিলাকৰ সমান্তৰ মাধ্যৰ c গুণৰ সমান হ'ব। আকৌ যদি এটা চলকৰ প্রতিটো মানক ধ্রুৱক $c(c \neq 0)$ ৰে হৰণ কৰা হয়, নতুন মানবিলাকৰ সমান্তৰ মাধ্য আগৰ মানবিলাকৰ সমান্তৰ মাধ্যক cৰে হৰণ কৰি পোৱা মানৰ সমান হ'ব।

মন কৰিব যে যদি $u = \frac{x \pm a}{b}$ তেন্তে $\bar{u} = \frac{\bar{x} \pm a}{b}$ য'ত a আৰু b ধ্রুৱক।

ধর্ম-২ ঃ সমান্তৰ মাধ্যৰ পৰা মানবিলাকৰ বিচলনৰ সমষ্টি শূন্য।

গাইগুটীয়া মান বিশিষ্ট শ্রেণীৰ ক্ষেত্রত $\sum(x - \bar{x}) = 0$ য'ত $\bar{x} = \sum x/n$ আৰু বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ক্ষেত্রত $\sum f(x - \bar{x}) = 0$ য'ত $\bar{x} = \sum \frac{fx}{N}$, $N = \sum f$

ধর্ম-৩ ঃ যদি n_1 সংখ্যক মান থকা এটা বিভাজনৰ সমান্তৰ মাধ্য $\bar{x}_1$ আৰু n_2 সংখ্যক মান থকা আন এটা বিভাজনৰ সমান্তৰ মাধ্য $\bar{x}_2$, তেন্তে দুয়োটা বিভাজন একত্রিত কৰি পোৱা বিভাজনটোৰ সমান্তৰ মাধ্য $\bar{x}$ হ'ব ঃ

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

এই ধর্মটো যিকোনো সংখ্যক বিভাজন (বণ্টন)ৰ কাৰণে সম্প্রসাৰিত কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ-৪ (ক) ঃ যদি $\bar{u} = \frac{x-55}{10}$ আৰু $\bar{x} = 59$ তেন্তে $\bar{u}$ ৰ মান কি হ'ব?

(খ) এটা চলক x ৰ সমান্তৰ মাধ্য 25।

(i) যদি প্রতিটোৰ মান 5 বঢ়োৱা হয়, নতুন সমান্তৰ মাধ্য কি হ'ব?

(ii) যদি প্রতিটো মানৰ পৰা 7 বিয়োগ কৰা হয়, তেন্তে নতুন সমান্তৰ মাধ্য কি হ'ব?

(iii) যদি প্রতিটো মান 2.5 ৰে গুণ কৰা হয়, তেন্তে নতুন সমান্তৰ মাধ্য কি হ'ব?

(iv) যদি প্রতিটো মানক 4 ৰে হৰণ কৰা হয়, তেন্তে নতুন সমান্তৰ মাধ্য কি হ'ব?

(গ) দুটা শ্রেণীৰ তথ্যৰাশিৰ সংখ্যা 28 আৰু 36 আৰু সিহঁতৰ মাধ্য যথাক্রমে 2.9 আৰু 5.6। দুয়োটা শ্রেণী একত্রিত কৰি পোৱা শ্রেণীটোৰ মাধ্য নির্ণয় কৰক।

(ক) **সমাধান ঃ** $\bar{u}=\frac{x-55}{10}$

$$\Rightarrow \bar{u}=\frac{\bar{x}-55}{10}$$

যেতিয়া $\bar{x}=59$ তেতিয়া $\bar{u}=\frac{59-55}{10}=\frac{4}{10}=0.4$

(খ) **সমাধান ঃ**

(i) x ৰ সমান্তৰ মাধ্য অর্থাৎ $\bar{x}=25$

ধৰা হ'ল u = x+5 (য'ত u এটা চলক) যাৰ প্রতিটো মান x ৰ অনুৰূপ মানতকৈ 5 বেছি)

$\therefore \bar{u}=\bar{x}+5=25+5=30$

$\therefore$ নতুন সমান্তৰ মাধ্য 30

(ii) ধৰা হ'ল চলক u ৰ প্রতিটো মান x ৰ অনুৰূপ মানতকৈ 7 কম।

$\therefore$ u = x–7

$\therefore \bar{u}=\bar{x}-7=25-7=18$

অর্থাৎ নতুন সমান্তৰ মাধ্য 18

(iii) যদি চলক u ৰ প্রতিটো মান xৰ অনুৰূপ মানৰ 2.5 গুণৰ সমান হয়, তেন্তে—

u = 2.5x

$u=2.5\bar{x}=2.5\times 25=62.5$

$\therefore$ নতুন সমান্তৰ মাধ্য 62.5

(iv) ধৰা হ'ল $u=\frac{x}{4}$

$\bar{U}=\frac{\bar{x}}{4}=\frac{25}{4}=6.25$

এতেকে নতুন সমান্তৰ মাধ্য 6.25

(গ) **সমাধান ঃ** ধৰা হ'ল শ্রেণী দুটা একত্রিত কৰি পোৱা শ্রেণীটোৰ মাধ্য $\bar{x}$ ।

তেতিয়াহ'লে, $\bar{x}=\frac{n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2}{n_1+n_2}$

য'ত $n_1=28,\ n_2=36,\ \bar{x}_1=2.9,\ \bar{x}_2=5.6$

এতেকে, $\bar{x}=\frac{28\times 2.9+36\times 5.6}{28+36}$

$$=\frac{81.2+201.6}{64}$$

$$= \frac{282.8}{64}$$

= 4.42 (প্রায়)

এতেকে নির্ণেয় মাধ্য = 4.42

*** সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ক্ষেত্রত সমান্তৰ মাধ্য নির্ণয় (Determination of Arithmetic Mean in case of cumulative Frequency Distributions)ঃ**

সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ সমান্তৰ মাধ্য কেনেকৈ নির্ণয় কৰা হয়, আমি তাক তলৰ উদাহৰণটোৰ সহায়ত ব্যাখ্যা কৰিম।

উদাহৰণ ৫ ঃ তলৰ বিলাক কোনো এখন উচ্চতৰ মাধ্যমিক বিদ্যালয়ৰ দ্বাদশ শ্রেণীৰ ছাত্র-ছাত্রীসকলৰ প্রাপ্ত নম্বৰ। সমান্তৰ মাধ্য কৌশল ব্যৱহাৰ কৰি গড় নম্বৰ নির্ণয় কৰক।

নম্বৰ	ছাত্র-ছাত্রীৰ সংখ্যা
10ৰ কম	5
20ৰ কম	17
30ৰ কম	31
40ৰ কম	41
50ৰ কম	49

সমাধান ঃ ওপৰৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজনটো প্রথমতে সৰল সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজনলৈ ৰূপান্তৰিত কৰিব লাগিব।

আমি প্রদত্ত সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজনটো তলত দিয়া ধৰণে সৰল সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজনলৈ ৰূপান্তৰিত কৰিছো।

নম্বৰ	ছাত্র-ছাত্রীৰ সংখ্যা
0-10	5
10-20	17-5=12
20-30	31-17=14
30-40	41-31=15
40-50	49-41=8

এতিয়া তথ্যটোৰ সমান্তৰ মাধ্য তলত দিয়া ধৰণে প্রত্যক্ষ পদ্ধতি (Direct Method) প্রয়োগ কৰি উলিয়াব পাৰি ঃ

নম্বৰ	মধ্যমান (x) $= \frac{l_1 + l_2}{2}$	ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংখ্যা (f)	fx
0-10	5	5	25
10-20	15	12	180
20-30	25	14	350
30-40	35	10	350
40-50	45	8	360
		N = 49	$\Sigma fx=1265$

$\therefore$ সমান্তৰ মাধ্য $= \bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{1265}{49} = 25.81$

টোকা ঃ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে সমস্যাটো ক্ৰম বিচলন পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি সমাধান কৰিব পাৰিব।

উদাহৰণ ৬ ঃ সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি প্ৰয়োগ কৰি তলৰ তথ্যৰ পৰা সমান্তৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰক।

নম্বৰ (৫০ৰ ভিতৰত) ঃ	1-10	11-20	21-30	31-40	41-50
বাৰংবাৰতা ঃ	5	7	10	6	2

সমাধান ঃ সমান্তৰ মাধ্যৰ গণনা

কল্পিত সমান্তৰ মাধ্য A = 25.5

নম্বৰ	f	মধ্যমান x	fx	d=x–A	fd
1-10	5	5.5	27.5	–20	–100
11-20	7	15.5	108.5	–10	–70
21-30	10	25.5	255.0	0	0
31-40	6	35.5	213.0	+10	60
41-50	2	45.5	91.0	+ 20	40
Total	N=30		Σfx = 695.0		Σfd=–70

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি দ্বাৰা

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N}$$

$$= 25.5 + \frac{-70}{30}$$

= 25.5–2.33

= 23.17

উদাহৰণ - ৭ ঃ তলৰ তথ্যৰ পৰা সমান্তৰ মাধ্য নির্ণয় কৰক ঃ

Value (মান)	frequency (বাৰংবাৰতা)
10ৰ কম	4
20ৰ কম	10
30ৰ কম	15
40ৰ কম	25
50ৰ কম	30
60ৰ কম	35
70ৰ কম	45
80ৰ কম	65

সমাধান ঃ এই উদাহৰণটোত সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা আৰু শ্রেণীসমূহ দিয়া আছে। প্রথমে তথ্যখিনি সৰল শ্রেণীলৈ ৰূপান্তৰিত কৰিম। তাৰ পাছত সমান্তৰ মাধ্য নির্ণয় কৰিম।

ইয়াত কল্পিত সমান্তৰ মাধ্য, A = 35

সমান্তৰ মাধ্যৰ গণনা

মান	বাৰংবাৰতা	মধ্যমান (x_i)	$d' = \frac{x_i - 35}{10}$	fd'
0–10	4	5	–3	–12
10–20	10–4=6	15	–2	–12
20–30	15–10=5	25	–1	–5
30–40	25–15=10	35	0	0
40–50	30–25=5	45	1	5
50–60	35–30=5	55	2	10
60–70	45–35=10	65	3	30
70–80	65–45=20	75	4	80
	N=65			$\Sigma fd' = 96$

$$\therefore \bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{N} \times h$$

$$\therefore A = 35,\ \Sigma fd' = 96,\ N = 65,\ h = 10$$

$$\therefore \bar{x} = 35 + \frac{96}{65} \times 10 = 35 + 14.77 = 49.77$$



জানি থোৱা ভাল

সমান্তৰিক মাধ্য হ'ল গড়ৰ জোখৰ আটাইতকৈ সৰবৰহী মাপ। প্ৰায় ভাগ মানুহ এই কৌশলটোৰ লগত পৰিচিত। কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ আনবিলাক মাপতকৈ এই মাপটোৰ মৌলিক সুবিধাবিলাক হ'ল (ক) ইয়াক সহজে বুজিব আৰু গণনা কৰিব পাৰি (খ) ই তুলনামূলক অধ্যয়নৰ কাৰণে সুন্দৰ ভিত্তি প্ৰদান কৰে (গ) ইয়াক যিকোনো মান— যেনে ধনাত্মক, ঋণাত্মক বা শূন্যৰ বাবে নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি (ঘ) ই অতিৰিক্ত গাণিতিক পদ্ধতিৰ অধীন। মূলতঃ ইয়াক সহজে বুজিব আৰু গণনা কৰিব পাৰি কাৰণেই ই আটাইতকৈ সৰ্বজন প্ৰশংসিত আৰু সেয়ে ইয়াক আদৰ্শ গড় আখ্যা দিয়া হৈছে। সাধাৰণতে মাধ্য বা গড় বুলিলে সমান্তৰ মাধ্যক বুজায়। ইয়াক সামাজিক, অৰ্থনৈতিক আৰু ব্যৱসায়িক সমস্যাসমূহত বহুলভাৱে ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

ভাৰিত সমান্তৰ মাধ্য ঃ যেতিয়া আমি কোনো শ্ৰেণীৰ ভিন্ ভিন্ ৰাশিবিলাকৰ পাৰস্পৰিক গুৰুত্ব অনুসৰি ভৰ আৰোপ কৰি শ্ৰেণীটোৰ সমান্তৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰো, তেতিয়া সেই সমান্তৰ মাধ্যমক ভাৰিত সমান্তৰ মাধ্য (Weighted arithmetic mean) বোলে। উদাহৰণস্বৰূপে, যদি আমি কোনো এক বিশেষ সম্প্ৰদায়ৰ মানুহৰ এটা সময়ৰ জীৱন নিৰ্বাহৰ ব্যয়ৰ পৰিবৰ্তন সম্পৰ্কে জানিব বিচাৰো, তেতিয়াহ'লে সূচকাংক (index) গঠনৰ ক্ষেত্ৰত সম্প্ৰদায়টোৰ মানুহে ব্যৱহাৰ কৰা ভিন্ ভিন্ সামগ্ৰীৰ পৰিমাণৰ ওপৰত উপযুক্ত ভৰ আৰোপ কৰিব লাগিব। যিহেতু সেই মানুহবিলাকে ব্যৱহাৰ কৰা সামগ্ৰীসমূহৰ গুৰুত্ব সমান নহয়, গতিকে তেওঁলোকে ব্যৱহাৰ কৰা সামগ্ৰীসমূহৰ মূল্যৰ সৰল মাধ্যই প্ৰকৃত ব্যয়ক প্ৰতিফলিত নকৰিব।

ধৰা হ'ল, $x_1, x_2, ..., x_n$ ৰাশিবিলাকৰ ওপৰত আৰোপিত ভাৰ ক্ৰমে $w_1, w_2, ..., w_n$। এই ৰাশিসমূহৰ ভাৰিত সমান্তৰ মাধ্যক $\bar{x}_w$ ৰে সূচিত কৰা হয় আৰু ইয়াক নিৰ্ণয় কৰাৰ সূত্ৰ হ'ল— $$\bar{x}_w = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + ... + w_nx_n}{w_1 + w_2 + ... + w_n} = \frac{\sum wx}{\sum w}$$

টোকা ঃ এই সূত্ৰটো বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ সমান্তৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা সূত্ৰৰ সৈতে একেই। ইয়াত $x_1, x_2, ..., x_n$ৰ বাৰংবাৰতা $f_1, f_2, ..., f_n$ৰ পৰিবৰ্তে যথাক্ৰমে ভাৰ $w_1, w_2, ..., w_n$ লোৱা হৈছে।

ভাৰিত মাধ্যৰ ব্যৱহাৰ (Uses of Weighted Mean) ঃ

(ক) কোনো শ্ৰেণীৰ ৰাশিবোৰৰ গুৰুত্ব একে নহ'লে মাধ্য নিৰ্ণয় কৰিবলৈ ভাৰিত মাধ্যৰ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

(খ) কোনো শ্ৰেণীৰ উপশ্ৰেণী বিলাকৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰিবলৈ ভাৰিত মাধ্যৰ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰিব লাগে।

উদাহৰণ ৬ঃ কোনো এটা প্ৰৱেশিকা পৰীক্ষাত তিনিজন ছাত্ৰ A, B আৰু C য়ে পদাৰ্থ বিজ্ঞান, ৰসায়ন আৰু গণিতত 100 নম্বৰৰ ভিতৰত প্ৰত্যেক বিষয়ত প্ৰাপ্ত নম্বৰ হ'লঃ

	পদাৰ্থ বিজ্ঞান	ৰসায়ন	গণিত
A :	60	65	70
B :	75	60	50
C :	55	60	65

(ক) যদি বিষয়কেইটাৰ প্ৰত্যেকতে সমান গুৰুত্ব আৰোপ কৰা হয় ছাত্ৰকেইজনৰ সাফল্যৰ ভিত্তিত ক্ৰম হিচাপে স্থিতি নিৰ্ণয় কৰক।

(খ) যদি বিষয়কেইটাত তলত দিয়া ধৰণে গুৰুত্ব আৰোপ কৰা হয়, তেন্তে ছাত্ৰকেইজনৰ ক্ৰম হিচাপত স্থিতি নিৰ্ণয় কৰক।

পদাৰ্থ বিজ্ঞান ঃ 30%, ৰসায়ন ঃ 20%, গণিত ঃ 50%

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল x, y আৰু z এ A, B আৰু C এ যথাক্ৰমে পদাৰ্থ বিজ্ঞান, ৰসায়ন আৰু গণিতত পোৱা নম্বৰক বুজাইছে।

ধৰা হ'ল $\bar{x}(\bar{x}_w)$, $\bar{y}(\bar{y}_w)$ আৰু $\bar{z}(\bar{z}_w)$ এ ক্ৰমে A, B আৰু C ৰ প্ৰাপ্ত নম্বৰৰ সৰল (ভাৰিত) গড়ক বুজাইছে।

(মনত পেলাওঁক, যেতিয়া ৰাশিসমূহক সমানে গুৰুত্ব দিয়া হয়, তেতিয়া সৰল গড় বা গড় আৰু পৃথক পৃথকভাৱে গুৰুত্ব দিয়া হয়, তেতিয়া ভাৰিত সমান্তৰ মাধ্য উলিয়াব লাগে। আকৌ সাধাৰণতে সমান্তৰ মাধ্য কৌশল অৱলম্বন কৰি গড় নিৰ্ণয় কৰা হয়।)

(ক) (i) $\bar{x} = \dfrac{60+65+70}{3} = \dfrac{195}{3} = 65$

(ii) $\bar{y} = \dfrac{75+60+50}{3} = \dfrac{185}{3} = 61.67$

(iii) $\bar{z} = \dfrac{55+60+65}{3} = \dfrac{180}{3} = 60$

A, B আৰু C য়ে পোৱা গড় নম্বৰৰ পৰা A, B আৰু C ৰ ক্ৰম অনুসৰি স্থান হ'ব যথাক্ৰমে প্ৰথম, দ্বিতীয় আৰু তৃতীয়।

(খ) আকৌ $\bar{x}_w = \dfrac{60\times 30\% + 65\times 20\% + 70\times 50\%}{30\% + 20\% + 50\%}$

$= \dfrac{60\times 0.3 + 65\times 0.2\times 70\times 0.5}{0.3+0.2+0.5}$ $\left[\because 30\% = \dfrac{30}{100} = 0.3\right]$ ইত্যাদি

$= \dfrac{18+13+35}{1} = 65$

$$\bar{y}_w = \frac{75\times 0.3\times 60\times 0.2 + 50\times 0.5}{0.3+0.2+0.5}$$

$$= \frac{22.5+12+25}{1} = 59.5$$

$$\bar{z}_w = \frac{55\times 0.3\times 60\times 0.2 + 65\times 0.5}{0.3+0.2+0.5}$$

$$= \frac{16.5+12+32.5}{1} = 61$$

ওপৰৰ পৰা আমি দেখিছো যে পদার্থ বিজ্ঞান, ৰসায়ন আৰু গণিতত প্রদত্ত গুৰুত্ব অনুসৰি A, B আৰু Cৰ স্থান যথাক্রমে প্রথম, তৃতীয় আৰু দ্বিতীয়।

মধ্যমা বা মাধ্যিকী (Median) ঃ কোনো শ্রেণী বা বিভাজনৰ মানসমূহ ঊর্দ্ধ বা অধঃক্রমত সজালে যিটো মানে বিভাজনটোক সমানে দুটা ভাগত বিভক্ত কৰে, সেই মানটোক মধ্যমা বা মাধ্যিকী বোলে। এতেকে, মধ্যমাৰ সোঁফালে আৰু বাওঁফালে সমানসংখ্যক ৰাশি বা মান থাকে।

একক শ্রেণীৰ মধ্যমা নির্ণয় কৰিবৰ কাৰণে, আমি প্রথমতে মানবিলাক (তথ্য ৰাশি বিলাক) এক নির্দিষ্ট ক্রমত অর্থাৎ ঊর্দ্ধ বা অধঃক্রমত আছে নে নাই তাক পর্যবেক্ষণ কৰিব লাগিব। যদি মানবিলাক নির্দিষ্ট ক্রমত নাই, তেন্তে ঊর্দ্ধ বা অধঃক্রমত সজাই ল'ব লাগিব। যদি শ্রেণীটোত মানসমূহৰ সংখ্যা অযুগ্ম হয় তেন্তে আৰম্ভণীৰ (আৰু শেষৰ পৰাও) $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ তম মানটোৱে মধ্যমা হ'ব। যদি মানসমূহৰ সংখ্যা যুগ্ম হয়, তেতিয়া হ'লে $\left(\frac{n}{2}\right)$ তম আৰু $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম মান দুটাৰ সমান্তৰ মাধ্যই মধ্যমা হ'ব।

উদাহৰণ ৭ ঃ তলৰ শ্রেণী দুটাৰ কাৰণে মধ্যমা নির্ণয় কৰক।

(ক) 77, 73, 72, 70, 75, 79, 78

(খ) 94, 33, 86, 68, 32, 80, 48, 70

সমাধান ঃ

(ক) শ্রেণীটোৰ মানবিলাক ঊর্দ্ধক্রমত সজাই আমি পাওঁ ঃ 70, 72, 73, 75, 77, 78, 79

শ্রেণীটোৰ পদৰ সংখ্যা = 7= এক অযুগ্ম সংখ্যা

$\therefore$ নির্ণেয় মাধ্য $= \frac{7+1}{2}$ তম পদ = চতুর্থ পদ =75

(খ) তথ্যটো (মানবিলাক বা ৰাশিবিলাক) ঊর্দ্ধক্রমত সজাই আমি পাওঁ ঃ 32, 33, 48, 68, 70, 80, 86, 94 শ্রেণীটোৰ পদৰ সংখ্যা = 8 = এক যুগ্ম সংখ্যা

এতিয়া $\frac{n}{2}$ তম পদ $= \frac{8}{2}$ তম পদ = চতুর্থ পদ = 68

আকৌ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ তম পদ = পঞ্চম পদ = 70

$\therefore$ নির্ণেয় মাধ্য $= \frac{68+70}{2} = 69$

অসমূহিত বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ মাধ্য (Median of an Ungrouped Frequency Distribution) ঃ

ঊর্দ্ধক্রমত থকা অসমূহিত বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ মধ্যমা নির্ণয় কৰিবলৈ আমি প্রথমতে এখন সঞ্চয়ী বা ক্রমযৌগিক বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা (Cumulative frequency table) প্রস্তুত কৰিব লাগিব।

যদি তথ্যৰাশিৰ সংখ্যা অযুগ্ম হয়, তেন্তে $\frac{N+1}{2}$ তম (য'ত N হ'ল মুঠ বাৰংবাৰতা) পদ (ৰাশি)টোৱে মধ্যমা হ'ব। যদি আমি দেখো যে $\frac{N+1}{2}$ ৰ মান, সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা স্তম্ভৰ দুটা ক্রমিক সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা x আৰু yৰ ভিতৰত x তকৈ ডাঙৰ কিন্তু yতকৈ সৰু বা yৰ সমান হয়, তেন্তে যিটো ৰাশিৰ বাৰংবাৰতা yৰ সমান, সেই ৰাশিটোৱে মধ্যমা হ'ব। আকৌ যদি ৰাশিৰ সংখ্যা যুগ্ম হয় (অর্থাৎ মুঠ বাৰংবাৰতাৰ সংখ্যা যুগ্ম হয়), তেন্তে একক শ্রেণীৰ মধ্যমাৰ নিচিনাকৈ $\frac{N}{2}$তম আৰু $\left(\frac{N+1}{2}\right)$তম পদ (বা ৰাশি) দুটা উলিয়াই লওঁ আৰু এই পদ দুটাৰ সমান্তৰ মাধ্যই মধ্যমা হ'ব। প্রায়ে এই পদ দুটা সমান পোৱা যায় আৰু সেই কাৰণে যেতিয়া এই পদ দুটা সমান হয়, $\frac{N}{2}$তম পদটোকে মধ্যমা হিচাপে ল'ব পাৰি।

উদাহৰণ ৮ ঃ তলৰ বিভাজনটোৰ মধ্যমা নির্ণয় কৰক ঃ

মজুৰি (টকাত) ঃ	20	21	22	23	24	25	26	27	28
বনুৱাৰ সংখ্যা ঃ	8	10	11	16	20	25	19	9	6

সমাধান ঃ

মজুৰি (টকাত)	বনুৱাৰ সংখ্যা (f)	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা (fc)
20	8	8
21	10	18
22	11	29
23	16	45
24	20	65
25	25	90
26	19	109
27	9	118
28	6	124
	N=124	

ইয়াত মুঠ বাৰংবাৰতা (অর্থাৎ মুঠ ৰাশিৰ সংখ্যা) =124 যিটো যুগ্ম। গতিকে $\frac{N}{2}$তম আৰু $\left(\frac{N}{2}+1\right)$তম ৰাশি দুটাৰ সমান্তৰ মাধ্যই মধ্যমা হ'ব।

এতিয়া $\frac{N}{2}=\frac{124}{2}=62$ আৰু $\frac{N}{2}+1=63$ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা স্তম্ভৰ পৰা আমি দেখিছো যে 45 আৰু 65ৰ মাজত 62 আৰু 63 আছে। যিহেতু 24ৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা 65 আৰু 24ৰ বাৰংবাৰতা 20, গতিকে 62তম আৰু 63 তম ৰাশি দুটাৰ প্ৰত্যেকেই 24 হ'ব।

গতিকে নির্ণেয় মধ্যমা = 24 টকা

সমূহিত বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ মধ্যমা (Median of a Grouped Frequency Distribution) ঃ

সমূহিত বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত, যদি N যুগ্ম হয় তেন্তে $\frac{N}{2}$ তম ৰাশিটোক আৰু N অযুগ্ম হ'লে $\left(\frac{N+1}{2}\right)$তম ৰাশিটোক মধ্যমা হিচাপে বিবেচনা কৰিব পাৰি। যিহেতু ৰাশি (মান)বিলাক দল বা বর্গ হিচাপে বিভাজিত হৈছে, গতিকে মধ্যমা নির্ণয় কৰিবলৈ তলৰ সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰা হয় ঃ

$$\text{মধ্যমা } (Me) = L + \frac{\frac{N}{2} - fc}{f} \times I$$

য'ত,

L = বিবর্জিত শ্ৰেণীকৰণৰ ক্ষেত্ৰত নিম্ন সীমা (অন্তর্ভুক্তি শ্ৰেণীকৰণৰ ক্ষেত্ৰত নিম্ন পৰিবন্ধ)

f = বাৰংবাৰতা অর্থাৎ মধ্যমা শ্ৰেণীৰ সৰল বাৰংবাৰতা।

fc = মধ্যমা শ্ৰেণীৰ পূর্ববতী শ্ৰেণীটোৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা।

N = মুঠ বাৰংবাৰতা

I = মধ্যমা শ্ৰেণীৰ দৈর্ঘ্য

টোকা ঃ সমূহিত বা বর্গীকৃত বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ মধ্যমা নির্ণয় কৰিবলৈ উপৰোক্ত সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি যদিহে বিভাজনটো উর্দ্ধক্ৰমত থাকে।

যদি বিভাজনটো অধঃক্ৰমত থাকে, তেন্তে সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰিবলৈ বিভাজনটো প্ৰথমতে উর্ধক্ৰমত সজাই ল'ব লাগে।

উদাহৰণ ৯ ঃ তলৰ বিভাজনটোৰ মধ্যমা নির্ণয় কৰক ঃ

সাপ্তাহিক মজুৰি (টকাত)	ঃ	50-55	55-60	60-65	65-70
কর্মীৰ সংখ্যা	ঃ	6	10	22	30
সাপ্তাহিক মজুৰি (টকাত)	ঃ	70-75	75-80	80-85	
কর্মীৰ সংখ্যা	ঃ	16	12	15	

সমাধান ঃ

সাপ্তাহিক মজুৰি (টকাত)	কর্মীৰ সংখ্যা (f)	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা (fc)
50-55	6	6
55-60	10	16
60-65	22	38
65-70	30	68
70-75	16	84
75-80	12	96
80-85	15	111
	N = 111	

ইয়াত N = 111 আৰু ই অযুগ্ম।

এতিয়া $\frac{N+1}{2}$ তম পদ $= \frac{111+1}{2}$ তম পদ = 56 তম পদ

সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা তালিকাখনৰ পৰা দেখা যায় যে 56 তম পদটো 65-70 শ্রেণীৰ অন্তর্গত।

গতিকে 65-70 শ্রেণী অন্তৰাল টোৰেই মধ্যমা শ্রেণী।

এতিয়া, মধ্যমা $= L + \frac{\frac{N}{2} - fc}{f} \times 1$

ইয়াত L= 65, f = 30, fc = 38, N = 111, I = 5

মধ্যমা $= 65 + \frac{\frac{111}{2} - 38}{30} \times 5$

$= 65 + \frac{55.5 - 38}{30} \times 5$

$= 65 + \frac{17.5}{6}$

$= 65 + 2.92 = 67.92$

অর্থাৎ নির্ণেয় মধ্যমা = 67.92 টকা

মধ্যমাৰ সুবিধা আৰু সীমাবদ্ধতা (Advantages and Limitations of Median)ঃ

- সুবিধাবিলাক (Advantages)

(ক) চৰম মানে মধ্যমাক প্রভাবিত নকৰে।

(খ) মধ্যমা বুজিবলৈ সহজ আৰু ইয়াক সহজে নির্ণয় কৰিব ও পাৰি।

(গ) মধ্যমাক লৈখিকভাৱে ও নির্ণয় কৰিব পাৰি।

(ঘ) খোলা মূৰ থকা শ্রেণী অন্তৰালযুক্ত বিভাজনৰ কাৰণে মধ্যমা নির্ণয় কৰিব পাৰি।

● **সীমাবদ্ধতা (Limitations) ঃ**

(ক) এটা বিভাজনৰ মধ্যমা নির্ণয় কৰাৰ কাৰণে বিভাজনটো যদি এক নির্দিষ্ট ক্রমত নাথাকে, তেন্তে নির্দিষ্ট ক্রমত সজাই ল'ব লাগিব। কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ আন মাপবিলাকত এনেদৰে সজাই লোৱাৰ প্রয়োজন নহয়।

(খ) এটা বিভাজনৰ মধ্যমা বিভাজনটোৰ আটাইবিলাক মানৰ ওপৰত নির্ভৰ নকৰে।

মধ্যমাৰ ব্যৱহাৰ (Uses of Median) ঃ

খোলা মূৰ যুক্ত শ্রেণী অন্তৰাল থকা বিভাজনৰ গড় নির্ণয় কৰাৰ কাৰণে মধ্যমাই হ'ল সর্বোৎকৃষ্ট পদ্ধতি। আয় বিষয়ক বিভাজনৰ ক্ষেত্রত মধ্যমাই বেছি ভাল ফল প্রদান কৰে।

বহুলক (Mode) ঃ এটা বিভাজনৰ যিটো ৰাশিৰ বাৰংবাৰতা সর্বাধিক, সেই ৰাশিটোৱেই বিভাজনটোৰ বহুলক। এইটো লক্ষণীয় যে এটা বিভাজনৰ বহুলক অদ্বিতীয় (unique) নহয়, এটা বিভাজনৰ একাধিক বহুল থাকিব পাৰে।

স্পষ্টত ঃ এটা একক শ্রেণীৰ (বিভাজনৰ) বহুলক নাথাকে। অসমূহিত বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনবিলাকৰ বহুতৰে ক্ষেত্রত কেৱল পর্যবেক্ষণ কৰিয়ে বহুলক নির্ণয় কৰিব পাৰি। সমূহিত বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বহুলক তলৰ সূত্রটো ব্যৱহাৰ কৰি নির্ণয় কৰিব পাৰি।

$$\text{বহুলক } (Mo) = L + \frac{f_1 - f_o}{2f_1 - f_o - f_2} \times I$$

য'ত,

L = বহুলক শ্রেণীৰ নিম্নসীমা/নিম্ন পৰিবন্ধ

f_o = বহুলক শ্রেণীৰ পূর্ববর্তী শ্রেণীটোৰ বাৰংবাৰতা

f_1 = বহুলক শ্রেণীৰ বাৰংবাৰতা

f_2 = বহুলক শ্রেণীৰ পিছৰ শ্রেণীটোৰ বাৰংবাৰতা

I = বহুলক শ্রেণীৰ দৈর্ঘ্য।

উদাহৰণ-১০ ঃ নিম্নলিখিত বিভাজনটোৰ বাবে বহুলক নির্ণয় কৰক ঃ

নম্বৰ	ঃ	1-5	6-10	11-15	16-20	21-25
ছাত্রৰ সংখ্যা	ঃ	7	10	16	32	24
নম্বৰ	ঃ	26-30	31-35	36-40	41-45	
ছাত্র সংখ্যা	ঃ	18	10	5	1	

সমাধান ঃ যিহেতু 16-20 শ্রেণী অন্তৰালটোৰ বাৰংবাৰতা আটাইতকৈ বেছি, গতিকে এই শ্রেণী অন্তৰালটোৱেই বহুলক শ্রেণী। প্রদত্ত বিভাজনটোৰ শ্রেণী অন্তৰালসমূহ শ্রেণীকৰণৰ অন্তর্ভুক্ত পদ্ধতিৰে গঠিত আৰু সেয়ে বহুলক নির্ণয় কৰোতে বহুলক শ্রেণীটোৰ নিম্ন পৰিবন্ধ ল'ব লাগিব।

এতিয়া, বহুলক $(Mo) = L + \frac{f_1 - f_o}{2f_1 - f_o - f_2} \times I$

$$= 15.5 + \frac{32-16}{2\times 32-16-24}\times 5$$

$$= 15.5 + \frac{16}{64-40}\times 5$$

$$= 15.5 + \frac{16}{24}\times 5$$

$$= 15.5 + 3.33 = 18.33$$

∴ নির্ণেয় বহুলক = 18.33 নম্বৰ।

উদাহৰণ -১১ ঃ যদি আছে, তেন্তে তলৰ শ্রেণীকেইটাৰ বহুলক/বহুলকবিলাক নির্ণয় কৰক।

(ক) 3, 4, 5, 2, 3, 4, 1, 6, 4

(খ) 7, 9, 11, 7, 6, 5, 9, 13

(গ) 3, 5, 6, 7, 9, 12, 3, 6, 5, 9, 12, 7

সমাধান ঃ

(ক) ইয়াত 4 সংখ্যাটোৰ গৰিষ্ঠসংখ্যক বাৰ (তিনিবাৰ) পুনৰাবৃত্তি ঘটিছে। গতিকে প্রদত্ত শ্রেণীটোৰ বহুলক 4।

(খ) আমি দেখিছো যে 7 আৰু 9 ৰ বাৰংবাৰতা সর্বাধিক আৰু এই সর্বাধিক বাৰংবাৰতা প্রত্যেকৰে 2। গতিকে শ্রেণীটোৰ বহুলক দুটা হ'ল 7 আৰু 9।

(গ) যিহেতু শ্রেণীটোৰ প্রত্যেক ৰাশিৰ বাৰংবাৰতা সমান (প্রত্যেকৰে ক্ষেত্রত বাৰংবাৰতা 2), গতিকে প্রদত্ত শ্রেণীটোৰ বহুলক নাই।

বহুলকৰ সুবিধা আৰু সীমাবদ্ধতা (Advantages and Limitations of Mode) ঃ

সুবিধাবিলাক (Advantages)

(ক) বহুতো ক্ষেত্রত অসমূহিত বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বহুলক/বহুলকবিলাক মাত্র পর্যবেক্ষণ কৰিয়ে নির্ণয় কৰিব পাৰি।

(খ) চৰমমানৰ দ্বাৰা বহুলক প্রভাবিত নহয়।

(গ) বহুলক বুজিবলৈ সহজ।

(ঘ) লৈখিক পদ্ধতিৰে বহুলক নির্ণয় কৰিব পাৰি।

সীমাবদ্ধতা (Limitations) ঃ

(ক) আটাইবিলাক তথ্য ৰাশিৰ ওপৰত বহুলক নির্ভৰ নকৰে।

(খ) গাণিতিক প্রয়োগৰ সম্প্রসাৰণৰ কাৰণে ই উপযুক্ত নহয়।

(গ) সমান্তৰ মাধ্যৰ দৰে কোনো বিভাজনৰ বহুলক আৰু ৰাশিসমূহৰ সংখ্যা জনা থাকিলেও বিভাজনটোৰ ৰাশিসমূহৰ সমষ্টি নির্ণয় কৰিব নোৱাৰি।

বহুলকৰ ব্যৱহাৰ (Uses of Mode) ঃ

বহুলকৰ ধাৰণাটো পণ্য উৎপাদনকাৰী, ব্যৱসায়ী, কৃষিবিদ আদিয়ে প্রয়োগ কৰে।

উদাহৰণ স্বৰূপে, জোতা উৎপাদনকাৰীয়ে জোতাৰ আৰ্হি আকাৰ (প্ৰামাণিক আকৰ)ত মনোযোগ দিয়ে আৰু সেই আৰ্হিৰ বৃহৎ পৰিমাণৰ জোতা উৎপাদন কৰে। শিল্প আৰু ব্যৱসায়তো ইয়াক ব্যৱহাৰ কৰা হয়। বতৰৰ আগজাননী বহুলকৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰে। ব্যৱসায় আৰু বাণিজ্যৰ উপৰিও আৰ্থ-সামাজিক সমীক্ষা বিলাকতো বহুলকৰ ধাৰণা ব্যৱহৃত হয়।

মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলকৰ মাজৰ সম্পৰ্ক (Relationship among Mean, Median and Mode) ঃ

অধ্যাপক কার্ল পিয়েৰছনে মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলকৰ মাজত এক পৰীক্ষামূলক সম্পৰ্ক স্থাপন কৰিছে। যিকোনো বিভাজনৰ কাৰণে পৰীক্ষামূলক সম্পৰ্ক হিচাপে খ্যাত তলৰ সম্পৰ্কটো মোটামুটিভাৱে খাটে।

মাধ্য — বহুলক = 3 (মাধ্য—মধ্যমা)



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১ঃ কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপ বা গড় বুলিলে আপুনি কি বুজে ?

প্ৰশ্ন নং ২ঃ ভাৰিত সমান্তৰ মাধ্যৰ সংজ্ঞা দিয়ক।

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ তলৰ বিভাজনটোৰ পৰা মাধ্য আৰু মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰক ঃ

বয়স (বছৰত)ঃ	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
ছাত্ৰৰ সংখ্যা ঃ	1	2	4	8	11	10	7	4	2	1

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ তলৰ তথ্যটোৰ পৰা মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলক নিৰ্ণয় কৰক ঃ

সাপ্তাহিক মজুৰি (টকাত) ঃ	15	16	17	18	19	20
কৰ্মীৰ সংখ্যা ঃ	6	12	23	30	9	1

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ তলৰ পৰিসাংখিকীয় বিভাজন (বণ্টন)টোৰ পৰা মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলক নিৰ্ণয় কৰক ঃ

শ্ৰেণী অন্তৰাল ঃ	6.5-7.5	7.5-8.5	8.5-9.5	9.5-10.5
বাৰংবাৰতা ঃ	5	12	25	48
শ্ৰেণী অন্তৰাল ঃ	10.5-11.5	11.5-12.5	12.5-13.5	
বাৰংবাৰতা ঃ	32	6	1	

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ কেইটামান পৰিয়ালৰ সাপ্তাহিক খৰচ তলত দিয়া হৈছে। সমান্তৰ মাধ্য আৰু মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰক ঃ

সাপ্তাহিক খৰচ (টকাত) ঃ	110-120	120-130	130-140	140-150
পৰিয়ালৰ সংখ্যা ঃ	6	15	38	62

সাপ্তাহিক খৰচ (টকাত)	ঃ	150-160	160-170	170-180	180-190	190-200
পৰিয়ালৰ সংখ্যা	ঃ	106	50	18	12	3

প্রশ্ন নং ৭ঃ তলত দিয়া বিভাজনটোৰ সমান্তৰ মাধ্য আৰু মধ্যমা নির্ণয় কৰক। সমান্তৰ মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলক তিনিওটাৰ মাজৰ পৰীক্ষামূলক সম্পর্কটো ব্যৱহাৰ কৰি বহুলক নির্ণয় কৰক ঃ

শ্রেণী অন্তৰাল	ঃ	130-134	135-139	140-144	145-149
বাৰংবাৰতা	ঃ	7	12	15	6



২.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

এই অধ্যায়টিত আমি কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপৰ অর্থ (মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলক) সম্পর্কে শিকিছো। ইয়াৰ পিছত আমি সমান্তৰ মাধ্যৰ কেইটামান ধর্ম আলোচনা কৰিছো। ইয়াত আমি মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলকৰ মাজৰ সম্পর্কৰ বিষয়েও আলোচনা কৰিছো।



২.৫ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

১) Agarwal, D. R. (2006). Business Statistics. Delhi, Vrinda Publications.

২) Gupta S.C. (1994). Fundamentals of statistics. New Delhi, Himalayan Publishing House.

৩) Rajagopalan, S. P. & Sattanthan R. (2009).Business Statistics and Operations Research. New Delhi, Tata McGraw-Hill

৪) Sharma, J. K. (2007). Business Statistics. New Delhi. Pearson Education Ltd.

৫) Verma, A. P. (2007). Business Statistics. Guwahat, Asian Books Private Limited.



২.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ কোনো এটা বিভাজন (বণ্টন)ৰ কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপ বা গড়, বিভাজনটোক প্রতিনিধিত্ব কৰা এটা মানৰ বাহিৰ আন একো নহয়। এই মানটোৱে এটা প্রচেষ্টাতে গোটেই বিভাজনটোৰ তাৎপর্য বুজি পাবলৈ আমাক সমর্থবান কৰি তোলে।

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ যেতিয়া আমি এটা শ্রেণীৰ বিভিন্ন ৰাশিৰ ওপৰত সিহঁতৰ পাৰস্পৰিক গুৰুত্বৰ অনুযায়ী ভাৰ আৰোপ কৰি শ্রেণীটোৰ সমান্তৰ মাধ্য নির্ণয় কৰো, তেতিয়া সেই সমান্তৰ মাধ্যকে ভাৰিত সমান্তৰ মাধ্য বুলি কোৱা হয়।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ মাধ্য (A.M.) = 15.54 বছৰ, মধ্যমা =16 বছৰ।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ মাধ্য (A.M.) = 17.33 টকা, মধ্যমা =17 টকা
বহুলক =18 টকা

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ মাধ্য (A.M.) = 9.98; মধ্যমা = 9.97, বহুলক = 10.17

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ মাধ্য (A.M.) = 152.64 টকা, মধ্যমা, = 153.67 টকা

৭ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ 139.5, 139.63, 139.89



২.৭ আৰ্হি প্রশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্রশ্ন ১ঃ এটা বিভাজনৰ মধ্যমাৰ সংজ্ঞা দিয়ক। ইয়াৰ সুবিধা আৰু সীমাবদ্ধতা সম্পর্কে আলোচনা কৰক।

প্রশ্ন ২ঃ বহুলকৰ সংজ্ঞা দিয়ক। ইয়াৰ সুবিধা আৰু সীমাবদ্ধতাবিলাক কি কি?

প্রশ্ন ৩ঃ মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলকৰ মাজৰ পৰীক্ষামূলক সম্পর্কটো লিখক।

প্রশ্ন ৪ঃ সমান্তৰ মাধ্য (A. M.)ৰ ধর্মবিলাক কি কি?

*** ***** ***

অধ্যায় ৩ঃ বিক্ষেপণৰ মাপ (MEASURES OF DISPERSION)

অধ্যায় গাঁথনি

৩.১ উদ্দেশ্য

৩.২ পৰিচয়

৩.৩ বিক্ষেপণ বা বিচৰণ

৩.৩.১ বিক্ষেপণৰ বিভিন্ন মাপ

৩.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৩.৫ অধিক জানিবলৈ

৩.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৩.৭ আৰ্হি প্রশ্ন

৩.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি —

- বিক্ষেপণ বা বিচৰণৰ অর্থ ব্যাখ্যা কৰিব পাৰি
- বিভিন্ন প্রকাৰৰ বিভাজনৰ বিক্ষেপণ নির্ণয়ৰ বিভিন্ন পদ্ধতিৰ সংজ্ঞা দিব পাৰিব

৩.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

এই অধ্যায়ত আমি বিক্ষেপণ বা বিচৰণ (Dispersion or Variation) সম্পর্কে আলোচনা কৰিম। আগৰ অধ্যায়ত আমি এটা একক সংখ্যা (Single figure) সম্পর্কে আলোচনা কৰিছিলো, যিটোৱে সম্পূর্ণ তথ্যটোক প্রতিনিধিত্ব কৰে। এই অধ্যায়ত আমি এটা গড়মানৰ পৰা স্যাংখ্যিকীয় তথ্যৰ মানসমূহ বিস্তাৰিত হৈ থকাৰ প্রৱণতাৰ মাত্রা সম্পর্কে আলোচনা কৰিম। বিক্ষেপণে তথ্যৰ মানবিলাক কেন্দ্রীয় মানৰ পৰা বিচৰণ কৰাৰ মাত্রা জোখে।

৩.৩ বিক্ষেপণ বা বিচৰণ (DISPERSION)

এটা সাংখ্যিকীয় তথ্যৰ এটা গড়মানৰ পৰা মানসমূহৰ বিক্ষিপ্ততাক বিক্ষেপণ (Dispersion) বা বিচৰণ (Variation) বোলে। স্পিয়েগেলৰ উদ্ধৃতিৰে ক'বলৈ হ'লে—

"The degree to which numerical data tend to spread about an average value is variation or disperson".

অর্থাৎ 'সাংখ্যিকীয় তথ্যৰ মানসমূহ গড়মানৰ চৌপাশে সিঁচৰিত হৈ থকাৰ মাত্রাক বিচৰণ বা বিক্ষেপণ বোলে।'

৩.৩.১ বিক্ষেপণৰ বিভিন্ন মাপ (DIFFERENT MEASURES OF DISPERSION)

বিক্ষেপণৰ বিভিন্ন মাপবিলাক হ'ল ঃ

(ক) পৰিসৰ বা প্ৰসাৰ (খ) আন্তঃ চতুৰ্থক পৰিসৰ আৰু চতুৰ্থক বিচলন (গ) গড় বিচলন (ঘ) মানক বিচলন আৰু প্ৰসৰণ (ঙ) বিচৰণৰ সহগ বা বিচৰণৰ গুনাংক। মাপ (ক), (খ), (গ) আৰু (ঘ) ক বিক্ষেপণৰ পৰম মাপ (absolute measures) আৰু মাপ (ঙ) ক আপেক্ষিক মাপ (relative measure) বুলি কোৱা হয়। এটা বিভাজনৰ কাৰণে লোৱা মাপৰ একক আৰু বিভাজনটোৰ একক একে হ'লে, সেই মাপক পৰম মাপ বোলে। আপেক্ষিক মাপ হ'ল এটা অনুপাত বা শতাংশ আৰু সেয়ে ই এটা শুদ্ধ সংখ্যা। এইটো উল্লেখযোগ্য যে কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ আটাইবিলাক মাপেই পৰম মাপ।

(ক) পৰিসৰ বা প্ৰসাৰ (Range) ঃ এটা বিভাজনৰ নিম্নতম আৰু উচ্চতম মানৰ পাৰ্থক্যই হ'ল বিভাজনটোৰ প্ৰসাৰ। যদি বিভাজনটোৰ উচ্চতম মান L (Largest) আৰু নিম্নতম মান S (Smallest) তেন্তে বিভাজনটোৰ প্ৰসাৰ R হ'ব ঃ

$R = L–S$

উদাহৰণ-১ যদি ছজন ছাত্ৰৰ প্ৰাপ্ত নম্বৰ 24, 12, 16, 11, 40 আৰু 42, তেন্তে নম্বৰকেইটাৰ পৰিসৰ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ইয়াত L = 42, S = 11

∴ প্ৰসাৰ বা বিস্তাৰ R = L–S = 42–11 = 31 (নম্বৰ)

উদাহৰণ-২ তলৰ বিভাজনটোৰ বিস্তাৰ নিৰ্ণয় কৰক ঃ

কিল'গ্ৰামত ওজন	ঃ	40	47	56	62	70
ছাত্ৰৰ সংখ্যা	ঃ	4	7	11	3	1

সমাধান ঃ ইয়াত L = 70 কিঃগ্ৰাঃ, S = 40 কিঃ গ্ৰাঃ

∴ প্ৰসাৰ R = L – S = (70–40) কিঃ গ্ৰাঃ

= 30 কিঃ গ্ৰাঃ

উদাহৰণ-৩ তলৰ বিভাজনটো উচ্চতাৰ বিভাজন। বিভাজনটোৰ প্ৰসাৰ নিৰ্ণয় কৰক।

উচ্চতা (ছেঃমিঃত)	ঃ	120-129	130-139	140-149	150-159
ছাত্ৰৰ সংখ্যা	ঃ	10	17	23	8

সমাধান ঃ প্রসাৰ R = (150–159 ৰ উচ্চসীমা) – (120–129 ৰ নিম্নসীমা)

= (159–120) ছেঃ মিঃ = 39 ছেঃ মিঃ

টোকা ঃ বর্গীকৃত বাৰংবাৰতা বিভাজনত (grouped frequency distribution) তথ্যৰ শ্রেণীকৰণ ওপৰৰ বিভাজনটোৰ দৰে অন্তর্ভুক্তি প্রকাৰৰ হ'লে, আমি তলত দিয়া ধৰণেও প্রসাৰ পাব পাৰো ঃ

R = (150–159 ৰ উচ্চ শ্রেণী পৰিবন্ধ) – (120–129 ৰ নিম্ন শ্রেণী পৰিবন্ধ)

= (159.5–119.5) ছেঃ মিঃ = 40ছেঃ মিঃ

(খ) আন্তঃ চতুর্থক প্রসাৰ আৰু চতুর্থক বিচলন [Interquartile Range and Quartile Deviation (Q.D)] ঃ

কোনো এক বিভাজনৰ তৃতীয় চতুর্থক Q_3 আৰু প্রথম চতুর্থক Q_1ৰ পার্থক্যক বিভাজনটোৰ আন্তঃ চতুর্থক প্রসাৰ বোলে। আকৌ বিভাজনটোৰ অর্ধ আন্তঃ চতুর্থক প্রসাৰক বিভাজনটোৰ চতুর্থক বিচলন (Q. D) বোলে। এতেকে আন্তঃ চতুর্থক প্রসাৰ = Q_3–Q_1 আৰু চতুর্থক বিচলন, $Q.D.=\frac{Q_3-Q_1}{2}$

আন্তঃ চতুর্থক প্রসাৰ আৰু চতুর্থক বিচলন গণনা কৰাৰ সূত্র ঃ

স্বতন্ত্র শ্রেণীৰ ক্ষেত্রত

আন্তঃ চতুর্থক প্রসাৰ (Interquartile Range) = Q_3–Q_1

চতুর্থক বিচলন (Quartile Deviation)

$$Q.D.=\frac{Q_3-Q_1}{2}$$

য'ত $Q_1 = \left(\frac{n+1}{4}\right)$ পদটোৰ মান

n = আবেক্ষণৰ সংখ্যা

$Q_3=\left(\frac{3(n+1)}{4}\right)$ পদটোৰ মান

n আবেক্ষণৰ সংখ্যা

বিছিন্ন শ্রেণীৰ ক্ষেত্রত

আন্তঃ চতুর্থক প্রসাৰ (Interquartile Range) = Q_3–Q_1

চতুর্থক বিচলন (Quartile Deviation)

$$Q.D.=\frac{Q_3-Q_1}{2}$$

য'ত Q_1 = সঞ্জয়ী বাৰংবাৰতা স্তম্ভত $\left(\frac{n+1}{4}\right)$ পদটোৰ অনুৰূপ x ৰ মানটো হ'ব Q_1.

N = বাৰংবাৰতাৰ যোগফল

Q_3 = সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা স্তম্ভত $\frac{3(n+1)}{4}$ পদটোৰ অনুৰূপ x ৰ মানটো হ'ব Q_3.

অবিচ্ছিন্ন শ্রেণীৰ ক্ষেত্রত

আন্তঃ চতুর্থক প্রসাৰ (Interquartile Range) = $Q_3 - Q_1$

চতুর্থক বিচলন (Quartile Deviation)

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

ইয়াত আমি প্রথমে সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা স্তম্ভত $\frac{N}{4}$ পদটোৰ মান নির্ধাৰণ কৰিম। $\frac{N}{4}$ পদটোৰ মানৰ অনুৰূপ শ্রেণী অন্তৰালত Q_1 ৰ মান থাকিব।

য'ত $Q_1 = l_1 + \frac{\frac{N}{4} - c.f}{f} \times i$

l_1 = শ্রেণী অন্তৰালৰ নিম্নসীমা

N = বাৰংবাৰতাৰ যোগফল

c.f = শ্রেণীৰ পূর্ববতী শ্রেণীৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা

i = শ্রেণী অন্তৰাল

আকৌ আমি সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা স্থম্ভত $\left(\frac{3N}{4}\right)$ পদটোৰ মান নির্ধাৰণ কৰিম। $\left(\frac{3N}{4}\right)$ পদটোৰ মানৰ অনুৰূপ শ্রেণী অন্তৰালত Q_3 ৰ মান থাকিব।

$$Q_3 = l_1 + \frac{3\left(\frac{N}{4}\right) - c.f}{f} \times i$$

য'ত

l_1 = শ্রেণী অন্তৰালৰ নিম্নসীমা

N = বাৰংবাৰতাৰ যোগফল

c.f = শ্রেণীৰ পূর্ববতী শ্রেণীৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা

i = শ্রেণী অন্তৰাল

উদাহৰণ ১ ঃ তলৰ আৱেক্ষণসমূহ প্রসাৰ আৰু চতুর্থক বিচলন নির্ণয় কৰক।

20 25 29 30 35 39 41 48 51 60 70

সমাধান ঃ প্রসাৰ হ'ব 70 – 20 = 50

চতুর্থক বিচলনৰ বাবে Q_3 আৰু Q_1 ৰ মান নির্ণয় কৰিব লাগিব।

Q_1 হ'ব $\frac{n+1}{4}$ পদটোৰ মান

ইয়াত n = 11

গতিকে Q_1 হ'ব তৃতীয় পদটোৰ মান।

যিহেতু আবেক্ষণ ক্রমবর্দ্ধিত মানত সজোঁৱা আছে, গতিকে ইয়াৰ পৰা পোৱা হ'ল Q_1=29.

সেইদৰে, Q_3 হ'ব $\frac{3(n+1)}{4}$ পদটোৰ মান, অর্থাৎ নৱম পদটোৰ মান 51, গতিকে Q_3= 51

$$Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{51-29}{2} = 11$$

উদাহৰণ ২ ঃ এটা শ্রেণীৰ 40 জন ছাত্র-ছাত্রীয়ে পোৱা নম্বৰৰ তালিকাৰ পৰা প্রসাৰ আৰু চতুর্থক বিচলন নির্ণয় কৰক।

শ্রেণী অন্তৰাল	ছাত্র-ছাত্রীৰ সংখ্যা
0–10	5
10–20	8
20–40	16
40–60	7
60–70	4
	40

সমাধান ঃ প্রসাৰ হ'ল উচ্চতম শ্রেণীৰ উচ্চসীমা আৰু নিম্নতম শ্রেণীৰ নিম্ন সীমাৰ পার্থক্য।

∴প্রসাৰ = 90–0

= 90

চতুর্থক বিচলনৰ বাবে আমি প্রথমে সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা নির্ণয় কৰি লাগিব—

শ্রেণী অন্তৰাল (class interval)	বাৰংবাৰতা (f) (frequency)	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা (c.f.) (Cumulative frequency)
0–10	5	05
10–20	8	13
20–40	16	29
40–60	7	36
60–90	4	40
	n= 40	

Q_1 হ'ব অবিচ্ছিন্ন শ্রেণীৰ $\frac{n}{4}$ পদটোৰ মান। গতিকে, এইটোৱে হ'ব দশম পদটোৰ মান। দশম পদটো থকা শ্রেণীটো হ'ব 10–20। সেয়েহে Q_1ৰ মান 10–20 শ্রেণীটোত থাকিব।

এতিয়া Q_1ৰ মান উলিয়াবলৈ তলৰ সূত্রটো ব্যৱহাৰ কৰিব লাগিব—

$$Q_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - c.f}{f} \times i$$

য'ত L = 10 (চতুর্থক শ্রেণীৰ নিম্নসীমা)

c.f. = 5 (চতুর্থক শ্রেণীৰ পূর্ববর্তী শ্রেণীৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাৰ মান)

i = 10 (চতুর্থক শ্রেণীৰ অন্তৰাল)

f = 8 (চতুর্থক শ্রেণীৰ বাৰংবাৰতা)

গতিকে, $Q_1 = 10 + \frac{10-5}{8} \times 10 = 16.25$

একেদৰে, Q_3 হ'ব $\frac{3n}{4}$ পদটোৰ মান অর্থাৎ 30তম পদটো থকা শ্রেণীটো হ'ব 40–60।

এতিয়া Q_3 ৰ মান উলিয়াবলৈ তলৰ সূত্রটো ব্যৱহাৰ কৰিব লাগিব—

$$Q_1 = L + \frac{\frac{3n}{4} - c.f}{f} \times i$$

$$= 40 + \frac{30-29}{7} \times 20$$

$$= 42.87$$

$$\therefore Q.D = \frac{42.87 - 16.25}{2}$$

$$= 13.31$$

উদাহৰণ ৩ঃ তলৰ তালিকাৰ পৰা চতুর্থক বিচলন নির্ণয় কৰক—

বয়স (বছৰত)	সদস্যৰ সংখ্যা
20	3
30	61
40	132
50	153
60	140
70	51
80	3

সমাধান ঃ

বয়স (বছৰত)	সদস্যৰ সংখ্যা	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা
20	3	3
30	61	64
40	132	196
50	153	349
60	140	489
70	51	540
80	3	543

$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right)$ পদটোৰ মান

$= \frac{543 + 1}{4}$ পদটোৰ মান

$= \frac{544}{4}$ পদটোৰ মান

= 130 পদ

= 40 বছৰ

$Q_3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$ পদটোৰ মান

$= 3\left(\frac{543+1}{4}\right)$ পদটোৰ মান

= 3 x 136 পদটোৰ মান

= 408 পদটো যিটো হ'ল 60 বছৰ

$Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{60-40}{2} = \frac{20}{2} = 10$ বছৰ

উদাহৰণ ৪ ঃ প্ৰসাৰ আৰু চতুৰ্থক বিচলন নিৰ্ণয় কৰক।

মজুৰি (টকা)	বনুৱা
30–32	12
32–34	18
34–36	16
36–38	14
38–40	12
40–42	8
42–44	6

সমাধান ঃ প্ৰসাৰ (Range) = L – S

= 44–30

= 14 বছৰ

x	f	c.f.
30-32	12	12
32-34	18	30
34–36	16	46
36–38	14	60
38–40	12	72
40–42	8	80
42–44	6	86

$Q_1 = \frac{N}{4}$ পদটোৰ মান

$= \frac{86}{4}$

$= 21.5$

Q_1, 32–34 শ্ৰেণীটোত আছে

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - c.f.}{f} \times i$$

$$= 32 + \frac{21.5 - 12}{18} \times 2$$

$$= 32 + \frac{19}{18}$$

$= 32+1.06$

$= 33.06$

$Q_1 = \frac{3N}{4}$ পদটোৰমান

$$= \frac{3 \times 86}{4}$$

$= 64.5$

Q_3, 38–40 শ্ৰেণীটোত আছে

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - c.f.}{f} \times i$$

$$= 38 + \frac{64.5 - 60}{12} \times 2$$

$$= 38+0.75$$

$$= 38.75$$

$$Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{38.75 - 33.06}{2}$$

$$= \frac{5.69}{2}$$

$$= 2.85$$

টোকা ঃ যেতিয়া বিভাজন এটা ঊর্ধঃক্রমত থাকে তেতিয়া বিভাজনটোক সমানে চাৰিটা ভাগত বিভক্ত কৰা চতুর্থক তিনিটাক বিভাজনটোৰ চতুর্থক বোলে। এই চতুর্থক কেইটাক ঊর্ধঃক্রমত Q_1 , Q_2আৰু Q_3 ৰে বুজোৱা হয়। Q_1ক প্রথম বা তলৰ চতুর্থক (first or lower quartile), Q_2ক দ্বিতীয় বা মাজৰ চতুর্থক (Second or middle quartile) আৰু Q_3ক তৃতীয় বা ওপৰৰ চতুর্থক (third or upper quartile) বোলে। এটা বিভাজনৰ দ্বিতীয় চতুর্থক Q_2 আৰু মধ্যমা (Me) — দুয়োটা একে।

(গ) গড় বিচলন [Mean Deviation (M.D.)] ঃ

কোনো এক বিভাজনৰ সমান্তৰ মাধ্য, মধ্যমা বা বহুলকৰ পৰা মান বা আবেক্ষণসমূহৰ পৰম বিচলনৰ সমান্তৰ মাধ্যক বিভাজনটোৰ গড় বিচলন বোলে।

যদি এটা চলক x ৰ n টা মান $x_1, x_2, ...x_n$ হয়,

তেন্তে, $$M.D. = \frac{|x_1 - A| + |x_2 - A| + ... + |x_n - A|}{n}$$

বা $$M.D. = \frac{\sum |x - A|}{n} = \frac{\sum d}{n}$$

ইয়াত $A = x$ ৰ মাধ্য, মধ্যমা বা বহুলক আৰু $d = x–A$

আকৌ, যদি $x_1, x_2, ..., x_n$ ৰ বাৰংবাৰতা যথাক্রমে $f_1, f_2,.....f_n$ হয়,

তেন্তে - $$M.D. = \frac{f_1 |x_1 - A| + f_2 |x_2 - A| + ... + f_n |x_n - A|}{N}, N = \sum f$$

বা $$M.D. = \frac{\sum f |x - A|}{N} = \frac{\sum f |d|}{N}$$

ইয়াত A = বিভাজনটোৰ মাধ্য, মধ্যমা বা বহুলক আৰু d = x–A

যদি A = মাধ্য, তেন্তে মাধ্যৰ পৰা গড় বিচলন পাওঁ। একেদৰে মধ্যমাৰ পৰা গড় বিচলন আৰু বহুলকৰ পৰা গড় বিচলন পাওঁ। মাধ্য $(\bar{x})$ ৰ পৰা গড় বিচলনক $M.D(\bar{x})$ প্রতীকটোৰে বুজাব পাৰি। তেনেকৈ মধ্যমাৰ পৰা গড় বিচলন আৰু বহুলকৰ পৰা গড় বিচলনক

যথাক্রমে M.D.(Me) আৰু M.D(Mo) ৰে বুজাব পাৰি।

টোকা ঃ (ক) মাধ্যৰ পৰা গড় বিচলনৰ ক্ষেত্রত, 'A' হ'ব পাৰে A.M. (সমান্তৰ মাধ্য), G.M. (গুণোত্তৰ মধ্য) বা H.M. (হৰাত্মক মাধ্য)। কিন্তু সাধাৰণতে Aক A.M. হিচাপে লোৱা হয়।

(খ) Ix–AI ক বিচলন x–A ৰ পৰমমান (absolute value) বোলে।

পৰমমান বুলিলে আমি চিন (sign) বিবেচনা নকৰাকৈ ৰাশিৰ পৰিমাণক বুজাওঁ। এই হিচাপত x–A ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হ'ব পাৰে কিন্তু Ix–AI সদায় ধনাত্মক। এতেকে I5–2I =I3I =3, I7–9I = I–2I = 2 ইত্যাদি।

(গ) যিহেতু মাধ্যৰ পৰা বিচলনসমূহৰ সমষ্টি শূন্য হয়, সেয়ে মাধ্যৰ পৰা গড় বিচলনৰ ক্ষেত্রত আমি সদায় পৰম বিচলনবিলাক লওঁ।

গড় বিচলনৰ সুবিধা আৰু সীমাবদ্ধতা (Advantages and limitations of Mean Deviations)

সুবিধাবোৰ (Advantages) ঃ

(ক) ই আটাইবিলাক মানৰ ওপৰত নির্ভৰশীল।

(খ) প্রামাণিক বিচলনৰ তুলনাত চৰম মানে ইয়াক কম প্রভাবিত কৰে।

(গ) যিহেতু গড় (মাধ্য, মধ্যমা বা বহুলক)ৰ পৰা গড় বিচলন লোৱা হয়, গতিকে দুটা বা ততোধিক বিভাজনৰ মাজত তুলনা কৰাৰ কাৰণে গড় বিচলনক ভাল মাপ হিচাপে বিবেচনা কৰা হয়।

সীমাবদ্ধতা (Limitations) ঃ

(ক) গড় বিচলনত বিচলনৰ প্রকৃত চিন উপেক্ষা কৰি বিচলনৰ পৰমমান লোৱা হয়।

(খ) বহুলকৰ পৰা গড় বিচলন, বিক্ষেপণৰ ভাল মাপ হিচাপে বিবেচিত নহয়।

(গ) খোলা মূৰৰ শ্রেণী অন্তৰালযুক্ত বর্গীকৃত বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ গড় বিচলন নির্ণয় কৰিব নোৱাৰি।

উদাহৰণ-৪ তলৰ বিভাজনটোৰ কাৰণে মাধ্যৰ পৰা গড় বিচলন (M.D.) নির্ণয় কৰক ঃ

x :	10	11	12	13	14
f :	3	12	18	12	3

সমাধান ঃ

x	f	fx	$\|d\| = \|x-\bar{x}\|$	f|d|
10	3	30	2	6
11	12	132	1	12
12	18	216	0	0
13	12	156	1	12
14	3	42	2	6
	N=48	$\Sigma fx=576$		$\Sigma f\|d\|=36$

$$\text{A.M.}(\bar{x}) = \frac{\sum fx}{N} = \frac{576}{48} = 12$$

(সাধাৰণতে মাধ্য বুলিলে সমান্তৰ মাধ্যক বুজায়)

এতিয়া, M.D. (মাধ্যৰ পৰা) $= \frac{\sum f\,|\,d\,|}{N} = \frac{36}{48} = 0.75$

(ঘ) মানক বিচলন বা প্ৰামাণিক বিচলন [Standard Deviation (S.D.)] ঃ

এটা চলকৰ মানসমূহৰ সমান্তৰ মাধ্যৰ পৰা সেই মানসমূহ বিচলনৰ বৰ্গৰ সমান্তৰ মাধ্যৰ ধনাত্মক বৰ্গমূলক চলকটোৰ মানক বিচলন বা প্ৰামাণিক বিচলন বোলে। মানক বিচলনক বুজাবলৈ σ (গ্ৰীক আখৰ আৰু ইয়াক চিগ্‌মা বুলি পঢ়া হয়) প্ৰতীকটো ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

যদি এটা চলক x ৰ n টা মান ক্ৰমে $x_1, x_2, ...x_n$ হয়, আৰু যদি মানবিলাকৰ সমান্তৰ মাধ্য $\bar{x}$ হয়, তেন্তে—

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - x)^2}{n}}$$

অৰ্থাৎ $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_1 - \bar{x})^2}{n}}, \quad \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$

আকৌ বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত ঃ

x	x_1	x_2	....	x_n
f	f_1	f_2	....	f_n

মানক বিচলন σ হ'ব ঃ

$$\sigma = \sqrt{\frac{f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + ... + f_n(x_n - \bar{x})^2}{N}}, N = \sum f$$

অৰ্থাৎ $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i - x)^2}{N}}, \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}}{N} fx_i$

x ৰ মানক বিচলনক স্পষ্টভাৱে বুজাবৰ কাৰণে আমি σ প্ৰতীকটোৰ পৰিৱৰ্তে σ_x প্ৰতীকটো ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰো।

মানক বিচলন নিৰ্ণয় কৰিবলৈ বৈকল্পিক পদ্ধতিসমূহ তলত আলোচনা কৰা হ'ল—

(ক) গৃহীত বা কল্পিত মাধ্য পদ্ধতি (Assumed Mean Method) ঃ

একক শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত আমি তলৰ সূত্ৰটো পাওঁ ঃ

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}, \quad d = x - A$$

আৰু A= x ৰ গৃহীত মাধ্য

বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত —

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{N} - \left(\frac{\sum fd}{N}\right)^2}$$

(খ) ক্রম বিচলন পদ্ধতি (Step deviation Method) ঃ

গৃহীত মাধ্য Aৰ পৰা লোৱা বিচলনক dৰে সূচিত কৰা হয়। যদি এই বিচলনবিলাকৰ কিছুমান সাধাৰণ উৎপাদক থাকে, তেন্তে বিচলনবিলাকক গৰিষ্ঠ সাধাৰণ উৎপাদক (ধৰক hৰে হৰণ কৰিলে ক্রম বিচলনবিলাক পোৱা যায়। ক্রম বিচলনক d′ৰে সূচিত কৰা হয়। এতেকে $d' = \frac{d}{h}$, য'ত বিচলন d বিলাকৰ গৰিষ্ঠ সাধাৰণ উৎপাদক হ'ল h। এই পদ্ধতিত আমি তলৰ সূত্রটো পাওঁ—

একক শ্রেণীৰ কাৰণে $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d'^2}{n} - \left(\frac{\sum d'}{n}\right)^2} \times h$

বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ কাৰণে, সূত্রটো হ'ব ঃ

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{n} - \left(\frac{\sum fd'}{n}\right)^2} \times h$$

$d' = \frac{d}{h} = \frac{x - A}{h}$, A = x চলকৰ গৃহীত মাধ্য আৰু x ৰ মানবোৰ হ'ল বিভাজনটোৰ মানবোৰ।

চতুর্থক বিচলন (Q.D.), গড় বিচলন (M.D.) আৰু মানক বিচলন (S.D.) ৰ মাজৰ পৰীক্ষামূলক সম্পর্ক (Empirical relation among Q.D., M.D. and S.D.) ঃ

এইটো পৰীক্ষামূলকভাৱে সত্যাপণ কৰিব পাৰি যে Q.D., M.D. আৰু S.D.ৰ মাজত তলৰ সম্পর্কটো মোটামুটিভাৱে খাটে। সি যি নহওক, অভিলম্ব বিভাজনৰ ক্ষেত্রত, এই সম্পর্কটো সঠিকভাৱে খাটে।

$$Q.D. = \frac{5}{6} M.D. = \frac{2}{3} S.D$$

or 6 Q.D. = 5.M.D. = 4 S.D.

মানক বিচলনৰ সুবিধা আৰু সীমাবদ্ধতা (Advantages and Limitations of S.D.) ঃ

বিচৰণ (বা বিক্ষেপণ)ৰ আটাইবিলাক মাপৰ ভিতৰত মানক বিচলনক সর্বোৎকৃষ্ট মাপ বুলি বিবেচনা কৰা হয়। বিচৰণৰ ভাল মাপ হ'বৰ কাৰণে যিবিলাক গুণ থকাটো দৰকাৰ, সেই আটাইবোৰ গুণ মানক বিচলনৰ আছে। ইয়াক দৃঢ়ভাৱে সংজ্ঞাকৃত কৰা হৈছে। ই আটাইবিলাক মানৰ ওপৰত নির্ভৰশীল। বিচ্ছুৰণৰ আন মাপবিলাকৰ তুলনাত মানক বিচলনৰ প্রতিচয়ন সুস্থিৰতা (Sampling Stability) আটাইতকৈ বেছি। গড় বিচলনত বিচলনবিলাকৰ বীজগণিতীয় চিন উপেক্ষা কৰা হয়। কিন্তু এই দোষৰ পৰা মানক বিচলন মুক্ত, যিহেতু মানক বিচলনত বিচলনবিলাকৰ বর্গ লোৱা হয়। মানক বিচলনৰ সূত্রৰ গাণিতক সম্প্রসাৰণ ঘটাব পাৰি। মানক বিচলনৰ সহায়ত প্রসামান্য বক্রক বিশ্লেষণ কৰিব পাৰি। প্রতিচয়ন তত্ত্ব আৰু সহসম্বন্ধৰ বিশ্লেষণত মানক বিচলনে এক গুৰুত্বপূর্ণ ভূমিকা পালন কৰে।

মানক বিচলনৰ প্ৰধান সীমাবদ্ধতা হ'ল এই যে বিচৰণৰ আন মাপৰ তুলনাত ইয়াক নিৰ্ণয় কৰাটো জটিল। তাৰোপৰি গড় বিচলনৰ তুলনাত চৰমমানৰ দ্বাৰা ই অধিক প্ৰভাৱিত হয়। যদি আমি বিচৰণৰ বিভিন্ন মাপবোৰৰ মাজত তুলনামূলক অধ্যয়ন কৰো, তেন্তে আমি দেখিম যে আটাইবোৰ মাপৰ ভিতৰত মানক বিচলনেই হৈছে সৰ্বোৎকৃষ্ট মাপ। সেয়ে ইয়াক বিচৰণৰ মাপ হিচাপে বহুলভাৱে ব্যৱহাৰ কৰা হয়। ইয়াক বিচৰণৰ আদৰ্শ মাপ বুলি কোৱা হয়।

মানক বিচলনৰ এক গুৰুত্বপূৰ্ণ ধৰ্ম [An important property of Standard Deviation (S.D)] ঃ

এটা শ্ৰেণীৰ মানক বিচলন (S.D.) অপৰিবৰ্তিত থাকে যদি এটা ধ্ৰুৱক শ্ৰেণীটোৰ প্ৰত্যেক মানৰ লগত যোগ বা প্ৰত্যেক মানৰ পৰা বিয়োগ কৰা হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, যদি $x_1, x_2, \ldots, x_n$ শ্ৰেণীটোৰ মানক বিচলন σ হয়,তেন্তে $x_1 \pm c,\ x_2 \pm c, \ldots\ldots, x_n \pm c$ শ্ৰেণীটোৰ মানক বিচলন ও σ হ'ব, য'ত c এটা ধ্ৰুৱক। আনহাতে যদি এটা শ্ৰেণীৰ প্ৰতিটো মানক এটা ধ্ৰুৱক cৰে গুণ কৰা হয়, তেন্তে নতুন শ্ৰেণীটোৰ মানক বিচলন মূল শ্ৰেণীটোৰ মানক বিচলনৰ c গুণৰ সমান হ'ব। আকৌ যদি এটা শ্ৰেণীৰ প্ৰতিটো মানক ধ্ৰুৱক $c(c\neq 0)$ ৰে হৰণ কৰা হয়, তেন্তে নতুন শ্ৰেণীটোৰ মানক বিচলন, মূল শ্ৰেণীটোৰ মানক বিচলনক cৰে হৰণ কৰি পোৱা ভাগফলৰ সমান হ'ব।

(ঙ) বিচৰণৰ সহগ বা বিচৰণৰ গুণাংক [Coefficent of Variation (C.V.)] ঃ

বিচৰণৰ গুণাংক বা বিচৰণ গুণাংক হ'ল বিচৰণৰ এক আপেক্ষিক মাপ। ইয়াক শতাংশত প্ৰকাশ কৰা হয় আৰু ই দুটা বা তাতোধিক তথ্য-শ্ৰেণীৰ পৰিবৰ্তনশীলতা তুলনা কৰাত ব্যৱহাৰ্য, বিশেষকৈ যেতিয়া শ্ৰেণীবোৰ মাপৰ ভিন্ ভিন্ এককত প্ৰকাশিত হৈ থাকে। কাৰ্ল পিয়েৰছনৰ মতে 'বিচৰণ গুণাংক হ'ল— সমান্তৰ মাধ্যৰ শতাংশ বিচৰণ, মানক বিচৰণক সমান্তৰ মাধ্যৰ মুঠ বিচৰণ হিচাপে বিবেচনা কৰা হয়।' এই হিচাপত—

বিচৰণ গুণাংকৰ, সংক্ষেপত C.V. ৰ সংজ্ঞা হ'ল ঃ

$$C.V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$$

যদিও আমি বিচৰণৰ অনেক আপেক্ষিক মাপ পাওঁ, তথাপি বিচৰণ গুণাংক হ'ল অতি সচৰাচৰভাৱে ব্যৱহৃত হোৱা বিচৰণৰ আপেক্ষিক মাপ। কাৰ্যত, আন আপেক্ষিক মাপবিলাক কাশ্চিৎহে ব্যৱহাৰ কৰা হয়। দুটা বিভাজনৰ পৰিৱৰ্তনশীলতা তুলনা কৰোতে, যিটোৰ বিচৰণ গুণাংকৰ মান নিম্নতম হয়, সেই বিভাজনটোক কম পৰিৱৰ্তনশীল, অধিক সুস্থিৰ, অধিক সুষম, অধিক সুসংগত বা অধিক সমমাত্ৰ বুলি কোৱা হয়। আনহাতে আন বিভাজনটোক অধিক বিভেদ্যতা সম্পন্ন, কম সুস্থিৰ, কম সুষম, কম সুসংগত বা কম সমমাত্ৰ বুলি কোৱা হয়।

টোকা ঃ ধৰা হ'ল এজন ক্ৰিকেট খেলুৰৈ Aৰ তিনিখন খেলত ৰানৰ সংখ্যা ক্ৰমে 0, 10 আৰু 80। এই খেলকেইখনত আন এজন খেলুৰৈ Bৰ ৰানৰ সংখ্যা ক্ৰমে 28, 30 আৰু 32। যদিও দুয়োজন খেলুৰৈৰ গড় ৰান একে আৰু 32ৰ সমান, তথাপি আমি ক'ব লাগিব যে Aতকৈ B অধিক সুসংগত। আনকি বিচৰণৰ জ্ঞান নথকা ব্যক্তি এজনেও এই কথাকে ক'ব। যদি আমি

ৰানৰ দুয়োটা শ্ৰেণীৰ C.V. নিৰ্ণয় কৰো, তেন্তে দেখিম যে Bৰ ৰানৰ C.V., Aৰ ৰানৰ C.V.তকৈ কম। আচলতে বিচ্ছুৰণৰ যিকোনো প্ৰকাৰৰ মাপৰ পৰিমাণ Aৰ ৰানৰ ক্ষেত্ৰতকৈ Bৰ ৰানৰ ক্ষেত্ৰত কম হ'ব।

উদাহৰণ-৫ তলৰ মানবিলাকৰ মানক বিচলন নিৰ্ণয় কৰক ঃ

8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26

সমাধান ঃ আমি এই সমস্যাটো প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি আৰু ক্ৰম বিচলন পদ্ধতি দুয়োটা পদ্ধতিৰে সমাধান কৰিম।

প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি ঃ

মান x	মাধ্যৰ পৰা বিচলন $x-\bar{x}$, $(\bar{x}=17)$	$(x-\bar{x})^2$
8	–9	81
10	–7	49
12	–5	25
14	–3	9
16	–1	1
18	1	1
20	3	9
22	5	25
24	7	49
26	9	81
Σx =170		$\Sigma(x-\bar{x})^2$ =330

$$\bar{x}=\frac{\Sigma x}{n}=\frac{170}{10}=17 \quad (\because n = \text{মানবিলাকৰ সংখ্যা} = 10)$$

$$\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{330}{10}}=\sqrt{33}=5.74$$

টোকা ঃ $\bar{x}$এটা অখণ্ড সংখ্যা হ'লে S.D. নিৰ্ণয় কৰাৰ কাৰণে সূত্ৰ ঃ $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$ ব্যৱহাৰ কৰিব লাগে। কিন্তু যদি $\bar{x}$ এটা অখণ্ড সংখ্যা নহয়, তেন্তে সূত্ৰ $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}-\left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$ নাইবা সূত্ৰ $\sigma=\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}-(\bar{x})^2}$ ব্যৱহাৰ কৰিব লাগে। কাৰণ

যেতিয়া $\bar{x}$ এটা অখণ্ড সংখ্যা নহয়, তেতিয়া $(x-\bar{x})^2$ ৰ মান নির্ণয় কৰোতে সময় অপচয় কৰিব লগা হয়।

ক্রম-বিচলন পদ্ধতি (Step-Deviation Method) ঃ

ধৰা হ'ল প্রদত্ত মানবিলাক চলক x ৰ মান আৰু ধৰা হ'ল x ৰ গৃহীত মাধ্য 18।

S.D. ৰ অভিগণনা

মান x	d = x–18	$d' = \frac{d}{2}$	d'^2
8	–10	–5	25
10	–8	–4	16
12	–6	–3	9
14	–4	–2	4
16	–2	–1	1
18	0	0	0
20	2	1	1
22	4	2	4
24	6	3	9
26	8	4	16
Total		$\Sigma d' = -5$	$\Sigma d'^2 = 85$

$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d'}{n}\right)^2} \times h$$

$$= \sqrt{\frac{85}{10} - \left(\frac{-5}{10}\right)^2} \times 2 \quad [\because n = \text{মুঠ মানৰ সংখ্যা} = 10]$$

$$= \sqrt{8.50 - 0.25} \times 2 = \sqrt{8.25} \times 2$$

$$= 2.87 \times 2 = 5.74$$

টোকা ঃ যদি আমি গৃহীত মাধ্য পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰো, তেন্তে আমি তলৰ সূত্রটো প্রয়োগ কৰিব লাগিব ঃ

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}$$

কিন্তু যদি d ৰ মানবিলাকৰ এটা সাধাৰণ উৎপাদক থাকে, তেন্তে সেই সাধাৰণ উৎপাদকটোৰে d ৰ মান বিলাকক হৰণ কৰিব লাগিব আৰু তেনেকৈ পোৱা মানবিলাকক চলক d' ৰ মানবিলাক বুলি ধৰি ল'ব লাগিব। তেতিয়া আমি ক্রম বিচলন পদ্ধতিৰ সূত্রটো পাম। যদি d ৰ মানবিলাকৰ দুটা বা তাতোধিক উৎপাদক থাকে d ৰ মানবিলাকক ইয়াৰ গৰিষ্ঠ সাধাৰণ

উৎপাদক (H.C.F) টোৰে হৰণ কৰিব লাগিব আৰু তেনে কৰি পোৱা মানবিলাকক d' ৰ মান বুলি বিবেচনা কৰিব লাগিব। যদি d ৰ মানবিলাকৰ কেৱল এটা সাধাৰণ উৎপাদক থাকে, তেন্তে সেইটোৱে গৰিষ্ঠ সাধাৰণ উৎপাদক হ'ব।

উদাহৰণ-৬ পথত সংঘটিত গাড়ী দুর্ঘটনাৰ সংখ্যাৰ নথিভুক্ত তলৰ তথ্যটোৰ পৰা মানক বিচলন (S.D.) নির্ণয় কৰক ঃ

দুর্ঘটনাৰ সংখ্যা (x) ঃ	1	2	4	5	6
দিনৰ সংখ্যা (f) ঃ	2	3	3	1	1

সমাধান ঃ আমি সমাধানটো গৃহীত গড় পদ্ধতিৰ দ্বাৰা দেখুৱাম।

x	f	d = x–4	fd	fd^2
1	2	–3	–6	18
2	3	–2	–6	–12
4	3	0	0	0
5	1	1	1	1
6	1	2	2	4
	N=10		$\Sigma fd' = -9$	$\Sigma fd'^2 = 35$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{35}{10} - \left(\frac{-9}{10}\right)^2}$$

$$= \sqrt{3.5 - 0.81} = \sqrt{2.69} = 1.64$$

উদাহৰণ-৭ তলৰ বিভাজনটোৰ গড় আৰু মানক বিচলন নির্ণয় কৰক ঃ

বয়স (বছৰত) ঃ	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50
ব্যক্তিৰ সংখ্যা ঃ	170	110	80	45	40	35

সমাধান ঃ

বয়স (বছৰত)	মধ্যমান (x)	ব্যক্তিৰ সংখ্যা(f)	d = x–32.5	$d' = \frac{d}{5}$	fd'	fd'^2
20-25	22.5	170	–10	–2	–340	680
25-30	22.7	110	–5	–1	–110	110
30-35	32.5	80	0	0	0	0
35-40	37.5	45	5	1	45	45
40-45	42.5	49	10	2	80	160

45-50	47.5	35	15	3	105	315
		N=480			$\Sigma fd'$ = -220	$\Sigma fd'^2$ =1310

ইয়াত গৃহীত মাধ্য A = 32.5

এতিয়া $A.M.(\bar{x}) = A + \frac{\Sigma fd'}{N} \times h$

$$= 32.5 + \frac{-220}{480} \times 5$$

= 32.5 -2.99 = 29.51

এতেকে নির্ণেয় A.M. = 29.51 বছৰ

$$S.D.(\sigma.) = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2} \times h$$

$$= \sqrt{\frac{1310}{480} - \left(\frac{220}{480}\right)^2} \times 5$$

$$= \sqrt{2.7292 - 0.2101} \times 5$$

$$= \sqrt{2.5191} \times 5$$

$$= 1.5871 \times 5 = 7.936$$

$\therefore$ নির্ণেয় S.D. = 7.936 বছৰ

উদাহৰণ ৮ ঃ তলৰ তথ্যটোৰ পৰা মাধ্য আৰু মানক বিচলন নির্ণয় কৰক ঃ

মান (টকাত) ঃ	90-99	80-89	70-79	60-69	50-59	40-49	30-39
ব্যক্তিৰ সংখ্যা ঃ	2	12	22	20	14	4	1

সমাধান ঃ A.M. আৰু S.D. ৰ অভিগণনা

শ্রেণী অন্তৰাল	মধ্যমান (x)	বাৰংবাৰতা (f)	d = x–64.5	$d' = \frac{d}{10}$	fd'	fd'^2
90-99	94.5	2	30	3	6	18
80-89	84.5	12	20	2	24	48
70-79	74.5	22	10	1	22	22
60-69	64.5	20	0	0	0	0
50-59	54.5	14	–10	–1	–14	14
40-49	44.5	4	–20	–2	–8	16
30-39	34.5	1	–30	–3	–3	9
		N=75			$\Sigma fd'$ =27	$\Sigma fd'^2$ =127

এতিয়া $\text{A.M.}(\bar{x}) = A + \frac{\sum fd'}{N} \times h$

$= 64.5 + \frac{27}{75} \times 10$

$= 64.5 + 3.6$

$= 68.10$

$\text{S.D.}(\sigma.) = \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{N} - \left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2} \times h$

$= \sqrt{\frac{127}{75} - \left(\frac{27}{75}\right)^2} \times 10$

$= \sqrt{1.6933 - 0.1296} \times 10 = \sqrt{1.5637} \times 10$

$= 1.2505 \times 10 = 12.505 = 12.51$

∴ নির্ণেয় মানক বিচলন = Rs. 12.51

উদাহৰণ ৯ ঃ তলৰ তথ্যটোৰ পৰা মানক বিচলন আৰু বিচৰণ গুণাংক নির্ণয় কৰক ঃ

বয়স (বছৰ) ঃ	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
ব্যক্তিৰ সংখ্যা ঃ	3	61	132	153	140	51	2

সমাধান ঃ মানক বিচলন আৰু বিচৰণ গুণাংকৰ অভিগণনা

বয়স (বছৰত)	মধ্যমান (x)	বাৰংবাৰতা (f)	d = x–55	$d' = \frac{d}{10}$	fd'	fd'^2
20-30	25	3	–30	–3	–9	27
30-40	35	61	–20	–2	–122	244
40-50	45	132	–10	–1	–132	132
50-60	55	153	0	0	0	0
60-70	65	140	10	1	140	140
70-80	75	51	20	2	102	204
80-90	85	2	30	3	6	18
		N=542			$\Sigma fd'$ = –15	$\Sigma fd'^2$ =765

মানক বিচলন $(\sigma) = \sqrt{\frac{765}{542} - \left(\frac{-15}{542}\right)^2} \times 10$

$= \sqrt{1.4114 - 0.0001} \times 10$

$= \sqrt{1.4113} \times 10 = 11.876$

অৰ্থাৎ S.D. = 11.876 বছৰ

আকৌ বিচৰণ গুণাকং $(C.V.) = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100\%$

এতিয়া $\bar{x} = A + \frac{\sum fd'}{N} \times h$

$= 55 + \frac{-15}{542} \times 10$

$= 55 - 0.277 = 54.723$

অৰ্থাৎ $A.M. = \bar{x} = 54.723$ বছৰ

$\therefore C.V. = \frac{11.876}{54.723} \times 100\% = 21.76\%$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ তলৰ বিভাজনটোৰ কাৰণে মানক বিচলন আৰু বিচৰণ গুণাংক নির্ণয় কৰক।

বয়স (বছৰত) ঃ 20-30 30-40 40-50 50-60 60-70 70-80 80-90

ব্যক্তিৰ সংখ্যা ঃ 6 42 86 122 78 30 5

প্রশ্ন নং ২ঃ তলত কিছুমান সৰু কোম্পানীৰ বার্ষিক লাভ দিয়া হৈছে। সমান্তৰ মাধ্য আৰু মানক বিচলন নির্ণয় কৰক ঃ

লাভ (হাজাৰ টকাত) ঃ 20-30 30-40 40-50 50-60 60-70

কোম্পানীৰ সংখ্যা ঃ 30 58 62 85 112

লাভ (হাজাৰ টকাত) ঃ 70-80 80-90 90-100

কোম্পানীৰ সংখ্যা ঃ 112 57 26

প্রশ্ন নং ৩ঃ তলৰ বিভাজনটো 100জন ছাত্রৰ বয়সৰ বিভাজন। বিভাজনটোৰ মানক বিচলন নির্ণয় কৰক ঃ

বয়স (বছৰত) ঃ 16-17 17-18 18-19 19-20 20-21

ছাত্রৰ সংখ্যা ঃ 4 14 18 28 20

বয়স (বছৰত) ঃ 21-22 22-23

ছাত্রৰ সংখ্যা ঃ 12 4

প্রশ্ন নং ৪ঃ (ক) তলৰ শ্রেণীটোৰ মানক বিচলন কিমান ?

5, 5, 5, 5, 5, 5, 5

(খ) ধৰা হ'ল $a_1, a_2, ..., a_n$ শ্রেণীটোৰ মানক বিচলন σ। $a_1+5, a_2+5, ...,$

a_n+5, শ্রেণীটোৰ মানক বিচলন কিমান হ'ব?

(গ) তলৰ শ্রেণী দুটাৰ মানক বিচলনৰ মাজৰ সম্পর্ক কি?

10, 20, 30, 70, 100, 110 আৰু 1, 2, 3, 7, 10, 11.

প্রশ্ন নং ৫ঃ শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি লওঁক ঃ

(ক) তলৰ কোনটো জোখ একক বিহীন?

a. মানক বিচলন

b. গড় বিচলন

c. বিচৰণ গুণাংক

d. প্রসাৰ

(খ) গড় বিচলন আৰু মানক বিচলনৰ সম্পর্ক হ'ল ঃ

a. 3.M.D = 2 S.D.

b. 6.M.D = 5 S.D.

c. 5 M.D. = 4. S.D.

d. M.D. = S.D.

(গ) যদি এটা শ্রেণীৰ নিম্নতম মান 20 আৰু প্রসাৰ 47, শ্রেণীটোৰ উচ্চতম মান হ'ব ঃ

a. 67

b. 57

c. 48

d. ওপৰৰ কোনোটো নহয়।



৩.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

এই অধ্যায়ত আমি বিচৰণ (বা বিক্ষেপণ) মানে কি বুজায় সেই সম্পর্কে শিকিছোঁ। ইয়াৰ পিছত আমি সমান্তৰ মাধ্যৰ কেইটামান ধর্মৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিছো। তাৰ পিছত আমি প্রসাৰ, আন্তঃ চতুর্থক প্রসাৰ আৰু চতুর্থক বিচলন, গড় বিচলন আৰু মানক বিচলনৰ বিভিন্ন মাপ সম্পর্কে আলোচনা কৰিছো। মাপৰ এককে প্রসাৰণ (বা বিচৰণ) আৰু বিচৰণ গুণাংকৰ ধাৰণাক পৰিবেষ্টিত কৰে। আলোচনা কৰিছো। বৈষম্যতাৰ ধাৰণা প্রতিসমতা (বা সমমিতি)ৰ ধাৰণাৰ পৰা আহৰণ কৰিব পাৰি।



৩.৫ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

১) Agarwal, D. R. (2006). Business Statistics. Delhi, Vrinda Publications.

২) Gupta S.C. (1994). Fundamentals of statistics. New Delhi, Himalayan Publishing House.

৩) Rajagopalan, S. P. & Sattanthan R. (2009).Business Statistics and Operations Research. New Delhi, Tata McGraw-Hill

৪) Sharma, J. K. (2007). Business Statistics. New Delhi. Pearson Education Ltd.

৫) Verma, A. P. (2007). Business Statistics. Guwahat, Asian Books Private Limited.



৩.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ মানক বিচলন =12.18, বিচৰণ গুণাংক = 22.18

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ সমান্তৰ মাধ্য = 63.32 টকা, মানক বিচলন = 18.69 টকা

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ 1.47 বছৰ,

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (ক) 0

(খ) σ

(গ) দ্বিতীয় শ্রেণীৰ মানক বিচলন $= \frac{1}{10} \times$ প্রথম শ্রেণীৰ মানক বিচলন

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (ক) c (খ) c (গ) a



৩.৭আৰ্হি প্রশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্রশ্ন ১ঃ বিচৰণ বুলিলে আপুনি কি বুজে? বিচৰণৰ বিভিন্ন মাপবিলাক কি কি?

প্রশ্ন ২ঃ বিচৰণৰ পৰম মাপ আৰু আপেক্ষিক মাপৰ মাজত পার্থক্য দেখুৱাওক।

প্রশ্ন ৩ঃ মানক বিচলনৰ সংজ্ঞা দিয়ক। বিচৰণৰ মাপ হিচাপে কিয় মানক বিচলনক বিস্তৃতভাৱে ব্যৱহাৰ কৰা হয়?

প্রশ্ন ৪ঃ বিচৰণ গুণাংকৰ বিষয়ে এটি টোকা লিখক।

*** ***** ***

অধ্যায় ৪ঃ অপ্রতিসাম্য, আঘূর্ণবেগ আৰু কুকুদ বক্রতা (SKEWNESS, MOMENTS AND KURTOSIS)

অধ্যায় গাঁথনি

4.1 উদ্দেশ্য

4.2 পৰিচয়

4.3 অপ্রতিসাম্য (Skewness)

4.4 অপ্রতিসাম্যৰ জোখ

4.4.1 কার্ল পীয়ের্চনৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ

4.4.2 বাৱেলীৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ

4.5 ঘূর্ণক মান (Moments)

4.5.1 মাধ্যৰ সাপেক্ষে ঘূর্ণকমান

4.5.2 যাদৃচ্ছিক বিন্দু Aৰ সাপেক্ষে ঘূর্ণকমান

4.5.3 কেন্দ্রীয় আৰু অকেন্দ্রীয় ঘূর্ণকমানৰ মাজৰ সম্পর্ক

4.6 কার্ল পীয়ের্চনৰ বিটা (β) আৰু গামা (δ) সহগ

4.6.1 ঘূর্ণকমানৰ আধাৰত অপ্রতিসাম্যৰ সহগ নির্ণয়

4.7 কুকুদ বক্রতা (Kurtosis)

4.7.1 কুকুদ বক্রতাৰ জোখ

4.8 অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

4.9 অধিক জানিবলৈ

4.10 অগ্রগতিৰ খতিয়ান

4.11 আৰ্হি প্রশ্ন

৪.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- কেন্দ্রীয় প্রবণতাৰ জোখৰ সৈতে অপ্রতিসাম্যৰ পৰিপূৰক সম্পর্ক আৰু তথ্য সমষ্টি এটাৰ বর্ণনা কৰাত বিক্ষেপণৰ ভূমিকা সম্পর্কে জানিব পাৰিব
- বিভিন্ন বর্ণনামূলক পৰিসাংখ্যিক জোখ-মাখৰ সাৰাংশ প্রস্তুত কৰাৰ বাবে ঘূর্ণক মানক কিয় এটা সুবিধাজনক তথা সংহত পদ্ধতি বোলা হয় সেয়া বুজি পাব।

৪.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

দুটা অথবা ততোধিক বিতৰণ ৰাশিৰ মাজত সঠিক তুলনা কৰিবলৈ আৰু এটা বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বৈশিষ্ট্যসমূহ স্পষ্টকৈ প্রকাশ কৰিবলৈ আমি কিছুমান পৰিসাংখ্যিক জোখ-মাখ অধ্যয়ন কৰিব লাগে। কেন্দ্রীয় প্রবণতাৰ জোখে আমাক কোনো এক বিতৰণ ৰাশিৰ কেন্দ্রক লৈ কৰা নিৰীক্ষণৰ গাঢ়তা জনাত সহায় কৰে। বিক্ষেপণৰ জোখ-মাখবোৰে আমাক কেন্দ্রীয় প্রবণতাৰ কিছুমান জোখৰ নিৰীক্ষণৰ বিস্তৃতি (spread) আৰু বিক্ষেপৰ (scatter) ধাৰণা দিয়ে। আমি বিভিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ কথা জানো। এনে বিভাজনৰ প্রকৃতি আৰু উপাদানৰ মাজত বহুতো পার্থক্য থাকে যদিও কেন্দ্রীয় প্রবণতা আৰু বিক্ষেপণ একে হ'ব পাৰে।

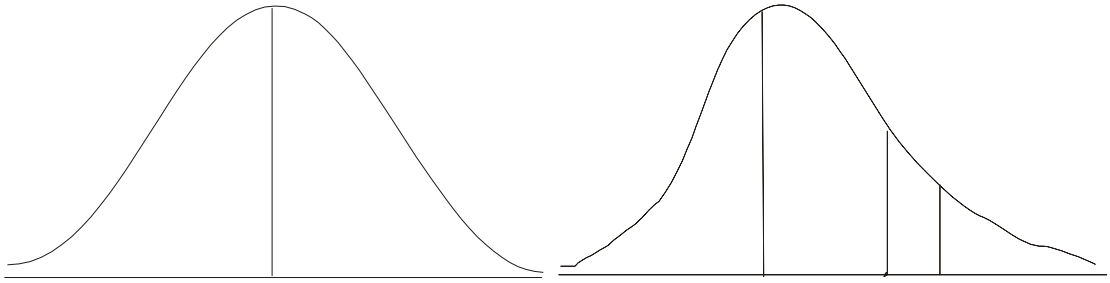
এইবোৰ কাৰণতে এটা বিতৰণ ৰাশিৰ বৈশিষ্ট্য কেৱল কেন্দ্রীয় প্রবণতা আৰু বিক্ষেণৰ দ্বাৰা জুখিলেই নহ'ব। ইয়াক আন দুটা জোখৰ সমর্থন আৰু পৰিপূৰক সহায় লাগিব। সেই জোখ দুটা হ'ল অপ্রতিসাম্য আৰু কুকুদ বক্রতা। অপ্রতিসাম্যই আমাক বিতৰণ ৰাশি এটা সমমিত (symmetry) নে অসমমিত (asymmetry) সেয়া অপ্রতিসাম্য জোখৰ সহায়ত আমি গম পাওঁ। তেনেদৰে কুকুদ বক্রতা কোনো প্রদত্ত তথ্যৰ সহায়ত অংকিত বক্ররেখাৰ (curve) সমানতা (flatness) আৰু শীর্ষবিন্দুৰ (peakedness) কথা বুজায়। এটা বাৰংবাৰতা বিভাজন সম্পূর্ণৰূপে বর্ণনা কৰিবলৈ কেন্দ্রীয় প্রবণতা, বিক্ষেপণ, অপ্রতিসাম্য আৰু কুকুদ বক্রতাৰ জোখ জনাটো জৰুৰী।

৪.৩ অপ্রতিসাম্য (SKEWNESS)

অপ্রতিসাম্যৰ আক্ষৰিক অর্থ হ'ল প্রতিসমতাৰ (সমমিতি) অভাৱ। কোনো এক প্রদত্ত বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ সহায়ত আঁকা বক্ররেখাৰ আকৃতি সম্পর্কে ধাৰণা কৰিবলৈ অপ্রতিসাম্যৰ অধ্যয়ন কৰা হয়। চলকৰ উচ্চ অথবা নিম্নমানৰ দিশলৈ কৰা নিৰীক্ষণবোৰৰ গাঢ়তাৰ প্রকৃতি আৰু সীমা নির্ধাৰণ কৰাত ই সহায় কৰে। যদি অবিচ্ছিন্ন ক্রমৰ এটা প্রতিসম বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বাৰংবাৰতা বক্ররেখাডাল মাধ্যবিন্দুত (ordinate at the mean) ভাজ খায়, তেন্তে ইয়াৰ দ্বাৰা লব্ধ ভাগ দুটা ইটো সিটোৰ সমমানৰ হয়।

যিবোৰ বাৰংবাৰতা বিভাজন প্রতিসম নহয় সেইবোৰকে অসমমিত অথবা অপ্রতিসাম্য বাৰংবাৰতা বোলে। এটা অপ্রতিসাম্য বাৰংবাৰতাত, কোনো তথ্যৰ চৰম মানবোৰ বিভাজনৰ কোনো এটা দিশ নাইবা মূৰলৈ গতি কৰে। ফলত সেই প্রান্তৰ দৈর্ঘ্য বাঢ়ি যায়। যিবোৰ বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বক্ররেখাডালৰ নেজডাল সোঁফালে বেছিকৈ আগবাঢ়ি যায় তাক **ধনাত্মকভাৱে অপ্রতিসাম্য** (positively skewed) (চিত্র 4 . 2) আৰু বাওঁফালে বেছিকৈ আগবাঢ়ি যোৱা নেজ থকা বাৰংবাৰতা বিভাজনক **ঋণাত্মকভাৱে অপ্রতিসাম্য** (negatively skewed) (চিত্র 4 . 3) বোলে।

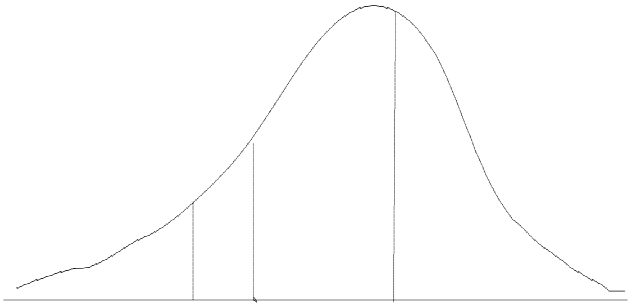
টোকা ঃ 1] এটা প্রতিসম বিভাজনত ঘণ্টা আকৃতিৰ (স্বাভাৱিক বক্ৰৰেখা) ৰেখা এডালৰ সৃষ্টি হয়। ইয়াৰ মাধ্য Ô মধ্যমা Ô বহুলক, অর্থা, তিনিওটা মানেইএকেটা বিন্দুত পৰে (চিত্র 4.1)।



মাধ্যÔমধ্যমাÔবহুলক

(চিত্র 4.1]

(প্রতিসম বিভাজন)



(চিত্র 4.3]

(ঋণাত্মকভাৱে অপ্রতিসাম্য বিভাজন)

2] এটা ধনাত্মকভাৱে অপ্রতিসাম্য বিভাজনত A.M (মাধ্য)> Median (মধ্যমা) > Mode (বহুলক), আৰু এটা ঋণাত্মকভাৱে অপ্রতিসাম্য বিভাজনত AM (মাধ্য)< Median (মধ্যমা) < Mode (বহুলক)।

3] এটা অপ্রতিসাম্য বিভাজনত Q_1 আৰু Q_3 চতুর্থক দুটা মধ্যমাৰ (Median) পৰা সমদূৰত্বত (equidistant) নাথাকে। অর্থাৎ,

$$Q_3 - \text{মধ্যমা} \# \text{মধ্যমা} - Q_1$$

৪.৪ অপ্রতিসাম্য জোখ (MEASURES OF SKEWNESS)

এটা অপ্রতিসাম্য বিভাজন ৰাশিৰ AM আৰু Mode ৰ (বহুলক) মাজৰ প্রভেদকো (AM – Mode) অপ্রতিসাম্যৰ জোখ বুলি ক'ব পাৰি। এটা ধনাত্মকভাৱে অপ্রতিসাম্য বিভাজনৰ AM > Mode আৰু এটা ঋণাত্মকভাৱে অপ্রতিসাম্য বিভাজনৰ AM < Mode হয়। কিন্তু পৰিসংখ্যাবিদৰ মতে এই জোখটো সিমান সমীচিন নহয়। কাৰণ মাধ্য (Mean) আৰু বহুলকৰ (Mode) মান বিভাজনৰ একেটা এককেৰে প্রকাশ কৰা হয়। সেয়েহে জোখৰ ভিন্ন একক থকা দুই অথবা

ততোধিক জোখৰ অপ্রতিসাম্য তুলনা কৰিবলৈ ইয়াক ব্যৱহাৰ কৰিব পৰা নাযায়। এই ত্রুটিবোৰ আঁতৰাবলৈ অপ্রতিসাম্যৰ আপেক্ষিক জোখ (জোখৰ একক নথকা) ব্যৱহাৰ কৰা হয়। এনে জোখবোৰক উমৈহতীয়াভাৱে **অপ্রতিসাম্যৰ সহগ** (Co-efficient of skewness) বোলে। এই সহগ হ'ল একোটা বিশুদ্ধ সংখ্যা (pure number) কার্ল পীয়ের্চনে প্রথমে এই সংখ্যাবোৰেৰে অপ্রতিসাম্য জোসাৰ কথা কৈছিল।

৪.৪.১ কার্ল পীয়ের্চনৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ (Karl Pearson's Co-efficient of Skewness is given by the Formula)

কার্ল পীয়ের্চনৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগটো দর্শাবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা সূত্রটো হ'ল

$$Sk_p = \frac{\text{মাধ্য-বহুলক}}{S.D.} = \frac{\bar{x} - M_o}{\sigma}$$

কিন্তু প্রায়েই বহুলকটো (Mode) অস্পষ্ট হয়। এনে ৰস্থাত সীমিত প্রভাৱযুক্ত অপ্রতিসাম্য বিভাজনৰ বাবে মাধ্য (Mean), বহুলক (Mode) আৰু মধ্যমাৰ (Median) মাজত থকা পৰীক্ষালব্ধ সম্পর্ক ব্যৱহাৰ কৰা হয়। এই সম্পর্কটো হ'ল—

মাধ্য - বহুলক = 3 (মাধ্য- বহুলক)

অর্থাৎ,

$$Sk_p = \frac{\text{মাধ্য-বহুলক}}{S.D.}$$

অভিমত ঃ

1] তাত্বিকভাৱে কার্ল পীয়ের্চনৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগৰ মান ± 3 ৰ মাজত থাকে। কিন্তু বাস্তৱ ক্ষেত্রত খুব কমেইহে এই সীমাত উপনীত হ'ব পৰা যায়। এটা সীমিত প্রভাৱযুক্ত অপ্রতিসাম্য বিভাজনত SK_p সদায় ± 1 ৰ মাজত থাকে।

2] এটা সমমিত বিভাজনত মাধ্য = বহুলক = মধ্যমা হয়। সেয়েহে, $SK_p = 0$ হয়। আন কথাত, এটা সমমিত বিভাজনৰ বাবে SK_p হ'ল ০ ৰ সমান ($SK_p = 0$)।

3] যদি $\bar{x} > \text{Med} > \text{Mo}$ হয়, তেন্তে $SK > 0$ হ'ব।

অর্থাৎ, এটা ধনাত্মকভাৱে অপ্রতিসাম্য বিভাজনৰ বাবে মাধ্যৰ (Mean) মান সবাতোকৈ ডাঙৰ আৰু বহুলকৰ (Mode) মান সবাতোকৈ সৰু হয়।

আনহাতে, যদি $\text{Mo} > \text{Med} > \bar{x}$ হয়, তেন্তে $SK < 0$ হ'ব।

অর্থাৎ, এটা ঋণাত্মকবাৱে অপ্রতিসাম্য বিভাজনত বহুলকৰ মান সবাতোকৈ ডাঙৰ আৰু মাধ্য সবাতোকৈ সৰু হয়।

৪.৪.২ বাৱেলীৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ (Boweley's Co-efficient of Skewness)

অধ্যাপক বাৱেলীয়ে (Prof. Bowely) আগবঢ়োৱা অপ্রতিসাম্যৰ সহগটোক **বাৱেলীৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ** বুলি কোৱা হয়। এয়াক সূত্রত প্রকাশ কৰা হয় এনেদৰে—

$$Sk_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2 \text{ মধ্যমা}}{Q_3 - Q_1}$$

অভিমত ঃ

1] Sk_3 ৰ মান ± 1 ৰ মাজত থাকে।

2] মুক্ত অন্তৰাল শ্রেণী বিভাজনৰ ক্ষেত্রত এই পদ্ধতিৰে অপ্রতিসাম্য জোখাটো যথেষ্ট সুচল।

টোকা ঃ এই কথা মনত ৰাখি থোৱা ভাল যে—

1] কার্ল পীয়ের্চনৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ আৰু বাৱেলীৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ— এই দুয়োটা নিয়মক তুলনা কৰিব নোৱাৰি। কেতিয়াবা ইয়াৰে কোনোবাটোৱে ধনাত্মক মান আৰু আনটোৱে ঋণাত্মক মান দেখুওৱাৰ সম্ভাৱনা থাকে।

2] দুয়োটা নিয়মৰ ভিতৰত SK_p নিয়মটো অধিক ভাৰসাযোগ্য। কাৰণ কেতিয়াবা কোনো বিভাজনৰ $SK_B = 0$ ফলাফল ওলাব পাৱে। কিন্তু বিভাজনটো সম্পূর্ণ ৰূপে সমমিত নহ'বও পাৱে।

উদাহৰণ ১ ঃ এক প্রদত্ত বিভাজন ৰাশিৰ পীয়ের্চনৰ অপ্রতিসাম্যৰ জোখ $\hat{O}$ 0.4, AM = 30 আৰু প্রামাণিক বিচলন = 8। ইয়াৰ মধ্যমা (Median) আৰু বহুলক (Mode) নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $\bar{x} = 30$, $\sigma = 8$ আৰু $SK_p = 0.4$

আমি জানো যে,

$$SK_p = \frac{\bar{x} - }{\sigma}$$

$$\Rightarrow 0.4 = \frac{30 - \text{বহুলক}}{8}$$

$\Rightarrow$ 3.2 = 30 – বহুলক

$\Rightarrow$ বহুলক = 30 – 3.2 = 26.8

আকৌ, $SK_p = \frac{3(\bar{x} - \text{মধ্যমা})}{\sigma}$

$$\Rightarrow 0.4 = \frac{3(30 - \text{মধ্যমা})}{8}$$

$\Rightarrow$ 3.2 = 90 – 3 মধ্যমা

$\Rightarrow$ 3 মধ্যমা = 86.8

$\Rightarrow$ মধ্যমা = 28.93

উদাহৰণ ২ ঃ তলত দিয়া তথ্যবোৰৰ পৰা বিচলনৰ সহগ উলিয়াওক —

মাধ্য = 86, মধ্যমা = 80, পীয়ৰ্চনৰ অপ্রতিসাম্যৰ জোখ = 0.42.

সমাধান ঃ দিয়া হৈছে, $\bar{x}$ = 86, মধ্যমা = 80, SK_p = 0.42.

আমি জানো যে,

$$SK_p = \frac{3(\bar{x} - \text{মধ্যমা})}{\sigma}$$

$$\Rightarrow 0.42 = \frac{3(86-80)}{\sigma}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{18}{0.42} = 42.86$$

$\therefore$ বিচলনৰ সহগ $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

$$= \frac{42.86}{86} \times 100$$

= 49.84%

উদাহৰণ ৩ ঃ তলত দুটা বিভাজনৰ মাধ্য, মধ্যমা আৰু প্রামাণিক বিচলন দিয়া হৈছে। কোনটো বিভাজন ৰাশি অধিক অপ্রতিসাম্য নির্ণয় কৰক।

(i) মাধ্য = 22, মধ্যমা = 24, SD = 10

(ii) মাধ্য = 22, মধ্যমা = 25, SD = 12

সমাধান ঃ ইয়াত, পীয়ৰ্চনৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ (SK_p) নিয়মটো প্রযোজ্য—

$$SK_p = \frac{3(\text{ মাধ্য- মধ্যমা })}{SD.}$$

(i) নং বিভাজন ৰাশিৰ বাবে, $SK_p = \frac{3(22-24)}{10} = -0.6$

(ii) নং বিভাজন ৰাশিৰ বাবে, $SK_p = \frac{3(22-25)}{12} = -0.75$

$\therefore$ (i)ৰ বাবে $|SK_p| = 0.6$

(ii)ৰ বাবে $|SK_p| = 0.75$

যিহেতু, (ii) বাবে $|SK_p| >$ (i)ৰ বাবে $|SK_p|$,

$\therefore$ (ii) ৰ বিভাজন ৰাশিটো অধিক অপ্রতিসাম্য।

উদাহৰণ ৪ ঃ কোনো এক নিৰীক্ষণ সমষ্টিৰ মুঠ সংখ্যা হ'ল 452, নিৰীক্ষণ সমষ্টিৰ বর্গবোৰৰ যোগফল হ'ল 24,270, Mode = 43.7। সমষ্টিটোৰ পীয়ৰ্চনৰ অপ্রতিসাম্যৰ

সহগ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, n = 10, $\Sigma x = 452, \Sigma x^2 = 452, \Sigma x^2 = 24,270$ আৰু

বহুলক = 43.7

$\therefore$ মাধ্য $(\bar{x}) = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{452}{10} = 45.2$

$$S.D.(\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{24270}{10} - (45.2)^2} = 19.59$$

$$\therefore SK_p = \frac{\bar{x} - \text{বহুলক}}{\sigma} = \frac{45.2 - 43.7}{19.59} = -0.08$$

উদাহৰণ ৫ ঃ এটা বাৰংবাৰতা বিভাজনত চতুর্থকৰ ভিত্তিত নির্ণয় কৰা অপ্রতিসাম্য সহগ হ'ল 0.6। যদি উর্দ্ধ আৰু নিম্ন চতুর্থক দুটাৰ যোগফল 100 আৰু মধ্যমা 38 হয়, তেন্তে Q_3 কিমান হ'ব?

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $SK_B = 0.6$

$Q_3 + Q_1 = 100$

মধ্যমা = 38

আমি জানো যে, $SK_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2 \text{ মধ্যমা}}{Q_3 - Q_1}$

$$\Rightarrow 0.6 = \frac{100 - 76}{Q_3 - Q_1}$$

$$\Rightarrow Q_3 - Q_1 = \frac{24}{0.6} = 40$$

দিয়া আছে, $Q_3 + Q_1 = 100$

$\therefore (Q_3 - Q_1) + (Q_3 + Q_1) = 40 + 100$

$\Rightarrow 2Q_3 = 140$

$\Rightarrow Q_3 = 70$

উদাহৰণ ৬ ঃ তলৰ তথ্যবোৰৰ পৰা কার্লপীয়েৰ্চনৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ গণনা কৰি উলিয়াওক।

ওজন (কিঃগ্রাঃ) ঃ	10	20	30	40	50	60	70
বাৰংবাৰতা ঃ	1	5	12	22	17	9	4

সমাধান ঃ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ গণনাৰ তালিকা

ওজন (কিঃগ্রাঃ) (x)	বাৰংবাৰতা (f)	d = x –A	$d'=d/10$	fd'	fd'^2
10	1	–30	–3	–3	9
20	5	–20	–2	–10	20
30	12	–10	–1	–12	12
40	22	0	0	0	0
50	17	10	1	17	17
60	9	20	2	18	36
70	4	30	3	12	36

70 = N $\Sigma fd' = 22$ $\Sigma fd'^2 = 130$

ধৰা হ'ল, আনুমানিক মাধ্য = A = 40

ইয়াত i = 10

$$\therefore \bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{N} \times i$$

$$= 40 + \frac{22}{70} \times 10$$

= 43.14 kg.

বহুলক = 40 (পৰীক্ষা কৰি পোৱা গ'ল)

$$SD(\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd'}{N}\right)^2} \times i$$

$$= \sqrt{\frac{130}{70} - \left(\frac{22}{70}\right)^2} \times 10 = 13.27$$

$$\therefore SK_P = \frac{\bar{x} - \text{বহুলক}}{\sigma} = \frac{43.1 - 40}{13.26} = 0.23$$

উদাহৰণ ৭ ঃ তলত দিয়া তথ্যবোৰৰ পৰা কার্ল পীয়ের্চনৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ গণনা কৰি উলিয়াওক।

উচ্চতা (ছে.মি.)	130-134	135-139	140-144	145-149	150-154	155-159	160-164
বাৰংবাৰতা	3	12	21	28	19	12	5

সমাধান ঃ কার্ল পীয়েৰ্চনৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ গণনাৰ তালিকা।

উচ্চতা (ছে.মি.)	(f)	মধ্যমান (x)	d = x–A	d′=d/5	fd^1	fd^{12}	শ্রেণী সীমা
130-134	3	132	–15	–3	–9	27	129.5–134.5
135–139	12	137	–10	–2	–24	48	134.5–139.5
140–144	21	142	–5	–1	–21	21	139.5–144.5
145–149	28	14.7	0	0	0	0	144.5–154.5
150–154	19	152	5	1	19	19	149.5–154.5
155–159	12	157	10	2	24	48	154.5–159.5
160–164	5	162	15	3	15	45	159.5–164.5
	100				4= $\Sigma fd'$	208	
	= N					= Σfd^{12}	

ধৰা হ'ল, A = 147 ইয়াত i = 5

$$\therefore \bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{N} \times i$$

$$= 147 + \frac{4 \times 5}{100} = 147.2\ cm$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^{12}}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2} \times i$$

$$= \sqrt{\frac{208}{100} - \left(\frac{4}{100}\right)^2} \times 5$$

$$= \sqrt{2.08 - .0016} \times 5$$

= 7.21 ছেঃ মিঃ

ইয়াত, বহুলক শ্রেণীটো হ'ল 144.5 – 149.5

$$\therefore \text{বহুলক} = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

$$= 144.5 + \frac{28 - 21}{56 - 21 - 19} \times 5$$

$$= 144.5 + \frac{35}{16}$$

= 146.69 ছেঃ মিঃ

$$\therefore SK_P = \frac{\bar{x} - \text{বহুলক}}{\sigma} = \frac{147.2 - 146.69}{7.21} = 0.07$$

উদাহৰণ ৮ ঃ তলত দিয়া তথ্যবোৰৰ পৰা উপযুক্ত অপ্রতিসাম্য জোখটো বাহিৰ কৰক।

বয়স (বছৰ) ঃ 20ৰ কম 20–25 25–30 30–35 35–40 40–45 45–50 50 ৰ বেছি কর্মচাৰীৰ

সংখ্যা 13 29 46 60 112 94 45 21

সমাধান ঃ ই হ'ল এটা মুক্ত অন্তৰাল শৃংখলা। সেয়েহে ইয়াৰ ক্ষেত্রত সবাতোকৈ উপযুক্ত অপ্রতিসাম্যৰ সহগ জোখা নিয়মটো হ'ব বাৱেলীৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ নির্ণয় পদ্ধতি।

বয়স (বছৰত)	কর্মচাৰীৰ সংখ্যা (f)	c.f.
20 কম	13	13
20 – 25	29	42
25 – 30	46	88
30 – 35	60	148
35 – 40	112	260
40 – 45	94	354
45 – 50	45	399
50 ৰ বেছি	21	420

420 = N

আমি জানো যে, বাৱেলীৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ উলিওৱা সূত্রটো হ'ল—

$$= SK_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2 \text{ মধ্যমা}}{Q_3 - Q_1}$$

ইয়াত N = 420

$\therefore$ $Q_1 = \left(\frac{N}{4}\right)^{\text{তম}}$ মান $= \frac{420}{4} = 105^{\text{তম}}$ মান

মধ্যমা = $\left(\frac{N}{2}\right)^{\text{তম}}$ মান $= \frac{420}{2} = 210^{\text{তম}}$ মান

$Q_3 = \left(\frac{3N}{4}\right)^{\text{তম}}$ মান $= \frac{3 \times 420}{4} = 315^{\text{তম}}$ মান

$\therefore$ Q_1 শ্রেণীটো হ'ব 30 – 35

মধ্যমা শ্রেণীটো হ'ব 35 – 40

Q_3 শ্রেণীটো হ'ব 40 – 45

$\therefore$ $Q_1 = l + \frac{N/4 - cf}{f} \times i$

$$= 30 + \frac{105-88}{60} \times 5$$

= 30 + 1.42 = 31.42 বছৰ

$$\text{মধ্যমা } = l + \frac{N/2 - cf}{f} \times i$$

$$= 35 + \frac{210-148}{112} \times 5$$

= 34 + 2.77 = 37.77 বছৰ

$$\text{আৰু } Q_3 = l + \frac{3N/4 - cf}{f} \times i$$

$$= 40 + \frac{315-260}{94} \times 5$$

= 42 + 2.93 = 42.93 yrs

$$\therefore SK_B = \frac{42.93 + 31.42 - 2 \times 37.77}{42.93 - 31.42}$$

$$= \frac{-1.19}{11.51} = -0.103$$

৪.৫ ঘূর্ণকমান (MOMENTS)

পৰিসংখ্যাত 'ঘূর্ণকমান' (Moments) সংজ্ঞাটিৰে এক বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বিভিন্ন বৈশিষ্ট্যৰ বিষয়ে বুজোৱা হয়। বৈশিষ্ট্যসমূহ হ'ল— কেন্দ্রীয় প্রৱণতা, বিক্ষেপণ,অপ্রতিসাম্য আৰু কুকুদ বক্রতা।

৪.৫.১ মাধ্যৰ সাপেক্ষে ঘূর্ণকমান (Moments About Mean)

ধৰা হ'ল, x চলকৰ মানবোৰ হ'ল ক্রমে $x_1, x_2, \ldots x_n$. ইয়াৰ $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n}$ হ'ল সমান্তৰ মাধ্য (arithmetic mean/A.M.)।

এতিয়া, $\bar{x}$ মাধ্যৰ সাপেক্ষে r ৰ r^{th} ঘূর্ণকমানটোক সাধাৰণতে Mr প্রতীকেৰে বুজোৱা হয় [ইয়াত μ হ'ল গ্রীক বর্ণমালাৰ (mu) বর্ণটো] ঘূর্ণকমান নির্ণয়ৰ সূত্রটো হ'ল—

$$\mu_r = \frac{1}{n}\Sigma(x - \bar{x})^r \qquad r = 1, 2, 3, 4 \qquad 4.5.1\ (a)$$

একেদৰে, x চলকৰ বাৰংবাৰতা বিভাজন এটাৰ বাবে

x	x_1	x_2	x_n	
y	f_1	f_2	f_n	$\Sigma f = N$

ইয়াত, $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N}$ হ'ব সমান্তৰ মাধ্য (AM)।

তেন্তে, $\bar{x}$ ৰ সাপেক্ষে r^{th} ঘূর্ণকমানটো তলৰ সূত্রটোৰ সহায়ত নির্ণয় কৰা হ'ব—

$$\mu_r = \frac{1}{N}\Sigma f(x-\bar{x})^r, \; r = 1, 2, 3, 4 \qquad 4.5.1 \text{ (b)}$$

এতিয়া, 4.5.1 (a) আৰু 4.5.1 (b)ত r = 1 বহুৱাই আমি পাম

$\mu_1 = \frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})^r = 0$ $\rightarrow$ এটা একক শৃংখলাৰ বাবে

$\mu_1 = \frac{1}{N}\Sigma f(x-\bar{x})^r = 0$ $\rightarrow$ এটা বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বাবে

[কাৰণ, এটা প্রদত্ত নিৰীক্ষণ সমষ্টিৰ সমান্তৰ মাধ্যৰ চলকবোৰৰ বীজগণিতীয় যোগফল হ'ল শূন্য।]

অর্থাৎ, মাধ্যৰ সাপেক্ষে প্রথম ঘূর্ণকমানটো সদায় শূন্য হ'ব।

এতিয়া, ধৰা হ'ল r = 2.

$\mu_2 = \frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})^2 = \sigma x^2$ $\rightarrow$ একক শৃংখলাৰ বাবে

$\mu_2 = \frac{1}{N}\Sigma f(x-\bar{x})^2 = \sigma x^2$ $\rightarrow$ বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বাবে

অর্থাৎ, মাধ্যৰ সাপেক্ষে দ্বিতীয় ঘূর্ণকমানটো হ'ল বিভাজন তালিকাৰ প্রসৰণ (variance)।

একেদৰে, $\left.\begin{aligned}\mu_3 &= \frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})^3 \\ \mu_4 &= \frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})^4\end{aligned}\right\}$ একক শৃংখলাৰ বাবে

আৰু $\left.\begin{aligned}\mu_3 &= \frac{1}{N}\Sigma f(x-\bar{x})^3 \\ \mu_4 &= \frac{1}{N}\Sigma f(x-\bar{x})^4\end{aligned}\right\}$ বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বাবে

৪.৫.২ যাদৃচ্ছিক বিন্দু Aৰ সাপেক্ষে ঘূর্ণকমান (Moments About Arbitrary Point A)

যেতিয়া কোনো বিভাজন ৰাশিৰ প্রকৃত মাধ্য এটা ভগ্নাংশ হয় তেতিয়া এটা কল্পিত মাধ্য Aৰ (যাদৃচ্ছিক বিন্দু) সাপেক্ষে ঘূর্ণকমানবোৰ প্রথমে গণি লোৱা হয়। এই

মানবোৰ তাৰ পাছত প্রকৃত মাধ্যলৈ সলনি কৰা হয়।

চলক x ৰ যাদৃচ্ছিক বিন্দু A সাপেক্ষে r^{th} ঘূর্ণকমানটো হ'ব—

$$\mu'_r = \frac{\Sigma(x-A)^r}{n} \qquad \rightarrow \text{একক শৃংখলাৰ বাবে}$$

আৰু $$\mu'_r = \frac{\Sigma f(x-A)^r}{N} \qquad \rightarrow \text{বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বাবে}$$

এতিয়া, $$\mu'_1 = \frac{1}{n}\Sigma(x-A)^2 = \frac{1}{n}\Sigma x - \frac{1}{n}\Sigma A$$

$$= \bar{x} - \frac{1}{n} \times nA = \bar{x} - A$$

লগতে $$\mu'_1 = \frac{1}{N}\Sigma f(x-A)$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma fz - \frac{1}{N}\Sigma fA$$

$$= \bar{x} - \frac{A}{N}\Sigma f = \bar{x} - \frac{A}{N} \times N = \bar{x} - A$$

$\therefore$ একক শৃংখলা আৰু বাৰংবাৰতা বিভাজন দুয়োটাৰে বাবে

$$\boxed{\mu'_1 = \bar{x} - A}$$

টোকা ঃ 1] μ_r হ'ল মাধ্যৰ সাপেক্ষে r^{th} ঘূর্ণকমান, r = 1, 2, 3, 4, ... বোৰক **কেন্দ্রীয় ঘূর্ণকমান (Central moments)** বোলা হয়। μ'_r হ'ল যিকোনো যাদৃচ্ছিক বিন্দু A ৰ সাপেক্ষে r^{th} ঘূর্ণকমান, এনে মানক **অসম্পূর্ণ ঘূর্ণকমান (raw moments)** অথবা **অ-কেন্দ্রীয় ঘূর্ণকমান (non-central moments)** বোলা হয়।

2] চতুর্থ ক্রমতকৈ ডাঙৰ (কেন্দ্রীয় অথবা অ-কেন্দ্রীয়) ক্রমৰ ঘূর্ণকমান কেতিয়াবাহে প্রয়োগ কৰা হয়।

৪.৫.৩ কেন্দ্রীয় আৰু অকেন্দ্রীয় ঘূর্ণকমানৰ মাজৰ সম্পর্ক (Relation Between Central and Raw Moments)

কেন্দ্রীয় ঘূর্ণকমান $= \mu_r = \frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})^r$

এটা যাদৃচ্ছিক বিন্দু A ৰ সাপেক্ষে অকেন্দ্রীয় ঘূর্ণকমান

$$\mu'_r = \frac{1}{n}\Sigma(x-A)^r$$

এতিয়া, $$\mu_r = \frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})^r$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma\{x - A - (\bar{x} - A)\}^r$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma\left(x - A - \mu'_1\right)^r$$

$$= \frac{1}{n}\left[\Sigma(x-A)^r - {}^rC_1\ \mu'_1\Sigma(x-A)^{r-1} + {}^rC_2(\mu'_1)^2\ \Sigma(x-A)^{r-2} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^r(\mu'_1)^r\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\Sigma(x-A)^r - {}^rC_1\ \mu'_1\frac{1}{n}\Sigma(x-A)^{r-1} + {}^rC_2(\mu'_1)^2\ \Sigma(x-A)^{r-2} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^r(\mu'_1)^r\right]$$

$$= \mu'_r - {}^rC_1\ \mu'_1\mu'_{r-1} + {}^rC_2(\mu'_1)^2\mu'_{r-2} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^r(\mu'_1)^r$$

ওপৰৰ সম্পৰ্কবোৰৰ পৰা r ৰ বিভিন্ন মানৰ বাবে আমি পাম—

r = 1 ৰ বাবে, $\mu_1 = \mu'_1$

r = 2 ৰ বাবে, $\mu_2 = \mu'_2 - {}^2C_1\mu'^2_1 + {}^2C_2\mu'^2_1\mu'_0$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_2 = \mu'_2 - (\mu'_1)^2}$$

$$\mu_0 = \frac{1}{n}\Sigma(x-x)^0$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma 1$$

$$= \frac{n}{n} = 1$$

$$\mu'_0 = \frac{1}{n}\Sigma(x-A)^0$$

$$= \frac{1}{n}\Sigma 1$$

$$= \frac{n}{n} = 1$$

r = 3 ৰ বাবে, $\mu_3 = \mu'_3 - {}^3C_1\mu'_1\ \mu'_2 + {}^3C_2(\mu'_1)^2\mu'_1 - {}^3C_3(\mu'_1)^3\mu'_0$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_1\ \mu'_2 + 2(\mu'_1)^3}$$

একেদৰে,

r = 4 ৰ বাবে $\boxed{\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_1\ \mu'_3 + 6\mu'_2(\mu'_1)^2 - (\mu'_1)^4}$

উদাহৰণ ৯ ঃ এটা বিভাজন ৰাশিৰ 5 মানৰ সাপেক্ষে প্ৰথম দুটা ঘূৰ্ণকমান হ'ল ক্ৰমে— 2 আৰু 20। বিভাজনটোৰ মাধ্য আৰু প্ৰসৰণ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে A = 5, $\mu'_1 = 2,\ \mu'_2 = 20$

আমি জানো যে, মাধ্য $(\bar{x}) = A + \mu_1' = 5 + 2 - 7$

প্রসৰণ $(\sigma^2) = \mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2$

$= 20 - (2)^2 = 16$

উদাহৰণ ১০ ঃ 2, 4, 6 আৰু 8 এই সংখ্যা সংহতিটোৰ মাধ্যৰ সাপেক্ষে প্রথম চাৰিটা ঘূর্ণকমান উলিয়াওক।

সমাধান ঃ $\mu_r = r^{th}$ কেন্দ্রীয় ঘূর্ণকমান

$$= \frac{\Sigma(x-\bar{x})^r}{n}, \text{ r = 1, 2, 3, 4}$$

প্রথম চাৰিটা ঘূর্ণকমান গণনাৰ তালিকা

x	$x - \bar{x} = x - 5$	$(x-\bar{x})^2$	$(x-\bar{x})^3$	$(x-\bar{x})^4$
2	–3	9	–27	81
4	–1	1	–1	1
6	1	1	1	1
8	3	9	27	81
$20 = \Sigma x$	$0 = \Sigma(x-\bar{x})$	$20 = \Sigma(x-\bar{x})^2$	$0 = \Sigma(x-\bar{x})^3$	$164 = \Sigma(x-\bar{x})^4$

$\therefore \ \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{20}{4} = 5$

$\therefore \ \mu_1 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})}{4} = 0, \quad \mu_2 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{4} = \frac{20}{4} = 5$

$\mu_3 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^3}{4} = 0, \quad \mu_4 = \frac{\Sigma(x-\bar{x})^4}{4} = \frac{164}{4} = 41$

উদাহৰণ ১১ ঃ এটা বিতৰণৰ 4 মানৰ সাপেক্ষে প্রথম চাৰিটা ঘূর্ণকমান হ'ল ক্রমে – 1.5, 17, – 30 আৰু 108। মাধ্যৰ সাপেক্ষে ঘূর্ণকমান উলিয়াওক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, A = 4

$$\mu_1' = -1.5, \ \mu_2' = 17, \ \mu_3' = -30, \ \mu_4' = 108$$

$\therefore$ মাধ্যৰ সাপেক্ষে প্রথম ঘূর্ণকমান = μ_1

$= A + \mu_1'$

= 4 – 1.5 = 2.5

মাধ্যৰ সাপেক্ষে দ্বিতীয় ঘূর্ণকমান = μ_2

$= \mu_2' - (\mu_1')^2$

= 17 – (–1.5)² = 14.75

মাধ্যৰ সাপেক্ষে তৃতীয় ঘূর্ণকমান = μ_3

$$= \mu_3' - 3\mu_3'\mu_3' + 2(\mu_3')^3$$

$$= -30 - 3(-1.5) \times (17) + 2(-1.5)^3$$

$$= -30 + 76.5 - 6.75 = 39.75$$

মাধ্যম সাপেক্ষে চতুর্থ ঘূর্ণকমান

$$= \mu_4 = \mu_4' - 4\mu_1'\mu_3' + 6(\mu_1')^2 - 3(\mu_1')^4$$

$$= 108 - 4 \times (-1.5)(-30) + 6(-1.5)^2 \times 17 - 3(-1.5)^4$$

$$= 108 - 180 + 229.5 - 15.1875$$

$$= 142.3125$$

৪.৬ কার্ল পীয়ের্চনৰ বিটা (β) আৰু গামা সহগ (δ) (KARL PEARSON'S BETA (β) AND GAMMA (δ) COEFFICIENT)

প্রথম চাৰিটা ঘূর্ণকমানৰ আধাৰত অধ্যাপক কার্ল পীয়ের্চনে তলৰ সহগ চাৰিটা নির্ণয় কৰি উলিয়াইছিল—

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\beta_1} = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} \quad \left[\because \mu_2 = \sigma^2\right]$$

$$\alpha_2 = \beta_2 - 3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3$$

৪.৬.১ ঘূর্ণকমানৰ আধাৰত অপ্রতিসাম্যৰ সহগ নির্ণয় (Co-efficient of Skewness Based on Moments)

ঘূর্ণকমানৰ আধাৰত নির্ণিত অপ্রতিসাম্যৰ সহগবোৰ হ'ল—

$$SK = \frac{\beta_2 + 3\sqrt{\beta_1}}{2(5\beta^2 - 6\beta_1 - 9)}$$

$\therefore$ যদি $\beta_1 = 0$ অথবা $\beta_2 + 3 = 0 \Rightarrow \beta_2 = -3$ হয়, তেন্তে Sk = 0

কিন্তু $\mu_4 = \frac{1}{n}\Sigma(x - \bar{x})^4 > 0$

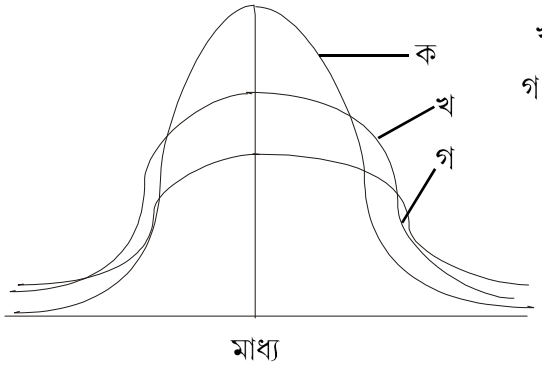
আৰু $\mu_2 = \frac{1}{n}\Sigma(x - \bar{x})^2 > 0$

$$\therefore\ \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^{\,2}} > 0$$

যিহেতু β_2 ঋণাত্মক হ'ব নোৱাৰে, সেয়েহে যদি $\beta_1 = 0$ হয়, তেন্তে $S_K = 0$

৪.৭ কুকুদ বক্রতা (KURTOSIS)

এতিয়ালৈকে আমি বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বৈশিষ্ট্য বর্ণনা কৰিব পৰা তিনিটা জোখ কেন্দ্রীয় প্রবণতা, বিক্ষেপণ আৰু অতিসাম্যৰ বিষয়ে পঢ়িলো। তথাপিও আমি এটা বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ সম্পূর্ণ বৈশিষ্ট্য প্রকাশ কৰিব নোৱাৰিম। তলৰ ৰেখাচিত্রখন চালেই কথাটো ভালদৰে বুজি পাম।



ক — লঘূকুকুদ বক্রতা (Lapto Kurtic)
খ — মধ্যকুকুদ বক্রতা (Meso Kurtic)
গ — ফলককুকুদ বক্রতা (Platy Kurtic)

তিনিওডাল বক্র ৰেখাই মাধ্যত সমমিত আৰু কিছুমান ভেদযুক্ত (প্রসাৰণবিস্তৃতি)। কিন্তু বক্র ৰেখাকেইডালৰ মাজ অংশৰ আকৃতি আৰু প্রকৃতি বেলেগ বেলেগ। অর্থাৎ, তিনিওডাল ৰেখাৰে শীর্ষবিন্দু ভিন ভিন। সেয়েহে কোনো এক বিভাজন শ্রেণীৰ বৈশিষ্ট্য সম্পূর্ণৰূপে চিনাক্ত কৰি উলিয়াবলৈ আমি আন এটা জোখৰ বিষয়ে জানিব লাগিব। ইয়াকে কুকুদ বক্রতা (Kurtosis) বোলে।

কুকুদ বক্রতা বুজোৱা ইংৰাজী Kurtosis শব্দটো আহিছে গ্রীক ভাষাৰ পৰা। ইয়াৰ অর্থ হ'ল 'কুঁজ থকা' (humped)। পৰিসংখ্যাত Kurtosis শব্দটোৱে কোনো বাৰংবাৰতা বক্রৰেখাৰ সমতলতা অথবা তুংগতাৰ (flatness or peakedness) মাত্রা বুজায়।

চিত্রৰ খ বক্রৰেখাডাল সমান আৰু তুংগ উঠা কোনটোৱেই নহয়। এনে বক্রৰেখাক স্বাভাৱিক বক্রৰেখা বুলি কোৱা হয় আৰু ইয়াৰ কুঁজটোক প্রামাণিক কুঁজ বুলি ধৰা হয়। এই বক্রৰেখাডালৰে নাম হ'ল **মধ্যকুকুদ (mesokurtic)**। ক বক্রৰেখাডাল হ'ল স্বাভাৱিক বক্রৰেখাডালতকৈ অধিক জোঙা। এই ৰেখাক **লঘূকুকুদ (leptokurtic)** বোলা হয়। গ ৰ দৰে বক্রৰেখাবোৰ হ'ল স্বাভাৱিক বক্রৰেখাতকৈ বেছি সমান। এই ৰেখাক ফলক কুকুদ **(platykurtic)** বোলা হয়।

৪.৭.১ কুকুদ বক্রতাৰ জোখ (Measures of Kurtosis)

কুকুদ বক্রতা জুখিবলৈ কার্ল পীয়ের্চনে বিটা টু (β_2) অথবা ইয়াৰ ব্যুৎপন্ন (derivative) গামা টু (δ_2) এই সহগ দুটাৰ প্রয়োগ প্রচলন কৰিছিল. সহগ দুটা উলিওৱাৰ সূত্র দুটা হ'ল—

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^{\,2}} = \frac{\mu_4}{6^4} \qquad \rightarrow \text{4.7.1 (a)}$$

$$\alpha_2 = \beta_2 - 3 = \frac{\mu_4}{6^4} - 3 \qquad \rightarrow \text{4.7.2 (b)}$$

এডাল স্বাভাৱিক বক্রৰেখাৰ ক্ষেত্রত (মধ্যকুকুদ বক্রতা) $\beta_2 = 3$ অথবা $\gamma_2 = 0$ হয়। লঘূকুকুদ বক্রতাৰ ক্ষেত্রত এই জোখ হ'ল $\beta_2 > 3$ অথবা $r_2 > 0$। ফলক কুকুদ বক্রতাৰ বাবে $\beta_2 < 3$ অথবা $\gamma_2 < 0$ বুলি ধৰা হয়।

টোকা ঃ বৃটিছ পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানী ডব্লিউ এছ গ'ছেটে ফলক কুকুদ আৰু লঘূকুকুদ বক্রতাৰ ইংৰাজী নামকেইটা সন্দর্ভত এইদৰে কৈছিল— **'ফলককুকুদ বক্রতা (platykurtic) হ'ল প্লেটিপাচৰ দৰে চুটি নেজৰ, লঘূকুকুদ বক্রতা (leptokurtic) ওখ আৰু বহু ওপৰলৈ জপিয়াব পৰা কেংগাৰুৰ দৰে দীঘলনেজীয়া।'**

উদাহৰণ ১২ ঃ এটা বিভাজনৰ 5 মানৰ প্রথম চাৰিটা ঘূর্ণকমান হ'ল 2, 20, 40 আৰু 50। বিভাজনটো ফলককুকুদ বক্রতাৰ বুলি আপুনি ভাবেনে ?

সমাধান ঃ দিয়া আছে, A = 5, $\mu_1' = 2,\ \mu_2' = 20,\ \mu_3' = 40,\ \mu_4' = 50$

$\therefore$ মাধ্য $(\bar{x}) = \mu_1' + A = 2 + 5 = 7$

এতিয়া, $\mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = 20 - (2)^2 = 16$

$\therefore$ প্রসাৰণ $\mu_2 = 16$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 2(\mu_1')^3$$

$= 40 - 3 \times 2 \times 20 + 2\,(2)^3 = -64.$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_1'\mu_3' + 6\mu_2'(\mu_1')^2 - 3(\mu_1')^4$$

$= 50 - 4 \times 2 \times 40 + 6 \times 20 \times (2)^2 - 3(2)^4 = 162$

$$= \beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^{\,2}} = \frac{162}{(16)^2} = 0.63$$

যিহেতু $\beta_2 < 3$, এতেকে বিভাজনটো ফলক কুকুদ বক্রতাৰ।

উদাহৰণ ১৩ ঃ এটা বিভাজনৰ মূলবিন্দুৰ সাপেক্ষে প্রথম চাৰিটা ঘূর্ণকমান হ'ল ক্রমে 1, 4, 10 আৰু 46 ইয়াৰ কেন্দ্রীয় ঘূর্ণকমান নির্ণয় কৰক আৰু বিভাজনটোৰ প্রকৃতি নিৰূপণ কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, A = 0, $\mu_1' = 1,\ \mu_2' = 4,\ \mu_3' = 10,\ \mu_4' = 46$

$\therefore$ মাধ্য $(\bar{x}) = A + \mu_1' = 0 + 1 = 1$

প্রসৰণ $(\sigma)^2 = \mu_2 = \mu_2' - (\mu_1')^2 = 4 - (1)^2 = 3$

$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2(\mu_1')^3$

$= 10 - 3 \times 4 \times 1 + 2(1)^3$

$= 0$

$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3'\mu_1' + 6\mu_2'(\mu_1')^2 - 3(\mu_1')^4$

$= 46 - 4 \times 10 \times 1 + 6 \times 4 \times 1 - 3 = 27$

$\therefore$ কার্ল পীয়েৰ্চনৰ অপ্রতিসাম্যৰ ঘূর্ণকমান সহগ উলিওৱা সূত্র মতে

$$\delta_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}} = 0, \quad \beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 0$$

যিহেতু $\beta_1 = 0$ হ'ল, সেয়েহে প্রদত্ত বিভাজনটো সমমিত (স্বাভাৱিক) হ'ব।

আকৌ, কার্ল পীয়েৰ্চনৰ কুকুদ বক্রতা জোখা নিয়ম মতে

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{27}{(3)^2} = 3$$

আৰু $\delta_2 = \beta_2 - 3 = 0$

যিহেতু $\beta_2 = 3$ হ'ল, সেয়েহে প্রদত্ত বিভাজনটো মধ্যকুকুদ (স্বাভাৱিক) বক্রতাৰ হ'ব।

ইয়াৰ মাধ্য $(\bar{x}) = 1$

আৰু $S.D = \sqrt{3} = 1.732$

উদাহৰণ ১৪ ঃ যদি $\beta_1 = +1,\ \beta_2 = 4$ আৰু প্রসৰণ (variance) = 9 হয়, তেন্তে μ_3 আৰু μ_4 ৰ মান নির্ণয় কৰক। কুকুদ বক্রতাৰ প্রকৃতি নিৰূপণ কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $\beta_1 = +1,\ \beta_2 = 4$

প্রসৰণ $= \sigma^2 = \mu_2 = 9$

এতিয়া, $\beta_1 = +1 \ \Rightarrow \ \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = 1 \ \Rightarrow \mu_3^2 = \mu_2^3 = 9 \times 9 \times 9 = (3 \times 3 \times 3)^2$

$$\Rightarrow \mu_3^2 = (27)^2$$

$$\Rightarrow \mu_3 = \pm\, 27^2$$

একেদৰে $\beta_2 = 4$

$$\Rightarrow \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = 4$$

$$\Rightarrow \mu_4 = 4 \times 9 \times 9 = 324$$

$\therefore \mu_3 = \pm 27$ আৰু $\mu_4 = 324$

$\mu_2 = 4 > 3$

অর্থাৎ প্রদত্ত বিভাজনটো লঘূকুকুদ বক্রতাৰ (leptokurtic)।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং 1ঃ বাৰংবাৰতা বক্ররেখা অংকন কৰি অপ্রতিসাম্যৰ অর্থ ব্যাখ্যা কৰক। অপ্রতিসাম্য আৰু বিক্ষেপণৰ মাজত কি পার্থক্য আছে?

প্রশ্ন নং 2ঃ কার্ল পীয়ের্চন আৰু বাৱেলীৰ অপ্রতিসাম্যৰ জোখৰ মাজত থকা পার্থক্য নির্ণয় কৰক। আপুনি কোনটো পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰিবলৈ ভাল পাব আৰু তাৰ কাৰণ কি?

প্রশ্ন নং 3ঃ কুকুদ বক্রতা কেনেকৈ জোখা হয়?

প্রশ্ন নং 4ঃ খালী ঠাই পূৰণ কৰক—

(i) এটা প্রতিসম (সমমিত) বিভাজনৰ মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলক .....।

(ii) যদি $\mu_2 > 3$ হয়, তেন্তে বক্ররেখাডালক ..... বুলি কোৱা হয়।

(iii) যদি $\mu_1 = 0$ হয়, তেন্তে বিভাজনটো ..... হ'ব।

(iv) যদি বহুলক > মাধ্য হয়, তেন্তে বিভাজনটো ..... অপ্রতিসাম্য।

(v) কুকুদ বক্রতাই বাৰংবাৰতা বক্ররেখাৰ ..... জোখে।

(vi) বাৱেলীৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ ..... ৰ মাজত থাকে।

(vii) কুকুদ বক্রতাৰ আপেক্ষিক জোখ হ'ল .....।

প্রশ্ন নং 5ঃ তলৰ উক্তিবোৰ সঁচানে মিছা কওক—

(i) এটা প্রতিসম (সমমিত) বিভাজনৰ $\beta_1 = 0$ হয়।

(ii) বৱেলীৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ ± 3ৰ মাজত থাকে।

(iii) এটা ঋণাত্মকভাৱে অপ্রতিসাম্য বিভাজনৰ মাধ্য > বহুলক।

(iv) মূলবিন্দুৰ সাপেক্ষে প্রথমটো ঘূর্ণকমান হ'ল মাধ্য।

(v) প্রসৰণ = μ_2

(vi) যদি $\beta_2 > 3$ হয়, তেন্তে বক্রতাটো ফলক কুকুদ হ'ব।

প্রশ্ন নং 6ঃ প্রদত্ত বিভাজনবোৰৰ পৰা নিম্নলিখিত প্রশ্নবোৰৰ উত্তৰ দিয়ক।

	বিভাজন ক	বিভাজন খ
মাধ্য	100	90
মধ্যমা	90	80
প্রসৰণ	100	100

(i) দুয়োটা বিভাজনৰেই কিছু পৰিমাণে অপ্রতিসাম্যতা আছে।

(ii) বিভাজন ক আৰু বিভাজন খৰ ভেদ (variation) একে মাত্রাৰ।

— ওপৰৰ উক্তি দুটা সঁচানে মিছা কওক। আপোনাৰ উত্তৰৰ সপক্ষে যুক্তি দর্শাওক।

প্রশ্ন নং 7ঃ এটা বিভাজনৰ $\bar{x} = 30,\ \sigma = 8$ আৰু SK_p= 0.4। বিভাজনটোৰ মধ্যমা আৰু বহুলক নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং 8ঃ এটা বিভাজনৰ মাধ্য = 50, CU = 40%, SK_p = –0.4। বিভাজনটোৰ প্রামাণিক বিচলন, মধ্যমা আৰু বহুলক নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং 9ঃ 10 বিধ সামগ্রীৰ সমষ্টি এটাৰ $\Sigma x = 452$, $\Sigma x^2 = 24,$ 270 আৰু বহুলক = 43.7। ইয়াৰ পীয়ের্চনীয় অপ্রতিসাম্যৰ সহগ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং 10ঃ এটা বিভাজনৰ অপ্রতিসাম্যৰ জোখ হ'ল – 0.8। ইয়াৰ উর্দ্ধ আৰু নিম্ন চতুর্থক দুটা হ'ল ক্রমে 56.6 আৰু 44.1। বিভাজনটোৰ মধ্যমা উলিয়াওক।

প্রশ্ন নং 11ঃ তলত দিয়া তথ্যবোৰৰ পৰা কার্ল পীয়ের্চনৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ নির্ণয় কৰক—

নম্বৰ	শিক্ষার্থীৰ সংখ্যা
21 – 25	5
26 – 30	15
31 – 35	28
36 – 40	42
41 – 45	15
46 – 50	12
51 – 55	3

প্রশ্ন নং 12ঃ তলত দিয়া তথ্যবোৰৰ পৰা বাৱেলীৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ নির্ণয় কৰক—

ওজন (কি.গ্রা.)	0–15	15–30	30–45	45–60	60–75	75–90	90 আৰু অধিক
f :	20	30	30	35	45	15	5

প্রশ্ন নং 13ঃ (ক) 3, 4, 5 আৰু 8 সংখ্যাকেইটাৰ বাবে মাধ্যৰ সাপেক্ষে প্রথম আৰু দ্বিতীয় ঘূর্ণকমানবোৰ নির্ণয় কৰক।

(b) 1, 3, 6, 7, 8 সংখ্যাকেইটাৰ 4 মানৰ সাপেক্ষে প্রথম, দ্বিতীয় আৰু তৃতীয় ঘূর্ণকমানবোৰ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং 14ঃ (ক) এটা বিভাজনৰ চলকৰ 1 মানৰ সাপেক্ষে প্রথম তিনিটা ঘূর্ণকমান হ'ল ক্রমে 2, 25 আৰু 80। ইয়াৰ মাধ্য, প্রামাণিক বিচলন আৰু অপ্রতিসাম্যৰ ঘূর্ণক জোখ নির্ণয় কৰক।

(b) এটা বিভাজনৰ x = 2 ৰ সাপেক্ষে থকা প্রথম চাৰিটা ঘূর্ণকমান হ'ল ক্রমে 1, 2.5,

5.5 আৰু 16। $\bar{x}$ আৰু O ৰ সাপেক্ষে চাৰিটাকৈ ঘূর্ণকমান গণনা কৰি উলিয়াওক।

প্রশ্ন নং 15ঃ (ক) এটা বিভাজনৰ কেন্দ্রীয় ঘূর্ণকমানবোৰ হ'ল $\mu_2 = 140,,\ \mu_3 = 148$ আৰু $\mu_4 = 6030$ । ইয়াৰ অপ্রতিসাম্যৰ ঘূর্ণকমান তথা কুকুদ বক্রতা নির্ণয় কৰক। বিভাজনটোৰ আকৃতি কেনেকুৱা হ'ব কওক।

(খ) তলত দিয়া তথ্যবোৰৰ সহায়ত এটা বিভাজন ফলককুকুদ বক্রতাৰ বুলি ক'ব পৰা যাবনে?

N = 100, $\Sigma fd = 50,\ \Sigma fd^2 = 1970,\ \Sigma fd^3 = 2948$ আৰু $\Sigma fd^4 = 86,752$ ইয়াত d = x – 48.



৪.৮ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

এই অধ্যায়টোত আমি নিম্নলিখিত বিষয়সমূহ আলোচনা কৰিলো ঃ

প্রতিসম আৰু অপ্রতিসম বিভাজনৰ অর্থ।

- অপ্রতিসাম্যৰ অর্থ আৰু প্রকাৰ।
- অপ্রতিসাম্যৰ বিভিন্ন জোখ।
- ঘূর্ণকমান, কেন্দ্রীয় ঘূর্ণকমান আৰু অকেন্দ্রীয় ঘূর্ণকমানৰ অর্থ।
- বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বিভিন্ন বৈশিষ্ট্য জনাৰ বাবে ঘূর্ণকমানৰ ব্যৱহাৰ।
- কুকুদ-বক্রতাৰ অর্থ আৰু প্রকাৰ।
- ঘূর্ণকমান প্রয়োগ কৰি অপ্রতিসাম্য আৰু কুকুদবক্রতা জোখাৰ পদ্ধতি।



৪.৯ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

1) Gupta S. C. *Fundamental of Statistics.* Himalaya Publishing House.
2) Gupta S. C. and Gupta Indira. *Business Statistics.* Himalaya Publishing House.
3) P. N. Arora, Sumeet Arora, S. Arora, *Comprehensive Statistical Methods.* S. Chand and Company.
4) R. K. Ghosh and S. Saha. *Business Mathematics and Statistice.* New Central Book Agency (P) Ltd.

5) Agarwal D. R. *Business Statistics*. Delhi, Vrinda Publication.

6) Sharma J. K. *Business Statistics.* Pearson Education Ltd.

৪.১০ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) সমান (ii) লঘুকুকুদ বক্রতা (iii) প্রতিসম (সমমিত)
(iv) ঋণাত্মকভাৱে (v) তুংগতাত্রসমতলতা (vi) ± 1 (vii) β_2 অথবা γ_2.

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) সঁচা (ii) মিছা (iii) মিছা (iv) সচাঁ
(v) সঁচা (vi) মিছা।

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) সঁচা (ii) মিছা

৭ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ মধ্যমা = 28.93, বহুলক = 26.8

৮ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ প্রামাণিক বিচৰণ = 20, বহুলক = 58, মধ্যমা = 52.67

৯ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ SK_p = 0.077

১০ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ মধ্যমা = 55.35

১১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ SK_p = –0.109

১২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ SK_B = – 0.1126

১৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (ক) $\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 3.5$

(খ) $\mu_1' = 1,\ \mu_2' = 7.8,\ \mu_3' = 14.2$

১৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (ক) মাধ্য = 3, প্রামাণিক বিচলন = 4.58

$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1}$ = – 0.561

(খ) মাধ্যৰ সাপেক্ষে ঘূর্ণকমান

$\mu_2 = 1.5,\ \mu_3 = 0,\ \mu_4 = 6$

শূন্যৰ সাপেক্ষে ঘূর্ণকমান

$\mu_1' = 3,\ \mu_2' = 10.5,\ \mu_3' = 40.5,\ \mu_4' = 168$

১৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (ক) $\gamma_1 = 0.0893,\ \beta_2 = 0.3076$

বিভাজনটো প্রায় সমমিত আৰু ফলক কুকুদ বক্রতাৰ।

(খ) $\beta_2 = 2.2.14,\ \beta_2 < 3$ বিভাজনটো ফলক কুকুদ বক্রতাৰ।



৪.১১ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ 'গড়, বিক্ষেপণ, অপ্রতিসাম্য আৰু কুকুদ বক্রতাই এটা বাৰংবাৰতা ভালদৰে বুজাত ইটোৱে আনটোৰ পৰিপূৰক হিচাপে সহায় কৰে'— উক্তিটো আলোচনা কৰক।

প্ৰশ্ন ২ঃ ঘূৰ্ণকমানৰ সংজ্ঞা দিয়ক। মাধ্যৰ সাপেক্ষে থকা ঘূৰ্ণকমান আৰু যিকোনো যাদৃচ্ছিক বিন্দুৰ সাপেক্ষে থকা ঘূৰ্ণকমানৰ মাজত সম্পৰ্ক

প্ৰশ্ন ৩ঃ এটা বিভাজনৰ 5 মানৰ সাপেক্ষে থকা প্ৰথম দুটা ঘূৰ্ণকমান হ'ল ক্ৰমে 2 আৰু 20। বিভাজনটোৰ মাধ্য আৰু প্ৰসৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ঃ প্ৰদত্ত বিভাজন ৰাশিৰ পৰা কার্ল পীয়ৰ্চনৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ গণনা কৰি উলিয়াওক—

প্ৰদত্ত নম্বৰতকৈ কম নম্বৰ ঃ	20	40	60	80	100
শিক্ষাৰ্থীৰ সংখ্যা	18	40	70	90	100

প্ৰশ্ন ৫ঃ প্ৰদত্ত বিভাজন ৰাশিৰ পৰা বাৰেলীৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ নিৰ্ণয় কৰক—

নম্বৰ ঃ	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
শিক্ষাৰ্থীৰ সংখ্যা ঃ	5	9	12	8	6

প্ৰশ্ন ৬ঃ কোনো এক বিভাজনৰ সমান্তৰ মাধ্য হ'ল 5। মাধ্যৰ সাপেক্ষে থকা দ্বিতীয় আৰু তৃতীয় ঘূৰ্ণকমান দুটা হ'ল ক্ৰমে 20 আৰু 140। বিভাজনটোত শূন্যৰ সাপেক্ষে থকা তৃতীয় ঘূৰ্ণকমানটো উলিয়াওক।

*** ***** ***

অধ্যায় ৫ঃ সহসম্বন্ধ(CORRELATION)

অধ্যায় গাঁথনি

৫.১ উদ্দেশ্য

৫.২ পৰিচয়

৫.৩ সহসম্বন্ধ ঃ অর্থ আৰু ধাৰণা

৫.৪ প্রকীর্ণ চিত্র আৰু সহসম্বন্ধ

৫.৫ সহসম্বন্ধৰ প্রকাৰ

৫.৬ সহসম্বন্ধ সহগ (বা গুনাংক)

৫.৭ বুনিয়াদী অভিধাৰণা

৫.৮ সহসম্বন্ধ সহগ (বা গুণাংক)ৰ তাৎপর্য ব্যাখ্যা

৫.৯ কোটি ক্রম সহসম্বন্ধ

৫.১৬ অধ্যায়টিৰ পৰা কি শিকিলোঁ

৫.১৭ অধিক জানিবলৈ

৫.১৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৫.১৯ আর্হি প্রশ্ন

৫.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- সহসম্বন্ধ , সহসম্বন্ধৰ সহগ আৰু সিহঁতৰ ধর্ম ব্যাখ্যা কৰিব পাৰিব
- সহসম্বন্ধৰ বিভিন্ন প্রকাৰ প্রশংসা কৰিব আৰু বুজিব পাৰিব
- সহসম্বন্ধ বিশ্লেষণৰ আৱয়ব অনুধাৱন কৰিব পাৰিব
- সহসম্বন্ধ বিশ্লেষণৰ বিভিন্ন দিশ ব্যাখ্যা আৰু তুলনা কৰিব পাৰিব

৫.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

অধ্যয়ন কৰিবলৈ লোৱা চলকৰ সংখ্যাৰ ওপৰত নির্ভৰ কৰি আমি একচলক, দ্বিচলক বা বহুচলক শ্রেণী বা বিভাজন পাব পাৰো। এক চলক শ্রেণী বা বিভাজন হ'ল— এটা চলকৰ লগত মোকাবিলা কৰিবলগীয়া শ্রেণী বা বিভাজন। উদাহৰণস্বৰূপে যদি আমি ভিন্ ভিন্ ব্যক্তিৰ কেৱল বয়সৰ কথা বিবেচনা কৰো, তেন্তে আমি এটা একচলক (univariate) শ্রেণী অর্থাৎ কেৱল বয়সৰ মানবিলাকৰ শ্রেণীটো পাম। আনহাতে দ্বিচলক (bivariate) বিভাজন দুটা চলকৰ লগত জড়িত হয় (মনকৰক, 'bi' মানে দ্বি অর্থাৎ দুই)। উদাহৰণস্বৰূপে, যদি আমি মানুহৰ আয় আৰু ব্যয়ৰ তথ্য সংগ্রহ কৰো, তেন্তে তেনেকৈ প্রাপ্ত বিভাজনটো দ্বিচলক বিভাজন হিচাপে

গঠিত হ'ব। সেইদৰে বহুচলক বিভাজন (Multivariate distribution) দুটাতকৈ বেছি চলকৰ দ্বাৰা গঠিত হ'ব। এই অধ্যায়ত আমি সহসম্বন্ধ সম্পর্কে অধ্যয়ন কৰিম আৰু এই দুয়োটা ধাৰণা দ্বিচলক বা বহুচলক বিভাজনৰ লগত জড়িত।



জানি থোৱা ভাল

এটা চলক হ'ল এক সত্ত্বা (অস্তিত্ব) যিয়ে যিকোনো মান ল'ব পাৰে। বয়স, আয়, উচ্চতা, ওজন, ব্যয়, নম্বৰ ইত্যাদি চলকৰ উদাহৰণ। মন কৰক, ভিন্ ভিন্ মানুহৰ কাৰণে এইবিলাকৰ মান ভিন্ ভিন্ হ'ব। ইয়াৰ বিপৰীতে ধ্ৰুৱক হ'ল এক সত্ত্বা যিয়ে কেৱল নির্ধাৰিত মানহে ল'ব পাৰে।



অনুশীলনী-১

আপুনি দৈনন্দিন জীৱনত সচৰাচৰ দেখিবলৈ পোৱা কিছুমান চলক আৰু ধ্ৰুৱক তালিকাভুক্ত কৰিবলৈ যত্ন কৰক ঃ

.....

.....

.....

.....

৫.৩ সহসম্বন্ধ ঃ অর্থ আৰু ধাৰণা (CORRELATION : MEANING AND CONCEPT)

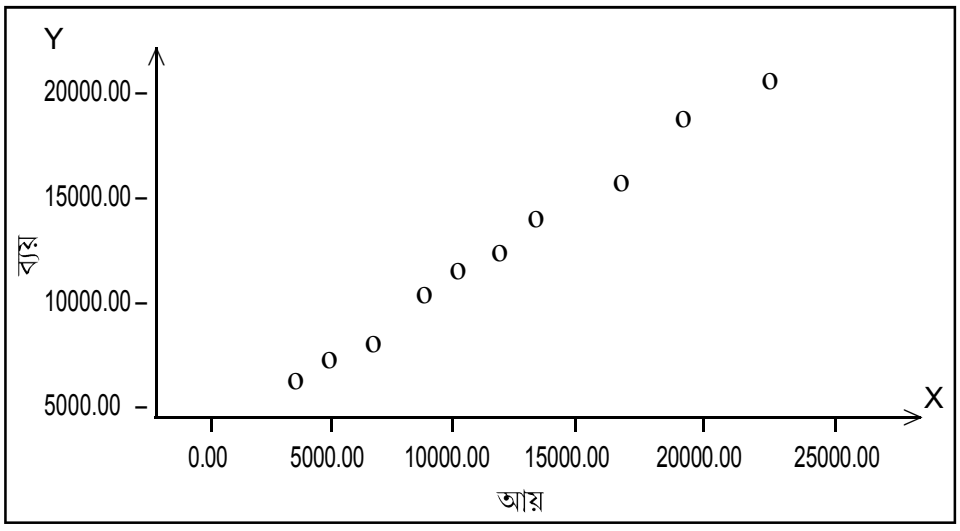
সহজ অর্থত, সহসম্বন্ধই দুটা চলকৰ মাজৰ সম্বন্ধক বুজায় (মন কৰিব যে 'সহ' শব্দই একেলগে থকা বুজায়)। দ্বিচলক বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত, বহু সময়ত আমি কি প্ৰকাৰে চলক দুটা পৰস্পৰ জড়িত হৈ থাকে, তাক জানিবলৈ আগ্ৰহী হওঁ। স্পষ্টতঃ যেতিয়া দুটা চলক এক সম্পর্কেৰে জড়িত হয়, তেতিয়া এটা চলকৰ পৰিবর্তনৰ প্ৰতি আনটো চলকে নিজৰ কোনো পৰিবর্তন দেখুৱাই সঁহাৰি জনায়। সহসম্বন্ধ বিশ্লেষণে চলক দুটাৰ এনেকুৱা ধৰণৰ সঁহাৰিৰ প্ৰসৰতা বা মাত্ৰাৰ মাপ দিবলৈ যত্ন কৰে। এতেকে সহসম্বন্ধ হ'ল দুটা (বা আনকি তাতোধিক) চলকৰ মাজৰ সহভেদ (Co-variation)ৰ বিশ্লেষণ। দুটা চলকৰ মাজত সহসম্বন্ধ থকা বুলি কোৱা হয় যদি এটাৰ মানৰ পৰিবর্তন হ'লে আনটোৰ মানবো অনুৰূপ পৰিবর্তন হয়।

৫.৪ প্রকীর্ণ চিত্র আৰু সহসম্বন্ধ (SCATTER DIAGRAM AND CORRELATION)

দুটা চলক সহসম্বন্ধৰে জড়িত হয় নে নহয়— তাক কেনেকৈ বিচাৰ কৰিব পাৰি? দুটা চলকৰ মাজত সহসম্বন্ধ আছে নে নাই— সেইটো জনাৰ আটাইতকৈ সহজ উপায় হৈছে প্রকীর্ণ চিত্র (Scatter diagram)। প্রকীর্ণ চিত্র হ'ল সহসম্বন্ধ চিনাক্তকৰণৰ অতি সহজ ৰৈখিক পদ্ধতি বা কৌশল। যেতিয়া দুটা চলকৰ অনুৰূপ মানৰ যোৰ বিলাকক বিন্দু হিচাপে বিবেচনা কৰি X-Y অক্ষদ্বয়ৰ বিপৰীতে চককাগজত স্থাপন কৰো, তেতিয়া আমি সেই মানবোৰৰ প্রকীর্ণ চিত্র পাওঁ। এইটো বুজিবৰ কাৰণে, তলত দিয়া দহজন ব্যক্তিৰ আয় আৰু ব্যয়ৰ দ্বিচলক শ্রেণীটো বিবেচনা কৰোহঁক।

ব্যক্তি (নম্বৰ)	আয় (টকাত)	ব্যয় (টকাত)
1	9200	6700
2	6860	4256
3	12825	9875
4	17980	12900
5	22125	19700
6	7892	4780
7	4645	3200
8	10925	8645
9	13820	10900
10	24780	21200

X অক্ষত আয়ৰ মান আৰু Y -অক্ষত ব্যয়ৰ মান লৈ ওপৰৰ তালিকাৰ মানবোৰ লেখ কাগজত স্থাপন কৰি মানবোৰৰ মাজত সহসম্বন্ধ আছে নে নাই চাব পাৰি। তালিকাখনৰ বিন্দুবিলাক স্থাপন কৰি পোৱা প্রকর্ণ চিত্রটো দেখাত কিছু পৰিমাণে এনেকুৱা হ'ব ঃ



ওপৰৰ প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰৰ পৰা দেখা যায় যে বিন্দুবোৰে ওপৰফালে উঠি যোৱাৰ প্ৰবৃত্তি প্ৰদৰ্শন কৰিছে। যদি প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰই বিন্দুবোৰৰ কোনো আৰ্হি বা প্ৰবৃত্তি প্ৰদৰ্শন কৰে তেন্তে চলকবোৰৰ মাজত সহসম্বন্ধ থকাটো বুজায়। উদাহৰণস্বৰূপে যদি আৰ্হিটো বাওঁফালৰ পৰা সোঁফাললৈ স্পষ্টকৈ ওপৰলৈ যোৱা ধৰণৰ হয়, তেন্তে চলকবিলাকৰ মাজৰ সম্বন্ধটোক ধনাত্মক সহসম্বন্ধ বোলে। যদি চিত্ৰটোত এনেকুৱা চিনাক্ত কৰিব পৰা কোনো আৰ্হি নাথাকে, তেন্তে চলকবিলাকৰ মাজত সহসম্বন্ধ নথকা বুলি কোৱা হয়।



অনুশীলনী - ২

আপোনাৰ 10জন বন্ধুৰ উচ্চতা আৰু ওজন লিখক আৰু মানবিলাকৰ প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰ অংকন কৰিবলৈ যত্ন কৰক। আপুনি সিহঁতৰ মাজৰ সহ সম্বন্ধ সম্পৰ্কে কি ক'ব বিচাৰে?

.....

.....

.....

৫.৫ সহসম্বন্ধৰ প্ৰকাৰ (TYPES OF CORRELATION)

প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰই প্ৰদৰ্শন কৰা আৰ্হিৰ ভিত্তিত আমি দুই প্ৰকাৰৰ সহসম্বন্ধ পাব পাৰো, যেনে— ধনাত্মক আৰু ঋণাত্মক সহসম্বন্ধ।

যদি এটা চলকৰ মান বাঢ়িলে (বা কমিলে) আনটো চলকৰ অনুৰূপ মান বাঢ়ে (বা কমে), তেন্তে ইয়াক ধনাত্মক সহসম্বন্ধ (Positive Correlation) বোলে। ধনাত্মক সহসম্বন্ধৰ মূলভাবটো হ'ল এই যে দুয়োটা চলকে একে দিশত গতি কৰে। এনেকুৱা গতিৰ ফলস্বৰূপে, প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰত বিন্দু বা ফুট চিনবোৰৰ বাওঁফালৰ পৰা সোঁফাললৈ ওপৰমুৱা আৰ্হি প্ৰদৰ্শিত হ'ব। আনহাতে ঋণাত্মক সহসম্বন্ধ (Negative Correlation) হ'ল এনেকুৱা এক অৱস্থিতি, য'ত এটা চলকৰ মান বাঢ়িলে (বা কমিলে) আনটো চলকৰ অনুৰূপ মান কমে (বা বাঢ়ে)। ঋণাত্মক সহসম্বন্ধৰ মৌলিক উপাদানটো হ'ল এই যে চলক দুটাই পৰস্পৰ বিপৰীত দিশত গতি কৰে। স্পষ্টত ঋণাত্মক সহসম্বন্ধৰ কাৰণে প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰটো বাওঁফালৰ পৰা সোঁফাললৈ এক নিম্নগামী প্ৰৱণতা বিশিষ্ট আৰ্হিৰ হ'ব।

যদি দেখা যায় যে চলক দুটাৰ সহসম্বন্ধ নাই অৰ্থাৎ এটা চলকৰ মানৰ পৰিবৰ্তনে আনটো চলকৰ অনুৰূপ মানৰ পৰিবৰ্তন আনিব নোৱাৰে, তেন্তে চলক দুটাৰ সম্বন্ধক শূন্য-সহসম্বন্ধ (Zero Correlation) বোলে। চলক দুটা সহসম্বন্ধৰে জড়িত নহ'লে, প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰটোৱে কোনো চিনাক্ত কৰিব পৰা ধৰণৰ আৰ্হি প্ৰদৰ্শন নকৰে।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিয়াওঁক—

(১) সহসম্বন্ধ আৰু সমাশ্রায়ন জড়িত হয় ঃ

(ক) এক চলক শ্রেণীৰ লগত

(খ) দ্বিচলক শ্রেণীৰ লগত

(গ) এক চলক আৰু দ্বিচলক শ্রেণী দুয়োটাৰ লগত

(ঘ) বহুচলক শ্রেণীৰ লগত

(২) তলৰ কোনটো সম্বন্ধ চিনাক্ত কৰিবলৈ প্রকীর্ণ চিত্র ব্যৱহাৰ কৰা হয় ?

(ক) সহসম্বন্ধ (খ) সমাশ্রয়ন

(৩) যেতিয়া দুটা চলকে পৰস্পৰ বিপৰীত দিশত গতি কৰে, তেতিয়া ইয়াক চলক দুটাৰ সম্বন্ধক কোৱা হয় —

(ক) ধনাত্মক সহসম্বন্ধ (খ) ঋণাত্মক সহসম্বন্ধ

৫.৬ সহসম্বন্ধ সহগ (বা গুণাংক) (CORRELATION CO-EFFICIENT)

চলকবিলাকৰ মাজত সহসম্বন্ধ আছে নে নাই আৰু যদি আছে, তেন্তে কোন প্রকাৰৰ সম্পর্ক— এইবিলাক চিনাক্ত কৰাৰ কাৰণে প্রকীর্ণ চিত্র বিশেষভাৱে উপযোগী। সি যি নহওক, এই চিত্রই চলকবিলাকৰ মাজত যি সম্বন্ধ থাকে তাৰ পৰিসংখ্যান, বা তাৰ পৰিমাণ, আকাৰ, পৰিসৰ বা মাত্রাক পৰিমাণাত্মক হিচাপে জুখিব নোৱাৰে। ইংৰাজ পৰিসংখ্যাবিদ কার্ল পিয়েৰছনে (1867-1936) এনেকুৱা সম্বন্ধৰ পৰিসৰ জুখিবৰ কাৰণে এক সহজ প্রবিধি বা কৌশল (technique) সূচনা কৰিছিল। তেখেতৰ মাপকে পিয়েৰছনৰ গুণফল ভ্রামাক সহসম্বন্ধ সহগ (Pearson's Product-Moment Correlation Co-efficient) বা সংক্ষেপে পিয়েৰছনৰ সহসম্বন্ধ সহগ (Pearson's Correlation Co-efficient) বোলে আৰু সাধাৰণতে ইয়াক 'r' (যিয়ে 'সম্বন্ধ'ক প্রতিনিধিত্ব কৰে)আখৰটোৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াক তলত দিয়া ধৰণে নির্ণয় কৰা হয়—

$$r_{x,y} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma x\, \sigma y}$$

ইয়াত Cov(x, y) য়ে 'x আৰু yৰ সহভেদ'ক বুজাইছে অর্থাৎ x আৰু y একেলগে কি ধৰণে বিচৰণশীল হয়, তাক বুজাইছে আৰু σx আৰু σy হ'ল ক্রমে x আৰু yৰ মানক বিচলন। এইবোৰ নির্ণয় কৰাৰ সূত্রবিলাক তলত দিয়া ধৰণৰ ঃ

$$Cov(x, y) = \frac{1}{n}\sum(x - \bar{x})(y - \bar{y})$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(x-\bar{x})^2}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum(y-\bar{y})^2}$$

মূল সমীকৰণত এইবিলাক বহুৱাই আৰু সৰল কৰি আমি পাওঁ—

$$r = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sum(x-\bar{x})^2\sum(y-\bar{y})^2}$$

ইয়াক পুনৰ সৰল কৰিব পাৰি আৰু লিখিব পাৰি এইদৰে—

$$r = \frac{n\sum xy - \sum x\sum y}{\sqrt{\left[n\sum x^2-(\sum x)^2\right]\left[n\sum y^2-(\sum y)^2\right]}}$$

এই সূত্ৰটো অভিগণনা কৰিবৰ কাৰণে আপেক্ষিকভাৱে বেছ সহজ আৰু পিয়েৰছনৰ সহসম্বন্ধৰ সহগ নির্ণয় কৰিবলৈ সচৰাচৰ ব্যৱহাৰ কৰা হয়, ইয়াত **'n'** য়ে মানবোৰৰ মুঠ সংখ্যাক বুজাইছে। x আৰু y চলকযুক্ত তথ্য শ্রেণীৰ **'r'** নির্ণয় কৰাৰ পদ্ধতি হ'ল ঃ

- x ৰ মানবোৰৰ সমষ্টি অর্থাৎ Σx নির্ণয় কৰক।
- y ৰ মানবোৰৰ সমষ্টি অর্থাৎ Σy নির্ণয় কৰক।
- যোৰ হিচাপত আটাইবিলাক x আৰু y ৰ মান পূৰণ কৰক আৰু পিছত xyবোৰৰ যোগফল অর্থাৎ Σxy নির্ণয় কৰক।
- x আৰু y ৰ আটাইবোৰ মানৰ বাবে x^2 আৰু y^2 নির্ণয় কৰক আৰু পিছত সমষ্টি অর্থাৎ Σx^2, Σy^2 নির্ণয় কৰক।
- এই মানবিলাক সূত্ৰত বহুৱাই 'r' নির্ণয় কৰক।

জনা উচিত

চার্ল পিয়েৰছন যাক পিছত কার্ল পিয়েৰছন হিচাপে জনা যায়, তেখেতৰ পিতৃ আছিল উলিয়াম পিয়েৰছন আৰু মাতৃ ফেন্নি স্মিথৰ (১৮৫৭-১৯৩৬)। তেখেতসকলৰ তিনিটা ল'ৰা-ছোৱালী আছিল— আর্থাৰ, চার্ল আৰু এ'মি। তেখেত এজন বিচক্ষণ বুৰঞ্জীবিদ আৰু জার্মান ভাষাবিদ আছিল। কার্লপিয়েৰছনে নিজাববীয়াকৈ ইউনিভাৰচিটি কলেজ স্কুলত অধ্যয়ন কৰিছিল আৰু পিছত ১৮৭৬ চনত কেম্ব্রিজৰ কিংচ কলেজত (King's College) গণিত অধ্যয়ন কৰিবলৈ গৈছিল। ইয়াৰ পিছত তেখেতে ১৮৭৯ আৰু ১৮৮০ চনত কিছুদিন বার্লিন আৰু হাইডেলবার্গ বিশ্ববিদ্যালয়ত মধ্যযুগীয় আৰু ষষ্ঠদশ শতিকাৰ জার্মান সাহিত্য অধ্যয়ন কৰি কটাইছিল। প্রকৃততে তেখেত এই বিষয়ত যথেষ্ট বিজ্ঞ হৈ পৰিছিল আৰু ফলস্বৰূপে তেখেতক কেম্ব্রিজৰ কিংচ কলেজত আদিম জার্মান ভাষা বিষয়ক এটা



পদ যাচা হৈছিল। ১৮৭৯ চনত কেম্ব্রিজ বিশ্ববিদ্যালয়ৰ পৰা সমাখ্যা উপাধিৰ বাবে অনুষ্ঠিত গণিতৰ পৰীক্ষাত (Mathematical Tripos) প্ৰথম শ্ৰেণীৰ তৃতীয় ব্যক্তি (Third Wangler) হিচাপে স্নাতক ডিগ্ৰী লাভ কৰিছিল। ইয়াৰ পিছত তেখেতে হাইডেনবাৰ্গ বিশ্ববিদ্যালয়ত জি এইছ কুইন্তকে (G. H. Quincke) ৰ অধীনত পদাৰ্থ বিজ্ঞান আৰু কুনো ফিছাৰৰ (Kuno Fischer) অধীনত অধ্যাত্মবিদ্যা (Metaphysics) অধ্যয়ন কৰাৰ কাৰণে জাৰ্মানিলৈ যাত্ৰা কৰিছিল। তেখেতে পিছত বাৰ্লিন বিশ্ববিদ্যালয় পৰিদৰ্শন কৰিছিল। তেখেতে গাণিতিক পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান বিষয়টো প্ৰতিষ্ঠা কৰিছিল। ১৯১১ চনত পৃথিৱীৰ প্ৰথম বিশ্ববিদ্যালয় পৰিসংখ্যা বিভাগটো লণ্ডনৰ ইউনিভাৰচিটি কলেজত প্ৰতিষ্ঠা কৰিছিল। সহসম্বন্ধৰ উপৰি আন এক গুৰুত্বপূৰ্ণ সজুলি কাই-বৰ্গ (Chi-square) পিয়েৰছনৰেই অৱদান।



অনুশীলনী-৩

১। তলত মানবিলাকৰ দুটাই শ্ৰেণী দিয়া আছে।

বিনিয়োজিত মূলধন ঃ 12 13 15 16 18 29 32
(লাখ টকাত)

লাভ (লাখ টকাত) ঃ 6 5 7 8 12 11 17

(ক) এটা প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰ অংকন কৰক।

(খ) বিনিয়োজিত মূলধন আৰু লাভৰ পৰিমাণৰ মাজত কোনো সহসম্বন্ধ আপুনি দেখিছেনে? যদি সহসম্বন্ধ আছে, তেন্তে সিহঁতৰ সহসম্বন্ধৰ সম্পৰ্কত কি ধৰণৰ মন্তব্য দিব পাৰি?

২। তলৰ তথ্যটোৰ কাৰণে পিয়েৰছনৰ সহসম্বন্ধ সহগ নিৰ্ণয় কৰক ঃ

X :	6	8	12	15	18	20	24	28	31
Y :	10	12	15	15	18	25	22	26	28

৫.৭ বুনিয়াদী অভিধাৰণা (UNDERLYING ASSUMPTIONS)

পিয়েৰছনৰ সহসম্বন্ধ সহগৰ বুনিয়াদী বা মৌলিক ধাৰণাটো হ'ল এই যে চলকবিলাকক সংখ্যাত্মক বুলি ভবা হয়। তাৰোপৰি এই ধাৰণাও কৰা হয় যে দুটা চলকৰ মাজত ৰৈখিক সম্বন্ধ আছে। সেই কাৰণে **'r'** ৰ মানটোৱে দুটা চলকৰ মাজত থকা সম্বন্ধৰ মাত্ৰাক বুজায়। যদি **'r'** ৰ মান শূন্যৰ সমান হয়, এইটোৱে স্পষ্টভাৱে বুজায় যে চলক দুটাৰ মাজত ৰৈখিক সম্বন্ধৰ অভাৱ। সি যি নহওক, চলকবিলাকৰ মাজত আন অৰৈখিক প্ৰকাৰৰ সম্বন্ধ সম্ভৱ হ'ব পাৰে।

৫.৮ সহসম্বন্ধ সহগ (বা গুণাংক)ৰ তাৎপর্য ব্যাখ্যা (INTERPRETATION OF CORRELATION CO-EFFICIENT)

এবাৰ 'r' ৰ মান পোৱাৰ পিছত, মানটোক শুদ্ধভাৱে ব্যাখ্যা কৰাটো অত্যন্ত গুৰুত্বপূর্ণ। চিন আৰু পৰিমাণ (Sign and magnitude) এই দুটাৰ ওপৰত 'r' ৰ মানৰ তাৎপর্য ব্যাখ্যা নির্ভৰ কৰে। চিন ধণাত্মক হ'লে সহসম্বন্ধ ধনাত্মক আৰু চিন ঋণাত্মক হ'লে সহসম্বন্ধক ঋণাত্মক বুলি কোৱা হয়। আনহাতে সহসম্বন্ধ সহগৰ মানৰ পৰিমাণ 1তকৈ বেছি হ'ব নোৱাৰে। সেই কাৰণে 'r' ৰ মান সদায় –1 আৰু +1ৰ মাজত থাকে। এই মান যিমানেই 1ৰ ওচৰৰ হ'ব, সিমানেই (ৰৈখিক) সম্বন্ধৰ মাত্রা বেছি হ'ব। বিপৰীত ক্রমে, এই মান 1ৰ পৰা যিমানেই আতৰি যায়, সিমানেই (ৰৈখিক) সম্বন্ধৰ পৰা বিচলনৰ পৰিমাণ বেছি হয়। বহুতো পণ্ডিতে অর্থপূর্ণ ব্যাখ্যাৰ কাৰণে 'r' ৰ মানৰ পৰিসৰ প্রদান কৰিছে।

অতি সাধাৰণভাৱে গৃহীত যে—

'r' ৰ মান 1ৰ সমান হ'লে সহসম্বন্ধক পূর্ণ সহসম্বন্ধ (Perfect Correlation) বোলে। যেতিয়া এই মান 0.8 ৰ পৰা 1 লৈ বিস্তাৰিত হয়, চলকবোৰক উচ্চ মাত্রাৰে সহসম্বন্ধ (highly correlated) যুক্ত বুলি কোৱা হয়। 'r' ৰ মান 0.6 আৰু 0.8 ৰ মাজত থাকিলে চলবিলাকক সুন্দৰ মাত্রাৰে সহসম্বন্ধ (Fairly correlated) যুক্ত বুলি কোৱা হয়। 0.3 আৰু 0.6 ৰ ভিতৰত থকা r ৰ মানৰ কাৰণে সহসম্বন্ধক মধ্যম মাত্রাৰ সহসম্বন্ধ (Moderate Correlation) বোলে। যেতিয়া r ৰ মান 0 (শূন্য)ৰ সমান হয়, তেতিয়া চলকবিলাকক ৰৈখিক সহসম্বন্ধবিহীন বা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্র বুলি কোৱা হয়।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ২ঃ শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিয়াওঁক—

(১) সহসম্বন্ধ বিশ্লেষণে নির্ভৰ কৰা অভিধাৰণাটো হ'ল এই যে—

(ক) চলকবিলাক সংখ্যাত্মক

(খ) চলকবিলাক গুণাত্মক

(২) 'r' ৰ তাৎপর্য ব্যাখ্যা নির্ভৰ কৰে—

(ক) কেৱল চিনৰ ওপৰত (খ) কেৱল পৰিমাণৰ ওপৰত (গ) চিন আৰু পৰিমাণ উভয়ৰে ওপৰত

(৩) যেতিয়া r ৰ মান 0.6ৰ পৰা 0.8 পৰিসৰৰ অন্তর্গত হয়, তেতিয়া সহসম্বন্ধক কোৱা হয়—

(ক) সুন্দৰ মাত্রাৰ সহসম্বন্ধ (খ) মধ্যম মাত্রাৰ সহসম্বন্ধ (গ) নিম্ন মাত্রাৰ সহসম্বন্ধ (ঘ) পূর্ণ মাত্রাৰ সহসম্বন্ধ

(৪) পূর্ণ মাত্রাৰ ধণাত্মক সহসম্বন্ধৰ ক্ষেত্রত, 'r' ৰ মান হ'ব ঃ

(ক) –1 (খ) +1 (গ) 0.8 (ঘ) 0

৫.৯ কোটি (ক্রম) সহসম্বন্ধ (RANK CORRELATION)

বহু সময়ত আমি কিছুমান চলকৰ সন্মুখীন হওঁ যিবিলাকক পৰিমাণাত্মকভাৱে জুখিব নোৱাৰি। সি যি নহওক, এইবিলাকক কোটিত (ranked) আৰু ক্রমান্বিত (ordered) ভাৱে সজাব পাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে, সৌন্দর্য, বুদ্ধিমত্তা, সাধুতা ইত্যাদি। আচলতে বেছিভাগ গুণবাচক চলক (বা বৈশিষ্ট্য) উপৰোক্ত ধৰণৰ। এজন ব্যক্তিৰ সাধুতাৰ সঠিক পৰিমাণ বা এজন ব্যক্তিৰ বুদ্ধিমত্তাৰ পৰিমাণ জোখাটো জটিল। তৎস্বত্বেও এইটো প্রায়ে নির্ণয় কৰিব পাৰি— কোনজন ব্যক্তি বেছি সাধু, কোনজন বেছি বুদ্ধিমত্তা সম্পন্ন ব্যক্তি, কোনজন ব্যক্তি বেছি ধুনীয়া, এইদৰে আনবিলাক।

যেতিয়া আমি এনেকুৱা ধৰণৰ তুলনা কৰিবলৈ যাওঁ, আমি আচলতে ব্যক্তিক কোটিত কৰো আৰু কোটিবিলাকৰ ভিত্তিত সিবিলাক ক্রমান্বিতভাৱে সজাই লওঁ। এনেকুৱা যিবিলাক চলকক প্রত্যক্ষভাৱে জুখিব নোৱাৰি কিন্তু ক্রমান্বিতভাৱে সজাব পাৰি, সিবিলাক চলকক ক্রমসূচক চলক (Ordinal Variable) বোলে। যেতিয়া আমি এনেকুৱা ক্রমসূচক চলক বিশিষ্ট দ্বিচলক বিভাজন এটা পাওঁ, তেতিয়া প্রশ্ন হয়, কেনেকৈ আমি চলক দুটাৰ সহসম্বন্ধ নির্ণয় কৰিম ? এই ক্ষেত্রত পিয়েৰছ্নৰ সহসম্বন্ধ গুণাংকক প্রয়োগ কৰিব নোৱাৰি, যিহেতু এই চলকবিলাক সংখ্যাত্মক আৰু এই মৌলিক অভিধাৰণাটোৰ ওপৰত প্রতিষ্ঠিত।

বৃটিছ মনস্তত্ত্ববিদ চার্লচ্ এডৱার্ড স্পিয়েৰমেনে 1904 চনত দুটা গুণবাচক চলকৰ কোটি সহসম্বন্ধ সহগ নির্ণয় কৰাৰ কাৰণে এটা সূত্র বিকশিত কৰিছিল। কোটিৰ সহসম্বন্ধ পাবৰ কাৰণে চলক দুটাৰ মানবিলাকক ক্রমান্বিতভাৱে সজাব লাগিব আৰু তাৰ পিছত সিহঁতৰ কোটিৰ পার্থক্যবিলাক হিচাপ কৰি উলিয়াব লাগিব। যদি চলক দুটাৰ প্রতিযোৰ কোটিৰ পার্থক্য 'd' বুলি ধৰা হয়, তেন্তে কোটি সহসম্বন্ধ সহগ তলত দিয়া ধৰণে পাব পাৰি।

$$P = 1 - \frac{\sum d^2}{n(n^2 - 1)}$$, n হ'ল তথ্যৰ সংখ্যা।

কোটি সহসম্বন্ধ সহগ নির্ণয় কৰাৰ কার্য প্রণালী তেনেই সৰল আৰু সহজ ঃ

- গুণবাচক চলক দুটাক সিহঁতৰ কোটিৰ ভিত্তিত ক্রমান্বিতভাৱে সজাই লওঁক।
- প্রতিযোৰ কোটিৰ পার্থক্য অর্থাৎ 'd' পাবলৈ এটাৰ পৰা আনটো কোটি বিয়োগ কৰক আৰু তাৰ পিছত 'd^2' নির্ণয় কৰক।
- 'd^2' ৰ সমষ্টি অর্থাৎ 'Σd^2' নির্ণয় কৰক।
- এনেকৈ পোৱা মানবিলাক সূত্রত বহুৱাই সহগটো নির্ণয় কৰক।

ঠিক 'r' ৰ মানৰ নিচিনাকৈ '*P*' ৰ মানো –1 আৰু +1ৰ মাজত থাকে। ইয়াৰ তাৎপর্য

ব্যাখ্যাও 'r' ৰ তাৎপর্য ব্যাখ্যাৰ নিচিনাই মাত্র 'r' ৰ ক্ষেত্রত ৰৈখিকতা (linearity) ৰ মৌলিক অভিধাৰণা আছে। '*P*' ৰ ক্ষেত্রত নাই।



জানি থোৱা ভাল

চার্লচ্ এড্ৱার্ড স্পিয়েৰমেন এজন ইংৰাজ মনস্তত্ত্ববিদ আছিল আৰু পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানৰ কামৰ কাৰণে তেখেত বিখ্যাত হৈ পৰিছিল। তেখেত কাৰক (বা উপাদান) বিশ্লেষণৰ বাটকটীয়া আছিল। তেখেতে মানবীয় বুদ্ধিমত্তাৰ আৰ্হিৰ বিষয়ত মৌলিকতা পূর্ণ কাম ও কৰিছিল। মনস্তত্ত্ববিদৰ কাৰণে স্পিয়েৰমেনৰ অস্বাভাৰিক পটভূমি আছিল। বৃটিছ সৈন্যত পোন্ধৰ বছৰ বিষয়া হিচাপে কাম কৰাৰ পিছত পৰীক্ষামূলক মনোবিজ্ঞান বিষয়ত পি এইছ ডিৰ কাৰণে অধ্যয়ন কৰিবলৈ বিষয়াৰ পদ ইস্তাফা দিছিল। তেখেতে ১৮৯৭ চনত অধ্যয়ন কৰিবলৈ আৰম্ভ কৰিছিল আৰু কিছু বিৰতিৰ (দক্ষিণ আফ্রিকাৰ যুদ্ধৰ সময়ত তেখেতক সৈন্য বিভাগলৈ পুনৰ যোগদান কৰিবলৈ কোৱা হৈছিল) পিছত ১৯০৬ চনত ডিগ্রী লাভ কৰিছিল। ইতিমধ্যে তেখেতে বুদ্ধিমত্তাৰ কাৰক বিশ্লেষণৰ ওপৰত মৌলিকতাপূর্ণ গৱেষণাপত্র প্রকাশ কৰিছিল (১৯০৪)। লণ্ডন ইউনিভাৰচিটি কলেজৰ পদ এৰি দিয়াৰ পিছত স্পিয়েৰমেনে মনস্তত্ত্ববিদ উইলিয়াম মেক্ দুগলক (William Mc Daugal) লগ কৰিছিল আৰু তেখেতক প্রভাৱিত কৰিছিল আৰু তেখেতে স্পিয়েৰমেনক সেই পদত পুনৰ অধিষ্ঠিত কৰাৰ ব্যৱস্থা কৰিছিল। ১৯৩১ চনত অৱসৰ লোৱাৰ সময়লৈকে স্পিয়েৰমেনে ইউনিভাৰচিটি কলেজতে আছিল। ১৯২৪ চনত স্পিয়েৰমেনক ৰয়েল ছচাইটি (Royal Society) লৈ নির্বাচিত কৰা হয়। যদিও সেই সময়ত স্পিয়েৰমেনে তেখেতৰ পৰিসাংখ্যিকীয় কামৰ কাজৰ কাৰণে যথেষ্ট স্বীকৃতি লাভ কৰিছিল, তথাপি তেখেতে সেই কামক তেখেতে কৰা মনোবিজ্ঞানৰ মৌলিক বিধিসমূহৰ অনুসন্ধানৰ পৰিপেক্ষিতত গৌণ বুলি বিবেচনা কৰিছিল আৰু বর্তমান তেখেত উভয়ৰ বাবে সমভাৱে খ্যাত।





অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৩ঃ শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিয়াওঁক—

(১) কোটি সহসম্বন্ধ বিশ্লেষণ ব্যৱহাৰ কৰা হয় যেতিয়া—

(ক) চলকবিলাক সংখ্যাত্মক হয়

(খ) গুণাত্মক হয়।

(২) স্পিয়েৰমেনৰ কোটি সহসম্বন্ধই ৰৈখিকতা বিবেচনা নকৰে

(ক) শুদ্ধ (খ) অশুদ্ধ

(৩) ঠিক 'r' ৰ মানৰ নিচিনাকৈ কোটি সহসম্বন্ধৰ মানও +1 আৰু –1ৰ মাজত পৰে।

(ক) শুদ্ধ (খ) অশুদ্ধ



অনুশীলনী - ৪

দুজন শিক্ষক A আৰু Bয়ে সম্পন্ন কৰা 10জন ছাত্ৰৰ কোটি নির্ধাৰণ তলত দিয়া ধৰণৰ। তথ্যটোৰ কাৰণে কোটি সহসম্বন্ধ সহগ নির্ণয় কৰক আৰু সমস্যাটোৰ সম্পর্কত সিদ্ধান্ত কৰাৰ ক্ষেত্ৰত যুক্তি প্রদর্শন কৰক।

A :	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
B :	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7



৫.১৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- চলকৰ সংখ্যাৰ ওপৰত নির্ভৰ কৰি আমি একচলক (বা একচৰ), দ্বিচলক (বা দ্বিচৰ) বা বহুচলক (বা বহুচৰ) বিভাজন (বণ্টন) পাওঁ।
- সহসম্বন্ধ, দ্বিচলক আৰু /বা বহুচলক বিভাজনবোৰৰ লগত জড়িত।
- সহসম্বন্ধ হ'ল দুটা চলকৰ মাজৰ সম্বন্ধ। প্রকীর্ণ চিত্র হ'ল সহসম্বন্ধ চিনাক্তকৰণৰ এক সহজ লৈখিক পদ্ধতি। সম্বন্ধ থকা চলকবিলাকৰ ক্ষেত্ৰত প্রকীর্ণ চিত্রই দৃশ্যমান আর্হি বা প্রবৃত্তি প্রদর্শন কৰে।
- সহসম্বন্ধ দুই প্রকাৰৰ হ'ব পাৰে— ধনাত্মক যেতিয়া চলকবোৰৰ মানৰ পৰিবর্তনৰ দিশ একে হয় আৰু ঋণাত্মক যেতিয়া চলকবিলাকৰ মানৰ পৰিবর্তন বিপৰীত দিশত হয়।
- সহসম্বন্ধ সহগে দুটা চলকৰ মাজৰ সম্বন্ধৰ পৰিসৰ, পৰিমাণ বা মাত্রা জোখে।
- চলকবিলাক সংখ্যাত্মক আৰু সহসম্বন্ধ সহগ ৰৈখিক সম্বন্ধযুক্ত — এই অভিধাৰণাৰ ওপৰত সহসম্বন্ধ সহগ নির্ভৰশীল।
- সহসম্বন্ধ সহগৰ তাৎপর্য ব্যাখ্যা r ৰ মানৰ চিন আৰু পৰিমাণ উভয়ৰে ওপৰত নির্ভৰ কৰে।
- গুণবাচক চলকবিলাকৰ ক্ষেত্ৰত কোটি সহসম্বন্ধ প্রয়োগ কৰা হয়। গুণবাচক চলকবিলাকক জুখিব নোৱাৰি, কিন্তু ইহঁত ক্রমাত্মক (ordinal)।
- পিয়েৰছনৰ সহসম্বন্ধ সহগৰ নিচিনাকৈ স্পিয়েৰমেনৰ কোটি সহসম্বন্ধ সহগৰ মানো +1 আৰু –1 ৰ মাজত থাকে।



৫.১৭ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

১) Agarwal, D. R. (2006). Business Statistics. Delhi, Vrinda Publications.

২) Gupta S.C. (1994). Fundamentals of statistics. New Delhi, Himalayan Publishing House.

৩) Rajagopalan, S. P. & Sattanthan R. (2009).Business Statistics and Operations Research. New Delhi, Tata McGraw-Hill

৪) Sharma, J. K. (2007). Business Statistics. New Delhi. Pearson Education Ltd.

৫) Verma, A. P. (2007). Business Statistics. Guwahat, Asian Books Private Limited.

৬.১৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ১। (গ) এক চলক আৰু দ্বিচলক শ্রেণী দুয়োটাৰ লগত

২। (ক) সহসম্বন্ধ

৩। (খ) ঋণাত্মক সহসম্বন্ধ

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ১। (ক) চলকবিলাক সংখ্যাত্মক

২। (গ) চিন আৰু পৰিমাণ উভয়ৰে ওপৰত

৩। (ক) সুন্দৰ মাত্রাৰ সহসম্বন্ধ

৪। (খ) +1

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ১। (ক) চলকবোৰ সংখ্যাত্মক হয়

২। (ক) শুদ্ধ

৩। (ক) শুদ্ধ

৫.১৯ আৰ্হি প্রশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্রশ্ন ১ঃ সহসম্বন্ধ মানে কি বুজে? সহসম্বন্ধৰ গুণাংকৰৰ বিভিন্ন ধর্মসমূহ কি কি?

প্রশ্ন ২ঃ সহসম্বন্ধ গুণাংক নিয়ম কৰিবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা পদ্ধতিসমূহ কি কি?

প্রশ্ন ৩ঃ তলত দিয়া তথ্যসমূহৰ পৰা কার্ল পিয়েৰছনৰ সহসম্বন্ধ গুণাংক নির্ণয় কৰক ঃ

X :	2	4	6	8	10
Y :	20	18	16	14	12

প্রশ্ন ৪ঃ তলত দিয়া 10 জন প্রার্থীয়ে গণিত আৰু পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান বিশয়ত লাভ কৰা নম্বৰসমূহৰ পৰা কার্ল নিয়েৰছনৰ সহসম্বন্ধ গুণাংক নির্ণয় আৰু ব্যাখ্যা কৰক ঃ

গণিত নম্বৰ ঃ 98 70 40 20 85 75 95 80 10 5

পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানৰ নম্বৰ ঃ 85 65 32 30 80 60 61 55 54 65

প্রশ্ন ৫ঃ তলত দিয়া তথ্য সমূহৰ পৰা সহসম্বন্ধ গুণাংক নির্ণয় কৰক ঃ

X :	12	20	15	8	33	24	30	12	15	22
Y :	30	35	28	36	29	39	30	25	30	38

Y :	20	18	16	14	12

*** ***** ***

অধ্যায় ৬ঃ সমাশ্রয়ন (REGRESSION)

অধ্যায় গাঁথনি

৬.১ উদ্দেশ্য

৬.২ পৰিচয়

৬.৩ সমাশ্রয়নৰ অর্থ আৰু ধাৰণা

৬.৪ ৰৈখিক সমাশ্রয়ন

৬.৫ সমাশ্রয়ন সমীকৰণ আৰু সমাশ্রয়ন ৰেখা

৬.৬ সমাশ্রয়নৰ সহগ

৬.৭ সমাশ্রয়ণ সহগ আৰু সহসম্বন্ধ সহগৰ মাজৰ সম্বন্ধ

৬.৮ সহসম্বন্ধ আৰু সমাশ্রয়ন বিশ্লেষণ ঃ এক তুলনা

৬.৯ অধ্যায়টিৰ পৰা কি শিকিলোঁ

৬.১০ অধিক জানিবলৈ

৬.১১ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৬.১২ আৰ্হি প্রশ্ন

৬.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- সমাশ্রয়নৰ ধাৰণা, সমাশ্রয়নৰ সহগ, সমাশ্রয়ন ৰেখা আৰু সমাশ্রয়ন সমীকৰণ আৰু সিহঁতৰ ধর্ম ব্যাখ্যা কৰিব পাৰিব
- সমাশ্রয়নৰ বিভিন্ন প্রকাৰ প্রশংসা কৰিব আৰু বুজিব পাৰিব
- সমাশ্রয়ন বিশ্লেষণৰ আৱয়ব অনুধাৱন কৰিব পাৰিব
- সমাশ্রয়ন বিশ্লেষণৰ বিভিন্ন দিশ ব্যাখ্যা আৰু তুলনা কৰিব পাৰিব

৬.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

আগৰ অধ্যায়ত, আমি দুটা চলকৰ মাজৰ সহসম্বন্ধ ধাৰণা বিষয়ে আলোচনা কৰিছোঁ। এই অধ্যায়ত আমি সমাশ্রয়নৰ ধাৰণা সম্পর্কে অধ্যয়ন কৰিম আৰু এই দুয়োটা ধাৰণা দ্বিচলক বা বহুচলক বিভাজনৰ লগত জড়িত।

৬.৩ সমাশ্রয়নৰ অর্থ আৰু ধাৰণা (MEANING AND CONCEPT OF REGRESSION)

বিজ্ঞান আৰু সমাজ বিজ্ঞানৰ অধ্যয়নত বহুলভাৱে ব্যৱহৃত হোৱা অতি গুৰুত্বপূর্ণ আৰু প্রভাৱশালী কৌশল (বা প্রবিধি) বিলাকৰ ভিতৰত সমাশ্রয়ন অন্যতম। ফ্র্যাঞ্চিছ গেলটনে (Francis Galton) 'সমাশ্রয়ন' পদটো সূচনা কৰিছিল। 1886 চনত লণ্ডনৰ ৰয়েল ছছাইটিৰ কার্যাৱলীত (Proceeding of Royal Society) প্রকাশিত 'দৈহিক উচ্চতাত পৰিয়ালৰ সাদৃশ্য'— শীর্ষক বিখ্যাত বৈজ্ঞানিক গৱেষণা পত্রত তেখেতে প্রথমতে 'মধ্যমীয়া বুদ্ধিৰ ব্যক্তিৰ কাৰণে সমাশ্রয়ন' (regression to mediocrity) সম্পর্কে আলোচনা কৰিছিল।

বহুলভাৱে ক'বলৈ হ'লে আজিকালি সমাশ্রয়ন বিশ্লেষণক এটা চলকৰ আন এটা বা এটাতকৈ বেছি চলকৰ ওপৰত নির্ভৰশীলতা সম্পর্কীয় অধ্যয়ন বুলি ভবা হয়, যাৰ লক্ষ্য হ'ল পিছৰ চলকৰ নির্ধাৰিত বা জ্ঞাত মান সাপেক্ষে আগৰ চলকটোৰ গড়মান আকলন/বা ভৱিষ্যৎবাণী কৰাটো। অর্থাৎ 'Regression analysis is referred to the study of the dependence of one variable on one or more other variables, with a view to estimating and /or predicting the average value of the former in terms of fixed or known values of the latter.'

ইয়াক বুজিবৰ কাৰণে, ধৰা হ'ল x আৰু y চলক দুটাৰ y ৰ মান xৰ মানৰ ওপৰত নির্ভৰশীল। তেন্তে সমাশ্রয়ন বিশ্লেষণে x ৰ এক প্রদত্ত মানৰ কাৰণে y ৰ গড় মান আকলন বা ভৱিষ্যৎবাণী কৰিবলৈ যত্ন কৰিব।

৬.৪ ৰৈখিক সমাশ্রয়ন (LINEAR REGRESSION)

আমি বুজিব পাৰিছো যে যেতিয়া দুটা চলক পৰস্পৰ নির্ভৰশীল হয় অর্থাৎ চলক দুটা এটা সম্বন্ধৰে জড়িত হয়, তেতিয়া স্বতন্ত্র চলকটোৰ এক নির্ধাৰিত মানৰ বাবে পৰতন্ত্র চলকটোৰ গড়মান আকলন বা ভৱিষ্যৎবাণী কৰা পদ্ধতি বা কৌশলয়েই হ'ল সমাশ্রয়ন। আমি জানো যে সহসম্বন্ধ ৰৈখিক বা অৰৈখিক হ'ব পাৰে। যেতিয়া দুটা চলক ৰৈখিকভাৱে সম্বন্ধ যুক্ত হয় অর্থাৎ যেতিয়া স্বতন্ত্র চলকৰ ধাৰাবাহিকভাৱে প্রতিটো মানৰ পৰিবর্তনত পৰতন্ত্র চলকৰ মান স্থিৰভাৱে পৰিবর্তিত হয়, তেতিয়া সমাশ্রয়নৰ পদ্ধতিটোক ৰৈখিক সমাশ্রয়ন হিচাপে জনা যায়।



জানি থোৱা ভাল

পৰতন্ত্র চলক হ'ল এটা চলক যাৰ মান আন এক চলকৰ মানৰ ওপৰত নির্ভৰ কৰে। স্বতন্ত্র চলক হ'ল এটা চলক যাৰ মান আন চলকৰ মানৰ ওপৰত নির্ভৰ নকৰে।

আনহাতে, ৰৈখিকতা (linearity) বুলিয়ে ইয়াকে বুজায় যে যেতিয়া স্বতন্ত্র চলকৰ

মানৰ পৰিবৰ্তন হয় তেতিয়া পৰতন্ত্ৰ চলকৰ মানৰ পৰিবৰ্তন একে হাৰত হয়। এনেকুৱা দুটা চলকৰ মানৰ পৰিবৰ্তনবিলাক লেখ কাগজত স্থাপন কৰিলে এডাল সৰলৰেখা উৎপন্ন হয়।



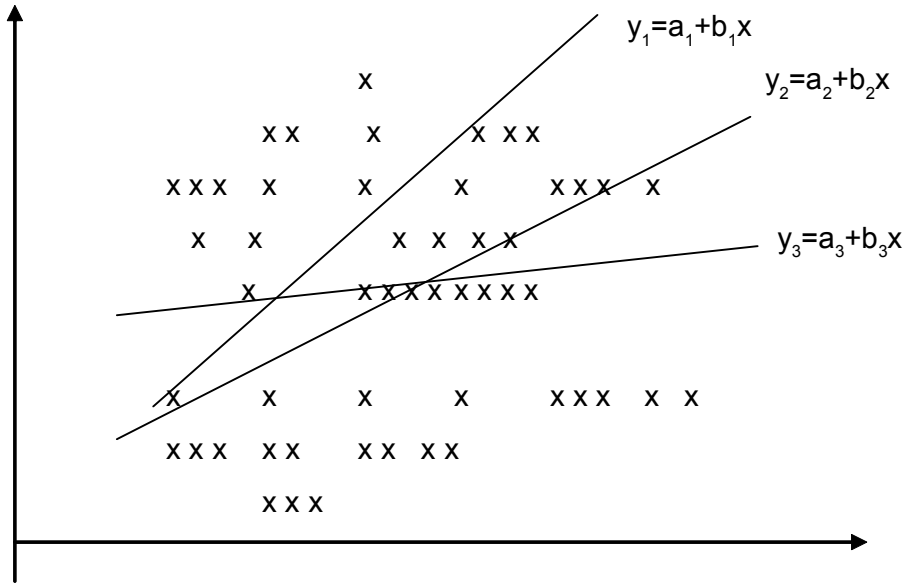
অনুশীলনী - ৫

পাঁচটা পৰতন্ত্ৰ চলক আৰু পাঁচটা স্বতন্ত্ৰ চলক তালিকাভুক্ত কৰিবলৈ যত্ন কৰক। আকৌ কোনটো চলক কাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল বিচাৰ কৰক।

৬.৫ সমাশ্রয়ন সমীকৰণ আৰু সমাশ্রয়ন ৰেখা (REGRESSION EQUATION AND LINE OF REGRESSION)

আমি ৰৈখিকভাৱে জড়িত দুটা চলক x আৰু y বিবেচনা কৰোহঁক। সিহঁতৰ মাজৰ সম্বন্ধটো এনেকুৱা যে x ৰ ওপৰত y নিৰ্ভৰশীল। এই সম্বন্ধটো তলত দিয়া ধৰণে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

$y = a+bx$ য'ত a আৰু b দুটা ধ্ৰুৱক (constant) বা প্ৰাচল (parameter)। মন কৰক, x ৰ নিৰ্ধাৰিত মানৰ বাবে y ৰ মান a ৰ আৰু b ৰ মানৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰিব। প্ৰচল a আৰু b ৰ ভিন্ ভিন্ মানৰ বাবে x আৰু y ৰ যোৰ সংখ্যাবিলাকে প্ৰদৰ্শন কৰা বিন্দুবোৰৰ মাজেদি ভিন্ ভিন্ ৰেখা যাব। তলৰ চিত্ৰটোলৈ দৃষ্টি নিক্ষেপ কৰক।



চিত্ৰটোত আপুনি লক্ষ্য কৰিলে দেখিব যে বিন্দুবিলাকৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখা তিনিডালে a আৰু b ৰ তিনিটা ভিন্নমানৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি y ৰ তিনিটা ভিন্নমান উৎপন্ন কৰে। কিন্তু y ৰ মান তিনিটাৰ আটাইকেইটা 'আকলিত' (estimated) মান হোৱা হেতুকে তাত আকলন ত্ৰুটি

('error' of estimation) থাকিব। এই ত্রুটি y ৰ 'প্রকৃত' আৰু 'আকলিত' মানৰ পার্থক্য মাত্র। অর্থাৎ

$e = y - \hat{y}$ য'ত $\hat{y}$ হ'ল y ৰ আকলিত মান আৰু e হ'ল আকলন ত্রুটি।

যদি ত্রুটি 'e' শূন্য বা নিম্নতম হয়, তেতিয়া আদর্শগতভাৱে বেছি ভাল হয়। এতিয়া, যিহেতু $\hat{y}$ ৰ মান a আৰু b ৰ মানৰ ওপৰত নির্ভৰ কৰে, গতিকে a আৰু b এনেভাৱে আকলিত কৰিব লাগে যাতে 'e' নিম্নতম হয়।

ধৰা হ'ল a আৰু b ৰ আকলিত মান ক্রমে $\hat{a}$ আৰু $\hat{b}$ যাতে আমি $\hat{y}$ এনেভাৱে পাওঁ যে—

$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ আৰু লব্ধ 'e' নিম্নতম হয়।

তেতিয়াহ'লে এই সমীকৰণটোকে সমাশ্রয়ন সমীকৰণ আৰু সমীকৰণটোৱে উৎপন্ন কৰা ৰেখাডালক সমাশ্রয়নৰ ৰেখা, সংক্ষেপে সমাশ্রয়ন ৰেখা বোলে। আন কথাত সমাশ্রয়ন সমীকৰণ এটা সমীকৰণ যিটোৱে পৰতন্ত্র চলকৰ মান এনেকুৱাভাৱে আকলিত কৰে যাতে আকলিত আৰু প্রকৃত মানৰ পার্থক্য বা সংক্ষেপে ত্রুটি নিম্নতম হয়। সমাশ্রয়নৰ ৰেখাক প্রায়ে 'শ্রেষ্ঠ অসজ্জন ৰেখা' বা 'শ্রেষ্ঠ আকলিত ৰেখা' (line of 'best fit') হিচাপে বুজোৱা হয়। সম্ভৱপৰ ৰেখাবিলাকৰ ভিতৰত (এনেকুৱা তিনিডাল ৰেখা প্রদর্শন কৰা চিত্রটো লক্ষ্য কৰক) সমাশ্রয়নৰ ৰেখাডাল খাপখাই পৰে অর্থাৎ বিন্দুবিলাকৰ প্রায়বিলাককে স্পর্শ কৰে (আৰু সেই কাৰণে ত্রুটি নিম্নতম হয়)।

যেতিয়া আমি পৰতন্ত্র আৰু স্বতন্ত্র চলক দুটাক স্পষ্টভাৱে চিনাক্ত কৰিব পাৰো, তেতিয়া এডাল সমাশ্রয়ন ৰেখা পোৱা যায়। যদি এই কথা স্পষ্ট নহয়, তেতিয়া আমি দুডাল সমাশ্রয়ন ৰেখা পাওঁ— এডালে y ক পৰতন্ত্র চলক হিচাপে আৰু আনডালে x ক পৰতন্ত্র চলক হিচাপে দেখুৱায়। এই কথা মনত ৰখা উচিত হ'ব যে যদি চলক দুটাৰ মাজত পূর্ণ সহসম্বন্ধ থাকে অর্থাৎ সহসম্বন্ধ সহগ –1 বা +1 ৰ সমান হয়, তেন্তে ৰেখা দুডাল সংপাতী হ'ব। যেতিয়া চলক দুটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্র হয়, তেতিয়া ৰেখা দুডাল পৰস্পৰ লম্ব হ'ব। আকৌ দুয়োডাল সমাশ্রয়ন ৰেখা চলক দুটাৰ গড় মানৰ মাজেৰে যায়।

৬.৬ সমাশ্রয়নৰ সহগ (COEFFICIENT OF REGRESSION)

তলৰ সমাশ্রয়ন সমীকৰণটো বিবেচনা কৰোহঁক ঃ

$\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$

এই সমীকৰণটোত '$\hat{a}$'ক ধ্রুৱক পদ (Constant term) আৰু '$\hat{b}$'ক সমাশ্রয়নৰ সহগ বোলে। এতিয়া প্রশ্ন হ'ল $\hat{b}$ক কেনেকৈ নির্ণয় কৰিব পাৰি? আচলতে ('$\hat{b}$')ক নির্ণয় কৰাৰ সূত্রটো হ'ল—

$$\hat{b} = \frac{Cov.(x, y)}{\sigma x}$$

পদ্ধতিগতভাৱে $\hat{b}$ক নির্ণয় কৰাত আংশিক অৱকলন (Partial differentiation) জড়িত। যি কি নহওঁক, সমাশ্রয়ন সহগ (regression coefficent) আকলন কৰিবলৈ তলৰ সূত্রটো ব্যৱহাৰ কৰা হয় ঃ

$$\hat{b} = \frac{n\sum xy - \sum x\sum y}{n\sum x^2 - (\sum x)^2}$$

এবাৰ $\hat{b}$ৰ মান পোৱাৰ পিছত তলৰ সমীকৰণটো সমাধান কৰি ধ্ৰুৱকটো নির্ণয় কৰিব পাৰি ঃ

$$\bar{y} = \hat{a} + \hat{b}\,\bar{x}$$

য'ত $\bar{y}$ আৰু $\bar{x}$ ক্ৰমে y আৰু x ৰ গড়। সমাশ্রয়ন সহগে স্বতন্ত্ৰ চলকৰ নির্ধাৰিত মানৰ কাৰণে হোৱা পৰতন্ত্ৰ চলকৰ বিচৰণৰ পৰিমাণক বুজায়।

৬.৭ সমাশ্রয়ন সহগ আৰু সহসম্বন্ধ সহগৰ মাজৰ সম্বন্ধ (RELATION BETWEEN COEFFICIENTS OF REGRESSION AND CORRELATION)

সমাশ্রয়ন সহগ আৰু সহসম্বন্ধ সহগ দুটাৰ মাজত যে এক পাৰস্পৰিক সম্বন্ধ আছে, তাক জানিব পাৰি। আমি জানো যে—

$$r = \frac{Cov(x,y)}{\sigma x\ \sigma y}$$ আৰু

$$\hat{b} = \frac{Cov(x,y)}{\sigma x}$$

গতিকে এইটো স্পষ্ট যে,

$$r = \frac{\hat{b}}{\sigma y}$$

এই সম্পৰ্কটো বিশ্লেষণৰ কাৰণে বাস্তৱিকতে বৰ উপযোগী। মনত কৰক, যেতিয়া আমি চলক দুটাৰ কোনটো পৰতন্ত্ৰ আৰু কোনটো স্বতন্ত্ৰ স্পষ্টকৈ নাজানো, তেতিয়া আমি দুডাল সমাশ্রয়ন ৰেখা পাওঁ আৰু সেই কাৰণতে সমাশ্রয়নৰ দুটা সহগ পাওঁ। আমি ধৰি লওঁহ'ক যে সমাশ্রয়নৰ সম্ভৱপৰ সহগ দুটা ক্ৰমে $\hat{b}_1$ আৰু $\tilde{b}_2$। তেতিয়াহ'লে দুয়োটাই তলৰ ধৰ্মটো মানি চলে ঃ

$$r^2 = \hat{b}_1 \times \tilde{b}_2$$

ওপৰৰ ধৰ্মটোৰ পৰা ফলস্বৰূপে আমি পাওঁ যে সমাশ্রয়ন সহগ দুটাৰ উভয়ৰে চিন একে আৰু যদি এটাৰ মান একতকৈ ডাঙৰ হয় তেন্তে আনটোৰ মান একতকৈ সৰু হ'ব লাগিব।

৬.৮ সহসম্বন্ধ আৰু সমাশ্রয়ন বিশ্লেষণ ঃ এক তুলনা (CORRELATION AND REGRESSION ANALYSIS : A COMPARISON)

সহসম্বন্ধ বিশ্লেষণে দুটা চলকৰ মাজত কোনো সম্বন্ধ আছে নে নাই তাক চিনাক্ত কৰে। এই চিনাক্তকৰণত চলকৰ মানৰ পৰিৱৰ্তনৰ দিশ আৰু তাৰ পিছত সেই পৰিবৰ্তনৰ দিশৰ কোনো চিনাক্ত কৰিব পৰা বিধৰ আৰ্হি সম্পৰ্কত চকু দিয়া হয়। আনহাতে সমাশ্রয়ন বিশ্লেষণে এটা চলকৰ নির্ধাৰিত মানৰ বাবে আনটো চলকৰ গড় মান আকলন বা ভৱিষ্যৎবাণী কৰিবলৈ যত্ন কৰে। এই বিশ্লেষণে এটা চলকৰ সংঘটিত হোৱা বিচৰণৰ পৰিসৰ বা মাত্রা ব্যাখ্যা কৰিবলৈও যত্ন কৰে। এই ভাবত, সহসম্বন্ধ বিশ্লেষণতকৈ সমাশ্রয়ন বিশ্লেষণৰ অধিক ব্যাখাত্মক সামর্থ আছে।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৪ঃ শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিয়াওঁক—

(১) সমাশ্রয়ন বিশ্লেষণে ———————— মানবোৰ আকলিত কৰিবলৈ যত্ন কৰে।

(ক) গড় (খ) মধ্যমা (গ) বহুলক (ঘ) পৰিসৰ

(২) সমাশ্রয়ন ৰেখাক কোৱা হয় ———————— আকলিত ৰেখা।

(ক) নিকৃষ্টতম (খ) উচ্চতম (গ) সর্বোত্তম (ঘ) নিম্নতম

(৩) সমাশ্রয়ন সমীকৰণে মানবোৰ এনেভাৱে আকলিত কৰে যাতে ত্রুটি হয়।

(ক) নিম্নতম (খ) উচ্চতম (গ) স্বাভাৱিক (ঘ) অস্বাভাৱিক

(৪) যেতিয়া সহসম্বন্ধ সহগ শূন্য হয়, তেতিয়া সমাশ্রয়নৰ ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণৰ মাপ হয় ঃ

(ক) 90^0 (খ) 30^0 (গ) 45^0 (ঘ) 0^0

(৫) সমাশ্রয়ন ৰেখা চলকবিলাকৰ ———————— মানৰ মাজেদি যায়।

(ক) উচ্চতম (খ) নিম্নতম (গ) গড় (ঘ) মধ্যমা

(৬) সমাশ্রয়ন সহগ দুটা বিপৰীত চিন যুক্ত।

(ক) শুদ্ধ (খ) অশুদ্ধ

(৭) দুয়োটা সমাশ্রয়ন সহগ একতকৈ ডাঙৰ হ'ব পাৰে।

(ক) শুদ্ধ (খ) অশুদ্ধ।



৬.৯ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- সমাশ্রয়ন হ'ল স্বতন্ত্র চলকৰ নির্ধাৰিত মানৰ বাবে পৰতন্ত্র চলকৰ গড়মান আকলন কৰা এক পদ্ধতি।
- সমাশ্রয়নৰ ৰেখাই শ্রেষ্ঠ আকলিত ৰেখা আৰু সমাশ্রয়ন সমীকৰণে সমাশ্রয়নৰ ৰেখাক সংজ্ঞাকৃত কৰে। সমাশ্রয়নৰ ৰেখাডাল চলকবিলাকৰ গড় মানৰ মাজেদি যায়।
- সমাশ্রয়ন সহগটোৱে স্বতন্ত্র চলকৰ নির্ধাৰিত মানৰ কাৰণে পৰতন্ত্র চলকৰ বিচৰণৰ পৰিমাণক বুজায়।
- সহসম্বন্ধ বিশ্লেষণে দুটা চলকৰ মাজত কোনো সম্বন্ধ আছে নে নাই তাক চিনাক্ত কৰে। আনহাতে সমাশ্রয়ন বিশ্লেষণে এটা চলকৰ নির্ধাৰিত মানৰ ওপৰত নির্ভৰ কৰি আনটো চলকৰ মান আকলন বা ভৱিষ্যৎবাণী কৰিবলৈ যত্ন কৰে।



৬.১০ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

১) Agarwal, D. R. (2006). Business Statistics. Delhi, Vrinda Publications.

২) Gupta S.C. (1994). Fundamentals of statistics. New Delhi, Himalayan Publishing House.

৩) Rajagopalan, S. P. & Sattanthan R. (2009).Business Statistics and Operations Research. New Delhi, Tata McGraw-Hill

৪) Sharma, J. K. (2007). Business Statistics. New Delhi. Pearson Education Ltd.

৫) Verma, A. P. (2007). Business Statistics. Guwahat, Asian Books Private Limited.



৬.১১ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ১। (ক) গড়

২। (গ) সর্বোত্তম

৩। (ক) নিম্নতম

৪। (ক) 90^0

৫। (গ) গড়

৬। (খ) অশুদ্ধ

৭। (খ) অশুদ্ধ



৬.১২ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ সমাশ্রয়নৰ ধাৰণা ব্যাখ্যা কৰক। ব্যৱসায় আৰু বাণিজ্যত ইয়াৰ উপযোগিতা প্রকাশ কৰক।

প্ৰশ্ন ২ঃ সমাশ্রয়ন ৰেখা কি? কিয় আমি সমাশ্রয়নৰ দুডাল ৰেখা পাওঁ? সমাশ্রয়নৰ ৰেখা আৰু সহসম্বন্ধ সহগৰ মাজৰ সম্বন্ধ ব্যাখ্যা কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ঃ কিয় সমাশ্রয়ন ৰেখাক শ্রেষ্ঠ আকলিত ৰেখা বোলে? শ্রেষ্ঠ আকলিত ৰেখা বুলিলে আপুনি কি বুজে?

প্ৰশ্ন ৪ঃ সমাশ্রয়ন সহগ কি? ইয়ে কি সূচায়?

প্ৰশ্ন ৫ঃ Yক পৰতন্ত্র চলক হিচাপে লৈ তলৰ তথ্যটোৰ এডাল সমাশ্রয়ন ৰেখা আসঞ্জন কৰক আৰু X ৰ মান 20 হ'লে Y আকলন কৰক।

Y :	1	2	4	5	7	8	9
X :	1	3	4	8	9	11	14

প্ৰশ্ন ৬ঃ যদি তলৰ সমীকৰণ দুটাই সমাশ্রয়নৰ দুডাল ৰেখাক বুজায়, তেন্তে সহসম্বন্ধ সহগ আৰু x আৰু y ৰ গড়মান নির্ণয় কৰক।

$8x-10y+66 = 0$ আৰু $40x-18y = 214$

প্ৰশ্ন ৭ঃ সহসম্বন্ধ বিশ্লেষণ আৰু সমাশ্রয়ন বিশ্লেষণ তুলনা কৰক।

*** ***** ***