GCM S2 01

ব্যৱসায়িক পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান

দ্বিতীয় ষাণ্মাসিক

স্নাতক বাণিজ্য

খণ্ড ঃ ২



কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

বিষয় বিশেষজ্ঞ মণ্ডলী

অধ্যাপক নয়ন বৰুৱা, গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়

অধ্যাপক হেমচন্দ্র গৌতম, গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়

ড° এচ. কে. মহাপাত্র, গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়

সমন্বয়ৰক্ষীঃ হৰেকৃষ্ণ ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

প্রস্তুতি গোটৰ সদস্য

অধ্যায়	*অৰিহণা যোগাইছে*	*ভাষান্তৰকাৰী*
৭ আৰু ১৩	ড° তাৰাকেশ্বৰ চৌধুৰী অৱসৰপ্রাপ্ত অধ্যাপক, কটন কলেজ	অধ্যায় ৭, ১১, ১৩ শ্রী পঞ্চানন বর্মন, অৱসৰপ্রাপ্ত শিক্ষক আম্ৰিখোৱা উচ্চতৰ মাধ্যমিক বিদ্যালয় সৰ্থেবাৰী
৮	হৰেকৃষ্ণ ডেকা কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়	অধ্যায় ৯, ৮, ১২ গীতাঞ্জলী মেধি, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়
৯, ১০ আৰু ১১	ড° ৰিজুশ্মিতা শর্মা, ললিত চন্দ্র ভৰালী কলেজ	অধ্যায় ১০ ড° নিত্যজ্যোতি কলিতা, অসম মাধ্যমিক শিক্ষা পৰিষদ, গুৱাহাটী
১২	ড° ৰূপম বর্মন আই. আই. টি. গুৱাহাটী	

সম্পাদনাঃ

বিষয়বস্তু সম্পাদনা ঃ ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা, কটন কলেজ
ড° সঞ্জয় দত্ত, গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়

গাঁথনিক সম্পাদনা ঃ হৰেকৃষ্ণ ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

প্রথম প্রকাশ ঃ জানুৱাৰী, ২০১৮

This Self Learning Material (SLM) of the Krishna Kanta Handiqui State Open University is made available under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike4.0 License (international): http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ৰ হৈ পঞ্জীয়কৰ দ্বাৰা মুদ্রিত আৰু প্রকাশিত

মূখ্য কার্যালয় ঃ পাটগাঁও, ৰাণীগেট, গুৱাহাটী-৭৮১০১৭
উপমূখ্য কার্যালয় ঃ হাউচফেড কমপ্লেক্স, দিচপুৰ, গুৱাহাটী-৭৮১০০৬
Web : www.kkhsou.in

এই শিক্ষণ সামগ্রী প্রস্তুতিৰ বাবে আর্থিক অনুদান আগবঢ়োৱা
দূৰ শিক্ষা ব্যুৰো, বিশ্ববিদ্যালয় অনুদান আয়োগৰ ওচৰত বিশ্ববিদ্যালয় কৃতজ্ঞ।

খণ্ড পৰিচয়

এই খণ্ডটি ‘ব্যৱসায়িক পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান’ পাঠ্যবিষয়টিৰ দ্বিতীয় খণ্ড। এই খণ্ডটি সৰ্বমুঠ সাতটা অধ্যায়েৰে গঠিত।

সপ্তম অধ্যায়ত সম্ভাৱিতাৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ’ব। ইয়াতে আমি সম্ভাৱিতাৰ বিভিন্ন উপপাদ্যৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। অষ্টম অধ্যায়ত চর্তসাপেক্ষে সম্ভাৱিতা বিষয়ে জানিব পাৰিব। এই অধ্যায়টিত সম্ভাৱিতাৰ গুনিতক উপপাদ্য, পুর্ন সম্ভাৱিতা আৰু বেইজৰ উপপাদ্যৰ আলোচনা কৰা হ’ব। নৱম অধ্যায়ত যাদৃচ্ছিক চলক আৰু ইয়াৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন বিষয়ে আলোচনা কৰা হ’ব। যাদৃচ্ছিক চলকৰ গাণিতিক প্রত্যাশ্যা আৰু প্রসৰণৰ বিষয়েও এই অধ্যায়টিত আলোচনা কৰা হ’ব।

দশম অধ্যায়ত বিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বিভাজনৰ বিষয়ে বিশদভাৱে আলোচনা কৰা হ’ব। এই অধ্যায়টিত দ্বিপদ বণ্টন আৰু পইছ পদ্ধতিৰ বিষয়েও জানিব পাৰিব।

একাদশ অধ্যায়ত সূচকাংক, সৰল সূচকাংকৰ প্রকাৰ, সৰল আৰু ভাৰিত সূচকাংকৰ গঠন আদিৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ’ব।

দ্বাদশ অধ্যায়ত সময় শ্রেণী, সময় শ্রেণীৰ উপাদান আৰু দীর্ঘকালীন প্রৱণতা জোখাৰ পদ্ধতি বিষয়ে আলোচনা কৰা হ’ব।

ত্রয়োদশ অধ্যায়ত প্রতিচয়নৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ’ব। ইয়াতে সমষ্টি, প্রাচল, প্রতিচয়নৰ পদ্ধতি, যাদৃচ্ছিক আৰু অযাদৃচ্ছিক প্রতিচয়নৰ পদ্ধতি, প্রতিচয়ন পদ্ধতিৰ ত্রুতি আদি অন্তর্ভুক্ত কৰা হ’ব।

এই পাঠ্যবিষয়টি অধ্যয়ন কৰোঁতে মূল পাঠৰ সোঁ তথা বাওঁফালে কিছুমান আয়তাকাৰ বাকচ লক্ষ্য কৰিব। এইবোৰত মূল পাঠত থকা নতুন শব্দ আৰু পৰিভাষাসমূহৰ অর্থ সন্নিবিষ্ট হৈছে। সেইদৰে— ‘জানি থোৱা ভাল’ বাকচবোৰত মূল পাঠৰ সৈতে জড়িত কিছু গুৰুত্বপূর্ণ তথ্যৰ সম্ভেদ আছে। প্রতিটো অধ্যায়ত থকা ‘অনুশীলনী’সমূহে অধ্যয়ন অধিক সক্রিয় আৰু ফলপ্রসূ হোৱাত সহায় কৰিব। আকৌ, ‘অগ্রগতি নিৰীক্ষণ’ যোগে আগবঢ়োৱা প্রশ্নাৱলীয়ে অধ্যয়নৰ অগ্রগতি সম্পর্কে স্ব-পৰীক্ষণৰ সুবিধা দিব। অধ্যয়নৰ লগে লগে উক্ত প্রশ্নাৱলীৰ উত্তৰসমূহ লিখি শেষত দিয়া ‘অগ্রগতিৰ খতিয়ান’ৰ সৈতে ৰিজাই চোৱাটো অধিক লাভদায়ক হ’ব। অধ্যায়বোৰৰ শেষত ‘আৰ্হি প্রশ্ন’ হিচাপে কেইটিমান প্রশ্নৰ আৰ্হিও তুলি দিয়া হৈছে।

বিষয় সূচী

পৃষ্ঠা নং

অধ্যায় ৭ঃ **সম্ভাৱিতা** ৫-২৪
যাদৃচ্ছিক ধাৰণা; সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা; সম্ভাৱিতাৰ প্ৰাথমিক উপপাদ্য

অধ্যায় ৮ঃ **চর্তসাপেক্ষে সম্ভাৱিতা** ২৫-৪৪
চর্তসাপেক্ষে সম্ভাৱিতা, সম্ভাৱিতাৰ গুনিতক উপপাদ্য, পুর্ন সম্ভাৱিতা, ৱেইজৰ উপপাদ্য।

অধ্যায় ৯ঃ **যাদৃচ্ছিক চলক আৰু ইয়াৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন** ৪৫-৫৭
যাদৃচ্ছিক চলক, সম্ভাৱিতা বণ্টন, গাণিতিক প্ৰত্যাশ্যা আৰু প্ৰসৰণ।

অধ্যায় ১০ঃ **বিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বিভাজন** ৫৮-৮২
ঘুর্নক জনক ফলন, দ্বিপদ বণ্টন, পইছ পদ্ধতি

অধ্যায় ১১ঃ **সূচকাংক** ৮৩-১০৬
সূচকাংকৰ অর্থ আৰু ব্যৱহাৰ; সৰল সূচকাংকৰ প্ৰকাৰ; আপেক্ষিকৰ ধর্মসমূহ;
সৰল সূচকাংকৰ গঠন; ভাৰিত সূচকাংকৰ গঠন; সূচকাংকৰ পর্যাপ্তিৰ পৰীক্ষা।

অধ্যায় ১২ঃ **সময় শ্রেণী** ১০৭-১২৩
সময় শ্রেণীৰ সংজ্ঞা, সময় শ্রেণী বিশ্লেষণৰ গুৰুত্ব, এটা সময় শ্রেণীৰ উপাদান,
দীর্ঘকালীন প্ৰৱণতা জোখাৰ পদ্ধতি।

অধ্যায় ১৩ঃ **প্রতিচয়নৰ মৌলিক ধাৰণা** ১২৪-১৩৯
সমষ্টি, প্ৰাচল আৰু প্রতিচয়নৰ সংজ্ঞা; যাদৃচ্ছিক আৰু অযাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন; সপুনঃ
স্থাপন আৰু অপুনঃস্থাপন প্রতিচয়ন; প্রতিচয়ন পদ্ধতিৰ ত্রুতি।

অধ্যায় ৭ঃ সম্ভাৱিতা (PROBABILITY)

অধ্যায় গাঁথনি

৭.১ উদ্দেশ্য

৭.২ পৰিচয়

৭.৩ যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা

৭.৪ সম্ভাৱিতাৰ পূৰাতন সংজ্ঞা

৭.৫ প্ৰতিদৰ্শ দিক্ বা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি

৭.৬ সম্ভাৱিতাৰ স্বতঃসিদ্ধ ভিত্তিক সংজ্ঞা

৭.৭ সম্ভাৱিতাৰ প্ৰাথমিক উপপাদ্য

৭.৮ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৭.৯ অধিক জানিবলৈ

৭.১০ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

৭.১১ আহি প্ৰশ্ন

৭.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা সম্পৰ্কে স্পষ্ট ধাৰণা আগবঢ়াব পাৰিব
- সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা দিব পাৰিব
- প্ৰতিদৰ্শ দিশ সম্পৰ্কে ধাৰণা আগবঢ়াব পৰিব
- সম্ভাৱিতাৰ পূৰাতন সংজ্ঞা, পৰিসাংখ্যিকীয় সংজ্ঞাৰ সীমাবদ্ধতা আৰু স্বতঃসিদ্ধ ভিত্তিক সংজ্ঞাৰ প্ৰয়োজনীয়তা উল্লেখ কৰিব পাৰিব
- কোনো ঘটনা সংঘটিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতাৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- সম্ভাৱিতাৰ প্ৰাথমিক তত্ত্ব কিছুমানৰ সংজ্ঞা দিব পাৰিব
- স্বতন্ত্ৰ ঘটনাৰ ধাৰণা আগবঢ়াব পাৰিব
- স্বতন্ত্ৰ ঘটনা কিছুমানৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰিব পাৰিব

৭.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

সোতৰশ শতিকাত জুৱাৰ ক্ষেত্ৰত উদ্ভৱ হোৱা কিছুমান সমস্যা সমাধানৰ বাবে গণিতজ্ঞ কিছুমানে (পাস্কেল, প্যাৰী ড্যা ফাৰমেট, জেমচ বাৰনউলি আদি উল্লেখযোগ্য) চলোৱা প্ৰচেষ্টাৰ

ফলস্বৰূপে সম্ভাৱিতাৰ ধাৰণাৰ উদ্ভৱ হৈছিল। বিভিন্ন গণিতজ্ঞই সম্ভাৱিতাৰ বিকাশত বৰঙণি যোগায়। কুৰি শতিকালৈ সম্ভাৱিতাৰ ধাৰণাৰ ওপৰত বিভিন্ন সংজ্ঞা, তত্ত্ব আৰু স্বতঃসিদ্ধৰ ভিত্তিত সম্ভাৱিতাৰ গাণিতিক তত্ত্বৰ বিকাশ হয়।

প্ৰাকৃতিক আৰু সামাজিক সকলো পৰিঘটনাৰ সংঘটিত হোৱাৰ নিশ্চয়তা থাকে আৰু কিছুমান পৰিঘটনা সংঘটিত হ'ব নে নাই সঠিককৈ ক'ব নোৱাৰি। ওঠৰশ শতিকালৈ নিশ্চয়তা থকা পৰিঘটনাবোৰহে অধ্যয়ন কৰিব পৰা গৈছিল, কিন্তু যোৱা দুটা শতিকাত অনিশ্চয়তা জড়িত হৈ থকা পৰিঘটনাবোৰৰ ওপৰত গৱেষণা চলোৱা হৈছে।

সময়ৰ লগে লগে সম্ভাৱিতা তত্ত্বৰ প্ৰয়োগ গণিততেই সীমাবদ্ধ হৈ থকা নাই। বিজ্ঞান, কলা আৰু বাণিজ্যৰ বিভিন্ন শাখালৈ ইয়াৰ প্ৰয়োগ সম্প্ৰসাৰিত হৈছে। এই প্ৰয়োগবোৰে সম্ভাৱিতা তত্ত্বৰ বিকাশত বৰঙণি যোগাইছে।

দৈনন্দিন জীৱনত আমি সম্ভাৱিতাৰে নিজৰ বিশ্বাসৰ মাত্ৰা বুজাওঁ। যেনে আমি কওঁ 'আজি বৰষুণ হোৱাৰ সম্ভাৱনা নাই।' অৰ্থাৎ আমি ঘটনাবোৰ হোৱা বা নোহোৱাটো বিশ্বাস বা অভিজ্ঞতাৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি অনুমান কৰো বা কেতিয়াবা কোনো কাৰণ নোহোৱাকৈ আশা কৰো। পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানত এই নিশ্চয়তা বা অনিশ্চয়তাক সংখ্যাত্মক ৰূপত প্ৰকাশ কৰা হয়। সম্ভাৱিতা তত্ত্ব দুই ধৰণে আলোচনা কৰিব পাৰি। পূৰাতন পদ্ধতিত সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা অনুকূল ঘটনা আৰু সম্পূৰ্ণ ঘটনাৰ অনুপাত হিচাপে দিয়া হয়। আধুনিক পদ্ধতিত সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা প্ৰতিদৰ্শ দিক বা সমষ্টিৰ ধাৰণাৰ ভিত্তিত দিয়া হয়।

৭.৩ যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা (RANDOM EXPERIMENT)

যদি কোনো এটা পৰীক্ষা সুষম অৱস্থাত চলকটোৰ ওপৰত প্ৰভাৱ বিস্তাৰ কৰা কাৰকসমূহক নিয়ন্ত্ৰণত ৰাখি বাৰে বাৰে সম্পাদন কৰা হয় তেন্তে ফলাফলসমূহ প্ৰায় একে হ'ব। কিন্তু এইদৰে কাৰকসমূহক নিয়ন্ত্ৰণত ৰখাটো সহজ কথা নহয়। ফলত পৰীক্ষাটো সুষম আৰু একে অৱস্থাত সম্পাদন কৰিলেও ফলসমূহ বিভিন্ন হোৱা দেখা যায়। এই ধৰণৰ পৰীক্ষাক যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা বোলে।

যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ উদাহৰণ ঃ

1. মুদ্ৰা এটা ওপৰলৈ নিক্ষেপ কৰিলে মুণ্ড (head, H) বা পুচ্ছ (tail, T) পোৱা যাব বুলি জানো। কিন্তু মুণ্ড পাম নে পুচ্ছ পাম আগতীয়াকৈ ক'ব নোৱাৰো। কাৰণ ফলাফলৰ ওপৰত প্ৰভাৱ পেলোৱা কাৰকবোৰ নিয়ন্ত্ৰণ কৰিব নোৱাৰি। যদি মুদ্ৰাটো দুবাৰ নিক্ষেপ কৰা হয় ফলাফলবোৰ হ'ব {(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)}। এইটো যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ উদাহৰণ।
2. লুডু গুটি এটা মাৰি পঠিয়ালে 1, 2, 3, 4, 5, 6 সংখ্যাকেইটাৰ কোনটো সংখ্যা পাম নিশ্চিতকৈ ক'ব নোৱাৰি। কিন্তু এই সংখ্যা ছয়টাৰ যিকোনো এটা পোৱা যাব বুলি আমি জানো। এইটো এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা।

ঘটনা (Event) ঃ

কোনো এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ সম্ভবপৰ ফলাফলসমূহক ঘটনা বুলি কোৱা হয়। এটা ঘটনা এটা মাত্ৰ ফলাফলেৰে গঠন হ'ব পাৰে বা কেবাটাও ফলাফলৰ সমষ্টি হ'ব পাৰে। এটা মাত্ৰ ফলাফলেৰে গঠন হোৱা ঘটনাক সৰল বা প্ৰাথমিক ঘটনা (elementary event) বোলে। ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ ডাঙৰ ফলাৰ আখৰেৰে ঘটনা বুজোৱা হয়।

কোনো এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা সমাধা কৰাকে প্ৰচেষ্টা (trial) বোলে। এটা প্ৰচেষ্টাৰ সম্ভৱপৰ সকলো ঘটনাৰ সমষ্টিক সম্পূৰ্ণ ঘটনা (Exhaustive Events) বুলি কোৱা হয়। A_1, A_2, ...A_n ঘটনাকেইটাক সম্পূৰ্ণ ঘটনা বুলি কোৱা হ'ব যদিহে যিকোনো প্ৰচেষ্টাত ইয়াৰে কমেও এটা ঘটনা সংঘটিত হোৱাতো নিশ্চিত। উদাহৰণ স্বৰূপে মুদ্ৰা এটা ওপৰলৈ দলিয়ালে মুণ্ড বা পুচ্ছ পোৱাটো নিশ্চিত। গতিকে সম্পূৰ্ণ ঘটনাৰ সংখ্যা 2.

দুটা বা ততোধিক ঘটনাক পৰস্পৰ বহিৰ্ভূত ঘটনা (mutually exclusive events) বুলি কোৱা হয় যদিহে কোনো এটা প্ৰচেষ্টাত এটা ঘটনা ঘটিলে আন কেইটা ঘটনা ঘটিব নোৱাৰে। অৰ্থাৎ এটা ঘটনাই আনকেইটা ঘটনাক সংঘটিত হোৱাত বাধা প্ৰদান কৰে। উদাহৰণস্বৰূপে লুডু গুটি এটা মাৰি পঠিয়ালে যদি 6 পোৱা যায় তেন্তে আনকেইটা সংখ্যা 1, 2, 3, 4, 5 পাব নোৱাৰি। গতিকে এই 6 টা ঘটনা পৰস্পৰ বহিৰ্ভূত ঘটনা।

এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাত সংঘটিত হ 'ব পৰা ফলাফলসমূহক সমান সম্ভাৱনাপূৰ্ণ ঘটনা বুলি কোৱা হ'ব যদিহে আমি সকলো দিশ পৰীক্ষা কৰি লোৱাৰ পিছত কোনো এটা ঘটনাকে আনবোৰ ঘটনাতকৈ বেছি অগ্ৰাধিকাৰ দি আশা কৰিব নোৱাৰো। উদাহৰণস্বৰূপে মুদ্ৰা এটা ওপৰলৈ মাৰি পঠিয়ালে মুণ্ড আৰু পুচ্ছ পোৱাটো সমান সম্ভাৱনা পূৰ্ণ ঘটনা (Equally likely Events)।

৭.৪ সম্ভাৱিতাৰ পূৰাতন সংজ্ঞা (CLASSICAL DEFINITION OF PROBABILITY)

যদি কোনো এটা ঘটনাৰ A, n টা সম্পূৰ্ণ, পৰস্পৰ বহিৰ্ভূত আৰু সমান সম্ভাৱনাপূৰ্ণ ধৰণে সংঘটিত হয় আৰু ইয়াৰ ভিতৰত m টা ফলাফল ঘটনা Aৰ কাৰণে অনুকুল হয় তেন্তে A ঘটনা সংঘটিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ব —

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

যিহেতু $0 \leq m \leq n$, P(A) সদায় 0 আৰু 1ৰ মাজত থাকে।

1. যেতিয়া Aৰ কাৰণে অনুকল ঘটনা এটাও নাথাকে তেতিয়া m = 0 আৰু P(A) = 0
2. যদি আটাইকেইটা ঘটনা Aৰ অনুকুল হয় m = n হ'ব আৰু P(A)=1

উদাহৰণ ১ ঃ

এটা লুডু গুটি এবাৰ নিক্ষেপ কৰিলে (i) এটা অযুগ্ম সংখ্যা পোৱাৰ (ii) 2 আৰু 3ৰে হৰণ কৰিব পৰা সংখ্যা পোৱাৰ (iii) 2 আৰু 5 ৰে হৰণ কৰিব পৰা সংখ্যা পোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান ?

সমাধান ঃ লুডু গুটি এটা এবাৰ নিক্ষেপ কৰিলে 6 ধৰণে সংখ্যাকেইটা পাব পাৰি। অর্থাৎ সম্পূর্ণ, পৰস্পৰ বহির্ভূত আৰু সমান সম্ভাৱনাপূর্ণ ঘটনাৰ সংখ্যা 6.

(i) অযুগ্ম সংখ্যা পাবৰ কাৰণে অনুকূল ঘটনা হ'ল 1, 3, 5। অর্থাৎ অনুকূল ঘটনাৰ সংখ্যা 3.

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাৱিতা, $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

(ii) 2 আৰু 3ৰে হৰণ কৰিব পৰা সংখ্যা পোৱাৰ অনুকূল ঘটনা হ'ল 6 অর্থাৎ অনুকূল ঘটনাৰ সংখ্যা = 1 টা

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাৱিতা $P(B) = \frac{1}{6}$

(iii) 2 আৰু 5ৰে হৰণ কৰিব পৰা সংখ্যা পোৱাৰ বাবে অনুকূল ঘটনা এটাও নাই।

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাৱিতা, $P(C) = \frac{0}{6} = 0$

উদাহৰণ ২ ঃ

তাচপাতৰ পেকেট এটাৰ পৰা এখন তাচপাত যাদৃচ্ছিকভাৱে টানি অনা হ'ল। সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

(i) পাতখন ৰজা হোৱাৰ (ii) পাতখন স্পেদৰ ৰাণী হোৱাৰ (iii) পাতখন হার্ট হোৱাৰ।

সমাধান ঃ

এটা তাচপাতৰ পেকেটত 52খন পাত থাকে। ইয়াৰ পৰা যিকোনো এখন পাত 52 ধৰণে টানিব পৰা যায়।

$\therefore$ সম্পূর্ণ ঘটনা ঘটাৰ সংখ্যা 52

(i) ধৰা হ'ল A ঘটনাটোৱে পাতখন ৰজা হোৱা বুজাইছে। এটা পেকেটত ৰজাৰ সংখ্যা 4। গতিকে Aৰ অনুকূল ঘটনাৰ সংখ্যা 4.

$\therefore P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

(ii) ধৰা হ'ল Bয়ে পাতখন স্পেদৰ ৰাণী হোৱাটো বুজাইছে। এপেকেট তাচপাতত স্পেদৰ ৰাণী এটাই থাকে।

$\therefore P(B) = \frac{1}{52}$

(iii) ধৰা হ'ল Cয়ে পাতখন হার্ট হোৱা বুজাইছে। পাতখন হার্ট হোৱাৰ বাবে অনুকুল ঘটনাৰ সংখ্যা 13

$\therefore P(C) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

পূৰাতন সংজ্ঞাৰ সীমাবদ্ধতা (Limitations of classical definitions) ঃ

1. পূৰাতন সংজ্ঞামতে n সসীম হ'ব লাগে। কিন্তু এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ মুঠ সম্ভাব্য ফলাফলৰ সংখ্যা n অসীম হ'বও পাৰে। এই ক্ষেত্রত এই সংজ্ঞা প্রয়োগ কৰিব নোৱাৰি।
2. ফলাফলসমূহক সমান সম্ভাৱনা পূর্ণ বুলি ধৰা হৈছে। কিন্তু কিছুমান পৰীক্ষাত ফলাফল সমান সম্ভাৱনাপূর্ণ নহ'বও পাৰে। যেনে মুদ্রা এটা ওপৰলৈ দলিয়ালে মুদ্রাটো অনভিনত (unbiased) হ'লেহে মুণ্ড বা পুচ্ছ পোৱাটো সমান সম্ভাৱনাপূর্ণ হ'ব। গতিকে যিকোনো

এটা মুদ্রা দলিয়ালে মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা পূৰ্বাতন সংজ্ঞামতে উলিয়াব নোৱাৰি।

পৰিসাংখ্যিকীয় সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা (Statistical Definition of Probability)ঃ

পূৰ্বাতন সংজ্ঞাৰ সীমাবদ্ধতাসমূহ দূৰ কৰিবলৈ যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা এটাৰ বৃহৎ সংখ্যক প্ৰচেষ্টা বিবেচনা কৰা হয়। যদি এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা n সংখ্যক বাৰ সম্পাদন কৰা হয় আৰু পৰীক্ষা কার্যৰ লগত জড়িত ঘটনা A, m সংখ্যক বাৰ সংঘটিত হয়, তেন্তে ঘটনা Aৰ সম্ভাৱিতা হ'ব—

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

উদাহৰণ ঃ এটা মুদ্রা 1000 বাৰ ওপৰলৈ দলিওৱাত 537 বাৰ মুণ্ড পোৱা গ'ল। গতিকে

$$\text{মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা} = \frac{537}{1000} = 0.537$$

সম্ভাৱিতাৰ এই সূত্রটোৰো কিছুমান সীমাবদ্ধতা আছে। বাস্তৱ ক্ষেত্রত কোনো এটা পৰীক্ষা সুষম অৱস্থাত অসীম সংখ্যকবাৰ কৰাটো সম্ভৱ নহয়।

দেখা গ'ল যে দুয়োটা সম্ভাৱিতা সূত্রৰে সীমাবদ্ধতা আছে। এই সীমাবদ্ধতাসমূহ অতিক্রম কৰিবৰ বাবে স্বতঃসিদ্ধ ভিত্তিক সম্ভাৱিতাৰ সূত্রটো আগবঢ়োৱা হৈছে। কিন্তু এই সূত্রটো বুজিবলৈ সংহতি (Set)ৰ ধাৰণা থকা প্রয়োজন। তলত আমি সংহতি সম্পর্কে চমুকৈ আলোচনা কৰিম।

৭.৫. প্রতিদর্শ দিক্ বা প্রতিদর্শ সমষ্টি (Sample Space)

এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ পৰস্পৰ বিৱর্জিত সকলো সম্ভৱপৰ ফলাফলৰ সংহতিটোকেই প্রতিদর্শ দিক্ বুলি কোৱা হয় আৰু ইয়াক Sৰে চিহ্নিত কৰা হয়। ফলাফলবোৰৰ প্রত্যেককে প্রতিদর্শ বিন্দু (sample point) বোলে।

উদাহৰণ ঃ এটা লুডু গুটি নিক্ষেপ কৰিলে তাৰ ফলাফল হ'ল ওপৰলৈ মুখ কৰি থকা ফালটোত থকা সংখ্যা। এই সংখ্যাটো 1, 2, 3, 4, 5, 6 সংখ্যাকেইটাৰ যিকোনো এটাহে হ'ব অর্থাৎ ফলাফলবোৰ পৰস্পৰ বিৱর্জিত।

প্রতিদর্শ দিক্ S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} যদি A সংহতিটোৱে যুগ্ম সংখ্যা পোৱা ঘটনাক বুজায় তেন্তে A = {2, 4, 6} আৰু A, S ৰ উপসংহতি।

গাণিতিক ভাষাত প্রতিদর্শ দিক্ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিব পাৰি—

যদি কোনো এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ পৰস্পৰ বিৱর্জিত ফলাফলসমূহ e_1, e_2, e_3, ... e_n হয় আৰু পৰীক্ষাটো সম্পাদন কৰিলে ইয়াৰে যিকোনো এটা ফল পোৱাটো নিশ্চিত হয় তেন্তে S = {e_1, e_2, ... e_n} সংহতিটোক প্রতিদর্শ দিক্ বোলে। S সংহতিৰ প্রতিটো উপাদানকে প্রতিদর্শ বিন্দু বোলে। অর্থাৎ যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা এটাৰ ফলাফলবোৰৰ প্রত্যেককে প্রতিদর্শ বিন্দু বোলে।

যদি এটা প্রতিদর্শ দিকৰ সীমিত সংখ্যক প্রতিদর্শ বিন্দু থাকে তেন্তে প্রতিদর্শ দিক্ সসীম

হ'ব। আনহাতে প্ৰতিদৰ্শ দিক্ ত থকা বিন্দুৰ সংখ্যা অসীম হ'লে তাক অসীম প্ৰতিদৰ্শ দিক্ বোলে।

উদাহৰণ ঃ

1. এটা মুদ্ৰা দুবাৰ ওপৰলৈ নিক্ষেপ কৰিলে প্ৰতিদৰ্শ দিক্ S হ'ব
   S = {HH, HT, TH, TT}
   যদি এটা মুণ্ড পোৱা ঘটনা বিবেচনা কৰা হয় তেন্তে সংহতি {HT, TH} প্ৰতিদৰ্শ দিক্ৰ উপসংহতি হ'ব।
2. এটা পাত্ৰত ৰঙা (R), নীলা (B), বগা (W) আৰু সেউজীয়া (G) ৰঙৰ 4টা বল আছে। দুটা বল একেলগে টানি অনা হ'ল।
   এই পৰীক্ষাটোৰ প্ৰতিদৰ্শ দিক্ হ'ব {RB, RW, RG, BW, BG, WG} যিহেতু দুটা বল একেলগে টানি অনা হৈছে RB আৰু BR একে হ'ব। কিন্তু বল দুটা যদি এটাৰ পিছত এটাকৈ দুবাৰ অনা হয় আৰু দ্বিতীয়টো অনাৰ আগতে প্ৰথমটো ঘূৰাই থোৱা হয় তেন্তে প্ৰতিদৰ্শ দিক্টো হ'ব {RR, RB, RW, RG, BR, BB, BW, BG, WR, WB, WW, WG, GR, GB, GW, GG}। এই ক্ষেত্ৰত RB আৰু BR একে নহয়।

৭.৬ সম্ভাৱিতাৰ স্বত্বঃসিদ্ধ ভিত্তিক সংজ্ঞা (AXIOMATIC DEFINITION OF PROBABILITY)

এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা কাৰ্য সম্পাদনাৰ ফলত যদি প্ৰতিদৰ্শ দিক্ S উৎপন্ন হয় তেনেহ'লে যিকোনো ঘটনা A ঘটাৰ সম্ভাৱিতা হ'ব সংহতি ফলন (set function) P(A) যি তলৰ স্বতঃসিদ্ধকেইটা সন্তুষ্ট কৰে।

স্বতঃসিদ্ধ ১ ঃ $P(A) \geq 0$

স্বতঃসিদ্ধ ২ ঃ $P(S) = 1$

স্বতঃসিদ্ধ ৩ ঃ যদি $A_1, A_2, A_3, \ldots\ldots\ldots A_n$ সসীম বা অসীম সংখ্যক পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত ঘটনা হয়, তেনেহ'লে

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \ldots\ldots) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3) + \ldots\ldots\ldots$

অৰ্থাৎ গণনীয় সসীম বা অসীম সংখ্যক পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত ঘটনাসমূহৰ যিকোনো এটা সংঘটিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল ঘটনাসমূহৰ সম্ভাৱিতা বিলাকৰ যোগফলৰ সমান।

যিকোনো দুটা ঘটনা A_1 আৰু A_2 ৰ বাবে,

$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2)$

ধৰা হ'ল $S = \{e_1, e_2, ... e_n\}$ আৰু $P(\{e_i\}) = P_i$

$i = 1, 2, ...,n$ যাতে $0 \le P_i \le 1$ আৰু $\sum_{i=1}^{n} Pi = 1$

$P(\{e_i\}) = \frac{1}{n}$ যদি E ঘটনাটো $r(1 \le r \le n)$ সংখ্যক প্ৰাথমিক ঘটনাৰে গঠিত হয় তেন্তে

$$P(E) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ...\text{r সংখ্যক বাৰ}$$
$$= \frac{r}{n}$$
$$= \frac{n(E)}{n(S)}$$ য'ত n(E)=E ত থকা ঘটনাৰ সংখ্যা

n(S) =S ত থকা ঘটনাৰ সংখ্যা

৭.৭ সম্ভাৱিতাৰ প্ৰাথমিক উপপাদ্য (ELEMENTARY THEOREMS ON PROBABILITY)

ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ লগত জড়িত প্ৰতিদৰ্শ দিক্

$S = \{e_1, e_2, ... e_n\}$

উপপাদ্য ১ ঃ যদি S = নিশ্চিত ঘটনা হয়, তেন্তে P(S) = 1

প্ৰমাণ ঃ সংজ্ঞাৰ পৰা,

$P(S) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + ... + P(\{e_n\})$

$= p_1+p_2+.....+p_n$

$= 1$

এতিয়া আমি উপপাদ্য ১ৰ বিপৰীত স্থিতিটো পৰীক্ষা কৰি চাম— ধৰা হ'ল B={TH, HH} গতিকে P(B)=1, কিন্তু B নিশ্চিত ঘটনা নহয়।। সেয়েহে উপপাদ্য ১ৰ বিপৰীত স্থিতিটো প্ৰযোজ্য নহয়।

উপপাদ্য ২ ঃ যদি A আৰু B দুটা ঘটনা হয় যাতে $A \subseteq B$ তেন্তে $P(A) \le P(B)$

প্ৰমাণ ঃ $A \subseteq B \Rightarrow$ B ত Aৰ সকলো প্ৰাথমিক ঘটনা থকাৰ লগতে কেইটামান ঘটনা বেছিকৈ আছে।

গতিকে Bৰ সম্ভাৱিতা হ'ব Aৰ সম্ভাৱিতা আৰু Bত থকা কিন্তু Aত নথকা অৰ্থাৎ B–Aত থকা প্ৰাথমিক ঘটনাসমূহৰ সম্ভাৱিতাৰ যোগফল। যিহেতু সম্ভাৱিতা সদায় অঋণাত্মক সংখ্যা $P(A) \le P(B)$

উপপাদ্য ৩ ঃ যিকোনা ঘটনা Aৰ বাবে $0 \le P(A) \le 1$

প্ৰমাণ ঃ প্ৰথম স্বতঃসিদ্ধ মতে, $P(A) \ge 0$.....(i)

যিকোনো ঘটনা Aৰ বাবে $A \subseteq S$

উপপাদ্য 2 ৰ মতে, $P(A) \leq P(S)$

বা $P(A) \leq 1$ ..... (ii) যিহেতু $P(S) = 1$

গতিকে (i) আৰু (ii) ৰ পৰা, $0 \leq P(A) \leq 1$

উপপাদ্য ৪ ঃ অসম্ভৱ ঘটনা এটাৰ সম্ভাৱিতা শূন্য।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল, ϕ এ অসম্ভৱ ঘটনা বুজাইছে।

আমি জানো যে, $S = S \cup \phi$

$\Rightarrow P(S) = P(S \cup \phi)$

$= P(S) + P(\phi)$, স্বতঃসিদ্ধ 2ৰ পৰা

$\Rightarrow P(\phi) = 0$

এতিয়া আমি উপাপাদ্য ৪ৰ বিপৰীত স্থিতিটো পৰীক্ষা কৰি চাম—

ধৰা হওঁক $S=\{HH, HT, TH, TT\}$

এতিয়া আমি তলৰ সম্ভাৱিতাসমূহ বিবেচনা কৰো আহক।

$P(TH) = \frac{1}{2} = P(HH)$

$P(HT) = 0 = P(TT)$

যদি $A = \{HT, TT\}$ তেতিয়া $P(A) = 0$, কিন্তু 'A' ঘটনাটো অসম্ভৱ ঘটনা নহয়।

উপপাদ্য ৫ ঃ $P(A_2–A_1) = P(A_2)–P(A_1)$

প্ৰমাণ ঃ আমি জানো যে, $A_2= A_1 \cup (A_2–A_1)$ য'ত A_1 আৰু A_2 দুটা পৰস্পৰ বহির্ভূত ঘটনা।

$P(A_2) = P[A_1 \cup (A_2–A_1)]$

$= P(A_1)+P(A_2–A_1)$

$\Rightarrow P(A_2–A_1)=P(A_2)–P(A_1)$

উপপাদ্য ৬ ঃ যদি A^c সংহতি Aৰ পূৰক সংহতি হয় তেন্তে $P(A^c)=1–P(A)$

প্ৰমাণ ঃ আমি জানো যে, $A \cap A^c = \phi$ আৰু $A \cup A^c = S$

অৰ্থাৎ $A \cap A^c = \phi \Rightarrow$ A আৰু A^c পৰস্পৰ বহির্ভূত ঘটনা

$A \cup A^c = S \Rightarrow P[A \cup A^c] = P(S)$

$\Rightarrow P(A)+P(A^c) = 1$ যিহেতু A, A^c পৰস্পৰ বহির্ভূত ঘটনা

$\Rightarrow P(A^c) = 1-P(A)$

স্বতন্ত্ৰ ঘটনা (Independent Events) ঃ দুটা ঘটনাক স্বতন্ত্ৰ ঘটনা বুলি কোৱা হয় যদিহে এটা ঘটনাৰ ফলাফল আন এটা ঘটনা ঘটা বা নঘটাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ নকৰে। যদি A আৰু B পৰস্পৰ স্বতন্ত্ৰ ঘটনা হয়, তেন্তে A ঘটনাটো আগতে ঘটিলেও ই B ঘটনাৰ সম্ভাৱিতাৰ ওপৰত কোনো প্ৰভাৱ নেপেলায়।

এনে ক্ষেত্ৰত $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

বিপৰীত ক্ৰমে যদি $P(A \cap B) = P(A).P(B)$. হয় তেন্তে A আৰু B পৰস্পৰ স্বতন্ত্ৰ ঘটনা।

উদাহৰণ ১

দুটা লুডু গুটি একেলগে নিক্ষেপ কৰা হ'ল। ওপৰফালে মুখ কৰি থকা সংখ্যা দুটাৰ (i) দুয়োটা 6 হোৱাৰ (ii) দুয়োটা একে সংখ্যা হোৱাৰ (iii) এটা 5, এটা 6 হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ দুটা লুডু গুটি একেলগে নিক্ষেপ কৰিলে প্রতিদর্শ দিক্‌টো হ'ব {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1) (2, 2) .....(6, 6)} অর্থাৎ প্রতিদর্শ দিকটোত থকা প্রতিদর্শ বিন্দুৰ সংখ্যা হ'ব 36.

(i) দুয়োটা 6 হ'ব লাগিলে প্রতিদর্শ বিন্দুৰ সংখ্যা 1

$\therefore$ দুয়োটা 6 হোৱাৰ সম্ভাৱিতা $= \frac{1}{36}$

(ii) দুয়োটা একে সংখ্যা হ'লে প্রতিদর্শ বিন্দুবোৰ হ'ব (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5,5), (6, 6) অর্থাৎ প্রতিদর্শ বিন্দুৰ সংখ্যা = 6

$\therefore$ দুয়োটা একে সংখ্যা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(iii) সংখ্যা দুটাৰ এটা 5, আনটো 6 হ'লে প্রতিদর্শ বিন্দু দুটা পোৱা যাব (5, 6) আৰু (6, 5)

$\therefore$ এটা 5 আনটো 6 হোৱাৰ সম্ভাৱিতা $= \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

উদাহৰণ ২

এটা ৰঙা আৰু এটা নীলা লুডু গুটি একেলগে নিক্ষেপ কৰা হ'ল। ঘটনা E ৰ সম্ভাৱিতা উলিৱাওঁক য'ত E হৈছে

(i) লুডু গুটি দুটাই দেখুওৱা সংখ্যাৰ যোগফল 7

(ii) দ্বিতীয় গুটিটোৱে দেখুওৱা সংখ্যা প্রথমটোৱে দেখুওৱা সংখ্যাতকৈ ডাঙৰ।

সমাধান ঃ প্রতিদর্শ দিকত $6 \times 6 = 36$ টা ঘটনা আছে।

(i) E_1={(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)}

$\therefore P(E_1) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

(ii) E_2 = {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)}

$\therefore P(E_2) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

উদাহৰণ ৩

এটা মুদ্রা তিনিবাৰ ওপৰলৈ নিক্ষেপ কৰা হ'ল। তলত দিয়া ঘটনাবোৰৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক—

(i) দুটা বা ততোধিক মুণ্ড পোৱাৰ

(ii) মুণ্ডৰ সংখ্যা আৰু পুচ্ছৰ সংখ্যা সমান হোৱাৰ

(iii) এটা মুণ্ড আৰু দুটা পুচ্ছ পোৱাৰ

সমাধান ঃ

ইয়াত প্রতিদর্শ দিকটো হ'ব {(HHH), (HHT), (HTH), (THH) (HTT), (THT), (TTH), (TTT)}

প্রতিদর্শ বিন্দুৰ সংখ্যা = 8

(i) E_1 = {(HHH), (HHT), (HTH), (THH)}

$$\therefore P(E_1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

(ii) E_2 = {(HHH), (TTT)}

$$\therefore P(E_2) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

(iii) E_3 = {(HTT), (THT), (TTH)}

$$\therefore P(E_3) = \frac{3}{8}$$

উদাহৰণ ৪

52 খন পাত থকা তাচপাতৰ পেকেটৰ পৰা এখন পাত যাদৃচ্ছিকভাৱে টানি অনা হ'ল। সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

(i) পাতখন স্পেদ বা ক্লাৱ হোৱাৰ

(ii) পাতখন ছৱি থকা হোৱাৰ (এচ (ace) পাতখন ধৰি)

(iii) পাতখন 5তকৈ ডাঙৰ 10তকৈ সৰু হোৱাৰ

সমাধান ঃ 52খন তাচপাতৰ পৰা এখন পাত 52 ধৰণে টানিব পাৰি। গতিকে প্রতিদর্শ দিকত 52টা প্রতিদর্শ বিন্দু থাকিব।

(i) ধৰা হ'ল E_1 ঘটনাটোৱে তাচপাতখন স্পেদ বা ক্লাৱ হোৱা বুজাইছে। তাচপাতত প্রতিটো চ্যুটৰে 13খনকৈ পাত থাকে। গতিকে E_1 ঘটনাটো 13+13=26 ধৰণে ঘটিব পাৰে।

$$\therefore P(E_1) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

(ii) E_2ৱে পাতখন ছৱি থকা পাত হোৱাটো বুজাইছে। A পাতখনক ছৱি থকা বুলি ধৰিলে E_2 ঘটনাটো $4 \times 4 = 16$ ধৰণে ঘটিব পাৰে।

$$\therefore P(E_2) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

(iii) ধৰক E_3 য়ে পাতখনৰ সংখ্যাটো 5ৰ পৰা 10ৰ মাজত থকা বুজাইছে। E_3 ঘটনাটো 4 × 4 ধৰণে ঘটিব পাৰে।

$$\therefore P(E_3) = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

উদাহৰণ ৫

5 টা বগা আৰু 8 টা ক'লা বল থকা বেগ এখনৰ পৰা তিনিটাকৈ দুবাৰ বল যাদৃচ্ছিকতভাৱে টানি অনা হ'ল। দ্বিতীয়বাৰ টানি অনাৰ আগতে প্ৰথমবাৰ টানি অনা বল তিনিটা ঘূৰাই থোৱা নহয়। প্ৰথমবাৰ টানি অনা বল তিনিটা বগা আৰু দ্বিতীয়বাৰ টানি অনা বল তিনিটা ক'লা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান হ'ব?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল E_1 এ 3টা বগা বল আৰু E_2 য়ে দ্বিতীয়বাৰত 3 টা ক'লা বল টানি অনা বুজাইছে।

E_1 ৰ বাবে প্ৰতিদৰ্শ দিকত ${}^{13}C_3$ টা বিন্দু থাকিব। 5 টা বগা বলৰ পৰা 3টা বগা বল ${}^{5}c_3$ ধৰণে ল'ব পৰা যাব।

$$\therefore P(E_1) = \frac{5_{C3}}{13_{C3}}$$

$$= \frac{\frac{5.4}{2.1}}{\frac{13.12.11}{3.2.1}}$$

$$= \frac{5.4}{2.1} \times \frac{3.2.1}{13.12.11}$$

$$= \frac{5}{143}$$

E_2ৰ বাবে প্ৰতিদৰ্শ দিকত 10_{C3} টা ঘটনা থাকিব।

$$\therefore P(E_2) = \frac{8_{C3}}{10_{C3}}$$

$$= \frac{\frac{8.7.6}{3.2.1}}{\frac{10.9.8}{3.2.1}}$$

$$= \frac{8.7.6}{3.2.1} \times \frac{3.2.1}{10.9.8}$$

$$= \frac{7}{15}$$

$P(E_1 E_2) = P(E_1)P(E_2)$

$$= \frac{5}{143} . \frac{7}{15}$$

$$= \frac{7}{429}$$

উদাহৰণ ৬

5টা বগা আৰু 8 টা ক'লা বল থকা বেগ এখনৰ পৰা তিনিটাকৈ বল দুবাৰ যাদৃচ্ছিকভাৱে টানি অনা হ'ল। দ্বিতীয়বাৰ অনাৰ আগতে প্ৰথমবাৰ অনা বল তিনিটা ঘূৰাই থোৱা হয়। প্ৰথমবাৰ অনা বল তিনিটা বগা আৰু দ্বিতীয়বাৰ টানি অনা বল তিনিটা ক'লা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান ?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল E_1 এ প্ৰথমবাৰত 3টা বগা বল আৰু E_2য়ে দ্বিতীয়বাৰত 3টা ক'লা বল টানি অনা বুজাইছে।

13টা বলৰ পৰা 3 টা বল 13_{C3} ধৰণে ল'ব পাৰি। গতিকে প্ৰতিদৰ্শ দিকত 13_{C3} টা বিন্দু থাকিব। 5টা বগা বলৰ পৰা 3টা বগা বল 5_{C3} ধৰণে ল'ব পাৰি।

$$\therefore P(E_1) = \frac{5_{C3}}{13_{C3}} = \frac{\frac{5.4}{2.1}}{\frac{13.12.11}{3.2.1}} = \frac{5}{143}$$

যিহেতু দ্বিতীয়বাৰ টনাৰ আগতে বল তিনিটা ঘূৰাই থোৱা হয় বল 13টা থাকিব।

$$\therefore P(E_2) = \frac{8_{C3}}{13_{C3}}$$

$$= \frac{8.7.6}{3.2.1} \Big/ \frac{13.12.11}{3.2.1}$$

$$= \frac{8.7.6}{13.12.11}$$

$$= \frac{28}{143}$$

এতিয়া $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$

$$= \frac{5}{143} . \frac{28}{143}$$

$$= \frac{140}{20449}$$

উদাহৰণ ৭

এটা বেগত 5টা বগা আৰু 7টা ক'লা বল আছে। যদি এটা এটাকৈ দুটা বল টানি অনা হয় তেন্তে বল দুটাৰ এটা বগা আৰু আনটো ক'লা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান ঃ 12টা বলৰ পৰা দুটা বল $12_{C_2} = \frac{12.11}{2.1} = 66$ ধৰণে টানিব পাৰি। গতিকে প্ৰতিদৰ্শ দিকত 66 টা ঘটনা থাকিব।

ধৰা হ'ল E_1 এ প্ৰথম বলটো বগা আৰু দ্বিতীয় বলটো ক'লা হোৱা বুজাইছে।

$$P(E_1) = \frac{5}{12}.\frac{7}{11} = \frac{35}{132}$$

ধৰা হ'ল E_2 এ প্ৰথম বলটো ক'লা আৰু দ্বিতীয় বলটো বগা হোৱা বুজাইছে।

$$P(E_2) = \frac{7}{12}.\frac{5}{11} = \frac{35}{132}$$

বল দুটাৰ এটা বগা এটা ক'লা হ'ব লাগিলে E_1 বা E_2 ঘটিব লাগিব। E_1 আৰু E_2 পৰস্পৰ বিৰৰ্জিত ঘটনা।

$$\therefore P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$$

$$= \frac{35}{132} + \frac{35}{132}$$

$$= \frac{70}{132}$$

$$= \frac{35}{66}$$

উদাহৰণ ৮

তাচপাতৰ পেকেট এটাৰ পৰা 4খন পাত যাদৃচ্ছিকভাৱে টানি অনা হ'ল। প্ৰত্যেকটো চুটৰে এখনকৈ পাত টানি অনাৰ সম্ভাৱিতা কিমান হ'ব?

সমাধান ঃ 52খন পাতৰ পৰা 4খন পাত 52_{C_4} ধৰণে টানিব পাৰি। গতিকে প্ৰতিদৰ্শ দিকত 52_{C_4} টা ঘটনা থাকিব।

ধৰা হ'ল E এ প্ৰতিটো চুটৰে এখনকৈ পাত টানি অনা বুজাইছে। যিহেতু প্ৰতিটো চুটত 13খনকৈ পাত থাকে E ঘটনাটো $13_{C_1} \times 13_{C_1} \times 13_{C_1} \times 13_{C_1}$ ধৰণে ঘটিব পাৰে।

$$\therefore P(E) = \frac{13_{C1} \times 13_{C1} \times 13_{C1} \times 13_{C1}}{52_{C4}}$$

$$= \frac{13\times13\times13\times13}{\frac{52.51.50.49}{4.3.2.1}}$$

$$= \frac{28561}{270725}$$

উদাহৰণ ৯

তাচপাতৰ পেকেট এটাৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে এখন পাত টনা হ'ল। তলত দিয়াবোৰৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক —

(i) পাতখন ক্লাৱৰ 3 বা ডায়মণ্ডৰ 6 হোৱাৰ

(ii) হার্টৰ বাহিৰে অন্য চ্যুট হোৱাৰ

(iii) জেক অথবা কুইন হোৱাৰ

(iv) পাতখন স্পেদ বা হার্ট বা ছৱি নথকা হোৱাৰ।

সমাধান ঃ

(i) ধৰা হ'ল A এ ক্লাবৰ 3 হোৱাৰ, Bএ ডায়মণ্ডৰ 6হোৱা বুজাইছে। এতিয়া $A \cap B = \phi$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{52} + \frac{1}{52} = \frac{1}{26}$$

(ii) ধৰা হ'ল H এ পাতখন হার্ট হোৱা বুজাইছে। H′ এ পাতখন হার্টৰ বাহিৰে অন্য চ্যুটৰ হোৱাটো বুজাব।

$$P(H) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(H') = 1 - P(H) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

(iii) ধৰা হ'ল A এ পাতখন জেক আৰু B এ পাতখন কুইন হোৱা বুজাইছে।

$A \cap B = \phi$

$$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{4}{52}$$

$$= \frac{2}{13}$$

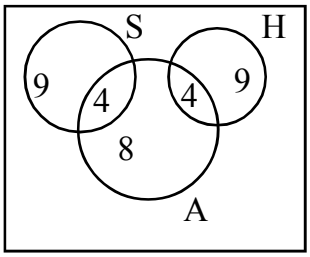
(iv) ধৰা হ'ল S এ স্পেদ, H এ হার্ট আৰু A এ ছৱি থকা পাত বুজাইছে। S আৰু H পৰস্পৰ বিৰর্জিত, কিন্তু S আৰু A, H আৰু A পৰস্পৰ বিৰর্জিত নহয়।

$$P(S) = \frac{13}{52},\ P(H) = \frac{13}{52} \text{ and } P(A) = \frac{16}{52}$$

$$\therefore P(A') = \frac{36}{52}$$

$$P(S \cap A') = \frac{9}{52}$$

$$P(H \cap A') = \frac{9}{52}$$



$$P(S \cup H \cup A') = P(S) + P(H) + P(A') - P(S \cap A')$$
$$- P(H \cap A') - P(S \cap H) + P(S \cap H \cap A')$$
$$= \frac{13}{52} + \frac{13}{52} + \frac{36}{52} - \frac{9}{52} - \frac{9}{52} \qquad [\because P(S \cap H) = 0, P(S \cap H \cap A') = 0]$$
$$= \frac{62}{52} - \frac{18}{52}$$
$$= \frac{44}{52}$$

যৌগিক ঘটনা (Composite Event) ঃ যি ঘটনা দুটা বা ততোধিক সৰল ঘটনাৰ দ্বাৰা গঠিত হয় তেনে ঘটনাক যৌগিক ঘটনা বোলে। $A \cup B$ বা A+B য়ে A আৰু B ৰ অন্ততঃ এটা ঘটনা (A বা B বা একেলগে দুয়োটা) সংঘটিত হোৱা বুজায়। $A \cap B$ বা AB এ দুয়োটা ঘটনা একেলগে হোৱা বুজায়।

উদাহৰণ ১০

পাঁচজন ব্যক্তি A, B, C, D, E ৰ মাজৰ পৰা 3জন ব্যক্তিক নির্বাচিত কৰিব লাগে। আটাইকেইজনৰে নির্বাচতি হোৱাৰ সম্ভাৱনা সমান সমান হ'লে

(i) A আৰু B অথবা B আৰু C নির্বাচিত হোৱাৰ

(ii) E নির্বাচিত হোৱাৰ বা C আৰু D নির্বাচিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা E_1 এ A আৰু B নির্বাচিত হোৱা আৰু E_2 এ B আৰু C নির্বাচিত হোৱাটো বুজাইছে।

প্রতিদর্শ দিক S = {ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD,
BCE, BDE, CDE}

(i) E_1= {ABC, ABD, ABE}

E_2= {ABC, BCD, BCE}

$E_1 \cap E_2$= {ABC}

$$P(E_1) = \frac{3}{10},\ P(E_2) = \frac{3}{10},\ P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{10}$$

$$\therefore P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

$$= \frac{3}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10}$$

$$= \frac{5}{10}$$

$$= \frac{1}{2}$$

(ii) ধৰা হ'ল E_3 এ E নির্বাচিত হোৱাৰ আৰু E_4 এ C আৰু D নির্বাচিত হোৱা বুজাইছে।

E_3 = {ABE, ACE, ADE, BCE, BDE, CDE}

E_4 = {ACD, BCD, CDE}

$E_3 \cap E_4$ = {CDE}

$P(E_3) = \frac{6}{10}$, $P(E_4) = \frac{3}{10}$, $P(E_3 \cap E_4) = \frac{1}{10}$

$\therefore P(E_3 \cup E_4) = P(E_3) + P(E_4) - P(E_3 \cap E_4)$

$$= \frac{6}{10} + \frac{3}{10} - \frac{1}{10}$$

$$= \frac{8}{10}$$

$$= \frac{4}{5}$$

এটা ঘটনাৰ সপক্ষে আৰু বিপক্ষে অসমতা (Odds for and odds against an event) ঃ

ধৰা হ'ল E এটা ঘটনা। কেতিয়াবা আমি কওঁ যে E ৰ সপক্ষে অসমতা a : b

$$\therefore P(E) = \frac{a}{a+b}$$

এইদৰে কোনো ঘটনাৰ সপক্ষে অসমতা দিয়া থাকিলে ঘটনাটোৰ সম্ভাৱিতা উলিয়াব পাৰি। বিপৰীত ক্ৰমে সম্ভাৱিতা দিয়া থাকিলে ঘটনাৰ সপক্ষে অসমতা উলিয়াব পাৰি। যেনে— যদি P(E) = 7 হয়

তেন্তে, $P(E) = \frac{7}{10} = \frac{7}{7+3}$

$\therefore$ E ৰ সপক্ষে অসমতা 7 : 3

E ৰ সপক্ষে অসমতা a : b হ'লে E ৰ বিপক্ষে অসমতাৰ মান হ'ব b : a

উদাহৰণ ১১

এটা বেগত 4 টা বগা আৰু 5টা ক'লা বল আছে। 3টা বল যাদৃচ্ছিকভাৱে টানি অনা হ'ল। আটাইকেইটা বল ক'লা হোৱাৰ বিপক্ষে অসমতা কিমান হ'ব?

সমাধান ঃ 9 টা বলৰ পৰা 3টা বল 9_{C_3} ধৰণে টানিব পাৰি। 5 টা ক'লা বলৰ পৰা 3 টা ক'লা বল 5_{C_3} ধৰণে টানিব পাৰি। গতিকে তিনিওটা বল ক'লা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা

$$= \frac{5_{C3}}{9_{C3}} = \frac{\frac{5.4}{2.1}}{\frac{9.8.7}{3.2.1}} = \frac{5}{42} = \frac{5}{37+5}$$

∴ ঘটনাটোৰ বিপক্ষে অসমতা হ'ব 37 : 5

উদাহৰণ ১২

10 জন ব্যক্তিয়ে এখন ঘূৰণীয়া মেজৰ চাৰিওফালে বহিছে। দুজন নির্দিষ্ট ব্যক্তি A আৰু Bয়ে সদায় একেলগে বহাৰ সম্ভাৱিতাৰ বিপক্ষে অসমতা কিমান হ'ব?

সমাধান ঃ A এ স্থানত বহাৰ পিছত Bৰ বাবে 9খন আসন থাকিব। Aৰ কাষত বহিবলৈ Aৰ দুয়োফালে দুখন আসন থাকিব। গতিকে A, B একেলগে বহাৰ সম্ভাৱিতা হ'ব $\frac{2}{9} = \frac{2}{2+7}$

AB একেলগে বহাৰ বিপক্ষে অসমতা হ'ব 7 : 2



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ ঃ দুটা লুডু গুটি মাৰি পঠিয়ালে সংখ্যা দুটাৰ যোগফল (i) 5 হোৱাৰ (ii) 6 হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান হ'ব?

.....

.....

.....

.....

প্রশ্ন নং ২ ঃ 52খন তাচপাত থকা পেকেট এটাৰ পৰা দুখন যাদৃচ্ছিকভাৱে টানি অনা হ'ল। পাত দুখনৰ এখন ৰজা আনখন ৰাণী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

.....

.....

.....

.....

প্রশ্ন নং ৩ ঃ এটা বেগত 5টা বগা, 7টা ক'লা আৰু 4টা ৰঙা বল আছে। যাদৃচ্ছিকভাৱে টানি অনা তিনিটা বলৰ আটাইকেইটা বগা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

.....

.....

.....

.....

প্ৰশ্ন নং ৪ ঃ চাৰিটা মুদ্ৰা ওপৰলৈ নিক্ষেপ কৰিলে দুটা মুণ্ড, দুটা পুচ্ছ পোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান ?

.....

.....

.....

.....

প্ৰশ্ন নং ৫ ঃ দুটা ঘটনাৰ এটা ঘটিবই লাগিব। এটাৰ সম্ভাৱিতা আনটোৰ সম্ভাৱিতাৰ দুই-তৃতীয়াংশ হ'লে আনটোৰ সপক্ষে অসমতা কিমান হ'ব ?

.....

.....

.....

.....

প্ৰশ্ন নং ৬ ঃ ১৩ জন ব্যক্তি এখন ঘূৰণীয়া মেজৰ চাৰিওফালে বহিছে। দুজন নিৰ্দিষ্ট ব্যক্তিয়ে একেলগে বহাৰ বিপক্ষে অসমতা 5:1 হ'ব বুলি দেখুৱাওঁক।

.....

.....

.....

.....



অনুশীলনী ১

আপুনি কিছুমান যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা যেনে মুদ্ৰা ওপৰলৈ দলিওৱা, লুডু গুটি মাৰি দিয়া, তাচপাতৰ পেকেটৰ পৰা পাত টানি অনা বা এই ধৰণৰ অন্য কিছুমান পৰীক্ষাৰে সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰি চাব পাৰে। পৰীক্ষাটো বাৰে বাৰে কৰি ফলাফল পৰীক্ষা কৰি চাওঁক।



৭.৮ অধ্যায়টিৰ পৰা কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

এই অধ্যায়টিত আমি যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ ধাৰণাটো আলোচনা কৰিলো। কিছুমান পৰীক্ষাৰ ক্ষেত্ৰত, কাৰকসমূহ নিয়ন্ত্ৰণত ৰখাটো সম্ভৱ নহয়। সেয়েহে ফলাফলসমূহ একে নহয়। এই পৰীক্ষাবোৰক যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা বোলা হয়। তাৰ পাছত আমি সম্ভাৱিতাৰ ধাৰণাটো আলোচনা কৰিলো। আন এক গুৰুত্বপূৰ্ণ বিষয় 'সংহতি'ৰ বিষয়ে এই অধ্যায়ত আমি আলোচনা কৰিলো। সংহতি হৈছে সুনিৰ্দিষ্ট বস্তুৰ এক সংগ্ৰহ আৰু এই সংগ্ৰহত থাকিব পাৰে সংখ্যা, আখৰ, মানুহ, জন্তু আদি। শেষত স্বতঃসিদ্ধ ভিত্তিক সংজ্ঞাৰ লগতে সম্ভাৱিতাৰ ধাৰণা আৰু গণনা পদ্ধতি আলোচনা কৰা হ'ল। যৌগিক ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা আৰু সম্ভাৱিতাৰ নীতি কিছুমানো আলোচনা কৰা হ'ল।



৭.৯ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

১) Agarwal, D. R. (2006). Business Statistics. Delhi, Vrinda Publications.

২) Gupta S.C. (1994). Fundamentals of statistics. New Delhi, Himalayan Publishing House.

৩) Rajagopalan, S. P. & Sattanthan R. (2009).Business Statistics and Operations Research. New Delhi, Tata McGraw-Hill

৪) Sharma, J. K. (2007). Business Statistics. New Delhi. Pearson Education Ltd.

৫) Verma, A. P. (2007). Business Statistics. Guwahat, Asian Books Private Limited.



৭.১০ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $\frac{1}{9}$

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $\frac{5}{36}$

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $\frac{1}{56}$

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $\frac{3}{8}$

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ 2 to 3



৭.১১ আৰ্হি প্রশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্রশ্ন ১ঃ তিনিটা ঘটনা A, B, Cৰ যিকোনো এটা আৰু মাত্র এটা ঘটিব পাৰে। Aৰ বিপক্ষে অসমতা 8 :3, B ৰ বিপক্ষে 5 : 2 হ'লে Cৰ বিপক্ষে অসমতা কিমান?

প্রশ্ন ২ঃ 2টা বগা, 4টা ৰঙা আৰু 5টা ক'লা বল থকা বেগ এখনৰ পৰা 2টা বল অনা হ'ল। (ক) দুয়োটা বল ৰঙা হোৱাৰ (খ) এটা ৰঙা আনটো ক'লা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ঃ দুটা মুদ্ৰা একেলগে নিক্ষেপ কৰা হ'ল। সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰক—

(ক) দুটা মুণ্ড বা প্ৰথম মুদ্ৰাত মুণ্ড বা দুয়োটা

(খ) প্ৰথমটোত মুণ্ড দ্বিতীয়টোত পুচ্ছ বা দুয়োবিধ

প্ৰশ্ন ৪ঃ তাচপাতৰ পেকেটৰ পৰা এখন পাত টানি অনা হ'ল। সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰক—

(ক) 10 বা স্পেদ হোৱাৰ

(খ) 4 বা ক্লাব নোহোৱাৰ

(গ) ক'লা অথবা এচ অথবা দুয়োবিধ

(ঘ) স্পেদ অথবা ছৱি থকা হোৱাৰ

প্ৰশ্ন ৫ঃ দুটা লুডু গুটি একেলগে মাৰি পঠিওৱা হ'ল। সংখ্যা দুটাৰ যোগফল

(ক) 2 বা 5ৰে বিভাজ্য কিন্তু দুয়োটাৰে বিভাজ্য নহয়

(খ) 6 তকৈ বেছি নোহোৱাৰ

(গ) 10 তকৈ বেছি হোৱাৰ

(ঘ) 2 আৰু 5ৰে বিভাজ্য হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৬ঃ A আৰু B যিকোনো দুটা ঘটাৰ বাবে প্ৰমাণ কৰক যে

$P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(A)+P(B)$

কেতিয়া $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ হ'ব?

প্ৰশ্ন ৭ঃ যদি $P(A) = \frac{1}{2},\ P(B) = \frac{1}{4},\ P(A \cup B) = \frac{3}{8},\ P(AB)$ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৮ঃ এটা তাচপাতৰ পেকেটৰ পৰা তিনিখন পাত এখন এখনকৈ অনা হ'ল। A_1এ প্ৰথম বাৰত ৰজা, A_2 দ্বিতীয়বাৰত ৰজা, A_3 এ তৃতীয়বাৰত ৰজা টনাটো বুজাইছে। তলত দিয়াবোৰে কি বুজাব?

(ক) $P(A_1 \cap A')$ (খ) $P(A_1 \cup A_2)$ (গ) $P(A_1' \cup A_2')$

(ঘ) $P(A' \cap A_2' \cap A_3')$ (ঙ) $P[(A_1 \cap A_2) \cup (A_2' \cap A_3)]$

*** ***** ***

অধ্যায় ৮ ঃ চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতা

অধ্যায় গাঁথনি

৮.১ উদ্দেশ্য
৮.২ পৰিচয়
৮.৩ চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতা
৮.৪ সম্ভাৱিতাৰ গুণিতক উপপাদ্য
৮.৫ পূর্ণ সম্ভাৱিতা
৮.৬ বেইজৰ উপপাদ্য
৮.৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
৮.৮ অধিক জানিবলৈ
৮.৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
৮.১০ আৰ্হি প্রশ্ন

৮.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা দাঙি ধৰিব পাৰিব
- সম্ভাৱিতাৰ গুণিতক উপপাদ্যৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- সম্ভাৱিতাৰ নিয়ম বর্ণনা কৰিব পাৰিব
- বেইজৰ উপপাদ্যৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।

৮.২ পৰিচয়

অধ্যায় ৭-ত আমি সম্ভাৱিতা আৰু ইয়াৰ সৈতে জড়িত কেইটামান গুৰুত্বপূর্ণ উপপাদ্যৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিছো। এই অধ্যায়টিত আমি চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ ধাৰণাটো আলোচনা কৰিম। ইয়াৰ লগতে অধ্যায়টিত আশ্রিত আৰু স্বতন্ত্র ঘটনা (dependent and independent events) বিষয়েও আলোচনা কৰা হ'ব। অধ্যায়টি পঢ়ি আপোনালোকে আশ্রিত আৰু স্বতন্ত্র ঘটনা গুণিতক উপপাদ্যৰ বিষয়েও জানিব পাৰিব। অধ্যায়টিত সম্ভাৱিতাৰ নিয়ম আৰু বেইজৰ উপপাদ্যৰ আলোচনাও সামৰি লোৱা হৈছে।

৮.৩ পৰিচয়

অধ্যায় ৭-ত আমি সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰাৰ পদ্ধতিবোৰ আলোচনা কৰিছো। ধৰা হ'ল, কোনো এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণত একেটা প্রতিদর্শ সমষ্টিৰ (sample space) পৰা আমি দুটা

ঘটনা লাভ কৰিছো। এতিয়া ইয়াৰে যিকোনো এটা ঘটনা আনটোৰ সম্ভাৱিতাত কিবা প্ৰভাৱ পেলাব নেকি? তলৰ উদাহৰণবোৰৰ সৈতে কথাটো পৰীক্ষা কৰি চাও আহক।

1. লুডো গুটি এটা দলিওৱাৰ যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণ

ধৰা হ'ল, S হৈছে প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি আৰু A হ'ল অযুগ্ম সংখ্যা ওলোৱা ঘটনা

$\therefore\ S=\{1,2,3,4,5,6\}$ আৰু $A=\{1,3,5\}$

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

এইবোৰ আন এটা ঘটনা ধৰি লোৱা হ'ল, B। B হ'ল সেইটো ঘটনা য'ত 3-তকৈ ডাঙৰ সংখ্যাবোৰ পোৱা যাব। অৰ্থাৎ $B=\{4,5,6\}$.

যেতিয়া আমি কওঁ যে, B ইতিমধ্যে ঘটিল, তেন্তে 3-তকৈ সৰু অথবা সমান সংখ্যাবোৰ পোৱাৰ ঘটনাটো ঘটা সম্ভৱ নহয়। অৰ্থাৎ, প্ৰতিদৰ্শ স্থানত লব্ধ উপাদনৰ সংখ্যা হ'ব মাত্ৰ 3 টা, যেনে $\{4,5,6\}$। এই তিনিওটা উপাদানৰ ভিতৰত দুটা $\{4,6\}$ হ'ল যুগ্ম সংখ্যা।

অৰ্থাৎ, আমি পালোঁ যে যদি ঘটনা B ইতিমধ্যে ঘটি যায়, তেন্তে $P(A)=\frac{2}{3}$ । সেয়েহে, B ইতিমধ্যে ঘটি যোৱাৰ পাছত A-ৰ সম্ভাৱিতা হ'ব $P\left(\frac{A}{B}\right)$।

2. তিনিটা মুদ্ৰা দলিওৱাৰ সাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণ

এই পৰীক্ষাৰ প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি হ'ল,

$$S=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}.$$

ধৰা হ'ল, E = অতি কমেও দুবাৰ 'টেইল' (T) ওলোৱা ঘটনা আৰু

F = প্ৰথম মুদ্ৰাটোৱে 'হেড' (H) দেখুওৱা ঘটনা

এতিয়া, ধৰা হ'ল, আমাক কোৱা হ'ল প্ৰথম মুদ্ৰাটোৱে 'হেড দেখুৱাইছে। অৰ্থাৎ, F ঘটনাটো ঘটিল। তেন্তে, এতিয়া আমি E ঘটনা ঘটাৰ সম্ভাৱিতা উলিয়াব লাগিব। F ঘটাৰ তথ্য জনাৰ লগে লগে আমি নিশ্চিত হ'লো যে প্ৰথম মুদ্ৰাটোৱে 'হেড' নেদেখুওৱা ফলাফলবোৰ E ৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয়ৰ সময়ত বিবেচনা কৰিব পৰা নাযাব। এই তথ্যই E ঘটনাৰ বাবে S সংহতিৰ পৰা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টিৰ পৰিমাণ কমাই F উপ-সংহতিৰ সমান কৰি তুলিলে। অন্য অৰ্থত, এই অতিৰিক্ত তথ্যৰ পৰা আমি গম পালো যে এই অৱস্থাটোক আমি এটা নতুন যাদৃচ্ছিক সম্পৰীক্ষা বুলি ধৰিব পাৰো য'ত প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টিত ঘটনা E-ৰ উপস্থিতিৰ অনুকূল ফলাফলবোৰহে কেৱল পোৱা যাব। অৰ্থাৎ, ঘটনা E-ৰ অনুকূল F প্ৰতিদৰ্শ ফলাফলটো হ'ব HTT। ইয়াৰ দ্বাৰা গম পোৱা গ'ল যে প্ৰতিদৰ্শ স্থান হিচাপে পৰীক্ষা কৰি চোৱাৰ পাছত E -ৰ সম্ভাৱিতা হ'ব $=\frac{1}{4}$ । ঘটনা E -ৰ এই সম্ভাৱিতাকে E -ৰ চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতা বোলে [য'ত F ইতিমধ্যে সংঘটিত হৈছে]। ইয়াক P (E|F) চিহ্নৰে বুজোৱা হয়।

3. 52 খন তাচপাতৰ ডেক এটাৰ পৰা যিকোনো এখন পাত টনাৰ যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণ

ধৰা হ'ল আমি একাদিক্ৰমে পাত টানি এখন 'কুইন' পাত পালো। প্ৰথমবাৰ টানোতে

'কুইন' পাতখন পোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল $\frac{4}{52}$ । যদি দ্বিতীয়বাৰ পাত টনাৰ আগতে এই পাতখন পুনৰ ডেকত ৰখা নহয়, তেন্তে দ্বিতীয়বাৰ টানোতে 'কুইন' পাতখন পোৱাৰ সম্ভাৱনীয়তা প্ৰথম ঘটনাটোৰ ওপৰত নির্ভৰশীল হ'ব। এতিয়া, ডেকত মাত্ৰ 3 খন 'কুইন' পাত থাকিব। অর্থাৎ, দ্বিতীয়বাৰ টানোতে 'কুইন' পাত এখন পোৱাৰ সম্ভাৱিতাও হ'ল $\frac{3}{52}$ ।

ওপৰৰ উদাহৰণটোৰ পৰা আমি বুজিলো যে কোনো এক ঘটনাৰ সম্ভাৱনা ইতিমধ্যে ঘটি যোৱা আন এক ঘটনাৰ ওপৰত নির্ভৰশীল। সেয়েহে, E ঘটনাক এটা আশ্রিত ঘটনা বুলি কোৱা হয়, য'ত A ঘটাৰ সম্ভাৱনা ইতিমধ্যে ঘটি যোৱা F ঘটনাৰ ওপৰত নির্ভৰশীল। ইয়াক $P(E \mid F)$ চিহ্নৰে বুজোৱা হয়।

ওপৰৰ উদাহৰণবোৰৰ সহায়ত আমি তলত দিয়া ধৰণে চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা দাঙি ধৰিব পাৰো ঃ

E আৰু F হ'ল প্রতিদর্শ সমষ্টি S-ৰ সহায়ত লব্ধ দুটা ঘটনা।

ধৰা হ'ল, $P(F) > 0$, এতিয়া F ইতিমধ্যে ঘটি যোৱা ঘটনা হ'লে E-ৰ চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতা হ'ব $P(E \mid F)$ । ইয়াক তলত দিয়া ধৰণে গাণিতিকভাৱে প্রকাশ কৰা হ'ব ঃ

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, P(F) > 0$$

একেদৰে $P(F \mid E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}, P(E) > 0$

টোকা ঃ (1) $P(E \mid F)$ আৰু $P(F \mid E)$ -ক তলত দিয়া ধৰণেও প্রকাশ কৰিব পাৰি ঃ

$$P(E \mid F) = \frac{n(E \cap F)}{n(F)} \quad \text{আৰু} \quad P(F \mid E) = \frac{n(E \cap F)}{n(E)}.$$

(2) $P(E \mid F)$ -ক F ঘটনাটো ঘটি যোৱাৰ পাছত E ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা বুলি পঢ়া হয়।

চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ নিয়ম

(ক) যদি S প্রতিদর্শ সমষ্টিৰ E_1 আৰু E_2 যিকোনো দুটা ঘটনা হয় আৰু S-ৰ যিকোনো এটা ঘটনা A হয়, য'ত $P(A) \neq 0$, তেন্তে

$$P(E_1 \cup E_2 \mid A) = P(E_1 \mid A) + P(E_2 \mid A) - P(E_1 \cap E_2 \mid A)$$

আমি পাম, $P(E_1 \cup E_2 \mid A) = \frac{P((E_1 \cup E_2) \cap A)}{P(A)}$

$$= \frac{P(E_1 \cap A) \cup P(E_2 \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(E_1 \cap A) + P(E_2 \cap A) - P(E_1 \cap E_2 \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(E_1 \cap A)}{P(A)} + \frac{P(E_2 \cap A)}{P(A)} - \frac{P(E_1 \cap E_2 \cap A)}{P(A)}$$

$$= P(E_1 \mid A) + P(E_2 \mid A) - P(E_1 \cap E_2 \mid A)$$

(খ) $P(E' \mid F) = 1 - P(E \mid F)$

আমি পাম, $P(S \mid F) = 1$

$$\Rightarrow P(E' \cup E \mid F) = 1$$

$$\Rightarrow P(E' \mid F) + P(E \mid F) = 1$$

$$\Rightarrow P(E' \mid F) = 1 - P(E \mid F)$$

(গ) স্বতন্ত্র ঘটনা

যদি কোনো দুটা ঘটনাৰ অস্তিত্বই ইটোৱে সিটোক প্রভাৱিত নকৰে, তেন্তে তেনে ঘটনাক স্বতন্ত্র ঘটনা বোলে। ধৰা হ'ল, এটা মুদ্রা দলিয়াই চোৱা হ'ল। প্রথমবাৰ 'টছ' কৰোঁতে 'হেড' পোৱা ঘটনাটো দ্বিতীয়বাৰ 'টছ' কৰোতে 'হেড' পোৱা ঘটনাটোৰ প্রভাৱৰ পৰা মুক্ত অথবা স্বতন্ত্র। একে নিয়ম তাৰ পাছৰ 'টছ'বোৰৰ ক্ষেত্রতো প্রযোজ্য।

উদাহৰণ 1 ঃ এটা 52 খন তাচপাতৰ ডেকৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে এখন পাত টনা হ'ল।

ধৰা হ'ল, এচ (Ace) পাত ওলোৱাৰ ঘটনাক E-ৰে বুজোৱা হ'ল আৰু ক্লাব (club) পাত ওলোৱাৰ ঘটনাক F-ৰে বুজোৱা হ'ল। ইয়াত E আৰু F দুটা স্বতন্ত্র ঘটনা।

আশ্রিত ঘটনা

যদি কোনো এক ঘটনা আন এটা ঘটনাৰ উদ্ভৱ হোৱা কার্যক প্রভাৱিত কৰে, তেন্তে দ্বিতীয় ঘটনাটোক প্রথমটোৰ ওপৰত আশ্রিত ঘটনা বুলি কোৱা হয়। ওপৰৰ উদাহৰণটোত আমি যদি প্রথমবাৰ উলিয়াই অনা বলটো পুনৰ নভৰাও, তেন্তে ই বেগৰ ভিতৰত থকা বলবোৰৰ বিন্যাস সলনি কৰিব আৰু দ্বিতীয়বাৰ বল উলিওৱাৰ সময়ত সম্ভাৱিতাক প্রভাৱিত কৰিব। অর্থাৎ, দ্বিতীয়বাৰ 'এটা ৰঙা বল' উলিওৱা ঘটনাটো প্রথমবাৰ বল উলিওৱা (ৰঙা নাইবা বগা বল) ঘটনাটোৰ ওপৰত নির্ভৰশীল। একেদৰে, আমি যদি তাচপাতৰ ডেক এটাৰ পৰা পাত এখন টানো কিন্তু পুনৰ ডেকত নভৰাও, তেন্তে তাৰ পাছত যিমানবোৰ পাত টানিম তাৰ ফলাফল প্রথমবাৰৰ পাতখিলাৰ ওপৰত নির্ভৰশীল হ'ব।

উদাহৰণ ঃ দুটা সমান ডাইচ দলিওৱা হ'ল। প্রথম গুটিটোত 3 ওলাল। তাক E ঘটনা বুলি ধৰা হ'ল। F হ'ল যোগফল 6 হোৱা ঘটনা আৰু G হ'ল যোগফল 7 হোৱা ঘটনা। ইয়াত E আৰু F হ'ল দুটা আশ্রিত ঘটনা, কিন্তু E আৰু G হ'ল দুটা স্বতন্ত্র ঘটনা।

টোকা ঃ যদি ঘটনা A আৰু B স্বতন্ত্র। তেন্তে ইয়াৰে যিকোনো এটা সংঘটনৰ সম্ভাৱিতা হ'ল $P(E \mid F) = P(E)$ আৰু $P(F \mid E) = P(F)$।

৮.৪ সম্ভাৱিতা গুণিতক উপপাদ্য

এইবাৰ আমি স্বতন্ত্ৰ আৰু আশ্ৰিত ঘটনাৰ ক্ষেত্ৰত সম্ভাৱিতাৰ গুণিতক উপপাদ্য সম্পৰ্কে আলোচনা কৰিম।

স্বতন্ত্ৰ ঘটনাৰ বাবে সম্ভাৱিতাৰ গুণিতক উপপাদ্য

যদি, E আৰু F দুটা স্বতন্ত্ৰ ঘটনা হয়, তেন্তে দুয়োটা ঘটনা ঘটাৰ সম্ভাৱিতা প্ৰতিটোৰে একক সম্ভাৱিতাৰ পূৰণফলৰ সমান।

অৰ্থাৎ, $P(E \cap F) = P(E)P(F)$.

টোকা ঃ (1) এই উপপাদ্যটো তিনিটা অথবা ততোধিক স্বতন্ত্ৰ ঘটনাৰ ক্ষেত্ৰতো সমানে প্ৰযোজ্য। ধৰা হ'ল, E, F,G..... হ'ল স্বতন্ত্ৰ ঘটনা তেন্তে

$$P(E \cap F \cap G) = P(E)P(F)P(G).$$

(2) যদি E আৰু F স্বতন্ত্ৰ হয়, তেন্তে E আৰু F -ৰ পৰিপূৰকো স্বতন্ত্ৰ হ'ব।

অৰ্থাৎ, $P\left(\bar{E} \cap \bar{F}\right) = P\left(\bar{E}\right)P\left(\bar{F}\right)$

আশ্ৰিত ঘটনাৰ বাবে সম্ভাৱিতাৰ গুণিতক উপপাদ্য

যগি E আৰু F দুটা নিৰ্ভৰশীল ঘটনা হয়, অৰ্থাৎ কোনো এটা ঘটনাৰ অস্তিত্ব আনটোৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল হয়, তেন্তে A আৰু B ঘটাৰ সম্ভাৱনা হ'ল—

$$P(E \cap F) = P(E)P(F \mid E).$$

টোকা ঃ তিনিটা ঘটনা E, F, G -ৰ ক্ষেত্ৰত,

$P(E \cap F \cap G) = P(E)P(F \mid E)P(G \mid E \cap F)$ হ'ব। অৰ্থাৎ, E, F আৰু G সংঘটিত হোৱাৰ সম্ভাৱনা হ'ল E বাৰ সংঘটিত হোৱাৰ সমান য'ত F-ৰ সম্ভাৱিতা দিয়া আছে য'ত E সংঘটিত হৈছে, G সংঘটিত হোৱাৰ সম্ভাৱনাৰ সমান য'ত E আৰু F দুয়োটা সংঘটিত হৈছে।

বিস্তৃত উদাহৰণ

উদাহৰণ 1: ধৰা হ'ল, E আৰু F দুটা ঘটনা ইয়াত, $P(E) = 0.8$, $P(F) = 0.6$, $P(E \cap F) = 0.5$. এতিয়া, (i) $P(E \cup F)$ (ii) $P(F \mid E)$ আৰু (iii) $P(E \mid F)$-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ (i) $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

$$= 0.8 + 0.6 - 0.5$$
$$= 0.9$$

(ii) $P(F \mid E) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(E)} = \dfrac{0.5}{0.8} = \dfrac{5}{8}$

(iii) $P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{0.5}{0.6}=\frac{5}{6}$.

উদাহৰণ 2 : যদি $P(E)=0.5, P(F)=0.3$ আৰু $P(E\cap F)=0.15$ হয়, তেন্তে $P(E|F)$ৰ মান নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা অনুসৰি

$$P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$$

$$=\frac{0.15}{0.3}$$

$$=0.5$$

উদাহৰণ 3 : যদি $P(E)=0.9; P(F|E)=0.8,$ হয়, তেন্তে $P(E\cap F)$ৰ মান নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ : চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা অনুসৰি

$$P(F|E)=\frac{P(F\cap E)}{P(E)}$$

$$\Rightarrow P(F\cap E)=P(E).P(F|E)$$

$$=0.9\times 0.8$$

$$=0.72\cdot$$

উদাহৰণ 4 : 5 টা ৰঙা আৰু 7 টা বগা বল থকা মোনা এখনৰ পৰা 2 টা বগা বল একাদিক্রমে উলিয়াব পৰাৰ সম্ভাৱনা নির্ণয় কৰক। মোনাৰ পৰা উলিওৱা বলকেইটা পুনৰ মোনাত ভৰোৱা নহয়।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, E হ'ল প্রথমবাৰত বগা বল উলিওৱা ঘটনা F হ'ল দ্বিতীয়বাৰত বগা বল উলিওৱা ঘটনা

$$\therefore P(F\cap E)=P(E).P(F|E)$$

ইয়াত, $P(E)=\frac{7}{12}, P(F|E)=\frac{6}{11}$

$$\therefore P(F\cap E)=\frac{7}{12}.\frac{6}{11}=\frac{7}{22}.$$

উদাহৰণ 5 : কোনো এটা পৰীক্ষাত 30% ছাত্রই গণিত বিষয়ত, 20% ছাত্রই ৰসায়ন বিজ্ঞান বিষয়ত আৰু 10% ছাত্রই দুয়োটা বিষয়ত অনুতীর্ণ হৈছে। এজন ছাত্রক যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা হ'ল— (i) যদি ছাত্রজনে ৰসায়ন বিজ্ঞানত অনুতীর্ণ হৈছে বুলি জনা যায় তেন্তে তেওঁৰ গণিতত অনুতীর্ণ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, E হ'ল গণিতত অনুতীর্ণ হোৱাৰ ঘটনা

$$\therefore P(E)=30\%=0.3$$

ধৰা হ'ল, F হ'ল ৰসায়ন বিজ্ঞানত অনুতীর্ণ হোৱাৰ ঘটনা

$$\therefore P(F) = 20\% = 0.2$$

ধৰা হ'ল, $E \cap F$ হ'ল দুয়োটা বিষয়তে অনুতীর্ণ হোৱাৰ ঘটনা

$$P(E \cap F) = 10\% = 0.1$$

ৰসায়ন বিজ্ঞানত অনুতীর্ণ হোৱা বুলি জ্ঞাত ছাত্রজনৰ গণিতত অনুতীর্ণ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল—

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0.1}{0.2}$$

$$= 0.5 \cdot$$

উদাহৰণ 5 : এখন মোনাত 5 টা বগা আৰু 3 টা ক'লা বল আছে। দুটাবল একাদিক্রমে মোনাৰ পৰা উলিওৱা হ'ল। বলকেইটা পুনৰ ভৰোৱা নহ'ল। দুয়োটা বল ক'লা ৰঙৰ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ প্রথমবাৰতে ক'লা বল এটা উলিওৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল—

$$P(E) = \frac{3}{5+3} = \frac{3}{8}$$

প্রথম বলটো ক'লা উলিওৱাৰ পাছত দ্বিতীয় বলটোও ক'লা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল—

$$P(F \mid E) = \frac{2}{5+2} = \frac{2}{7}$$

∴ দুয়োটা বলেই ক'লা ৰঙৰ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল—

$$P(E \cap F) = P(A) \times P(F \mid E) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28} .$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

প্রশ্ন নং ১ঃ দুটা সমান মুদ্রা দলিওৱা হ'ল। ইয়াৰে এটা হ'লেও 'হেড' হ'ব বুলি কোৱা হ'ল। দুয়োটা 'হেড' হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান ?

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা বাকচত 8 টা ৰঙা আৰু 4 টা বগা বল আছে। আমি যাদৃচ্ছিকভাৱে তিনিটা বল উলিয়ালো। বলকেইটা পুনৰ বাকচত ভৰোৱা নহ'ব। তিনিওটা বলেই ৰঙা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ এটা 'ডাই' দলিওৱা হ'ল। যদি 'ডাই'টো অযুগ্ম সংখ্যাত ৰৈ যায়, তেন্তে সংখ্যাটো এটা মৌলিক সংখ্যা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান ?

প্রশ্ন নং ৪ঃ এটা পৰিয়ালত দুটা সন্তান আছে। ইয়াৰে অতি কমেও এজনী ছোৱালী বুলি কোৱা হৈছে। দুয়োটা সন্তানেই ছোৱালী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

৭.৫ পূর্ণ সম্ভাৱিতা

পূর্ণ সম্ভাৱিতাৰ উপপাদ্য ঃ যদি E_1 আৰু E_2 দুটা পাৰস্পৰিকভাৱে অখণ্ড (mutually exclusive and exhaustive) ঘটনা আৰু $P(E_1)\neq 0,\ P(E_2)\neq 0$ হয়, তেন্তে S-ৰ যিকোনো ঘটনা A-ৰ বাবে।

$$P(A)=P(E_1)P(A\mid E_1)+P(E_2)P(A\mid E_2)$$

প্ৰমাণ ঃ যিহেতু E_1 আৰু E_2 দুটা (mutually exclusive and exhaustive) ঘটনা, আমি পাম $E_1\cup E_2=S$ আৰু $E_1\cap E_2=\phi$.

$$\therefore A=A\cap S$$
$$=A\cap(E_1\cup E_2)$$
$$=(A\cap E_1)\cup(A\cap E_2) \quad \text{.... (1)}$$

আকৌ, $(A\cap E_1)\cap(A\cap E_2)=A\cap(E_1\cap E_2)$
$$=A\cap\phi$$
$$=\phi$$

$\therefore$ $A\cap E_1$ আৰু $A\cap E_2$ হ'ল দুটা (mutually exclusive and exhaustive) ঘটনা।

$\therefore$ (1)-ৰ পৰা আমি পালোঁ

$$P(A)=P(A\cap E_1)+P(A\cap E_2)$$
$$=P(E_1)P(A\mid E_1)+P(E_2)P(A\mid E_2)$$ [সম্ভাৱিতাৰ গুণিতক উপপাদ্য]

যদি E_1, E_2 আৰু E_3 তিনিটা পৰস্পৰৰ ঘটনা (mutually exclusive and exhaustive) ঘটনা হয়, আৰু $P(E_1)\neq 0, P(E_2)\neq 0$ আৰু $P(E_3)\neq 0$ হয়, (তেন্তে, S -ৰ যিকোনো ঘটনাৰ ক্ষেত্ৰত

$$P(A)=P(E_1)P(A\mid E_1)+P(E_2)P(A\mid E_2)+P(E_3)P(A\mid E_3)$$ হ'ব।

৮.৬ বেইজৰ উপপাদ্য

ওপৰৰ শিতানবোৰত আলোচনা কৰি অহা চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ ধাৰণাটোৱে কোনো এটা ঘটনাৰ সম্ভাৱিতাৰ বিষয়ে আগতীয়াকৈ ক'বলৈ আন এক ঘটনাৰ তথ্য বিচাৰ কৰি চায়। এই ধাৰণাটোক নতুন তথ্যৰ আধাৰত সম্ভাৱিতা সংশোধনৰ বাবে আৰু কোনো বিশেষ কাৰণত কোনো এক নির্দিষ্ট প্ৰভাৱ পৰিলক্ষিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰিবলৈকো ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি। এই সম্ভাৱিতাবোৰৰ সংশোধন প্ৰক্ৰিয়াটোকে বেইজৰ উপপাদ্য বুলি কোৱা হয়। 1763 চনত জন্ম লাভ কৰা টমাছ বেইজ (Thomas Bayes) হ'ল এই উপপাদ্যৰ জনক। এই উপপাদ্যৰ দ্বাৰা কোনো নির্দিষ্ট পূর্ববতী সম্ভাৱিতা সম্পর্কে ধাৰণা কৰি লৈ পৰৱর্তী সম্ভাৱিতাবোৰ লাভ কৰা হয়। সেয়েহে বেইজৰ উপপাদ্যক অনুৱর্তী সম্ভাৱিতা (Posteriori probabilities) বুলিও জনা যায়।

বেইজৰ উপপাদ্য অথবা নিয়ম

সত্যাপন ঃ ধৰা হ'ল $E_1, E_2, E_3, \cdots, E_n$ হ'ল এটা (mutually exclusive and collectively exhaustive) ঘটনাৰ n-সংখ্যক সংহতি। $P(E_1), P(E_2), P(E_3), \cdots, P(E_n)$ হ'ল ইয়াৰ অনুৰূপ সম্ভাৱিতা। যদি A আন এটা ঘটনা হয়, য'ত P(A) শূন্যৰ সমান নহয় আৰু ইয়াৰ অনুৱৰ্তী সম্ভাৱিতা $P(A \mid E_i)$ i =1, 2..., n বুলি জ্ঞাত, তেন্তে

$$P(E_i \mid A) = \frac{P(E_i)P(A \mid E_i)}{P(E_1)P(A \mid E_1) + P(E_2)P(A \mid E_2) + \cdots + P(E_n)P(A \mid E_n)}$$

অৰ্থাৎ, $P(E_i \mid A) = \dfrac{P(E_i)P(A \mid E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A \mid E_i)}$

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল, এটা যাদৃচ্ছিক সম্পৰীক্ষাটোৰ S হ'ল প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টিৰ ঘটনা

$E_1, E_2, E_3, \cdots, E_n$ হ'ল $\quad \therefore S = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$

$$A = A \cap S \qquad [A \subset S]$$
$$= A \cap (E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n)$$
$$= (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup \cdots (A \cap E_n) \quad [\text{ বিতৰণ বিধি}]$$
$$\Rightarrow P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + \cdots + P(A \cap E_n)$$
$$= P(E_1)P(A \mid E_1) + P(E_2)P(A \mid E_2) + \cdots + P(E_n)P(A \mid E_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A \mid E_i) \quad \ldots. (1)$$

এতিয়া, $P(A \cap E_i) = P(A)P(E_i \mid A)$

$$\Rightarrow P(E_i \mid A) = \frac{P(A \cap E_i)}{P(A)}$$
$$= \frac{P(E_i)P(A \mid E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A \mid E_i)} \qquad [\text{ (1) ব্যৱহাৰ কৰি }]$$

টোকা ঃ (1) $P(E_1), P(E_2), \cdots, P(E_n)$ সম্ভাৱিতাক অগ্ৰৱৰ্তী সম্ভাৱিতা (a prori probabilites) বোলা হয়।

(2) $P(E_1 \mid A), P(E_2 \mid A), \cdots, P(E_n \mid A)$ সম্ভাৱিতাক অনুৱৰ্তী সম্ভাৱিতা (posteriori probabilities) বোলা হয়।

উদাহৰণ 1 : এখন মোনাত 6 টা ৰূপৰ আৰু 3 টা সোণৰ মুদ্ৰা আছে। আন এখন মোনাত 4 টা ৰূপৰ আৰু 5 টা সোণৰ মুদ্ৰা আছে। যাদৃচ্ছিকভাৱে এখন মোনা বাছনি কৰা হ'ল আৰু তাৰ পৰা মুদ্ৰা এটা বাহিৰ কৰা হ'ল। মুদ্ৰাটো ৰূপৰ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান ?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, E = প্ৰথম মোনাখন বাছনি কৰাৰ ঘটনা

F = দ্বিতীয় মোনাখন বাছনি কৰাৰ ঘটনা

A = ৰূপৰ মুদ্ৰা এটা বাহিৰ কৰাৰ ঘটনা

$$\therefore P(E)=\frac{1}{2} \text{ আৰু } P(F)=\frac{1}{2}$$

লগতে, $P(E|A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ আৰু $P(F|A)=\frac{4}{9}$

$\therefore$ প্ৰয়োজনীয় সম্ভাৱিতা $P(A)=P(E)P(A|E)+P(F)P(A|F)$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{6}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}$$

$$=\frac{10}{18}$$

$$=\frac{5}{9}$$

উদাহৰণ 2 : এটা বাকচত দুটা মুদ্ৰা আছে। এটা মুদ্ৰাৰ দুয়োপিঠি 'হেড' আৰু আনটো মুদ্ৰাৰ এটা পিঠি 'হেড' আৰু আনটো 'টেইল'। যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা মুদ্ৰা বাছনি কৰা হ'ল আৰু পিঠিখন পৰীক্ষা কৰা হ'ল। যদি পিঠিখন 'হেড' পোৱা হ'ল, তেন্তে আনখন পিঠিও 'হেড' হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান ?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল E = দুয়োপিঠি 'হেড' থকা মুদ্ৰাটো বাহিৰ কৰাৰ ঘটনা

F = এখন পিঠি 'হেড' আনখন 'টেইল' থকা মুদ্ৰাটো বাহিৰ কৰাৰ ঘটনা

A = দুয়োপিঠি 'হেড' থকা মুদ্ৰাটো বাহিৰ কৰাৰ ঘটনা

এতিয়া আমি $P(E|A)$ নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।

ইয়াত, $P(E)=P(F)=\frac{1}{2}$

$$P(A|E)=1, P(A|F)=\frac{1}{2}$$

বেইজৰ উপপাদ্য মতে আমি পাম,

$$P(E|A)=\frac{P(E)P(A|E)}{P(E)P(A|E)+P(F)P(A|F)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times 1}{\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{3}.$$

উদাহৰণ 3 : ধৰা হ'ল, এটা কাৰখানাত দুটা মেচিন আছে. পুৰণি তথ্য মতে মেচিন I-এ 20% সামগ্ৰী উৎপাদন কৰে আৰু মেচিন II-ই 80% সামগ্ৰী উৎপাদন কৰে। লগতে এই তথ্যও পোৱা গৈছে যে মেচিন I-এ উৎপাদন কৰা সামগ্ৰীবোৰৰ 6% আৰু মেচিন II-এ উৎপাদন কৰা সামগ্ৰীবোৰৰ 1% ত্ৰুটিপূৰ্ণ। যদি যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা ত্ৰুটিপূৰ্ণ সামগ্ৰী তুলি লোৱা যায়,তেন্তে সেইটো মেচিন I-এ উৎপাদন কৰা সামগ্ৰী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান ?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল E_1, E_2 হ'ল ক্ৰমে মেচিন I আৰু মেচিন II ই উৎপাদন কৰা সামগ্ৰী একোবিধ তুলি লোৱাৰ ঘটনা।

ধৰা হ'ল A হ'ল ত্ৰুটিপূৰ্ণ সামগ্ৰী এবিধ তুলি লোৱা ঘটনা।

আমি জানো যে, $P(E_1) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$, $P(E_2) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5}$

লগতে, আমি পাম $P(A \mid E_1) = \frac{6}{100}$, $P(A \mid E_2) = \frac{1}{100}$

বেইজৰ উপপাদ্যৰ পৰা, প্ৰয়োজনীয় সম্ভাৱিতা হ'ব—

$$P(E_1 \mid A) = \frac{P(E_1).P(A \mid E_1)}{P(E_1)P(A \mid E_1) + P(E_2)P(A \mid E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}.\frac{6}{100}}{\frac{1}{5}.\frac{6}{100} + \frac{4}{5}.\frac{1}{100}} = \frac{6}{6+4} = 0.6.$$

উদাহৰণ 4 : A, B আৰু C মেচিন 3 টাই বোল্ট নিৰ্মাণ কৰে। A-ই B-ৰ দুগুণ বোল্ট আৰু B আৰু C-এ সমান বোল্ট নিৰ্মাণ কৰে। A আৰু B-এ নিৰ্মাণ কৰা বোল্টৰ 2% আৰু C-এ নিৰ্মাণ কৰা বোল্টৰ 4% ত্ৰুটিপূৰ্ণ। আটাইবোৰ বোল্ট এঠাইত দমাই থোৱা হৈছে। তাৰ মাজৰ পৰা টো বোল্ট তুলি অনা হ'ল। বোল্টটো ত্ৰুটিপূৰ্ণ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান ?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল E_1, E_2, E_3 হ'ল ক্ৰমে A, B আৰু C মেচিনে নিৰ্মাণ কৰা বোল্টৰ ঘটনা। ইয়াত আমি সম্ভাৱিতাক পূৰ্ণ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰিব লাগিব।

B আৰু C-এ সমান সংখ্যক বোল্ট নিৰ্মাণ কৰে। A-ই B-ৰ দুগুণ বোল্ট নিৰ্মাণ কৰে।

$$\therefore \; P(E_1) = 50\% = \frac{50}{100} = 0.50$$

$$P(E_2) = 25\% = \frac{25}{100} = 0.25$$

$$P(E_3) = 25\% = \frac{25}{100} = 0.25$$

ধৰা হ'ল D হ'ল ত্রুটিপূর্ণ বোল্টটো তুলি অনা ঘটনা

$$P(D \mid E_1) = \frac{2}{100} = 0.02$$

$$P(D \mid E_2) = \frac{2}{100} = 0.02$$

$$P(D \mid E_3) = \frac{4}{100} = 0.04$$

সম্ভাৱিতাৰ পূর্ণ উপাপাদ্যৰ পৰা আমি পাওঁ—

$$\begin{aligned} P(D) &= P(E_1)P(D \mid E_1) + P(E_2)P(D \mid E_2) + P(E_3)P(D \mid E_3) \\ &= 0.5 \times 0.02 + 0.25 \times 0.02 + 0.25 \times 0.04 \\ &= 0.0250 \end{aligned}$$

উদাহৰণ 5 : মোনা A-ত 2 টা বগা আৰু 3 টা ৰঙা বল আছে। মোনা B-ত 4 টা বগা আৰু 5 টা ৰঙা বল আছে। এখন মোনাৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা বল উলিওৱা হ'ল। বলটো ৰঙা বুলি গম পোৱা গ'ল। বলটো মোনা B-ৰ পৰা উলিওৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি গম পালো যে মোনাৰ পৰা ৰঙা বল এটা উলিওৱা হৈছে। আমি মোনাখন B হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰিব লাগে।

ধৰা হ'ল, E_1 = মোনা A বাছনি কৰা ঘটনা

$$\therefore \quad P(E_1) = \frac{1}{2}$$

ধৰা হ'ল, E_2 = মোনা B বাছনি কৰা ঘটনা

$$\therefore \quad P(E_2) = \frac{1}{2}$$

ধৰা হ'ল, D = ৰঙা বল বাচনি কৰা ঘটনা

এতিয়া, মোনা A -ৰ পৰা ৰঙা বলটো বাছনি কৰাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল—

$$P(D \mid E_1) = \frac{3}{5}$$

একেদৰে, মোনা B -ৰ পৰা ৰঙা বলটো বাছনি কৰাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল

$$P(D \mid E_2) = \frac{5}{9}$$

আমি ৰঙা বলটো মোনা B-ৰ পৰা উলিওৱা হৈছে নেকি সেয়া পৰীক্ষা কৰিব লাগে। অর্থাৎ, $P(E_2 \mid D)$

বেইজৰ উপপাদ্যৰ পৰা—

$$P(E_2 \mid D) = \frac{P(E_2)P(D \mid E_2)}{P(E_1)P(D \mid E_1) + P(E_2)P(D \mid E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}.\frac{5}{9}}{\frac{1}{2}.\frac{3}{5}+\frac{1}{2}.\frac{5}{9}}$$

$$= \frac{\frac{5}{18}}{\frac{3}{10}+\frac{5}{18}}$$

$$= \frac{\frac{5}{18}}{\frac{27+25}{90}}$$

$$= \frac{\frac{5}{18}}{\frac{52}{90}}$$

$$= \frac{25}{52}$$

উদাহৱণ 6 : বোল্ট নির্মাণকাৰী কাৰখানা এটাত মেচিন A, B, C -এ মুঠ বোল্টৰ ক্রমে 25%, 35% আৰু 40% নির্মাণ কৰে। মুঠ নির্মাণ সামগ্রীৰ মাজৰে ক্রমে 5%, 4% আৰু 2% হ'ল ত্রুটিপূর্ণ বোল্ট। যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা বোল্ট তুলি লোৱাৰ পাছত দেখা গ'ল বোল্টটো ত্রুটিপূর্ণ। বোল্টটো মেচিন B-এ নির্মাণ কৰাৰ সম্ভাৱিতা কিমান ?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, E_1, E_2, E_3 হ'ল ক্রমে A, B আৰু C মেচিনে বোল্ট নির্মাণ কৰা ঘটনা।

$$P(E_1) = 25\% = \frac{25}{100} = 0.25$$

$$P(E_2) = 35\% = \frac{35}{100} = 0.35$$

$$P(E_3) = 40\% = \frac{40}{100} = 0.40$$

ধৰা হ'ল, D হ'ল ত্রুটিপূর্ণ বোল্ট এটা তুলি লোৱা ঘটনা

$$\therefore P(D \mid E_1) = \frac{5}{100} = 0.05$$ ['A' মেচিনৰ ত্রুটিপূর্ণ বোল্ট]

$$P(D \mid E_2) = \frac{4}{100} = 0.04$$ ['B' মেচিনৰ ত্রুটিপূর্ণ বোল্ট]

$$P(D \mid E_3) = \frac{2}{100} = 0.02$$ ['C' মেচিনৰ ত্রুটিপূর্ণ বোল্ট]

এতিয়া, আমি উলিয়াব লাগে ত্রুটিপূর্ণ বোল্টটো মেচিন B-ৰ দ্বাৰা নির্মাণ কৰাৰ সম্ভাৱিতা, অর্থাৎ $P(E_2 \mid D)$।

বেইজৰ উপপাদ্য মতে,

$$P(E_2 \mid D) = \frac{P(E_2)P(D \mid E_2)}{P(E_1)P(D \mid E_1) + P(E_2)P(D \mid E_2) + P(E_3)P(D \mid E_3)}$$

$$= \frac{0.35 \times 0.04}{0.25 \times 0.05 + 0.35 \times 0.04 + 0.4 \times 0.02}$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল এটা কাৰখানাত 2 টা মেচিন আছে. লিখিত তথ্যৰ পৰা জনা গ'ল যে মেচিন I-এ 20% আৰু মেচিন II-ই 80% সামগ্রী উৎপাদন কৰে। লগতে ইয়াকো গম পোৱা গ'ল যে মেচিন I-এ উৎপাদন কৰা 6% আৰু মেচিন II-ই উৎপাদন কৰা 1% সামগ্রী ত্রুটিপূর্ণ হয়। এনে এবিধ ত্রুটিপূর্ণ সামগ্রী যাদৃচ্ছিকভাৱে তুলি অনা হ'ল। সামগ্রীবিধ মেচিন I-এ উৎপাদন কৰাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা কাৰখানাত থকা 3 টা মেচিন ক্রমে A, B আৰু C -এ মুঠ সামগ্রীৰ ক্রমে 60%, 30% আৰু10% উৎপাদন কৰে। মেচিনকেইটাৰ নিজস্ব উৎপাদনৰ পৰিমাণ শতকৰা হিচাপত ক্রমে 2%, 3% আৰু 4% । এবিধ সামগ্রী যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰাৰ পাছত ত্রুটিপূর্ণ পোৱা গ'ল। সামগ্রীবিধ মেচিন C-ৰ উৎপাদন হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান সেয়া নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ X মোনাখনত 2 টা বগা আৰু 3 টা ৰঙা বল আছে। Y মোনাখনত 4টা বগা আৰু 5 টা ৰঙা বল আছে। যিকোনো এখন মোনাৰ পৰা যিকোনো এটা বল উলিয়াই অনা হ'ল। বলটো ৰঙা। বলটো Y মোনাখনৰ পৰা উলিওৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান সেয়া নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ A কলহত 3 টা ৰঙা আৰু 4 টা বগা বল আছে। B কলহত 4 টা ৰঙা আৰু 5 টা বগা বল আছে। যিকোনো এটা কলহৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা বল উলিওৱা হ'ল। বলটো ৰঙা। বলটো B কলহৰ পৰা উলিওৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান সেয়া নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ এটা কাৰখানাৰ 3 টা উৎপাদন কেন্দ্র আছে। এই তিনিটা উৎপাদন I, II আৰু III-এ যথাক্রমে 20%, 30% আৰু 50% উৎপাদন কেন্দ্র কৰে। ত্রুটিপূর্ণ

সামগ্রী উৎপাদনৰ শতকৰা হাৰ হ'ল ক্রমে 15, 10 আৰু 2। এবিধ সামগ্রী যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছি লোৱাৰ পাছত ত্রুটিপূর্ণ পোৱা গ'ল। সামগ্রীবিধ উৎপাদন পন্থা I-ৰ দ্বাৰা উৎপাদিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?



৮.৭ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- যিকোনো দুটা ঘটনা E আৰু F-ৰ বাবে, **E** ঘটনা উদ্ভৱ হোৱাৰ সম্ভাৱিতাকে (য'ত F ইতিমধ্যে ঘটি গৈছে) চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতা, E-ৰ P(E|F) বোলে। ইয়াৰ গাণিতিক প্রকাশ হ'ল $P(E \mid F)=\frac{P(E \cap F)}{P(F)}$.
- যিকোনো দুটা ঘটনাৰ মাজৰে এটা উদ্ভৱ হোৱা অথবা নোহোৱা কার্যই যদি আনটোৰ ওপৰত কোনো প্রভাৱ নেপেলায় তেন্তে তাক **স্বতন্ত্র ঘটনা** বোলে। পৰস্পৰে পৰস্পৰক প্রভাৱিত কৰা ঘটনা **আশ্রিত ঘটনা** বোলে।
- যদি E আৰু F ঘটনা দুটা স্বতন্ত্র, $P(E)>0, P(F)>0$ হয়, তেন্তে $P(E \cap F)=P(E)P(F)$ আৰু $P(E \mid F)=P(E), P(F \mid E)=P(F)$.



৮.৮ অধিক জানিবলৈ

1) Rao. G. Shanker, Probability and Statistics, Universitis Press.
2) Statistics, R.S.N. Pillai and Bagavathi S. Chand and Company Ltd. New Delhi-110055.



৮.৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল

E = দুয়োটা মুদ্রা 'হেড' হোৱা ঘটনা

F = অতি কমেও এটা মুদ্রা 'হেড' হোৱা ঘটনা

এতিয়া, $P(E)=\frac{3}{4}, P(E\cap F)=\frac{1}{4}, P(F)=\frac{1}{4}$

$$\therefore P(E\mid F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}.$$

চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা ব্যৱহাৰ কৰি আমি পাম যে—

$$P(E\cap F)=P(F)P(E\mid F)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}.$$

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ i = 1; 2; 3, ধৰা হ'ল E_i = i-তম বলটো ৰঙা হোৱাৰ ঘটনা

এতিয়া, $P(E_1\cap E_2\cap E_3)=P(E_1)P(E_2\mid E_1)P(E_3\mid E_1E_2)$

$$=\frac{8}{12}.\frac{7}{11}.\frac{6}{10}=\frac{14}{55}.$$

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এটা ডাই ঘূৰি থকাৰ সময় প্রতিদর্শ সমষ্টি S হ'ল = $\{1,2,3,4,5,6\}$

ধৰা হ'ল, E = অযুগ্ম সংখ্যা ওলোৱা ঘটনা = $\{1,3,5\}$

F = মৌলিক সংখ্যা ওলোৱা ঘটনা = $\{2,3,5\}$

Then, $E\cap F=\{3,5\}$

$\therefore P(E)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}, P(F)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ আৰু $P(E\cap F)=\frac{1}{3}.$

P (অযুগ্ম সংখ্যা এটা পোৱাৰ সময়তে মৌলিক সংখ্যা)

= P (মৌলিক সংখ্যা | অযুগ্ম সংখ্যা)

$=P(E\mid F)$

$=P(E\mid F)$

$=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$

$=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত প্রদত্ত প্রতিদর্শ সমষ্টি S হ'ল $=\{(b,b),(b,g),(g,b),(g,g)\}$

ধৰা হ'ল, E = দুয়োটা সন্তান ছোৱালী হোৱাৰ ঘটনা

F = অতি কমেও এজনী ছোৱালী সন্তান থকা ঘটনা

এতিয়া, $E=\{(g,g)\}$ আৰু $F=\{(b,g),(g,b),(g,g)\}$

$E\cap F=\{(g,g)\}$

$\therefore P(E)=\frac{3}{4}, P(E\cap F)=\frac{1}{4}$

$\therefore$ প্রয়োজনীয় সম্ভাৱিতা হ'ল $P(E\mid F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}$$

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল, E_1, E_2 হ'ল যথাক্রমে মেচিন I আৰু II-ৰ দ্বাৰা উৎপাদিত সামগ্রীৰ মাজৰ পৰা সামগ্রী তুলি লোৱা ঘটনা।

ধৰা হ'ল A = ত্রুটিপূর্ণ সামগ্রী তুলি লোৱা ঘটনা

আমি পালো, $P(E_1)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}, P(E_2)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$

লগতে আমি পালো, $P(A\mid E_1)=\frac{6}{100}, P(A\mid E_2)=\frac{1}{100}$

বেইজৰ উপপাদ্য অনুসৰি নির্ণিত সম্ভাৱিতা হ'ল—

$$P(E_1\mid A)=\frac{P(E_1)P(A\mid E_1)}{P(E_1)P(A\mid E_1)+P(E_2)P(A\mid E_2)}$$

$$=\frac{\frac{1}{5}\cdot\frac{6}{100}}{\frac{1}{5}\cdot\frac{6}{100}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{100}}=\frac{6}{6+4}=0.6.$$

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল E, F, G হ'ল যথাক্রমে মেচিন A, B, C-এ উৎপাদন কৰা সামগ্রী বাছনি কৰাৰ ঘটনা।

এতিয়া আমি পাম, $P(E)=\frac{60}{100}=0.6, P(F)=\frac{30}{100}=0.3, P(G)=\frac{10}{100}=0.1$

ধৰা হ'ল, D = যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা কিন্তু ত্রুটিপূর্ণ সামগ্রী পোৱা ঘটনা।

এতিয়া,

$$P(D \mid E) = \frac{2}{100} = 0.02, P(D \mid F) = \frac{3}{100} = 0.03, P(D \mid G) = \frac{4}{100} = 0.04$$

বেইজৰ উপপাদ্য প্রয়োগ কৰি আমি পাম,

$$P(G \mid D) = \frac{P(G)P(D \mid G)}{P(E)P(D \mid E) + P(F)P(D \mid F) + P(G)P(D \mid G)}$$

$$= \frac{(0.1)(0.04)}{(0.6)(0.02) + (0.3)(0.03) + (0.1)(0.04)}$$

$$= \frac{0.004}{0.012 + 0.009 + 0.004}$$

$$= \frac{0.004}{0.025}$$

$$= 0.16 .$$

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল

E_1 = X মোনাৰ পৰা বল উলিওৱা ঘটনা

E_2 : = Y মোনাৰ পৰা বল উলিওৱা ঘটনা

A = বলটো ৰঙা হোৱা ঘটনা

ইয়াত $P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$

লগতে, $P(A \mid E_1)$ = P (X মোনাৰ পৰা ৰঙা বল উলিওৱা ঘটনা)

$$= \frac{3}{5}$$

$P(A \mid E_2)$ = P (Y মোনাৰ পৰা ৰঙা বল উলিওৱা ঘটনা)

$$= \frac{5}{9}$$

বেইজৰ উপপাদ্য অনুসৰি আমি পাম,

$$P(E_2 \mid A) = \frac{P(E_1)P(A \mid E_1)}{P(E_1)P(A \mid E_1) + P(E_2)P(A \mid E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{5}{9}}{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{9}} = \frac{25}{52} .$$

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নির্ণিত সম্ভাৱিতা $= \frac{28}{45}$ [বেইজৰ উপপাদ্য অনুসৰি]

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ বেইজৰ উপপাদ্য অনুসৰি,

$$P(E_1 \mid A) = \frac{P(E_1)P(A \mid E_1)}{P(E_1)P(A \mid E_1) + P(E_2)P(A \mid E_2)}$$

$$= \frac{0.2 \times 0.15}{0.2 \times 0.15 + 0.3 \times 0.10 + 0.5 \times 0.02}$$

$$= 0.069 \cdot$$



৮.১০ আৰ্হি প্রশ্ন

প্রশ্ন ১ঃ E আৰু F এনে দুটা ঘটনা য'ত $P(E) = \frac{1}{2}, P(F) = \frac{1}{3}$ আৰু $P(E \cap F) = \frac{1}{4}$ । তলত দিয়া সম্ভাৱিতাবোৰ নির্ণয় কৰক। (i) $P(E \mid F)$,(ii) $P(E \cup F)$ আৰু (iii) $P(E' \mid F')$ ।

প্রশ্ন ২ঃ তিনিগৰাকী ব্যক্তি, যথাক্রমে A, B আৰু C -এ কাৰখানাত যথাক্রমে $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}$ অনুপাতত কেঁচামাল যোগান ধৰে। তেওঁলোকে যোগান ধৰা কেঁচামালৰ ক্রমে $5\%, 6\%, 8\%$ ত্রুটিপূর্ণ। মুঠ যোগানৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে এবিধ কেঁচামাল বাছি লোৱা হ'ল। কেঁচামালবিধ A নাইবা B নাইবা C -এ যোগান ধৰাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন ৩ঃ দেখাত একে তিনিটা মুদ্রাৰ মাজৰে এটাৰ দুয়োখন পিঠি একে বাকী মুদ্রা দুটা টছ কৰিলে 'হেড' ওলোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল ক্রমে $\frac{1}{3}$ আৰু $\frac{2}{3}$ । যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছি লোৱা মুদ্রা এটা টছ কৰাৰ পাছত 'হেড' ওলাল। মুদ্রাটোৰ দুয়োটা পিঠি একে হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৪ঃ অসমৰ এখন কলেজত কামৰূপ, নগাঁও আৰু যোৰহাট জিলাৰ পৰা অহা ছাত্রৰ সংখ্যা হ'ল যথাক্রমে 50%, 30% আৰু 20%। এই ছাত্রবোৰৰ মাজৰে জিলা ক্রম অনুসৰি 80%, 60% আৰু 40% ছাত্রই ধূতি পিন্ধে। ছাত্রবোৰৰ মাজৰ পৰা এজন ছাত্রক যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা হ'ল। তেওঁ ধূতি পিন্ধে। ছাত্রজন কামৰূপ জিলাৰ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন ৫ঃ X, Y আৰু Z ৰে'লগাড়ী তিনিখনে মুঠ যাত্রীৰ যথাক্রমে 25%, 35% আৰু 40% অনা-নিয়া কৰে। অহা-যোৱা কৰা যাত্রীবোৰৰ ভিতৰত ৰে'লগাড়ীৰ ক্রম অনুসৰি 5%, 4% আৰু 3% মহিলা যাত্রী আছে। আটাইকেইখন ৰে'লগাড়ীৰ সর্বমুঠ যাত্রীৰ মাজৰ পৰা এগৰাকী যাত্রীক যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা হ'ল। যাত্রীগৰাকী মহিলা। প্রমাণ কৰা যে তেওঁ X নাইবা Y নাইবা Z ৰে'লগাড়ীৰ যাত্রী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা যথাক্রমে $\frac{25}{69}, \frac{28}{69}$ আৰু $\frac{16}{69}$ ।

প্রশ্ন ৬ঃ ল'ৰা-ছোৱালীৰ তিনিটা দল আছে। প্রথম দলত 3 জনী ছোৱালী আৰু এটা ল'ৰা আছে। দ্বিতীয় দলত 2 জনী ছোৱালী আৰু 2 টা ল'ৰা আছে। তৃতীয় দলত এজনী ছোৱালী আৰু 3 টা ল'ৰা আছে। প্রতিটো দলৰ পৰা এজনক যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা হ'ল। এজনী ছোৱালী আৰু 2 টা ল'ৰা বাছনি কৰাৰ সম্ভাৱিতা কিমান নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৭ঃ এখন মোনাত 5 টা বগা আৰু 7 টা ৰঙা বল আছে। যাদৃচ্ছিকভাৱে একেৰাহে দুবাৰ বল উলিওৱা হ'ল। এটা বল বগা আৰু এটা বল ৰঙা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৮ঃ এখন দৌৰ প্রতিযোগিতাত দুগৰাকী দৌৰবিদৰ বিজয়ৰ সম্ভাৱনা ক্রমে $\frac{1}{3}$ আৰু $\frac{1}{5}$ । দুয়োগৰাকীয়েই বিজয়ী নোহোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন ৯ঃ ভালদৰে মিহলাই লোৱা 52 খিলা তাচপাতৰ ডেক এটাৰ পৰা তলত দিয়া ধৰণে তাচপাত টানি উলিওৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক—

(i) এখনৰঙা কার্ড অথবা এখন এছ অথবা দুয়োটা।

(ii) এখন ডায়মণ্ড কার্ড অথবা এখন এছ অথবা দুয়োটা।

(iii) কিং অব ডায়মণ্ড কার্ড অথবা কিং অব হার্ট কার্ড অথবা দুয়োটা।

প্রশ্ন ১০ঃ 4 জন মানুহে 52 খিলা তাচপাত খেলি আছে। মাত্র এজনে চাৰিওখিলা কিং কার্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

*** ***** ***

অধ্যায় ৯ ঃ যাদৃচ্ছিক চলক আৰু ইয়াৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন

অধ্যায় গাঁথনি

৯.১ উদ্দেশ্য

৯.২ পৰিচয়

৯.৩ যাদৃচ্ছিক চলক

- ৯.৩.১ যাদৃচ্ছিক চলকৰ সংজ্ঞা
- ৯.৩.২ বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক
- ৯.৩.৩ অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক

৯.৪ সম্ভাৱিতা বণ্টন

- ৯.৪.১ সম্ভাৱিতা ভৰ ফলন
- ৯.৪.২ সম্ভাৱিতা ঘনত্ব ফলন

৯.৫ গাণিতিক প্ৰত্যাশ্যা আৰু প্ৰসৰণ

- ৯.৫.১ গাণিতিক প্ৰত্যাশা
- ৯.৫.২ গাণিতিক প্ৰত্যাশাৰ ধৰ্ম
- ৯.৫.৩ যাদৃচ্ছিক চলকৰ প্ৰসৰণ
- ৯.৫.৪ প্ৰসৰণৰ ধৰ্ম

৯.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৯.৭ অধিক জানিবলৈ

৯.৮ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

৯.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন

৯.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- দুই প্ৰকাৰৰ পৰীক্ষণ, যেনে— সুনিৰ্দিষ্ট আৰু যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণৰ মাজত থকা প্ৰভেদ বুজি পাব
- যাদৃচ্ছিক চলকৰ সংজ্ঞা দিব পাৰিব আৰু বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক তথা অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক চিনাক্ত কৰিব পাৰিব
- সম্ভাৱিতা বণ্টন কাক কয় বুজি পাব
- সম্ভাৱিতা ভৰ ফলন আৰু সম্ভাৱিতা ঘনত্ব ফলনৰ ধাৰণা দুটা সিহঁতৰ ধৰ্মবোৰৰ সৈতে আলোচনা কৰিব পাৰিব

- যিকোনো বণ্টনৰ অধ্যয়নতে প্রয়োজনীয় এটা যাদৃচ্ছিক চলকৰ গাণিতিক প্রত্যাশা তথা প্রসৰণ বুজিব পাৰিব।

৯.২ পৰিচয়

অধ্যয়নৰ বাবে চলোৱা পৰীক্ষণবোৰক দুটা বহল ভাগত ভগাব পাৰি। এক প্রকাৰৰ পৰীক্ষণত ফলাফলবোৰ সকলো সময়তে আৰু সকলো অৱস্থাতে একে থাকে। দ্বিতীয় প্রকাৰৰ পৰীক্ষণত প্রতিবাৰেই ভিন ভিন ফলাফল ওলাব পাৰে।

প্রথম বিধ পৰীক্ষণক সুনির্দিষ্ট (deterministic) পৰীক্ষণ বোলে। দ্বিতীয় পৰীক্ষণবিধক যাদৃচ্ছিক (random) পৰীক্ষণ বোলে। আমি ইতিপূর্বে উল্লেখ কৰিছো যে যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণত পৰীক্ষণকাৰীয়ে সম্ভাব্য ফলাফলৰ সকলোবোৰ সমষ্টিয়েই জানে। কিন্তু কোনো এক নির্দিষ্ট সময়ত ইয়াৰে কোনটো ফলাফল ওলাব সেয়া তেওঁ নিশ্চতকৈ ক'ব নোৱাৰে। যদি আমি এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণৰ ভিন্ন ফলাফলক এটা চলকৰ সহায়ত বুজাও, তেতিয়াই ই এটা যাদৃচ্ছিক চলক হৈ পৰে।

এই অধ্যায়টোত আমি যাদৃচ্ছিক চলক কাক বোলে, এনে চলকৰ প্রকাৰবোৰ, সেইবোৰৰ গাণিতিক প্রত্যাশা আৰু কেইটামান আনুষংগিক উপপাদ্যৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

৯.৩ যাদৃচ্ছিক চলক

আমি অধ্যয়নৰ সময়ত পোৱা বেছিভাগ যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণৰ ফলাফলকেই বাস্তৱ সংখ্যা ৰূপে ব্যাখ্যা কৰিব পাৰোঁ। যেনে— ছাত্র-ছাত্রীয়ে কোনো পৰীক্ষাত লাভ কৰা নম্বৰ, এদিনত হোৱা দুর্ঘটনাৰ সংখ্যা ইত্যাদি। আনহাতে, কেতিয়াবা কোনো যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণৰ ফলাফলে যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যাৰ অন্তৰাল (interval) মান দেখুৱাব পাৰে। যেনে— কোনো এটা শ্রেণীৰ ছাত্র-ছাত্রীৰ উচ্চতাই এক নির্দিষ্ট পৰিসৰৰ ভিতৰত যিকোনো মান দেখুৱাব পাৰে। কেতিয়াবা এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণৰ ফলাফল গুণগত হ'ব পাৰে। যেনে— মুদ্রা এটা ওপৰলৈ দলিয়ালে ইয়াৰ 'হেড' নাইবা 'টেইল' ফালটো মাটিত ওপৰমুৱাকৈ পৰিব। কিন্তু আমি 'হেড'ক '১' আৰু 'টেইল'ক যদি '০' ৰে বুজাও, তেন্তে আমি বুজি পালোঁ যে যিকোনো গুণগত অথবা পৰিমাণগত যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণৰ ফলাফলক এটা বাস্তৱ সংখ্যাৰে প্রকাশ কৰিব পৰা যাব। যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণভেদে বাহিৰ হোৱা ভিন ভিন ফলাফলৰ সাংখ্যিক মানকে যাদৃচ্ছিক চলক বোলে। যাদৃচ্ছিক ফলকক আমি তলত দিয়া ধৰণে আনুষ্ঠানিকভাৱে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰিব পাৰোঁ ঃ

৯.৩.১ যাদৃচ্ছিক চলকৰ সংজ্ঞা

কোনো এক যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণৰ ফলাফল হিচাপে লাভ কৰা বাস্তৱ সংখ্যাবোৰকে যাদৃচ্ছিক চলক বোলে।

নাইবা যিটো চলকৰ এটা সুনির্দিষ্ট মানৰ সংহতি আছে আৰু প্রতিটো মানৰ সৈতে একোটা সম্ভাৱিতা জড়িত হৈ থাকে তেনে চলককে যাদৃচ্ছিক চলক বোলে। এইটো কাৰণতে এনে চলকক সংযোগ চলক (chance variable) অথবা প্রসম্ভাব্য চলক (stochastic variable) বোলে।

যাদৃচ্ছিক চলক দুই প্রকাৰৰ হ'ব পাৰে।

(i) বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক

(ii) অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক

টোকা ঃ যদি x আৰু y দুটা যাদৃচ্ছিক চলক হয়, তেন্তে x + y আৰু x – y ও যাদৃচ্ছিক চলক হ'ব। যদি a আৰু b দুটা ধ্রুৱক হয়, তেন্তে ax+y, x+by আৰু ax+by চলক তিনিটা যাদৃচ্ছিক চলক হ'ব।

৯.৩.২ বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক

যদি x যাদৃচ্ছিক চলকটোৰ মাত্র এক সসীম সংখ্যক অথবা গণনাসাধ্য অসীম সংখ্যক সাংখিক মান থাকে তেন্তে চলকটোক বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক বোলা হয়। অর্থাৎ, x যাদৃচ্ছিক চলকটোৰ এটা সসীম সংখ্যক মান থাকিব পাৰে, যেনে— $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$। নাইবা, ইয়াৰ গণনাসাধ্য অসীম সংখ্যক মান থাকিব পাৰে, যেনে— $x_1, x_2, \ldots\ldots$। এছোৱা নির্দিষ্ট সময়ৰ ভিতৰত এটা ডাকঘৰত জমা হোৱা চিঠিৰ সংখ্যা, যাতায়ত কৰ সংগ্রহ কৰা দলং এখনৰ ওপৰেৰে পাৰ হোৱা যান-বাহনৰ সংখ্যা, কোনো এটা নির্দিষ্ট দিনত বিকল হৈ পৰা যন্ত্র-পাতিৰ সংখ্যা ইত্যাদি হ'ল বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলকৰ উদাহৰণ।

৯.৩.৩ অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক

যিটো যাদৃচ্ছিক চলকে এক প্রদত্ত অন্তৰালৰ ভিতৰত যিকোনো সাংখ্যিক মান গ্রহণ কৰে তাক অবিচ্ছিন্ন চলক বোলে। অর্থাৎ, আমি কৈছো যে এটা অন্তৰালত x এ যিকোনো মান গ্রহণ কৰে, ধৰা হ'ল অন্তৰালটো (a, b)। এতিয়া $a \leq x \leq b$ হ'ব। ইয়াৰ অর্থ হ'ল (a, b) অন্তৰালত x এটা অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক। বাৰিষা বতৰত হোৱা বৰষুণৰ পৰিমাণ, ব্যক্তিৰ উচ্চতা, এটা সেৱা কেন্দ্রত গ্রাহক উপস্থিত হোৱাৰ মাজত থকা সময়ৰ ব্যৱধান আদি হ'ল অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলকৰ উদাহৰণ।

৯.৪ সম্ভাৱিতা বণ্টন

এটা যাদৃচ্ছিক চলকৰ সকলোবোৰ সম্ভাব্য মান আৰু এই মানবোৰৰ প্রতিটোৰে সৈতে জড়িত সম্ভাৱিতাবোৰ উলিয়াই যিটো বণ্টন পোৱা যাব সেইটোকেই সম্ভাৱিতা বণ্টন বোলে। যাদৃচ্ছিক চলকটো বিচ্ছিন্ন হ'লে আমি এটা বিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বণ্টন পাম। কিন্তু পৰীক্ষাৰ বাবে

লোৱা চলকটো যদি অবিচ্ছিন্ন হয় তেন্তে আমি এটা অবিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বণ্টন পাম। বিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বণ্টনক সম্ভাৱিতা ভৰ ফলন আৰু অবিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বণ্টনক সম্ভাৱিতা ঘনত্ব ফলন বোলে।

৯.৪.১ সম্ভাৱিতা ভৰ ফলন

ধৰা হ'ল,

x এটা বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক। ইয়াৰ মানবোৰ হ'ল $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ । মানবোৰৰ সম্ভাৱিতা হ'ল ক্ৰমে $p_1, p_2, \ldots\ldots\ldots, p_n$।

ধৰা হ'ল,

$p_i = P(x = x_i) = p(x_i)$, i = 1, 2, ... n হ'ব সেইটো সম্ভাৱিতা যিটো x এ x_i মান গ্ৰহণ কৰাৰ পাছত পোৱা যাব। তেন্তে $p(x_i)$ ক সম্ভাৱিতা ভৰ ফলন (probability mass function /p.m.f.) বোলা হ'ব যদিহে ই তলৰ চৰ্তসমূহ পূৰণ কৰে—

(i) $p(x_1) \geq 0$ হয় সকলোবোৰ i = 1, 2, ..., n ৰ বাবে

(ii) $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

যদি বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক x গণনাসাধ্যভাৱে অসীম হয়, তেন্তে, $p(x_i) = P(x = x_i)$, i = 1, 2,.....,n ক x ৰ p.m.f. বোলা হ'ব, যদিহে—

(i) সকলোবোৰ i =1, 2, ... ৰ বাবে $p(x_i) \geq 0$ হয়

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

ব্যাখ্যা ঃ ধৰা হ'ল,

পাশাগুটি এটা দলিয়াই দিওতে ওপৰমুৱাকৈ পৰা পৃষ্ঠখন x তেন্তে,

x ৰ মান 1, 2, 3, 4, 5 অথবা 6 ৰ যিকোনো এটা হ'ব পাৰে। প্ৰতিটোৰে সম্ভাৱিতা হ'ল $\frac{1}{6}$ কথাটো তলত দিয়া ধৰণে উপস্থাপন কৰিব পাৰি—

$p(x_i) = P(x = x_i) = \frac{1}{6}$, i = 1, 2, ..., 6.

ইয়াত, $p(x_i) > 0$

আৰু $\sum_{i=1}^{6} p(x_i) = 1$

অৰ্থাৎ, $p(x_i)$ এ এটা p.m.f.ৰ দুয়োটা চৰ্ত পূৰণ কৰে।

৯.৪.২ সম্ভাৱিতা ঘনত্ব ফলন

এটা অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক x ৰ সম্ভাৱিতা বণ্টনক f(x) প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়েই চলকবোৰ সম্ভাৱিতা ঘনত্ব ফলন (probability dersity function/ p.d.f.)। ধৰা হ'ল, (a, b) অন্তৰালত x এটা অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক ফলক। তেন্তে, ফলন f(x) = P(X = x) হ'ব x ৰ p.d.f. of যদিহে ই তলৰ চৰ্ত দুটা পূৰণ কৰে—

(i) $f_b(x) \geq 0 \ \forall$ (a, b) ত x

(ii) $\int_a f(x)dx$

ব্যাখ্যা ঃ প্ৰদত্ত ফলনটোলৈ মন কৰক,

$$f(x) = \begin{cases} a, 0 \leq x \leq 5 \\ 0, \text{অন্যথা} \end{cases}$$

$f(x)$ এটা p.d.f. হ'বলৈ হ'লে $\int_a^b f(x)dx = 1$ চৰ্তটো পূৰণ হ'ব লাগিব। চৰ্তটো তেতিয়াহে সত্য হ'ব যেতিয়া

$$\int_0^5 adx = 1$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{5} \text{ হ'ব।}$$

যিহেতু a > 0, এতেকে ফলন হ'ব $f(x) \geq 0$

অৰ্থাৎ f(x) এ p.d.f. এটাৰ দুয়োটা চৰ্ত পূৰণ কৰে।

৯.৫ গাণিত্যিক প্ৰত্যাশা আৰু প্ৰসৰণ

৬.৫.১ গাণিতিক প্ৰত্যাশা

এটা বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক ফলনৰ গাণিতিক প্ৰত্যাশা হ'ল যাদৃচ্ছিক চলকৰ দ্বাৰা প্ৰাপ্ত মানবোৰ আৰু সিহঁতৰ সংশ্লিষ্ট সম্ভাৱিতাৰ পূৰণফল (sum of the products)

ধৰা হ'ল, x এটা বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক, ইয়াৰ মান হ'ল $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ ইয়াৰ সম্ভাৱিতাবোৰ হ'ল ক্ৰমে $p_1, p_2, \ldots\ldots\ldots, p_n$ এতিয়া x যাদৃচ্ছিক চলকৰ গাণিতিক প্ৰত্যাশাক E(x) প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হ'ব আৰু তলত দিয়া ধৰণে দৰ্শোৱা হ'ব—

$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

চর্ত হ'ল, শ্রেণীটো অভিসাৰী (convergent) আৰু $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ হ'ব লাগিব

ধৰা হ'ল,

x এটা অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক

ইয়াৰ p.d.f. হ'ল $f(x)$, $-\infty < x < \infty$

তেন্তে, x যাদৃচ্ছিক চলকৰ গাণিতিক প্রত্যাশা হ'ব

$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$, দিয়া আছে $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$

টোকা ঃ যাদৃচ্ছিক চলক x ৰ প্রত্যাশাই x ৰ সম্ভাৱিতা বণ্টনৰ মাধ্যৰ প্রতিনিধিত্ব কৰে।

এটা যাদৃচ্ছিক চলকৰ ফলন এটাৰ গাণিত্যিক প্রত্যাশা হ'ল ঃ যদি g(x) যাদৃচ্ছিক চলক x ৰ এটা ফলন হয়, তেন্তে g(x) ৰ প্রত্যাশাক তলত দিয়া ধৰণে লিখা হ'ব—

$E[g(x)] = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) p(x_i) = \sum_{i=1}^{n} g(x_i) p_i$

ইয়াত, x হ'ল এটা বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক যাৰ মানবোৰ হ'ল $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_n$ আৰু মানবোৰৰ সম্ভাৱিতা হ'ল ক্রমে $p_1, p_2, \ldots\ldots\ldots, p_n$।

একেদৰে, যদি $(-\infty, \infty)$ অন্তৰালত x এটা অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক আৰু ইয়াৰ p.d.f. হ'ল $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, তেন্তে $E[g(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x) dx$ হ'ব।

৯.৫.২ গাণিতিক প্রত্যাশাৰ ধর্ম

তলত এটা যাদৃচ্ছিক চলকৰ এটা প্রত্যাশিত মানৰ গুৰুত্বপূর্ণ ধর্মবোৰ উল্লেখ কৰা হ'ল—

(১) এটা ধ্রুৱকৰ প্রত্যাশিত মান ধ্রুৱকটোৱে হ'ব। অর্থাৎ, E(c) = c প্রতিটো ধ্রুৱক c ৰ ক্ষেত্রতে প্রযোজ্য।

(২) ধ্রুৱক a আৰু যাদৃচ্ছিক চলক x ৰ পূৰণফলৰ প্রত্যাশিত মান যাদৃচ্ছিক চলকৰ প্রত্যাশিত মান কালৰ (the times the expected value) সমান।

অর্থাৎ, E(ax) = a E(x)

(৩) এটা যাদৃচ্ছিক চলকৰ ৰৈখিক ফলনৰ প্রত্যাশিত মান ইয়াৰ প্রত্যাশাৰ ৰৈখিক ফলনৰ মানৰ সমান।

অর্থাৎ, E (a+bx) = a+b E(x)

(৪) দুটা যাদৃচ্ছিক চলকৰ যোগফলৰ প্রত্যাশিত মান ফলক দুটাৰ একক প্রত্যাশিত মানৰ যোগফলৰ সমান।

অর্থাৎ, $E(x+y) = E(x) + E(y)$

(৫) দুটা স্বতন্ত্র যাদৃচ্ছিক চলকৰ পূৰণফলৰ প্রত্যাশিত মান চলক দুটাৰ একক প্রত্যাশিত মানৰ পূৰণফলৰ সমান।

অর্থাৎ, $E(xy) = E(x)\,E(y)$।

৯.৫.৩ যাদৃচ্ছিক চলকৰ প্রসৰণ

যাদৃচ্ছিক চলকৰ এটা গুৰুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য হ'ল ইয়াৰ প্রসৰণ। ই হ'ল যাদৃচ্ছিক চলকৰ বিক্ষেপণৰ জোখ। যাদৃচ্ছিক চলক x ৰ প্রসৰণক V(x) অথবা σ^2 প্রতীকেৰে বুজোৱা হয়। প্রসৰণৰ উপস্থাপন তলত দিয়া ধৰণে কৰিব পাৰি,

$\sigma^2 = v(x) = E\{x - E(x)\}^2.$

$= E(x^2) - \{E(x)\}^2.$

টোকা ঃ প্রসৰণৰ ধনাত্মক বর্গমূলেই হ'ল মানক বিচ্যুতি (standard deviation)

৯.৫.৪ প্রসৰণৰ ধর্ম

(১) এটা ধ্রুৱকৰ প্রসৰণ হ'ল শূন্য। অর্থাৎ, $V(c) = 0$।

(২) এটা ধ্রুৱক আৰু এটা যাদৃচ্ছিক চলকৰ পূৰণফলৰ প্রসৰণ ধ্রুৱকটোৰ বর্গৰ দ্বাৰা কৰা পূৰণৰ প্রসৰণৰ সমান। অর্থাৎ, $V(cx) = c^2 V(x)$.

(৩) দুটা স্বতন্ত্র যাদৃচ্ছিক চলকৰ যোগ অথবা বিয়োগফলৰ প্রসৰণ হ'ল, সিহঁতৰ প্রসৰণৰ যোগফলৰ সমান $V(x \pm y) = V(x) + V(y)$।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

(১) এটা যাদৃচ্ছিক চলক x ৰ তলত দিয়া সম্ভাৱিতা বণ্টন শ্রেণী আছে

x:	-2	-1	0	1	2	3
p(x):	0.1	0.1	0.2	0.2	0.3	0.1

$E(x)$ আৰু $V(x)$ গণনা কৰক

সমাধান ঃ

$E(x) = \sum_x xp(x)$

$= -2 \times 0.1 + (-1) \times 0.1 + 0 \times 0.2 + 1 \times 0.2 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.1$

$= 0.8$

$V(x) = E(x^2) - \{E(x)\}^2$

এতিয়া, $E(x^2) = \sum_x x^2 p(x)$

$= (-2)^2 \times 0.1 + (-1)^2 \times 0.1 + 0 + 1^2 \times 0.2 + 2^2 \times 0.3 + 3^2 \times 0.1$

$= 2.8$

$\therefore V(x) = 2.8 - (-0.8)^2$

$= 2.8 - 0.64$

$= 2.16$

(২) এটা কার্যালয়ত 10 টা HCL আৰু 20 টা HP কম্পিউটাৰ আছে। এটা কম্পিউটাৰ যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা হৈছে। এটা HP কম্পিউটাৰ বাছনি কৰাৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন বাহিৰ কৰক। এটা HP কম্পিউটাৰ বাছনি কৰাৰ প্ৰত্যাশিত মান কি হ'ব।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল,

x এটা যাদৃচ্ছিক চলক, য'ত

x=1, যদি এটা HP কম্পিউটাৰ বাছনি কৰা হয়

= 0 যদি এটা HP কম্পিউটাৰ বাছনি কৰা নহয়।

$\therefore$ x ৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন হ'ব,

x:	0	1
P(X= x):	10/30	20/30
	=1/3	= 2/3

$\therefore$ E (এটা HP কম্পিউটাৰ বাছনি কৰা হ'ল) $= 0x1/3 + 1x2/3$

$= 2/3$

(৩) এখন চিকিৎসালয়ৰ 80% ৰোগী মাত্ৰাধিক উদ্বিগ্নতাত আক্ৰান্ত। এজন ৰোগী যাদৃচ্ছিকভাৱে বাচনি কৰা হ'ল। মাত্ৰাধিক উদ্বিগ্নতাত ভুগি থকা ৰোগীসকলৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন বাহিৰ কৰক আৰু বণ্টন শ্ৰেণীৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল,

x এটা যাদৃচ্ছিক চলক য'ত

x = 1 যদি ৰোগীজন মাত্ৰাধিক উদ্বিগ্নতাত আক্ৰান্ত

= 0 যদি তেনে নহয়

অৰ্থাৎ, x ৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন হ'ব

x:	0	1
p(X= x):	0.2	0.8

আৰু $E(x) = 0 \times 0.2 + 1 \times 0.8$

$= 0.8$

(৪) ট্ৰেঞ্জিষ্টৰৰ মাহেকীয়া চাহিদাৰ তলত উল্লেখ কৰা সম্ভাৱিতা বণ্টন শ্ৰেণীটো আছে।

চাহিদা (n):	1	2	3	4	5	6
সম্ভাৱিতা (p):	0.10	0.15	0.20	0.25	0.18	0.12

ট্ৰেঞ্জিষ্টৰৰ প্ৰত্যাশিত চাহিদা নিৰ্ণয় কৰক। যদি 'n' সংখ্যক ট্ৰেঞ্জিষ্টৰৰ উৎপাদন ব্যয় C = 10,000 + 500n দিয়া আছে, তেন্তে ইয়াৰ প্ৰত্যাশিত ব্যয় নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ট্ৰেঞ্জিষ্টৰৰ প্ৰত্যাশিত চাহিদা হ'ল—

$= E(n)$

$= \sum np$

$= 1 \times 0.10 + 2 \times 0.15 + 3 \times 0.20 + 4 \times 0.25 + 5 \times 0.18 + 6 \times 0.12$

$= 3.62$

$E(C) = E(10,000 + 500n) = 10,000 + 500\ E(n)$

$= 10,000 + 500 \times 3.62$

$= 11,810$

(৫) এখন খোৱা সামগ্ৰী বিক্ৰী কৰা দোকানৰ গৰাকীয়ে এবিধ নতুন খাদ্য উদ্ভাৱন কৰিলে। তেওঁ হিচাপ কৰি পালে যে খাদ্যবিধৰ প্ৰতিটো এককৰ উৎপাদন ব্যয় হ'ব 1 টকা। তেওঁ একক 3 টকাকৈ বিক্ৰী কৰিব খোজে। কিন্তু খাদ্যবিধ সোনকালে নষ্ট হয় আৰু দিনটোৰ অন্তত বিক্ৰী নোহোৱাকৈ ৰৈ যোৱা সামগ্ৰীকিনিৰ পৰা সম্পূৰ্ণ লোকচান হয়। যদি খাদ্যবিধৰ চাহিদা তলৰ বাৰংবাৰতা বণ্টন শ্ৰেণীটো থকা এটা চলক হয়, তেন্তে খাদ্যবিধৰ 15 টা একক বিক্ৰী কৰি তেওঁ কিমান শুদ্ধ লাভ (not profit) কৰিব পাৰিব?

চাহিদা অনুসৰি খাদ্য

এককৰ সংখ্যা ঃ	10	11	12	13	14	15
সম্ভাৱিতা ঃ	0.07	0.10	0.23	0.38	0.12	0.10

সমাধান ঃ

উৎপাদিত একক = 15

মুঠ উৎপাদন ব্যয় = 15 x 1 = 15 টকা

প্ৰতি এককৰ বিক্ৰীমূল্য = 3 টকা

এককৰ চাহিদা	**লাভ**
10	(10x3) - 15 = 15 টকা
11	(11x3) - 15 = 18 টকা
12	(12x3) - 15 = 21 টকা

13	(13x3) - 15 = 24 টকা
14	(14x3) - 15 = 27 টকা
15	(15x3) - 15 = 30 টকা

$\therefore$ প্ৰত্যাশিত শুদ্ধ লাভ = $\sum$ লাভ $\times$ সম্ভাৱিতা

= 15x0.07 + 18x0.10 + 21x0.23 + 24x0.38 + 27x0.12 + 30x0.10

= 3.45 টকা



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১ঃ সঁচানে মিছা কওক—

(i) এটা যাদৃচ্ছিক চলক x ৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন তলত দিয়াৰ দৰে—

X = x :	1	2	3	
P(X= x):	1/4	1/2	3/4	(সঁচা/মিছা)

(ii) যদি c এটা ধ্ৰুৱক, তেন্তে—

(a) E(c) = c (b) V(c) = c (সঁচা/মিছা)

(iii) যদি x আৰু y দুটা স্বতন্ত্ৰ যাদৃচ্ছিক চলক, তেন্তে,

(a) V(x+y) = V(x) + V(y) (সঁচা/মিছা)

(b) V(x-y) = V(x) - V(y) (সঁচা/মিছা)

(iv) যদি x আৰু y দুটা স্বতন্ত্ৰ যাদৃচ্ছিক চলক, তেন্তে E(xy) = E(x) E(y)

(v) এটা অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলকে এটা প্ৰদত্ত সীমাৰ ভিতৰৰ যিকোনো মান গ্ৰহণ কৰিব পাৰে।

প্ৰশ্ন নং ২ঃ যাদৃচ্ছিক চলকৰ সংজ্ঞা দিয়ক। এটা যাদৃচ্ছিক চলকৰ গুৰুত্বপূৰ্ণ ধৰ্মবোৰ কি কি?



৯.৬ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- পৰীক্ষণবোৰক দুটা বহল ভাগত ভগাব পাৰি— সুনিৰ্দিষ্ট আৰু যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণ।
- এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণৰ ফলাফলৰ সৈতে যুক্ত বাস্তৱ সংখ্যাবোৰক যাদৃচ্ছিক চলক বোলে।
- যাদৃচ্ছিক চলক দুই প্ৰকাৰৰ— বিচ্ছিন্ন আৰু অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক।
- এটা যাদৃচ্ছিক চলকৰ আটাইবোৰ সম্ভাব্য মান আৰু সিহঁতৰ সংশ্লিষ্ট সম্ভাৱিতাবোৰ মিলাই লাভ কৰা বণ্টনকে সম্ভাৱিতা বণ্টন বোলে।

- বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলকৰ সম্ভাৱিতা বণ্টনক সম্ভাৱিতা ভৰ ফলন (p.m.f.) আৰু অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলকৰ সম্ভাৱিতা বণ্টনক সম্ভাৱিতা ঘনত্ব ফলক (p.d.f.) বোলে।
- এটা বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক ফলনৰ গাণিতিক প্ৰত্যাশা হ'ল যাদৃচ্ছিক চলকৰ দ্বাৰা প্ৰাপ্ত মানবোৰ আৰু সিহঁতৰ সংশ্লিষ্ট সম্ভাৱিতাৰ পূৰণফল।
- যাদৃচ্ছিক চলক x প্ৰত্যাশ্যাই x ৰ সম্ভাৱিতা বণ্টনৰ মাধ্যৰ প্ৰতিনিধিত্ব কৰে।
- এটা যাদৃচ্ছিক চলকৰ প্ৰসৰণে যাদৃচ্ছিক চলকৰ বিক্ষেপণৰ জোখ বুজায়।
- এটা ধ্ৰুৱকৰ প্ৰত্যাশা হয় ধ্ৰুৱকটোৱেই হয়। আনহাতে, এটা ধ্ৰুৱকৰ প্ৰসৰণ হ'ল শূন্য।
- দুই অথবা ততোধিক যাদৃচ্ছিক চলকৰ যোগফলৰ প্ৰত্যাশা হ'ল প্ৰতিটো স্বতন্ত্ৰ চলকৰ যোগফলৰ সমান।
- দুটা স্বতন্ত্ৰ যাদৃচ্ছিক চলকৰ পূৰণফলৰ প্ৰত্যাশা হ'ল প্ৰতিটো একক চলকৰ প্ৰত্যাশাৰ পূৰণফলৰ সমান।
- দুটা স্বতন্ত্ৰ যাদৃচ্ছিক চলকৰ যোগ অথবা বিয়োগফলৰ প্ৰসৰণ হ'ল সিহঁতৰ প্ৰসৰণৰ যোগফলৰ সমান।



৯.৭ অধিক জানিবলৈ

১) Mukhopadhyay, P. (1996), *Mathematical statistics*. New Central Book Agency (P) Ltd.

২) Goon, A.M., Gupta, M.K. and Dasgupta, B. (1997), *An ouline of statistical Theory*. Vol. I, World Press.

৩) Mukhopadhyay, P. (1991). *Theory of Probability*. New Central Book Agency (P) Ltd.

৪) Gupta, S.C., Kapoor, V.K. (2009). *Fundamentals of Mathematical Statistics*, Sultan Chand & Sons.

৫) Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and its Application*, Vol I, Wiley Eastern.



৯.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) মিছা (মুঠ সম্ভাৱিতা 1 তকৈ অধিক)

(i) (a) সঁচা (b) মিছা

(ii) (a) সঁচা (b) মিছা

(iii) সঁচা

(iv) সঁচা

(v) সঁচা

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণৰ ফলাফলৰ সৈতে যুক্ত বাস্তৱ সংখ্যাবোৰকে যাদৃচ্ছিক চলক বোলে।

যাদৃচ্ছিক চলকৰ ধর্মবোৰ হ'ল—

(i) যদি x এটা যাদৃচ্ছিক চলক, তেন্তে 1/x, x^2 যাদৃচ্ছিক চলক হ'ব।

(ii) যদি x এটা যাদৃচ্ছিক চলক আৰু a, b দুটা ধ্রুৱক, তেন্তে ax+b এটা যাদৃচ্ছিক চলক হ'ব।

(iii) যদি x আৰু y দুটা যাদৃচ্ছিক চলক, তেন্তে x+y আৰু x-y চলক দুটাও যাদৃচ্ছিক চলক হ'ব।



৯.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

প্রশ্ন ১ঃ খালী ঠাই পূৰণ কৰক—

(i) মানুহৰ উচ্চতা আৰু ওজন এটা ..... যাদৃচ্ছিক চলকেৰে প্রকাশ কৰিব পাৰি।

(ii) যদি x আৰু y দুটা যাদৃচ্ছিক চলক হয় তেন্তে ax+by এটা ..... হ'ব য'ত a আৰু b ধ্রুৱক হ'ব।

(iii) যদি x আৰু y দুটা স্বতন্ত্র চলক হয়, তেন্তে E(xy) = ...

(iv) $V(x \pm y) = V(x) + V(y)$ য'ত x আৰু y হ'ল ..... চলক।

(v) V(ax+b) = ..., ইয়াত a আৰু b হ'ল ধ্রুৱক।

(vi) E(a) = ... আৰু V(a) = ..., ইয়াত a হ'ল

এটা ধ্রুৱক।

প্রশ্ন ২ঃ যদি x যাদৃচ্ছিক চলকটোৱে 1, 2, 3 মান গ্রহণ কৰে আৰু ইয়াৰ সমৰূপ সম্ভাৱিতাবোৰ ক্রমে 1/4, 1/2 আৰু 3/4 হয়, তেন্তে চলকটোৰ গাণিতিক প্রত্যাশা কি হ'ব নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৩ঃ বিচ্ছিন্ন আৰু অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক কাক কয় উদাহৰণৰ সৈতে আলোচনা কৰক।

প্রশ্ন ৪ঃ এটা যাদৃচ্ছিক চলকৰ ফলন এটাৰ গাণিত্যিক প্রত্যাশা বুলিলে কি বুজে? গাণিতিক প্রত্যাশাৰ যোগ আৰু পূৰণৰ নিয়ম বর্ণনা কৰক।

প্রশ্ন ৫ঃ x যাদৃচ্ছিক চলকটোৰ তলত দিয়া সম্ভাৱিতা বণ্টনটো আছে—

x:	-2	-1	0	1	2	3
f(x):	0.1	2k	0.2	2k	0.3	2k

k ৰ মান নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৬ঃ গাণিতিক প্রত্যাশাৰ কেইটামান গুৰুত্বপূর্ণ ধর্মৰ বিষয়ে লিখক।

*** ***** ***

অধ্যায় ১০ ঃ বিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বিভাজন

অধ্যায় গাঁথনি

১০.১ উদ্দেশ্য

১০.২ পৰিচয়

১০.৩ ঘূর্ণক জনক ফলন (ঘূর্ণক উৎপাদিকা ফলন)

- ১০.৩.১ সংজ্ঞা
- ১০.৩.২ ঘূর্ণক উৎপাদন
- ১০.৩.৩ ঘূর্ণক জনক ফলনৰ ধর্ম

১০.৪ দ্বিপদ বণ্টন

- ১০.৪.১ দ্বিপদ বণ্টনৰ ব্যুৎপত্তি
- ১০.৪.২ সংজ্ঞা
- ১০.৪.৩ দ্বিপদ বণ্টনৰ ঘূর্ণক
- ১০.৪.৪ দ্বিপদ বণ্টনৰ ঘূর্ণক জনক ফলন
- ১০.৪.৫ দ্বিপদ বণ্টনৰ আসঞ্জন
- ১০.৪.৬ দ্বিপদ বণ্টনৰ ধর্ম

১০.৫ পইছ' পদ্ধতি

- ১০.৫.১ দ্বিপদ বণ্টনৰ চৰম আচৰণ হিচাবে পইছ' বণ্টন
- ১০.৫.২ পইছ' বণ্টনৰ ঘূর্ণক
- ১০.৫.৩ ঘূর্ণক উৎপাদিকা ফলন
- ১০.৫.৪ পইছ' বণ্টনৰ ধর্ম
- ১০.৫.৫ পইছ' বণ্টনৰ ধর্ম
- ১০.৫.৬ পইছ' বণ্টনৰ ব্যৱহাৰ

১০.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১০.৭ অধিক জানিবলৈ

১০.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১০.৯ আৰ্হি প্রশ্ন

১০.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- প্রদত্ত যিকোনো বণ্টনৰ ঘূর্ণক জনক ফলন নির্ণয়
- যিকোনো সম্ভৱিতা বণ্টনৰ পৰা ঘূর্ণক উৎপাদন
- ঘূর্ণক জনক ফলনৰ কিছুমান গুৰুত্বপূর্ণ ধর্ম
- মুদ্রা নিক্ষেপ পৰীক্ষণৰ জৰিয়তে দ্বিপদ বণ্টনৰ সূত্র উদ্ভাৱন
- দ্বিপদ বণ্টনৰ চৰম আচৰণ হিচাপে পইছ' বণ্টন নির্ণয়
- দ্বিপদ আৰু পইছ' বণ্টনৰ ঘূর্ণক গণনা
- বাস্তৱ জীৱনৰ ক্ষেত্রত দ্বিপদ আৰু পইছ' বণ্টনৰ আসঞ্জন
- সম্ভৱিতা বণ্টনৰ ধাৰণাসমূহ বাস্তৱ জীৱনৰ বিভিন্ন তথ্যৰ ক্ষেত্রত প্রয়োগ।

১০.২ পৰিচয়

এই পর্যন্ত আমি বিভক্ত আৰু অবিচ্ছিন্ন চলকৰ সম্ভৱিত বণ্টন প্রকৃতি জানিব পাইছো লগতে সেইবোৰৰ মাধ্য আৰু প্রসৰণ সংজ্ঞাবদ্ধ কৰিছো। এতিয়া এই গোটটিত আমি আগৰ ষষ্ঠ পাঠত কোৱাৰ দৰে কোনো বিশেষ বণ্টনৰ ঘূর্ণক উৎপাদনৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম যাক ঘূর্ণক জনক ফলন বা ঘূর্ণক উৎপাদিকা ফলন বুলিও কোৱা হয়।

আকৌ আমি জানো যে সম্ভৱিতা বণ্টন নির্ণয়ৰ নিয়ম একে থাকে যদিও বা আমি তিনিটা মুদ্রা একেলগে নিক্ষেপ কৰি তাৰ পৰা মুণ্ডৰ সংখ্যাৰ সম্ভৱিতা বিচাৰ কৰো বা তিনিটা ৰঙা আৰু দুটা বগা বল থকা মোনা এখনৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা এটকৈ দুটা বল পুনঃ সংস্থাপন পদ্ধতিৰে উলিয়াই আনি পৰীক্ষাটোত দুটা ৰঙা বল পোৱাৰ সম্ভৱিতা বিচাৰ কৰো। গতিকে বিচ্ছিন্ন চলকৰ ক্ষেত্রত কোনো পৰীক্ষণৰ পৰা পোৱা ফলাফলবোৰ এক বিশেষ বণ্টনৰ জৰিয়তে যথাযথভাৱে প্রকাশ কৰিব পৰাটোৱেই এই পাঠটি মূল উদ্দেশ্য হ'ব।

এই নীতিৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি পাঠটিৰ পৰৱর্তী গোটত আমি বাস্তৱ জীৱনৰ বহুতো ক্ষেত্রত ব্যৱহাৰযোগ্য কিছুমান বিচ্ছিন্ন চলকৰ সম্ভৱিতা বণ্টনৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। ইয়াত মূলতঃ আমি আলোচনা কৰিব খোজা বণ্টনকেইটা হ'ল দ্বিপদ বণ্টন আৰু পইছ' বণ্টন।

১০.৩ ঘূর্ণক জনক ফলন (ঘূর্ণক উৎপাদিকা ফলন)

ত্বাত্বিক আৰু ব্যৱহাৰিক পৰিসংখ্যাৰ ক্ষেত্রত সম্ভৱিতা বণ্টনৰ ঘূর্ণকৰ গুৰুত্বপূর্ণ ভূমিকা আছে। ঘূর্ণকৰ জৰিয়তে আমি কোনো তথ্যৰ কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপ (measure the central tendency), সিহঁতৰ পৰিৱর্তনশীলতা, সিহঁতৰ অপ্রতিসমতা আৰু সিহঁতৰ বক্রবোৰৰ শীর্ষৰ উচ্চতা উলিয়াব পাৰো। গতিকে ঘূর্ণকৰ জ্ঞানে আমাক সম্ভৱিতা বণ্টন নির্ণয়ৰ বাবে সক্ষম কৰি

তোলে। গতিকে ঘূর্ণক নির্ণয় কৰিব পৰা ফলনবোৰ আমাৰ বাবে বৰ উপযোগী হয়। তেনে এটা ফলনেই হ'ব আমাৰ বাবে ঘূর্ণক জনক ফলন। গতিকে ঘূর্ণক জনক ফলনৰ সংজ্ঞা আমি তলত দিয়া ধৰণে দিব পাৰো।

১০.৩.১ সংজ্ঞা

এটা ফলন যাক আমি কোনো এটা যাদৃচ্ছিক চলকৰ ঘূর্ণক নির্ণয়ত ব্যহা কৰিব পাৰো তেনে ফলনক ঘূর্ণক জনক ফলন বোলা হয়। ইয়াক Mx (t)ৰে দর্শোৱা হয়।

$$M_X(t) = E\left(e^{tx}\right).$$

যদিহে X এটা বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক যাৰ সম্ভৱিতা ভৰ ফলন (p.m. f.) p(x) তেন্তে

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_x e^{tx} p(x)$$

যেতিয়া x এটা অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক হয় যাৰ সম্ভৱিতা ঘনত্ব ফলন (p.d.f.) f(x), তেন্তে

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_a^b e^{tx} f(x)dx.$$

১০.৩.২ ঘূর্ণকৰ উৎপাদন

আমি পাওঁ

$$M_X(t) = E\left(e^{tx}\right)$$

$$= E(1 + tx + \frac{t^2x^2}{2!} + \frac{t^3x^3}{3!} + ... + \frac{t^rx^r}{r!} + ...)$$

$$= E(1) + t\,E(x) + \frac{t^2}{2i}E(x^2) + \frac{t^3}{3i}E(x^3) + ... + \frac{t^r}{ri}E(x^r) + ...$$

$\therefore$ μ_1' = $M_x(t)$ত t ৰ সহগ

μ_2' = $M_x(t)$ত $\frac{t^2}{2!}$ ৰ সহগ

μ_3' = $M_x(t)$ত $\frac{t^3}{3!}$ ৰ সহগ

অর্থাৎ সাধাৰণ ক্ষেত্রত

$\therefore$ μ_r' = $M_x(t)$ত $\frac{t^r}{r!}$ ৰ সহগ

ঘূর্ণক নির্ণয়ৰ আন এটা সহজ উপায় হ'ল $M_x(t)$ ক t সাপেক্ষে ক্রমাগতভাৱে অবকলজ লৈ t = 0 বহুৱালে ক্রমে μ_1', μ_2' ..... ইত্যাদিবোৰ পোৱা যায়।

গতিকে যদি $M_x(t)$, সাপেক্ষে এবাৰ অবকলজ লৈ তাত t = 0 বহুৱালে আমি μ_1' পাম।

অর্থাৎ $\mu_1' = \left[\frac{d}{dt} M_x(t)\right]_{t=0}$

$M_x(t)$ t সাপেক্ষে দুবাৰ অবকলজ লৈ তাত t = 0 বহুৱালে আমি μ_α' পাম।

$$\mu_2' = \left[\frac{d^2}{dt^2} M_\lambda(t)\right]_{t=0}$$

গতিকে সাধাৰণ ক্ষেত্রত r ঘাতৰ (পর্যায়ৰ) ঘূর্ণক হ'ব

$$\mu_r' = \left[\frac{d^r}{dt^r} M_x(t)\right]_{t=0}$$

১০.৩.৩ ঘূর্ণক জনক ফলন ধর্ম

(i) যদি X এটা যাদৃচ্ছিক চলক আৰু C এটা ধ্রুৱক তেন্তে

$M_{C_X}(t) = M_\lambda(ct)$

প্রমাণ ঃ বাওঁপক্ষ = $M_{C_X}(t) = E(e^{tcx})$

$= E(e^{ctx})$

$= M_x(ct)$

= সোঁপক্ষ

(ii) ঘূর্ণক জনক ফলনৰ যোগক্রিয়াৰ ধর্ম।

স্বতন্ত্র চলকৰ যোগফলৰ ঘূর্ণক জন ফলন সিহঁতৰ সুকীয়া ঘূর্ণক ফলনবোৰৰ যোগফলৰ সমান। সাংকেতিকভাৱে যদি $X_1, X_2, X_3 ....., X_n$ স্বতন্ত্র চলক হয় তেন্তে

$M_{X_1+X_2+...+x_n}(t) = M_{X_1}(t).M_{X_2}(t) ... M_{X_n}(t).$

প্রমাণ ঃ বাওঁপক্ষ = $M_{X_1+X_2+...+x_n}(t)$

$= E\left[e^{t(x_1+x_2+...+x_n)}\right]$

$= E\left[e^{tx_1}.e^{tx_2}....e^{tx_n}\right]$

$= E(e^{tx_1}).E(e^{tx_2})...E(e^{tx_n})$ $\because X, X_2..., X_n$ স্বতন্ত্র চলক

= $M_{X_1}(t).\ M_{X_2}(t)\ .\ .\ .\ M_{X_n}(t)$

= সোঁপক্ষ

(iii) মূল বিন্দুৰ স্থানান্তৰ আৰু জোখৰ সালসলনিৰ ঘূর্ণক জনক ফলনৰ ওপৰত প্রভাৱ।

$$M_{\frac{x-a}{h}}(t) = e^{\frac{-at}{h}} M_x\left(t/h\right)$$

প্রমাণ ঃ $M_{\frac{x-a}{h}}(t) = E\left[e^{t\left(\frac{x-a}{h}\right)}\right]$

$$= E\left[e^{\frac{tx}{h}} e^{\frac{-at}{h}}\right]$$

$$= e^{\frac{-at}{h}} E\left[e^{\frac{t}{h}(x)}\right]$$

$$= e^{\frac{-at}{h}} M_x\left(t/h\right)$$

= সোঁপক্ষ

টোকা ঃ (i) ঘূর্ণক জনক ফলন সদায় স্থিত নহয়।

(ii) কোনো কোনো ক্ষেত্রত ঘূর্ণক জনক ফলন থাকিলে ই ঘূর্ণক উৎপাদন কৰিব নোৱাৰিবও পাৰে।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

1. ধৰা হ'ল X এটা যাদৃচ্ছিক চলকযাৰ সম্ভতিা ভৰ ফলন ইয়াৰ $p(x) = q^x p$, $x = 0, 1, 2, \ldots$ ইয়াৰ পৰা ঘূর্ণক জনক ফলন নির্ণয় কৰা। লগতে ইয়াৰ মাধ্য আৰু প্রসৰণ (variance) নির্ণয় কৰা।

সমাধান ঃ $M_x(t) = E(e^{tx})$

$$= \sum_{x=0}^{\alpha} e^{tx}.q^x p$$

$$= p\sum_{x=0}^{\alpha}(qe^t)^x$$

$$= p\left[1 + qe^t + (qe^t)2 + \ldots\right]$$

$$= p\left(1 - qe^t\right)^{-1}$$

মাধ্য = $\mu_1^{/} = \left[\frac{d}{dt}M_x(t)\right]_{t=0}$

$$= \left[(-1)p(1-qe^t)^{-2}(-qe^t)\right]_{t=0}$$

$$= pq(1-q)^{-2}$$

$$= \frac{pq}{p^2}$$

$$= \frac{p}{p}$$

$$\mu_\alpha{}' = \left[\frac{d^2}{dt^2} M_x(t)\right]_{t=0}$$

$$= \left[\frac{d}{dt}\left\{pq\ e^t(1-ge^t)^{-2}\right\}\right]_{t=0}$$

$$= pq\left[et(1-ge^t)^{-2} + e^t(-2)(1-qe^t)^{-3}(-ge^t)\right]_{t=0}$$

$$= pq\left[(1-q)^{-2} + 2q(1-q)^{-3}\right]$$

$$= \frac{pq}{p^2} + \frac{2pq^2}{p^3}$$

$$= \frac{q}{p} + \frac{2q^2}{p^2}$$

ইয়াত ব্যৱহৃত হোৱা বিস্তৃতিটোক ঋণাত্মক ঘাতৰ ক্ষেত্ৰত দ্বিপদ বিস্তৃতি বুলি কোৱা হয়। ইয়াৰ বিস্তৃতিটোত দিয়া ধৰণৰ $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$

$\therefore$ প্ৰসৰণ $= \mu_\alpha = \mu_\alpha{}' - \mu_1{}'^2$

$$= \frac{q}{p} + \frac{2q^2}{p^2} - \frac{q^2}{p^2}$$

$$= \frac{q}{p} + \frac{q^2}{p^2}$$

$$= \frac{q(p+q)}{p^2}$$

$$= \frac{q}{p^2}$$

2. এটা অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক x ৰ ঘূর্ণক জনক ফলন নির্ণয় কৰা যাৰ সম্ভৱিতা ঘনত্ব ফলন

$$f(x) = \theta e^{-\theta x},\ x \geq 0$$

লগতে ইয়াৰ মাধ্য আৰু প্ৰসৰণ উলিওৱা।

সমাধান ঃ $M_x(t) = E(e^{tx})$

$$= \int^{\alpha} e^{tx}\, \theta e^{-\theta x} dx$$

$$= \theta^0 \int^{\alpha} e^{(t-\theta)\, x} dx$$

$$= \theta^0 \left[\frac{e(t-\theta)x}{t-\theta} \right]_0^{\alpha}$$

$$= \theta \left[\frac{1}{t-\theta}(0-1) \right]$$

$$= \frac{-\theta}{t-\theta}$$

$$= \frac{\theta}{\theta - t} = \left(1 - \frac{t}{\theta}\right)^{-1}$$

$$= 1 + \frac{t}{\theta} + \left(\frac{t}{\theta}\right)^2 + \left(\frac{t}{\theta}\right)^3 + \ldots.$$

$\therefore \mu_1'$ = মাধ্য = $M_x(t)$ প্রসাৱণত t ৰ সহগ $= \frac{1}{\theta}$

μ_2' = মাধ্য = $M_x(t)$ প্রসাৱণত t^2 ৰ সহগ $= \frac{2}{\theta^2}$

$\therefore$ প্রসৰণ $= \mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2 = \frac{2}{\theta^2} - \left(\frac{1}{\theta}\right)^2 = \frac{1}{\theta^2}$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ সত্যাসত্য বিচাৰ কৰা—

(i) যিহেতু $M_x(t)$ য়ে ঘূর্ণক উৎপাদন কৰে সেয়েহে ইয়াক ঘূর্ণক জনক ফলন বোলে।

(ii) যদি X আৰু Y স্বতন্ত্র যাদৃচ্ছিক চলক তেন্তে $M_{x+y}(t) = M_x(t) + M_y(t)$

(iii) ঘূর্ণক জনক ফলন সদায় পোৱা যায়।

(iv) দি ঘূর্ণক জনক ফলন থাকে তেন্তে ই বণ্টন ফলন নির্ণয় কৰে।

১০.৪ দ্বিপদ বণ্টন

জেমচ বাৰনুলিয়ে 1700 চনত দিয়া ধাৰণা অনুযায়ী দ্বিপদ বণ্টন এনে কিছুমান গণৰ (sample) ক্ষেত্রত ব্যৱহাৰ হয় য'ত মৌলবোৰ বা ফলনবোৰ কোনো বিশেষ গুণসম্পন্ন হয় বা নহয় সাপেক্ষে দুটা শ্রেণীত বিভক্ত কৰিব পাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে কোনো এটা প্রশ্নৰ উত্তৰ শুদ্ধ নে অশুদ্ধ, কোনো এটা পৰীক্ষাৰ ফলাফল উত্তীর্ণ নে অনুত্তীর্ণ, উদ্যোগ এটা কর্মীবৃন্দ শিক্ষিত বা

অশিক্ষিত ইত্যাদি।

অর্থাৎ এনেধৰণৰ প্রত্যেক পৰিস্থিতিৰ ক্ষেত্রত পোৱা ফলাফলসমূহত কোনো বিশেষ গুণ (আগতীয়াকৈ স্থিৰ কৰি লোৱা) আছে নে নাই লক্ষ্য কৰা হয়। অর্থাৎ আমি মাত্র দুটা ফলাফল ধৰি লওঁ য'ত এক বিশেষ গুণ বিদ্যমান হয় বা নহয় তেন্তে তাক আমি কৃতকার্য আৰু যদি নাথাকেও আমি অকৃতকার্য বুলি চিহ্নিত কৰো।

দ্বিপদ বণ্টনৰ গাণিতিক পটভূমি হ'ল এক বিশেষ অভিপ্রয়োগ যাক বাৰনুলি অভিপ্রয়োগ বুলি কোৱা হয়। যিবোৰ স্বতন্ত্রভাৱে সীমিত সংখ্যক পুনৰাবৃত্তি কৰা হয়। গতিকে সসীম সংখ্যক বাৰনুলি অভিপ্রয়োগৰে দ্বিপদ বণ্টনৰ বৎপত্তি কৰা যাওক।

টোকা ঃ যিবোৰ যাদৃচ্ছিক স্বতন্ত্র অভিপ্রয়োগ যাৰ ফলাফলবোৰ সফল আৰু বিফল এই দুটা শ্রেণীত বিভক্ত কৰিব পাৰি তাক বাৰনুলি অভিপ্রয়োগ বোলে। যেনে— এটা মুদ্রা নিক্ষেপ কৰিলে মুণ্ড (head), পুচ্ছ (tail) পোৱা যায়, ইত্যাদি।

১০.৪.১ দ্বিপদ বণ্টনৰ ব্যুৎপত্তি

ধৰা হ'ল n সংখ্যক পুনৰাবৃত্তিৰে এটা মুদ্রা উৎক্ষেপণ কৰা হ'ল আৰু এই অভিপ্রয়োগতটোত মুণ্ড ওলালে সফল আৰু পুচ্ছ ওলালে বিফল হোৱা বুলি গণ্য কৰা হয়। সফলতাক 's' ৰে আৰু বিফলতাক 'f' ৰে দর্শোৱা হয়। সফলতাৰ সম্ভাৱিতাক p ৰে আৰু বিফলতাৰ সম্ভাৱিতাক q ৰে দর্শালে পাওঁ

$P(s) = p$, $P(f) = q$ আৰু $q = 1 - p$.

ধৰা হ'ল আমি n টা স্বতন্ত্র অভিপ্রয়োগৰ ভিতৰত x টা সফলতা পাব বিচাৰিছো। গতিকে বিফলতাৰ সংখ্যা হ'ব (n-x)। এতিয়া এক বিশেষ ক্রমত প্রথম x টা অভিপ্রয়োগত সফল আৰু বাকী (n-x) টা অভিপ্রয়োগত বিফল হোৱা বুলি ধৰিলে পাম—

$P(ss \ldots s\ f\ f \ldots f) = P(s)\ P(s) \ldots P(s)\ P(f) \ldots P(f)$

$\because$ অভিপ্রয়োগবোৰ স্বতন্ত্র

$$= \underbrace{p.p...p}_{x\ factor}.\ \underbrace{q.q...q}_{(n-x)\ factor}$$

$= p^x\ q^{n-x}$

কিন্তু n টা অভিপ্রয়োগৰ দ্বাৰা x বাৰ হোৱা ই মাত্র এটা ধৰণ। যিহেতু আমি জানো যে n টা অভিপ্রয়োগৰ পৰা x টা সফলতা ${}^nC_x$ ভিন ভিন ধৰণে পাব পাৰি আৰু এইবোৰৰ প্রত্যেকটোৰ ক্ষেত্রতে সম্ভৱিতা p^x আৰু q^{n-x}, সেয়েহে সম্ভাৱিতাৰ যোগসূত্র অনুসৰি n টা অভিপ্রয়োগৰ পৰা x টা সফলতা পোৱাৰ সম্ভৱিতা হ'ব।

$p^x q^{n-x} + p^x q^{n-x} + \ldots + p^x q^{n-x}$, ${}^nC_x$ সংখ্যক

$= {}^nC_x\ p^2\ q^{n-x}$.

এইটোৱেই দ্বিপদ বণ্টনৰ সম্ভাৱিতা ভৰ ফলন। আকৌ সফলতাৰ সংখ্যা x ৰ মান 0, 1, 2, ..., n হ'ব। গতিকে এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ সংজ্ঞা আমি তলত উল্লেখ কৰা ধৰণে দিব পাৰো—

১০.৪.২ সংজ্ঞা

যাদৃচ্ছিক চলক X ক দ্বিপদ বণ্টনত থকা বুলি কোৱা হ'ব যেতিয়া x য়ে 0, 1, 2, ... n এই ধনাত্মক মানবোৰ ধাৰণা কৰে আৰু ইয়াৰ সম্ভাৱিতা ভৰ ফলন (probability mass function) টো হয়–

$$p(x) = p(X = x)\ n_{c_x}\ p^x\ q^{n-x},\ x = 0, 1, 2, ..., n$$

0, অন্যথা

য'ত p + q = 1

n আৰু p ধ্রুৱক দুটা এই বণ্টনৰ প্রাচল। সংক্ষেপে ইয়াক B(n, p) ধৰণে দর্শোৱা হয়।

টোকা ঃ এই ক্ষেত্রত 0 বাৰ, 1 বাৰ, 2 বাৰ, ..., n বাৰ সফল হোৱাৰ সম্ভৱিতা অর্থাৎ $n_{C_o} p^o q^n$, $n_{C_1} p\ q^{n-1}$, . . ., $n_{C_n}\ p^0\ q^x$ ইত্যাদিবোৰ ক্রমে $(q + p)^n$ দ্বিপদ ৰাশৰ বিস্তৃতিত পোৱা পদসমূহ। সেয়েহে এই বণ্টনক দ্বিপদ বণ্টন হিচাপে নামাকৰণ কৰা হয়।

১০.৪.৩ দ্বিপদ বণ্টনৰ ঘূর্ণক

আমি ইয়াত মূলতত্ব দ্বিপদ প্রথম দুটা ঘূর্ণক নির্ণয়ৰ বাবে ইচ্ছুক আৰু এই কেইটা তলত দিয়া ধৰণৰ।

$$\mu_1' = \text{ মাধ্য } = E(x) = \sum_x x\ p(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x\ n_{c_x}\ p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x\ \frac{n}{x}^{n-1}\ c_{x-1} p^x q^{n-x} \qquad \because n_{c_x} = \frac{n}{x},\ n-1_{c_x}$$

$$= n\ p \sum_{x=1}^{n} n-1\ _{C_{x-1}} p^{x-1} q^{n-x}$$

$$= np\left[{}^{n-1}{}_{Co}\ p^0 q^{n-1} + n-1_{C1}\, pq^{n-2} + \ldots + {}^{n-1}\ C_{n-1} p^{n-1} q^0\right]$$

$= np(q + p)^{n-1}$

$= np \qquad \because p + q = 1$

গতিকে দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য হ'ল n p.

আকৌ, $\mu_2^{/} = E(\lambda^2) = E\{X(x-1)\} + E(x)$

$$E\{x(x-1)\} = \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\ n_{c_x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x(x-1)\frac{n(n-1)}{x(x-1)}^{n-2}\ c_{x-2} p^x q^{n-x}$$

$$= n(n-1)p^2 \sum_{x=2}^{n} n-2\ c_{x-2} p^{x-2} q^{n-x}$$

$$= n(n-1)p^2 (q+p)^{n-2}$$

$$= n(n-1)p^2 .$$

$\therefore E(x^2) = n(n-1)p^2 + np$

$\therefore \mu_2$ = প্রসৰণ $= \mu_2^{/} - \mu_1^{/^2} = n(n-1)p^2 + n\,p - n^2 p^2$

$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$

$= np(1 - p)$

$= npq.$

গতিকে দ্বিপদ বণ্টনৰ প্রসৰণ npq.

মন্তব্য ঃ দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য সদায় প্রসৰণতকৈ বেছি। ই দ্বিপদ বণ্টনৰ এটা গুৰুত্বপূর্ণ বৈশিষ্ট্য।

১০.৪.৪ দ্বিপদ বণ্টনৰ ঘূর্ণক জনক ফলন

যদি $X \sim$ B (n, p), তেন্তে

$$Mx(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x} e^{tx} p(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{tx}\ {}^{n}c_x p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n}\ {}^{n}c_x (e^t p)^2 q^{n-x}$$

$$= {}^{n}c_0 (e^t p)^0 q^n + {}^{n}c_1 (e^t p) q + \ldots + {}^{n}c_n (e^t p)^n q^r$$

$$= (q + e^t p)^n$$

ইয়েই দ্বিপদ বণ্টনৰ ঘূর্ণকজনক ফলন।

১০.৪.৫দ্বিপদ বণ্টনৰ আসঞ্জন

দ্বিপদ বণ্টনৰ পৌনঃপনিক সম্পৰ্কটো হ'ল $p(x+1)=\frac{n-x}{x+1}\frac{p}{q}p(x)$.

x = 0, 1, 2, . . ., n–1

x = 0, 1, 2, ..., (n-1) একাদিক্ৰমে বহুৰালে পাম p(1), p(2), ..., p(n) ইয়াত আমি কেৱল p(0) উলিওৱাৰহে প্ৰয়োজন। যিটো হ'ব—

$p(0)={}^{n}c_0\,p^0q^n=q^n$

দ্বিপদ বণ্টনৰ আসঞ্জনৰ বাবে আমি n আৰু p ৰ মা নিৰ্ণয় কৰিব লাগিব। n ৰ মান সাধাৰণতে জনা যায় আৰু $p=\frac{np}{n}$, য'ত np হ'ল প্ৰদত্ত তথ্যৰ মাধ্য।

p ৰ মান উলিওৱাৰ পিছত আমি ওপৰত উল্লেখ কৰা ধৰণে p(0), p(1), ..., p(n) সম্ভৱিতাবোৰ উলিয়াও। এতিয়া এই সম্ভৱিতাবোৰক মুঠ পৰিসংখ্যা N ৰে পূৰণ কৰিলে আমি x = 0, 1, 2, ..., n ৰ বাবে প্ৰত্যাশিত পৰিসংখ্যাবোৰ পাম। এতিয়া আমি দ্বিপদ বণ্টনৰ আসঞ্জন এটা উদাহৰণৰ সহায়ত ব্যাখ্যা কৰিম।

টোকা ঃ প্ৰত্যাশিত পৰিসংখ্যাৰ গণনাকেই আসঞ্জন বোলা হয়।

উদাহৰণ ঃ 3 টা মুদ্ৰা 64 বাৰ নিক্ষেপ কৰি পোৱা মুণ্ডৰ সংখ্যাৰ বণ্টন তলত দিয়া হ'ল—

মুণ্ডৰ সংখ্যা	ঃ	0	1	2	3
পৰিসংখ্যা	ঃ	10	18	20	16

মুদ্ৰাকেইটা অনভিনত (Unbiased) বুলি ধাৰণা কৰি দ্বিপদ বণ্টনটোৰ আসঞ্জন উলিওৱা।

সমাধান ঃ যিহেতু মুদ্ৰাকেইটা অনভিনত

p = q – $\frac{1}{2}$ (যদি মুদ্ৰাকেইটা ভিনত তেন্তে p ৰ মান মাধ্যৰ সহায়ত উলিয়াব লাগিব)

ইয়াত, N = 64, n = 3

এতিয়া $p(0)=q^n=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$

এতিয়া পৌনঃপুনিক সম্বন্ধ ব্যৱহাৰ কৰি পাও— $p(x+1)=\frac{n-x}{x+1}\frac{p}{q}p(x)$

আমি সম্ভৱিতাবোৰ এনেধৰণে পাম—

$p(1)=\frac{3-0}{0+1}\frac{p}{q}p(0)=3.\frac{1}{2^3}=\frac{3}{8}$

$$p(2) = \frac{3-1}{1+1}\frac{p}{q}p(1) = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{8} = \frac{3}{8}$$

$$p(3) = \frac{3-2}{2+1}\frac{p}{q}p(2) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8} = \frac{1}{8}$$

প্রত্যাশিত পৰিসংখ্যাবোৰ হ'ল

x	প্রত্যাশিত পৰিসংখ্যা
0	$n \times p(0) = 64 \times \frac{1}{8} = 8$
1	$n \times p(1) = 64 \times \frac{3}{8} = 24$
2	$n \times p(2) = 64 \times \frac{3}{8} = 24$
3	$n \times p(3) = 64 \times \frac{1}{8} = 8$

১০.৪.৬ দ্বিপদ বণ্টনৰ ধর্ম

(i) দ্বিপদ বণ্টন হ'ল এক বিচ্ছিন্ন বণ্টন য'ত চলক X ৰ মান 0, 1, 2, ..., n হ'ব পাৰে।

(ii) দ্বিপদ বণ্টনৰ প্রাচল (parameters) n আৰু p.

(iii) দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য np আৰু প্রসৰণ npq.

(iv) দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য সদায় প্রসৰণতকৈ ডাঙৰ।

(v) যদি X_1 আৰু X_2 চলক দুটাই দ্বিপদ বণ্টন অনুসৰণ কৰে আৰু ইহঁতৰ প্রাচল ক্রম (n_1, p) আৰু (n_2, p) তেন্তে $x_1 + x_2$ য়েও দ্বিপদ বণ্টন অনুসৰণ কৰে আৰু ইয়াৰ প্রাচল ($n_1 + n_2$, p)। ইয়াক দ্বিপদ বণ্টনৰ যোগৰ ধর্ম বুলি জনা যায়।

(vi) (n. p) প্রাচল যুক্ত দ্বিপদ বণ্টন এটা পইছ' বণ্টন হ'ব যদি n ৰ মান অতি বেছি হয় আৰু p ৰ মান খুব সৰু হয় আৰু np এটা সীমিত ৰাশি হয়।

(vii) দ্বিপদ বণ্টন এটা প্রসামান্য বণ্টন হ'ব যদিহে n ৰ মান যথেষ্ট ডাঙৰ হয়, কিন্তু p বা q কোনোটোৱেই খুব সৰু নহয়।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

1. এটা যাদৃচ্ছিক চলক X য়ে দ্বিপদ বণ্টন অনুসৰণ কৰে যাৰ মাধ্য 5/3 আৰু P(x = 2) = P (x = 1). P(x = কম পক্ষেও 1), P(x = অতি বেছি 1)ৰ বাবে প্রসৰণ নির্ণয়

কৰা।

সমাধান ঃ যদি n আৰু p প্ৰাচল যুক্ত চলক X য়ে দ্বিপদ বণ্টন মানি চলে তেন্তে X ৰ সম্ভাৱিতা ভৰফলন হ'ব

$p(x) = {}^{n}c_{x} p^{x} q^{n-x}$, x = 0, 1, 2, . . . , n; q = 1–p

দিয়া আছে— মাধ্য = np = $\frac{5}{3}$

আৰু P(x = 2) = P(x = 1)

$\Rightarrow {}^{n}c_{2} p^{2} q^{n-2} = {}^{n}c_{1} p\, q^{n-1}$

$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} \frac{p}{q} = n$

$\Rightarrow (n-1)p = 2q$

$\Rightarrow np - p = 2q$

$\Rightarrow \frac{5}{3} - p = 2q$

$\Rightarrow 5 - 3p = 6q$

$\Rightarrow 6q + 3p = 5$

$\Rightarrow 6(1-p) + 3p = 5$

$\Rightarrow 6 - 6p + 3p = 5$

$\Rightarrow -3p = -1$

$\Rightarrow p = 1/3$

$\therefore q = 1 - p = 2/3$

আকৌ $np = \frac{5}{3}$ $\therefore n = \frac{5}{3} \Big/ \frac{1}{3} = 5$

প্ৰসৰণ $= npq = 5.\frac{1}{3}.\frac{2}{3} = \frac{10}{9}$

P(x = কম পক্ষেও 1) = $p(x \geq 1) = 1 - p(x = 0)$ ∵ $p(x = 0) + p(x \geq 1) = 1$

$= 1 - {}^{5}C_{0} \left(1/3\right)\left(2/3\right)^{5} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{5} = \frac{211}{243}$

P(x = অতি বেছি 1) = P(x=0) + p(x=1)

$= {}^{5}C_{0} \left(1/3\right)^{0} \left(2/3\right)^{5} + {}^{5}C_{1} \left(1/3\right)^{1} \left(2/3\right)^{4}$

$= \frac{112}{243}$

2. পৰিসংখ্যা বিষয়ৰ পৰীক্ষা এটাত অনুত্তীর্ণ হোৱাৰ সম্ভৱিতা 15%। 5 জনীয়া 20 টা গোট (batch) পৰীক্ষাত অৱতীর্ণ হয় তেন্তে কেইটা গোটত 3 জন বা তাতকৈ বেছি সংখ্যক ছাত্র উত্তীর্ণ হ'ব।

সমাধান ঃ দিয়া আছে

q = অনুত্তীর্ণৰ সম্ভৱিতা = 15% = 0.15

$\therefore$ q = উত্তীর্ণৰ সম্ভৱিতা = 0.85

n = 5.

যদি X য়ে উত্তীর্ণ হোৱা ছাত্রৰ সংখ্যা বুজায় তেন্তে

$p(x)={}^{n}C_{x}p^{x}q^{n-x}$, x = 0, 1, . . ., 5.

আমাক নির্ণয় কৰিব লাগে— $p(x\geq 3)=p(x=3)+p(x=4)+p(x=5)$

$={}^{5}C_{3}p^{3}q^{5-3}+{}^{5}C_{4}p^{4}q^{5-4}+{}^{5}C_{5}p^{5}q^{0}$

$= 10x\ (.85)^3\ (.15)^2 + 5(0.5)^4\ (0.15) + (0.15)^5$

$= 0.1381 + 0.3915 + 0.4437$

$= 0.9733.$

$\therefore$ নির্ণেয় গোটৰ সংখ্যা য'ত 3 বা ততোধিক জন ছাত্র উত্তীর্ণ হ'ব

$= 20 \times 0.9733$

$= 19.468 \approx 19.$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ২ঃ যদি $X \sim B\left(12, \frac{1}{3}\right)$ তেন্তে E(x)? কিমান হ'ব?

প্রশ্ন নং ৩ঃ তলৰ উক্তিটো পৰীক্ষা কৰা আৰু তোমাৰ মন্তব্য আগবঢ়োৱা— 'এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য 5 আৰু প্রামাণিক বিচলন 3'

প্রশ্ন নং ৪ঃ দ্বিপদ বণ্টনৰ প্রাচল কেইটা কি?

প্রশ্ন নং ৫ঃ $p(x)={}^{10}C_{x}\left(\frac{2}{5}\right)^{x}\left(\frac{3}{5}\right)^{10-x}$, x = 0, 1, 2, . . ., 10. দ্বিপদ বণ্টনটোৰ প্রসৰণ উলিওৱা।

প্রশ্ন নং ৬ঃ বাৰনুলিৰ অভিপ্রয়োগৰ সংজ্ঞা দিয়া।

প্রশ্ন নং ৭ঃ দ্বিপদ বণ্টনৰ ব্যুৎপত্তি কৰা।

অথবা

স্বতন্ত্র বাৰনুলি অভিপ্রয়োগৰ x টা সফলতাৰ সম্ভৱিতা উলিওৱা

১০.৫ পইছ' পদ্ধতি

ফৰাছী গণিতজ্ঞ আৰু পদার্থ বিজ্ঞানী চেৰিয়ন ডেভিচ পইছ'ই প্ৰথমে পইছ' পদ্ধতি উদ্ভাৱন কৰে। 1837 চনত তেওঁ ইয়াক প্ৰকাশ কৰিছিল। প্ৰাকৃতিক আৰু বাস্তৱ পৰিঘটনাসমূহত বহুল ব্যৱহাৰ হোৱা হেতুকে একক চলক যুক্ত বণ্টনসমূহৰ ভিতৰত সম্ভৱত ই আটাইতকৈ বেছি ব্যৱহৃত হয়। উদাহৰণস্বৰূপে এখন বিভিন্ন থকা ডাঙৰ দোকানৰ সুবিধা বিচৰা, কোনো নিৰ্দিষ্ট ঘাইপথত প্ৰতিদিনে ঘটা দুৰ্ঘটনাৰ হাৰ ইত্যাদি। পইছ' বণ্টনৰ এক বিশেষ গুণগত ব্যৱহাৰ হ'ল কোনো নিৰ্দিষ্ট সামগ্ৰীৰ বাবে গ্ৰাহকে পাতবলগীয়া শাৰীৰ সমস্যা, য'ত কোনো নিৰ্দিষ্ট সময়ৰ অন্তৰালত গ্ৰাহকৰ আগমনৰ পৰিসংখ্যা আৰু য'ত কোনো নিৰ্দিষ্ট সময়ৰ অন্তৰালৰ ব্যৱধানত আগমন কৰা গ্ৰাহকৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা হয়।

১০.৫.১ দ্বিপদ বণ্টনৰ চৰম আচৰণ হিচাবে পইছ' বণ্টন

বিৰল পৰিঘটনাৰ ক্ষেত্ৰত দ্বিপদ সম্ভৱিতাৰ নিয়মেই হ'ল পইছ' সম্ভৱিতাৰ আৱম্ভণি অৰ্থাৎ তলত উল্লেখ কৰা চৰ্তসমূহৰ ভিত্তিত দ্বিপদ বণ্টনৰ চৰম ক্ষেত্ৰ হিচাবে পইছ' বণ্টনৰ ব্যুৎপত্তি নিৰূপণ কৰিব পাৰি।

(i) স্বতন্ত্ৰ বাৰনুলি অভিপ্ৰয়োগ সংখ্যা n ৰ মান যথেষ্ট ডাঙৰ হ'ব লাগিব। অৰ্থাৎ $n \to \infty$

(ii) p, প্ৰতিটো অভিপ্ৰয়োগতে সফলতা পোৱাৰ সম্ভৱিতা খুব কম হ'ব লাগিব। অৰ্থাৎ $p \to \infty$

(iii) np = λ (ধৰা হ'ল) সসীম হ'ব লাগিব য'ত λ এটা ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা। উক্ত চৰ্তসমূহৰ ভিত্তিত আমি পইছ বণ্টনৰ সম্ভৱিতা ভল ফলন উলিয়াব পাৰো।

ধৰা হ'ল পইছ' বণ্টনৰ সম্ভৱিতা ভৰ ফলন

$$p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, n; \qquad q = 1 - p.$$

এতিয়া, $$\lim_{n \to \infty} p(x) = \lim_{n \to \infty} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \quad \because np = \lambda$$

$$= \frac{\lambda^x}{n!} \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{(n-x)! n^x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{n!} \lim_{n \to \infty} \frac{n!}{(n-x)! n^x} \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n} \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}$$

$$= \frac{\lambda^x}{n!} \lim_{n \to \infty} \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-\overline{x-1})(n-x)!}{(n-x)!\, n^x} \because e^{-\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^x}{n!} \lim_{n \to \infty} \frac{n^x \left\{1.\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\right.}{n^x}, e^{-\lambda}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \qquad \because \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \to 0$$

এইটোৱেই পইছ' বণ্টনৰ সম্ভৱিতা ভৰ ফলন। তলত পইছ' বণ্টনৰ প্ৰচলিত সংজ্ঞা দিয়া হ'ল।

সংজ্ঞা ঃ

এটা বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক X ক পইছ' বণ্টনত থকা বুলি কোৱা হয় যদিহে ই অঋণাত্মক মানবোৰ ধাৰণা কৰে আৰু ইয়াৰ সম্ভৱিতা ভৰ ফলন (Probability mass function) তলত দিয়া ধৰণৰ হয়।

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} \quad , x = 0, 1, 2, \ldots, \lambda$$

$$= 0, \text{ অন্যথা}$$

এইটো বণ্টনৰ ক্ষেত্ৰত λ য়েই হ'ল একমাত্ৰ প্ৰাচল।

১০.৫.২ পইছ' বণ্টনৰ ঘূৰ্ণক

পইছ' বণ্টনৰ সমান্তৰ মাধ্য হ'ল

$$\mu_1' = E(x) = \sum_x x\, p(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\alpha} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda \sum_{x=1}^{\alpha} \frac{x\, \lambda^{x-1}}{x(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda}.\lambda \sum_{x=1}^{\alpha} \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda}.\lambda \left[1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots\right]$$

$$= e^{-\lambda}.\lambda.e^{\lambda}$$

$$= \lambda .$$

$\therefore$ পইছ' বণ্টনৰ মাধ্য λ.

$\mu_2^{/} = E(x^2) = E\{x(x-1)\} + E(x)$

এতিয়া $= E\{x(x-1)\} = \sum_x x(x-1)p(x)$

$$= \sum_{x=0}^{\alpha} x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

সূচকীয় বিস্তৃতি

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{x=2}^{\alpha} x(x-1)\frac{\lambda^{x-2}}{x.(x-1)(x-2)!}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda^2 \sum_{x=2}^{\alpha} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda^2 \left[1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\right]$$

$$= e^{-\lambda}\lambda^2 . e^{\lambda}$$

$$= \lambda^2$$

$\therefore \; E(\lambda^2) = \lambda^2 + \lambda$

এতিয়া $v(x) = \mu_2 = \mu_2^{/} - \mu_1^{/2}$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$= \lambda .$$

গতিকে পইছ' বণ্টনৰ প্ৰসৰণও λ ।

মন্তব্য ঃ পইছ' বণ্টনেই একমাত্ৰ বিচ্ছিন্ন বণ্টন য'ত মাধ্য আৰু প্ৰসৰণ সমান।

১০.৫.৩ঘূৰ্ণক উৎপাদিকা ফলন

পইছ' বণ্টনৰ ঘূৰ্ণক জনক হ'ব

$$Mx(t) = E(e^{tx}) = \sum_{x=0}^{\alpha} e^{tx} . \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\alpha} \frac{\left(e^t \lambda\right)^2}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\left[1 + e^t\lambda + \frac{(e^t\lambda)^2}{2!} + \frac{(e^t\lambda)^3}{3!} + \ldots\right]$$

$$= e^{-\lambda}\, e^{e^t\lambda}$$

$$= e^{-\lambda}(1 - e^t)$$

১০.৫.৪ পইছ' বণ্টনৰ ধর্ম

পইছ' বণ্টনৰ পৌনঃপ্রণিক সম্বন্ধটো হ'ল

$$p(x+1) = \frac{\lambda}{x+1}\, p(x), \quad x = 0, 1, 2, \ldots\ldots \qquad (1)$$

(1) ত x = 0, 1, 2, ... , বহুবাই আমি p(1), p(2), ... , ইত্যাদি সম্ভাৱিতাবোৰ পাম। গতিকে আমি কেৱল p(0) গণনা কৰিব লাগিব।

$$p(0) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}.$$

য'ত λ হ'ল পইছ' বণ্টনৰ মাধ্য যিটো প্রদত্ত তথ্যখিনি আসঞ্জিত কৰি পোৱা যায়।

মুঠৰ ওপৰত প্রত্যাশিত বাৰংবাৰতাবোৰ গণনা কৰিবলৈ যথাক্রমত থকা সম্ভৱিতাৰ মানটোক Nৰে পূৱণ কৰি পোৱা যাব। য'ত n হ'ল তথ্যখিনিৰ মুঠ বাৰংবাৰতা। আমি প্রদত্ত তথ্যৰ পইছ' বণ্টনৰ আসঞ্জনৰ উদাহৱণৰ সহায়ত বর্ণনা কৰিম।

উদাহৱণ ঃ 200 জন গাড়ী চালকে সংঘটিত কৰা দূর্ঘটনাৰ তথ্য তলত দিয়া ধৱণৰ—

দূর্ঘটনা ঃ	0	1	2	3	4
গাড়ীচালকৰ সংখ্যা ঃ	122	60	15	2	1

এই তথ্যখিনিৰ তাত্বিক বণ্টনৰ সহায়ত আসঞ্জিত কৰা।

সমাধান ঃ ইয়াত যথোপযুক্ত আসঞ্জনৰ বাবে পইছ' বণ্টনেই সুবিধাজনকভাৱে ল'ব পৰা যায়।

ধৰা হ'ল x_i = দুর্ঘটনাৰ সংখ্যা

f_i = গাড়ীচালকৰ সংখ্যা

মুঠ গাড়ীচালকৰ সংখ্যা = N = 200

ইয়াত, λ = পইছ' বণ্টনৰ মাধ্য

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i x_i$$

$$= \frac{100}{200} = 0.5$$

$\therefore\ p(0) = e^{-0.5} = 0.60653$

পৌনঃপুনিক সম্বন্ধ ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ

$$p(1) = \frac{\lambda}{0+1}\,p(0) = \lambda.p(0) = 0.5 \times 0.60653 = 0.30327$$

$$p(2) = \frac{\lambda}{2}\,p(1) = \frac{0.5}{2} \times 0.60653 = 0.07582$$

$$p(3) = \frac{\lambda}{3}\,p(2) = \frac{0.5}{3} \times 0.60653 = 0.01264$$

$$p(4) = \frac{\lambda}{4}\,p(3) = \frac{0.5}{4} \times 0.60653 = 0.00158$$

$\therefore$ প্ৰত্যাশিত পৰিসংখ্যাবোৰ হ'ব

f(0) = N x p(0) = 200 x 0.60653 = 121.306 $\approx$ 121

f(1) = N x p(1) = 200 x 0.30327 = 60.654 $\approx$ 61

f(2) = N x p(2) = 200 x 0.07582 = 15.164 $\approx$ 15

f(3) = N x p(3) = 200 x 0.01264 = 2.528 $\approx$ 3

f(4) = N x p(4) = 200 x 0.00158 = 0.316 $\approx$ 0

মুঠ পৰিসংখ্যা = 200

১০.৫.৫ পইছ' বণ্টনৰ ধৰ্ম

(i) পইছ' বণ্টন হ'ল এট যাদৃচ্ছিক বণ্টন য'ত যাদৃচ্ছিক চলক X য়ে 0, 1, 2, ... , λ মানবোৰ লয়।

(ii) পইছ' বণ্টনৰ মাত্ৰ এটা প্ৰাচল থাকে আৰু ই λ ।

(iii) পইছ' বণ্টনৰ মাধ্য আৰু প্ৰসৰণ সমান আৰু ইহঁতৰ প্ৰতিটোৰ মান λ ।

(iv) পইছ' বণ্টনৰ মাত্ৰ এটা বা দুটা মধ্যমা থাকে।

(v) পইছ' বণ্টনৰ চৰম ক্ষেত্ৰ হিচাবে পইছ' বণ্টন পোৱা যায়।

(vi) যদি X আৰু Y দুটা স্বতন্ত্ৰ পইছ' চলক আৰু ইহঁতৰ প্ৰাচল ক্ৰমে λ_1 আৰু λ_2 তেন্তে x + y ও এটা পইছ' বণ্টন হয় যাৰ প্ৰাচল $\lambda_1 + \lambda_2$ ।

১০.৫.৬ পইছ' বণ্টনৰ ব্যৱহাৰ

দৈনন্দিন জীৱনৰ ভৌতিক পৰিস্থিতিবোৰ য'ত পইছ' বণ্টনৰ ব্যৱহাৰ হয় সেইবোৰ হ'ল—

(i) এটা নিৰ্দিষ্ট চুইছ বৰ্ডত গ্ৰহণ কৰা টেলিফোন কলৰ সংখ্যা।

(ii) একক সময়ত এখন চহৰত ঘটা দুৰ্ঘটনাৰ সংখ্যা।

(iii) একক সময়ত কোনো এটা উদ্যোগত উৎপাদিত হোৱা ত্রুটিপূর্ণ যন্ত্রাংশৰ সংখ্যা।

(iv) এখন কিতাপৰ প্রতিটো পৃষ্ঠাত হোৱা ভুল মুদ্রনৰ সংখ্যা।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1 : পইছ' বণ্টন এটাৰ মাধ্য আৰু প্রসৰণ নির্ণয় কৰা যাতে P(x = 2) = P(x = 1.

সমাধান ঃ যদি X চলকে পইছ' বণ্টন মানি চলে যাৰ প্রাচল λ ।

তেন্তে $p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, x = 0, 1, 2, ...

এতিয়া, p (x = 2) = p (x = 1)

$$\Rightarrow \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} = \frac{e^{-\lambda}.\lambda}{1!}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \lambda = 2$$

$\therefore$ পইছ' বণ্টনটোৰ মাধ্য আৰু প্রসৰণ হ'ব $\lambda = 2$ ।

উদাহৰণ 2 : প্রতিটো পৰীক্ষাত ধৰা পৰা টিকটবিহীন যাত্রীৰ সংখ্যাই মাধ্য 10 সহ পইছ' বণ্টন অনুসৰণ কৰে। দুজন টিকটবিহীন যাত্রী পোৱাৰ সম্ভৱিতা উলিওৱা।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল X পৰীক্ষাত ধৰা পৰা টিকটবিহীন যাত্রী সংখ্যা X ।

গতিকে X এ মাধ্য 10 সাপেক্ষে পইছ' বণ্টন অনুসৰণ কৰে। অর্থাৎ $\lambda = 10$

$\therefore p(x) = \frac{e^{-10}\ 10^x}{x!}$, x = 0, 1, 2, ...

$\therefore$ P (পৰীক্ষাত দুজন টিকটবিহীন যাত্রী পোৱাৰ সম্ভাৱিতা)

= P(x = 2)

$$= \frac{e^{-10}\ 10^2}{2!}$$

= 0.0025.

উদাহৰণ 3 ঃ এশটা পৃষ্ঠা থকা এখন কিতাপৰ এশটা ভুল মুদ্রন যাদৃচ্ছিকভাৱে সিঁচৰিত হৈ আছে। সম্ভৱিতাৰ কোনটো নমুনাৰ দ্বাৰা এই তথ্যখিনিৰ যথার্থভাৱে বর্ণনা কৰিব পৰা যাব? এই নমুনাৰ ক্ষেত্রত এটা যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা পৃষ্ঠাত অতি কমেও তিনিটা ভুল মুদ্রন পোৱাৰ সম্ভৱিতা কিমান?

সমাধান ঃ যিহেতু এশটা ভুল মুদ্রন এশ পৃষ্ঠাৰ কিতাপখনত যাদৃচ্ছিকভাৱে সিঁচৰিত হৈ

আছে। গতিকে এটা ভুল মুদ্রণ পোৱাৰ সম্ভৱিতা হ'ব—

$p = \frac{1}{100} = 0.01$, এটা যথেষ্ট সৰু সংখ্যা

n = পৃষ্ঠাৰ সংখ্যা = 100, এটা যথেষ্ট ডাঙৰ সংখ্যা

গতিকে পইছ' বণ্টনেই এই নমুনাটোৰ যথাযথ সম্ভৱিতা বণ্টন হ'ব।

ইয়াত $\lambda = np = 0.01 \times 100 = 1$

∴ এটা পৃষ্ঠাত অতি কমেও তিনিটা ভুল মুদ্রন পোৱাৰ সম্ভৱিতা হ'ব।

$$P(x \geq 3) = 1 - p(x < 3) = 1 - \{P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)\}$$

$$= 1 - \left\{e^{-1} + e^{-1} + \frac{e^{-1}}{2!}\right\}$$

$$= 1 - 2.5e^{-1}$$

$$= 1 - 2.5 \times 0.3679$$

$$= 0.0802 \cdot$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৮ঃ খালী ঠাই পূৰ কৰা ঃ

(i) এটা পইছ' বণ্টনৰ মাধ্য ইয়াৰ প্রসৰণতকৈ ..... (কম/সমান/বেছি)

(ii) পইছ' বণ্টনৰ মাধ্য 4, ইয়াৰ মানক বিচলণ ..... (4/2).

(iii) $\frac{e^{-1.5}(1.5)^x}{x!}$, x = 0, 1, 2, ... পইছ' বণ্টনটোৰ প্রসৰণ.....। (1.5/2.5).

(iv) যদি x এ পইছ' বণ্টন মানি চলে তেন্তে ..... $e^{-\lambda(1-e^t)} / e^{-\lambda}(1-2)^t$

(v) যদি x_i, i = 1, 2, ... , n, n টা পইছ' চলক তেন্তে $\sum_{i=1}^{n} x_i$ ৰ বণ্টনো ..... (দ্বিপদ/পইছ') চলক।

প্রশ্ন নং ৯ঃ 'পইছ' বণ্টনক বিৰল পৰিঘটনাৰ বণ্টন বুলিও জনা যায়।'— ব্যাখ্যা কৰা।

প্রশ্ন নং ১০ঃ কেইটা মান পইছ' বণ্টনৰ উদাহৰণ দিয়া।



১০.৬ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- এটা ফলন যাক ঘূর্ণক নির্ণয়ত ব্যৱহাৰ কৰা হয় তাকেই ঘূর্ণক জনক ফলন বোলে।
- ঘূর্ণক জনক ফলনৰ গুৰুত্ব হ'ল যে ঘূর্ণকৰ জৰিয়তে সম্ভৱিতা বণ্টন সম্পূর্ণ নির্ণয় কৰিব পাৰি।
- এটা যাদৃচ্ছিক চলক X ৰ ঘূর্ণক জনক হ'ল $M_x(t) = E(e^{tx})$, $t > 0$.
- এটা যাদৃচ্ছিক সম্পৰীক্ষা যাৰ ফলাফলবোৰ সফলতা আৰু বিফলতা এই দুই শ্রেণীত ভগোৱা হয় তাক বাৰনুলি অভিপ্রয়োগ বোলে।
- দ্বিপদ বণ্টনৰ সম্ভৱিতা ভৰ ফলন য'ত প্রাচলকেইটা n আৰু p হ'ল—

  $p(x)={}^nC_x p^x q^{n-x}$, x = 0, 1, 2, . . ., n.
- এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য np আৰু প্রসৰণ npq।
- দ্বিপদ বণ্টনৰ ক্ষেত্রত মাধ্য সদায় প্রসৰণতকৈ বেছি হয়।
- দুটা স্বতন্ত্র দ্বিপদ চলকৰ যোগফলো এটা দ্বিপদ চলক।
- দ্বিপদ বণ্টনৰ চৰম ক্ষেত্র হিচাপে পইছ' বণ্টনৰ ব্যুৎপত্তি পোৱা যায় যেতিয়া $n \to \infty$, $p \to o$ আৰু $np \to \lambda$ (ধৰা হ'ল)।
- পইছ' বণ্টনৰ প্রাচল λ হ'লে ইয়াৰ সম্ভাৱিতা ভৰ ফলন হ'ব— $p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$,

  x = 0, 1, 2, ... , λ.
- অবিচ্ছিন্ন অন্তৰালত যাদৃচ্ছিক পৰিঘটনা বর্ণনাক ক্ষেত্রত পইছ বণ্টনে গুৰুত্বপূর্ণ ভূমিকা গ্রহণ কৰে। উদাহৰণস্বৰূপে কোনো দুৰভাষ বিনিময় কেন্দ্রত এক নির্দিষ্ট সময়ত বিনিময় হোৱা দুৰভাষৰ সংখ্যা।
- কিছুমান পইছ' চলকৰ যোগফল এটা পইছ' চলক।



১০.৭ অধিক জানিবলৈ

১) Das, K. K, Bhattacharjee, D (2008). A Treatere on statistical Inference and Distributions. Asian Books Pvt. Ltd.

২) Gupta, S. C. and Kapoor, V. K. (2002). Fundementals of Mathematical statistics; Sultan Chand & Sons.

৩) Goon, A. M. Gupta. M. P and Dasgupta, B (2002). Fundementals of statistics (Vol I), Seventh Revised Edition; The World Press Pvt. Ltd. Kolkata.

৪) Saxena, H. C. (1994). Probability and its application, sixth edition; S. Chand and Company, New Delhi.

৫) Singh, R (2012). An Introduction to Probability and Probability Distributions, Books and Ellied (P) Ltd.

১০.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) সত্য, (ii) অসত্য, (iii) অসত্য, (iv) সত্য।

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ আমি জানো যে যদি X ~ B (n, p) তেন্তে E(x) = np.

ইয়াত n = 12, $p = \frac{1}{3}$

$\therefore E(x) = np = 12.\frac{1}{3} = 4$

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত দিয়া আছে মাধ্য = 5, s. d. = 3

$\therefore$ প্রসৰণ = 9

কিন্তু দ্বিপদ বণ্টনৰ ক্ষেত্রত আমি জানো যে মাধ্য সদায় প্রসৰণতকৈ বেছি।

এতেকে প্রদত্ত উক্তিটো অসত্য।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ দ্বিপদ বণ্টনৰ প্রাচলকেইটা হ'ল n আৰু p.

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে $p(x) = {}^{10}C_x \left(\frac{2}{5}\right)^x \left(\frac{3}{5}\right)^{10-x}$, x = 0, 1, 2, ... , 10.

ইয়াত n = 10, $p = \frac{2}{5}, \quad q = \frac{3}{5}$

গতিকে প্রসৰণ = $npq = 10.\frac{2}{5}.\frac{3}{5} = \frac{12}{5}$

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এটা বিশেষ অভিপ্রয়োগ যাৰ দুটা মাত্র ফলাফল থাকে অর্থাৎ সফলতা আৰু বিফলতা যাৰ সম্ভৱিতা ক্রমে p আৰু (1–p), এই অভিপ্রয়োগক বাৰনুলি অভিপ্রয়োগ বোলা হয়। যেনে— এটা মুদ্রাৰ নিক্ষেপণ।

এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ বাৰনুলি বণ্টন মানি চলা বুলি কোৱা হয় যদিহে ইয়াৰ সম্ভৱিতা ভৰ ফলন হয়,

$p(x) = p^x(1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$.

এই বণ্টনটোত P য়ে একমাত্ৰ প্ৰাচল।

$\therefore$ মাধ্য = E(x) = 0. (1–p) + 1 . p = p.

$V(x) = E(x^2) - \{E(x)^2\}$.

$E(x^2) = 0^2 . (x-p) + 1^2 . p = p$

$\therefore V(x) = p - p^2 = p(1-p)$.

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ n টা স্বতন্ত্ৰ বাৰনুলি অভিপ্ৰয়োগ য'ত প্ৰতিটো অভিপ্ৰয়োগৰ দুটা ফলাফল থাকে— সফলতা আৰু বিফলতা, সফলতাৰ সম্ভৱিতা p আৰু বিফলতাৰ (1 – p) = q. এটা নিৰ্দিষ্ট ক্ৰমত n টা স্বতন্ত্ৰ অভিপ্ৰয়োগৰ x টাত সফলতা আৰু (n–x) টাত বিফলতা এনেধৰণে ধৰা হওক যে s s s... f.f.f.

P (s. s. . . . s. f . f. . . . f) = p(s) p(s) s . . . p(s) p(f) . . . p(f)

$\because$ যিহেতু অভিপ্ৰয়োগকেইটা স্বতন্ত্ৰ

= p . p . . . p q q . . . q

x সংখ্যক (n-x) সংখ্যক

$= p^x q^{n-x}$.

কিন্তু, x অভিপ্ৰয়োগৰ পৰা n বাৰ সফলতা ${}^nC_x$ ..... পৰস্পৰান্তৰ (mutually exclusive) ধৰণে পাব পাৰি য'ত প্ৰতিটো অভিপ্ৰয়োগৰ সম্ভৱিতা $p^x q^{n-x}$ । গতিকে সম্ভৱিতাৰ যোগাত্মক নীতিৰ পৰা পাওঁ

$p(x=x) = {}^nC_x\, p^x q^{n-x}$, x = 0, 1, 2, . . ., n.

৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) সমান, (ii) 2, (iii) 1.5, (iv) $e^{-\lambda(1-e^t)}$

(v) পইছ'

৯ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ পইছ' বণ্টনক বিৰল পৰিঘটনাৰ সম্ভৱিতা বণ্টন বুলিও জনা যায়। কাৰণ পইছ' বণ্টন হ'ল ধনাত্মকভাৱে অপ্ৰতিসম। অৰ্থাৎ বৃহৎ সংখ্যক সংঘটনৰ ক্ষেত্ৰত সম্ভৱিতা হোৱাৰ প্ৰৱণতা দেখুৱায়। সেইবাবে পইছ' বণ্টনক বিৰল পৰিঘটনাৰ সম্ভৱিতা বণ্টন বুলিও কোৱা হয়।

১০ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ পইছ' বণ্টনৰ কেইটামান উদাহৰণ হ'ল ঃ

(i) কোনো এখন নিৰ্দিষ্ট চহৰত ঘটা আত্মহত্যাৰ সংখ্যা।

(ii) বৃহৎ পৰিমাণৰ উৎপাদিত সামগ্ৰীখিনিৰ ভিতৰত ত্ৰুটিপূৰ্ণ সামগ্ৰীৰ সংখ্যা।

(iii) কোনো এখন কিতাপৰ প্ৰতিটো পৃষ্ঠাত ঘটা ভুল মুদ্ৰণৰ সংখ্যা।



১০.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ঃ ঘূৰ্ণক জনক ফলনৰ সংজ্ঞা দিয়া আৰু ইয়াৰ ধৰ্মবোৰ উল্লেখ কৰা।

প্ৰশ্ন ২ঃ দ্বিপদ বণ্টনৰ বিষয়ে এটা টোকা লিখা।

প্ৰশ্ন ৩ঃ দ্বিপদ বণ্টনৰ সংজ্ঞা দিয়া আৰু ইয়াৰ মাধ্য আৰু প্ৰসৰণ নিৰ্ণয় কৰা।

প্ৰশ্ন ৪ঃ দ্বিপদ বণ্টনৰ চৰম আচৰণ হিচাপে পইছ' বণ্টন নিৰ্ণয় কৰা।

প্ৰশ্ন ৫ঃ যদি X চলকে পইছ' বণ্টন মানি চলে যাৰ $V(\lambda) = 2$, ইয়াৰ সম্ভৱিতা ভৰ ফলন উলিওৱা।

প্ৰশ্ন ৬ঃ পইছ' বণ্টনৰ সংজ্ঞা দিয়া কি চৰ্ত সাপেক্ষে দ্বিপদ সম্ভৱিতা ভৰ ফলন পইছ' সম্ভৱিতা ভৰ ফলনৰ দ্বাৰা আসন্নতা কৰিব পাৰি?

প্ৰশ্ন ৭ঃ পইছ' বণ্টনৰ ঘূৰ্ণক জনক ফলন উলিওৱা আৰু ইয়াৰ পৰা মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা।

*** ***** ***

অধ্যায় ১১ ঃ সূচকাংক (INDEX NUMBERS)

অধ্যায় গাঁথনি

১১.১ উদ্দেশ্য

১১.২ পৰিচয়

১১.৩ সূচকাংকৰ ব্যৱহাৰ

১১.৪ সৰল সূচকাংকৰ প্ৰকাৰ

১১.৫ আপেক্ষিকৰ ধৰ্মসমূহ

১১.৬ সৰল সূচকাংক গঠন

১১.৭ ভাৰিত সূচকাংক গঠন

১১.৮ সূচকাংকৰ পৰ্যাপ্তিৰ পৰীক্ষা

১১.৯ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১১.১০ অধিক জানিবলৈ

১১.১১ অগ্ৰতিৰ খতিয়ান

১১.১২ আৰ্হি প্ৰশ্ন

১১.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি —

- সৰল আৰু ভাৰিত সূচকাংক সম্পৰ্কে আলোচনা কৰিব পাৰিব
- সূচকাংকৰ ব্যৱহাৰ ব্যাখ্যা কৰিব পাৰিব
- সূচকাংকৰ বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ সম্পৰ্কে আলোচনা কৰিব পাৰিব
- ভিন্ ভিন্ সূচকাংকৰ ধৰ্ম ব্যাখ্যা কৰিব পাৰিব
- সূচকাংকৰ নিৰ্ভুলতা পৰীক্ষা কৰি দেখুৱাব পাৰিব

১১.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

সূচকাংক হ'ল এক পৰিসাংখ্যিকীয় কৌশল (মাপ) যাৰ উদ্দেশ্য হৈছে দুটা নিৰ্দিষ্ট সময়ৰ (ধৰক 1991 আৰু 1996), বা দুখন মহানগৰৰ নিচিনা ঠাইৰ (ধৰক, দিল্লী আৰু মুম্বাই) বা দুখন দেশৰ (ধৰক, ভাৰত আৰু জাপান) মাজত কোনো এটা চলকৰ বা পৰস্পৰ সম্পৰ্কযুক্ত কিছুমান চলকৰ গড় পৰিবৰ্তন দেখুৱাই দিয়াটো। উদাহৰণস্বৰূপে ভাৰতৰ দিল্লী, মুম্বাই, কলকাতা আৰু চেন্নাই মহানগৰকেইখনৰ ভিতৰত কোনখন মহানগৰ মূল্যৰ স্তৰ হিচাপত আটাইতকৈ খৰচী বা সস্তীয়া তাক জানিবলৈ আমি আগ্ৰহী হ'ব পাৰো। এজন পৰ্যটকে বিভিন্ন পৰ্যটন ঠাইৰ জীৱন নিৰ্বাহৰ ব্যয় সম্পৰ্কে জানিবৰ কাৰণে আগ্ৰহী হ'ব পাৰে। এনেকুৱা ধৰণৰ সিদ্ধান্ত গ্ৰহণ

কৰাত উপভোক্তা ব্যয় সূচকাংক বা জীৱন নির্বাহৰ ব্যয় সূচকাংকই আমাক সহায় কৰে।

ভিন্ ভিন্ সামগ্ৰীবিলাক ভিন্ ভিন্ এককত প্ৰকাশ কৰা হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে ধান আৰু ঘেহু কিল'গ্ৰামত, কাপোৰ মিটাৰত আৰু গাখীৰ লিটাৰত জোখা হয়, ইত্যাদি। ভিন্ ভিন্ এককত জোখা সামগ্ৰীসমূহৰ সম্পৰ্কত সূচকাংকই কিছুমান গড়মান দিবলৈ চেষ্টা কৰে। তুলনা কৰাৰ কাৰণে আমি আপেক্ষিক পৰিবৰ্তন জানিবলৈ আগ্ৰহী। এই আপেক্ষিক পৰিবৰ্তনবিলাক শতাংশ পদত প্ৰকাশ কৰা হয়।

সূচকাংক হ'ল অর্থনীতিত বিভিন্ন পৰিবৰ্তনৰ দিশ বা প্ৰৱণতাৰ পৰিমাণপক যত্নৰ সূচক (Indicator) স্বৰূপ। মূল্য সূচকাংকই মূল্যৰ অৱস্থান যেনে— মূল্য বাঢ়িছে নে কমিছে আৰু কি হাৰত বাঢ়িছে বা কমিছে তাক আঙুলিয়াই দিয়ে। সেইদৰে কৃষিজাত উৎপাদনৰ সূচকাংকই এটা কাল বা সময়ৰ উৎপাদনৰ পৰিবৰ্তনৰ দিশ যেনে উৎপাদন বাঢ়িছে নে কমিছে আৰু কি হাৰত বাঢ়িছে নে কমিছে বুজাই দিয়ে। সূচকাংক হ'ল এক অর্থনৈতিক তথ্য সংখ্যা যিয়ে এই প্ৰামাণিক বা ভিত্তিমান সাপেক্ষে তুলনামূলক মূল্য বা পৰিমাণ প্ৰতিফলিত কৰে। সাধাৰণতে ভিত্তিমান 100 লোৱা হয় আৰু সূচকাংক সাধাৰণতে ভিত্তিমান সাপেক্ষে মূল্য বা পৰিমাণৰ 100 গুণ হিচাপে প্ৰকাশ কৰা হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, কোনো এক সামগ্ৰীৰ 1970 বৰ্ষৰ মূল্য 1960 বৰ্ষৰ মূল্যৰ দুগুন হ'লে 1960 বৰ্ষ সাপেক্ষে ইয়াৰ মূল্যৰ সূচকাংক 200 হ'ব। সূচকাংকবিলাককক বিশেষকৈ ব্যৱসায় সক্ৰিয়তা, জীৱন নির্বাহৰ ব্যয় আৰু নিযুক্তি তুলনা কৰিবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

সূচকাংক হ'ল এক বিশেষ গড়। আমি সামগ্ৰীবিলাকৰ কাৰণে ব্যয় কৰা আয়ৰ শতাংশ অনুসৰি বা আন নীতি অনুসৰি প্ৰত্যেক সামগ্ৰীৰ ওপৰত সমান গুৰুত্ব আৰোপ কৰো নে, ভিন্ ভিন্ সামগ্ৰীৰ ওপৰত ভিন্ ভিন্ গুৰুত্ব আৰোপ কৰো সেই কথাৰ ওপৰত নির্ভৰ কৰি সূচকাংক সৰল বা ভাৰিত হ'ব পাৰে। আমি এই অধ্যায়ত উভয় সৰল আৰু ভাৰিত সূচকাংকৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

১১.৩ সূচকাংকৰ ব্যৱহাৰ (USE OF INDEX NUMBER)

সূচকাংকবিলাক বিভিন্ন লক্ষ্য আৰু উদ্দেশ্য সাধানৰ কাৰণে গঠন কৰা হয়। গঠন কৰা সূচকাংকবিলাকক অনেক ক্ষেত্ৰত ব্যৱহাৰ কৰা হয়। তাৰে কিছুমান তলত আলোচনা কৰা হৈছে।

১) এবিধ সামগ্ৰী বা সামগ্ৰী সমষ্টিৰ মূল্য স্তৰৰ পৰিবৰ্তনৰ লগত জৰিত সূচকাংক বিলাকহে সচৰাচৰ বেছিকৈ ব্যৱহাৰ কৰা হয়। এনেকুৱা সূচকাংকক মূল্য সূচকাংক বোলে। সামগ্ৰীৰ মূল্য পৰিবৰ্তনৰ দিশ অধ্যয়ন কৰি মূল্য পৰিবৰ্তনৰ কাৰণ বিশ্লেষণ আৰু মূল্যৰ পৰিবৰ্তনে অর্থনীতিত কি প্ৰভাৱ পেলাব পাৰে তাক নির্ণয় কৰাৰ ক্ষেত্ৰত মূল্য সূচকাংকবিলাক ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি। অর্থনৈতিক সম্পৰ্কবিলাক নির্ণয় কৰাৰ কাৰণে এবিধ সামগ্ৰীৰ বজাৰ মূল্যস্তৰৰ পৰিবৰ্তন আন সামগ্ৰী শ্ৰেণী যেনে— সোণ, বেংক জমা, বেংক ঋণ আৰু উৎপাদনৰ বস্তুগত পৰিমাণৰ পৰিবৰ্তনৰ লগত সঘনাই তুলনা কৰাটো প্ৰয়োজন হয়।

২) এটা কাল (সময়)ৰ সামগ্ৰীৰ উৎপাদন, বিপণন, বিক্ৰী, আমদানি আৰু ৰপ্তানি ইত্যাদিৰ বস্তুগত পৰিবৰ্তনৰ সূচকাংকবিলাকৰ গুৰুত্বপূৰ্ণ ব্যৱহাৰ আছে। এটা কালৰ এনেকুৱা সূচকাংকবিলাকক সূচক সময় শ্ৰেণী (Index time series) বোলে। এইবিলাক সূচাকাংক এটা সময়ৰ উৎপাদন, বিপণন, বিক্ৰী, আমদানি আৰু ৰপ্তানি ইত্যাদিৰ বস্তুগত পৰিবৰ্তনৰ লক্ষণবোৰ অধ্যয়ন কৰাত খুব বেছিকৈ ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

৩) সামগ্ৰীৰ চাহিদা বা উৎপাদনৰ পৰিমাণ ইত্যাদিৰ ভৱিষ্যৎ প্ৰৱণতা সম্পৰ্কে পূৰ্বানুমান (forecasting) কৰা বিষয়ত সূচকাংক ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি। শিল্পজাত আৰু কৃষিজাত উৎপাদনৰ সূচকাংক বিলাকে অকল প্ৰৱণতাকে প্ৰতিফলিত নকৰে, উৎপাদনৰ পূৰ্বানুমান কৰাৰ ক্ষেত্ৰত ও সহায় কৰে। সংস্থানহীনতাৰ (Unemployment) সূচকাংকই সংস্থানহীনতাৰ প্ৰৱণতা প্ৰতিফলিত কৰাৰ লগতে সংস্থানহীনতাৰ কাৰক নিৰ্ণয় আৰু ভৱিষ্যৎ প্ৰৱণতাৰ পূৰ্বানুমান কৰাত উপযোগী ভূমিকা পালন কৰে।

৪) জীৱন নিৰ্বাহৰ ব্যয় পৰিবৰ্তনৰ ক্ষতিপূৰণ হিচাপে দিবলগীয়া অতিৰিক্ত মজুৰি বা মৰগীয়া বানচৰ পৰিমাণ নিৰ্ধাৰণ কৰা বিষয়ত সাধাৰণ মূল্যস্তৰ প্ৰতিফলিত কৰা সূচকাংক আৰু বিশেষকৈ জীৱন নিৰ্বাহৰ ব্যয় সূচকাংক বিলাক উপযোগী হয়। ভাৰত চৰকাৰ আৰু প্ৰায়বিলাক ৰাজ্য চৰকাৰৰ হাতত কৰ্মচাৰীক মৰগীয়া বানচ প্ৰদান কৰাৰ কাৰণে সূচকাংক সংযোগী সূত্ৰবিলাক (Index linked formulae) আছে।

৫) উপভোক্তাৰ ব্যয় সূচকাংকৰ পাৰ্থক্যৰ সহায়ত এটা সময়ৰ প্ৰকৃত আয় নিৰূপণ কৰিব পাৰি। ধৰি লওঁক যে, এজন মানুহৰ 1980 বৰ্ষৰ আয় 1970 বৰ্ষৰ আয়ৰ 150 গুণ আছিল। গতিকে এই ক্ষেত্ৰত আয়ৰ বৃদ্ধি হয় 50% । ধৰি লওঁক যে 1980 জীৱন নিৰ্বাহৰ ব্যয় সূচকাংক 1970 বৰ্ষৰ ব্যয় সূচকাংকৰ 175 গুণ আছিল। গতিকে ব্যয়ৰ বৃদ্ধি হয় 75%। তেতিয়াহ'লে মানুহজনৰ 1980 বৰ্ষৰ প্ৰকৃত আয়, 1970 বৰ্ষৰ আয়ৰ $\frac{150}{175}\times 100 = 85.7\%$ । এতেকে সূচকাংকবিলাক প্ৰকৃত আয় নিৰূপণ কৰাৰ কাৰণে উপযোগী।

১১.৪ সৰল সূচকাংক প্ৰকাৰ (TYPES OF SIMPLE INDEX NUMBERS)

১। মূল্য আপেক্ষিক (Price Relatives) ঃ

আটাইতকৈ সৰল প্ৰকাৰৰ সূচকাংকবিলাকৰ ভিতৰত মূল্য আপেক্ষিক অন্যতম। মূল্য আপেক্ষিক হ'ল কোনো এবিধ সামগ্ৰীৰ এক নিৰ্দিষ্ট কাল বা মুহূৰ্তৰ মূল্য আৰু আন এক কাল বা মুহূৰ্তৰ (যাক ভিত্তি কাল বুলি কোৱা হয়) অনুপাত। যদি এটা মুহূৰ্তৰ পৰিবৰ্তে এটা কালৰ মূল্যবিলাক বিবেচনা কৰা হয়, তেন্তে সেইকালৰ বাবে উপযুক্ত গড় মূল্য লোৱা হয় আৰু এই মূল্যবিলাক একে এককত প্ৰকাশ কৰা হয়। যদি এটা সামগ্ৰীৰ ভিত্তিকাল বা প্ৰাসংগিক কাল (0)ৰ মূল্যক p_0 আৰু নিৰ্দিষ্ট কাল (1)ৰ মূল্যক p_1ৰে সূচিত কৰা হয়, ভিত্তি কাল 0 সাপেক্ষে

নির্দিষ্ট কাল 1ৰ মূল্য আপেক্ষিকৰ সংজ্ঞা হ'ব ঃ

শতাংশত মূল্য আপেক্ষিক (ভিত্তিকাল 0 সাপেক্ষে কাল 1ৰ) $= \frac{p_1}{p_0} \times 100$ - - - (7.1)

শতাংশত হ'লে বা নহ'লেও মূল্য আপেক্ষিকক আমি $p_{0/1}$ৰে সূচিত কৰো।

মন্তব্য ঃ কেৱল বেছি ভালকৈ অর্থ প্রকাশ কৰা ৰাশি পাবৰ কাৰণে আমি মূল্য আপেক্ষিকৰ সূত্রটোত $\frac{p_1}{p_0}$ক 100ৰে পূৰণ কৰো। সেই কাৰণে এই প্রকাশ ৰাশিটোক শতাংশত মূল্য আপেক্ষিক বোলে।

উদাহৰণ - ১

উৎকৃষ্টমান বিশিষ্ট চাউলৰ খুচুৰা মূল্য 1980 চনত 3.75 টকা আৰু 1983 চনত 4.50 টকা হ'লে মূল্য আপেক্ষিক নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ

ইয়াত ভিত্তিবর্ষ হ'ল 1980 ভিত্তিবর্ষত মূল্য আছিল 3.75 টকা। আকৌ নির্দিষ্ট সময় 1983 বর্ষত চাউলৰ মূল্য আছিল 4.50 টকা। সূত্র (15.1)ৰ সহায়ত নির্ণেয় মূল্য আপেক্ষিক হ'ব।

$$P_{1980/1983} = \frac{4.75}{3.75} \times 100 = 120\,\%$$

উদাহৰণ - ২

মার্কিন ডলাৰৰ বিনিময় মূল্যৰ হাৰ জুলাই, 2008 চনত 40.00 টকা আৰু ফেব্রুৱাৰী, 2009 চনত 50.00 টকা আছিল। মূল্য আপেক্ষিক নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ

জুলাই, 2008 (ধৰক সময় J)ৰ মার্কিন এক ডলাৰৰ মূল্য সাপেক্ষে ফেব্রুৱাৰী, 2009 (ধৰক সময় F)ৰ মূল্য আপেক্ষিক হ'ব।

$$P_{J/F} = \frac{50.00}{40.00} \times 100 = 125\%$$

২। পৰিমাণ আপেক্ষিক (Quantity Relatives) ঃ

আন এক সৰল প্রকাৰৰ সূচকাংক হ'ল পৰিমাণ আপেক্ষিক। এই সূচকাংক উপযোগী হয় যেতিয়া আমি উৎপাদন কৰা বা বিক্রী কৰা বা উপভোগ কৰা সামগ্রীৰ নিচিনা সামগ্রীৰ পৰিমাণগত পৰিবর্তন জনাৰ কাৰণে আগ্রহান্বিত হওঁ। ইয়াত সামগ্রীক অধিক ব্যাপক অর্থত ব্যৱহাৰ কৰা হৈছে। ইয়ে পথৰে সৰবৰাহকৃত বা এখন দেশৰ পৰা আমদানিকৃত বা এখন দেশলৈ ৰপ্তানিকৃত বস্তুৰ পৰিমাণক (টনত) বুজাব পাৰে। এনেকুৱা ক্ষেত্র বিলাকত আমি পৰিমাণ আপেক্ষিকবিলাকক বিবেচনা কৰো। যদি এটা মুহূর্তৰ পৰিবর্তে এটা কালৰ সামগ্রীবিলাক লোৱা হয়, তেন্তে এটা উপযুক্ত গড় ল'ব লাগিব আৰু সামগ্রীবিলাকৰ পৰিমাণ একে এককত প্রকাশ কৰিব লাগিব। যদি ভিত্তিকাল (0) আৰু নির্দিষ্ট কাল (1) ত উৎপাদন কৰা, উপভোগ কৰা বা সৰবৰাহ কৰা

সামগ্রীৰ পৰিমাণ ক্ৰমে q_0 আৰু q_1 হয়, তেন্তে ভিত্তি সময় 0 সাপেক্ষে সময় 1ৰ পৰিমাণ আপেক্ষিকক তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞাকৃত কৰা হয় ঃ

শতাংশত পৰিমাণ আপেক্ষিক (কাল 0 সাপেক্ষে

কাল 1ৰ) $= \frac{q_1}{q_0} \times 100 - - - (7.2)$

আমি পৰিমাণ আপেক্ষিকক শতাংশত হওঁক বা নহওঁক $q_{0/1}$ ৰে বুজাওঁ।

উদাহৰণ - ৩

অসমত চাহ উৎপাদনৰ পৰিমাণ 2009 চনৰ জানুৱাৰী মাহত 3608 টন আৰু 2009 চনৰ ফেব্ৰুৱাৰী মাহত 3700 টন আছিল। পৰিমাণ আপেক্ষিক নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ

জানুৱাৰী 2009 (ধৰক, সময় J)ৰ চাহৰ উৎপাদন সাপেক্ষে ফেব্ৰুৱাৰী, 2009 (ধৰক, সময় F)ৰ চাহৰ উৎপাদনৰ পৰিমাণ আপেক্ষিক হ'ব।

$$q_{J/F} = \frac{3700}{3608} \times 100 = 102.55\%$$

৩। মুঠ মূল্য আপেক্ষিক (Value Relatives) ঃ

সৰল প্ৰকাৰৰ সূচকাংক বিলাকৰ ভিতৰত মুঠ মূল্য সূচকাংক অন্যতম। যেতিয়া আমি এটা বস্তুৰ দুটা ভিন্ন কাল বা মুহূৰ্তৰ আদান-প্ৰদান, উপভোগ বা বিক্ৰী কৰাৰ মুদ্ৰামূল্য তুলনা কৰিবলৈ লওঁ, তেতিয়া তাৰ কাৰণে মুঠ মূল্য আপেক্ষিকৰ ব্যৱহাৰ উপযোগী হৈ পৰে। উৎপাদন, আদান-প্ৰদান বা বিক্ৰী কৰা বস্তুটোৰ এটা সময়ৰ পৰিমাণ q ক তাৰ মূল p ৰে পূৰণ কৰি বস্তুটোৰ সেই সময়ৰ উৎপাদন, আদান-প্ৰদান বা বিক্ৰীৰ মুঠ মূল্য pq পাব পাৰি। এটা মুহূৰ্তৰ পৰিবৰ্তে এটা কাল বিবেচনা কৰিলে উপযুক্ত গড় ল'ব লাগিব আৰু একে এককত প্ৰকাশ কৰিব লাগিব। ধৰাহ'ল এটা বস্তুৰ ভিত্তি কাল (0)ৰ মূল্য আৰু পৰিমাণ ক্ৰমে p_0 আৰু q_0 আৰু বস্তুটোৰ নিৰ্দিষ্ট কালৰ মূল্য আৰু পৰিমাণ ক্ৰমে p_1 আৰু q_1। তেতিয়াহ'লে বস্তুটোৰ ভিত্তিকালৰ মূঠ মূল্য হ'ব $v_0 = p_0q_0$ আৰু নিৰ্দিষ্ট কালৰ মুঠ মূল্য হ'ব $v_1=p_1q_1$। ভিত্তিকাল 0 সাপেক্ষে নিৰ্দিষ্ট কাল 1ৰ মুঠ মূল্য আপেক্ষিক নিৰ্ণয় কৰাৰ সূত্ৰ হ'ব ঃ

শতাংশত মুঠ মূল্য আপেক্ষিক (কাল 0 সাপেক্ষে

কাল 1)ৰ $= \frac{v_1}{v_0} \times 100 - - - (7.3)$

শতাংশত হওঁক বা নহওঁক, মুঠ মূল্য আপেক্ষিক আমি $v_{0/1}$ ৰে প্ৰকাশ কৰো।

উদাহৰণ - ৪

অসমৰ চাহ উৎপাদন 2009 চনৰ জানুৱাৰী মাহত 3608 টন আৰু 2009 চনৰ ফেব্ৰুৱাৰী মাহত 3700 টন আছিল। প্ৰতি কিল'গ্ৰামত অনুৰূপ মূল্য আছিল ক্ৰমে 100.00 টকা আৰু 120.00 টকা। মুঠ মূল্য আপেক্ষিক নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ

ধৰাহ'ল ভিত্তি সময় জানুৱাৰী, 2009 = J

নির্দিষ্ট সময় ফেব্রুৱাৰী, 2009 = F

তেতিয়াহ'লে q_j = 3608000 কিঃ গ্রাঃ

p_J = 100.00 টকা

q_F = 3700000 কিঃ গ্রাঃ

p_F = 120.00 টকা

গতিকে, $v_j = q_J \times p_J$ = 360800000 টকা

$v_F = q_F \times p_F$ = 444000000 টকা

সূত্র (7.3)ৰ সহায়ত মুঠ মূল্য আপেক্ষিক হ'ব ঃ

$$V_{J/F} = \frac{444000000}{360800000} \times 100 = 123\%$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ শুদ্ধ নে অশুদ্ধ লিখক ঃ

(ক) সূচকাংক হ'ল আপেক্ষিক পৰিবর্তন জোখাৰ কাৰণে বিশেষ প্রকাৰৰ গড়। (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

(খ) সূচকাংকই পৰস্পৰ সম্পর্কযুক্ত চলকবিলাকৰ এটা সময়ৰ মুঠ পৰিবর্তন জোখে। (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

(গ) সৰল সূচকাংক গঠনত ভাৰৰ প্রয়োজন হয়। (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

(ঘ) সূচকাংকই অর্থনৈতিক অৱস্থাৰ পৰিবর্তনৰ প্রৱণতাক দেখুৱাই নিদিয়ে। (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

(ঙ) মূল্য আপেক্ষিকক নির্দিষ্ট বর্ষৰ মূল্য আৰু ভিত্তি বর্ষৰ মূল্যৰ অনুপাত হিচাপে সংজ্ঞাকৃত কৰা হয়। (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

প্রশ্ন নং ২ঃ খালী ঠাই পূর্ণ কৰক ঃ

(ক) সূচকাংক হ'ল এক পৰিসাংখিকীয় কৌশল যিয়ে সংশ্লিষ্ট চলক ৰাশিৰ ———— পৰিবর্তন প্রকাশ কৰে।

(খ) সূচকাংক হ'ল এক ———— গড়।

(গ) সূচকাংকই ———— চলক সমষ্টিৰ মুঠ পৰিবর্তন জোখে।

(ঘ) $p_{1990/1998}$ ৰে বুজোৱা সূচকাংকত ভিত্তিবর্ষ হ'ল ———— আৰু চলিত বর্ষ হ'ল ————।

(ঙ) সৰল সূচকাংকবিলাকৰ ভাৰবিলাক ———— হয়।

(চ) মূল্য আপেক্ষিক মানে চলিত বর্ষৰ মূল্য আৰু ———— ৰ অনুপাতক বুজায়।

(ছ) যদি মূল্য আপেক্ষিক 100 ৰ পৰা 300 লৈ বৃদ্ধি হয়, তেন্তে ———— মূল্য বৃদ্ধি হ'ব।

১১.৫ আপেক্ষিকৰ ধর্মসমূহ (PROPERTIES OF RELATIVES)

ধৰাহ'ল p_a, p_b, p_c, ... য়ে যথাক্রমে a, b, c, ... কালবিলাকৰ দ্রব্য মূল্যক বুজাইছে। আকৌ ধৰাহ'ল q_a, q_b, q_c, ... আৰু v_a, v_b, v_c... য়ে যথাক্রমে a, b, c, ... কালবিলাকৰ দ্রব্যৰ পৰিমাণ আৰু মুঠ মূল্যক বুজাইছে। আপেক্ষিকবিলাকে এনেকুৱা কিছুমান ধর্ম মানি চলে যিবিলাক সংজ্ঞাৰ পৰা প্রত্যক্ষভাৱে পাব পাৰি। আমি মূল্য আৰু আপেক্ষিকবিলাকৰ কাৰণে ফলবিলাক বর্ণনা কৰিম আৰু পৰিমাণ আপেক্ষিক আৰু মুঠ মূল্য আপেক্ষিকবিলাকৰ কাৰণে অনুৰূপ ফলবিলাক লিখিম।

১। **স্বনিহিত ধর্ম (Identity property)** ঃ এটা নির্দিষ্ট কালৰ মূল্য আপেক্ষিক সেই একে কাল সাপেক্ষে 1ৰ সমান অর্থাৎ $p_{a/a} = 1$

২। **সময় প্রতিলোম ধর্ম (Time reversal property)** ঃ যদি ভিত্তি কাল আৰু প্রাসংগিক কাল সালসলনি কৰা হয়, তেন্তে অনুৰূপ আপেক্ষিকৰ গুণফল একৰ সমান হয়, অর্থাৎ আপেক্ষিক দুটাৰ এটা আনটোৰ প্রতিক্রম হয়।

আন কথাত, $p_{a/b} = \frac{1}{p_{b/a}}$

আমি জানো যে, $p_{a/b} = \frac{p_b}{p_a} = \frac{1}{p_a / p_b} = \frac{1}{p_{b/a}}$

৩। **বৃত্তীয় বা চক্রীয় ধর্ম (Circular or Cyclic Property)** ঃ
এই ধর্মটোৱে বর্ণনা কৰে যে—

$$p_{a/b} \times p_{b/c} \times p_{c/a} = 1$$

আমি ধর্মটো তলত দিয়া ধৰণে প্রমাণ কৰিব পাৰো।

$$p_{a/b} = \frac{p_b}{p_a}, \quad p_{b/c} = \frac{p_c}{p_b}, \quad p_{c/a} = \frac{p_a}{p_c},$$

এই তিনিটা পদ পূৰণ কৰিলে ধর্মটো পোৱা যাব।

৪। **পৰিবর্দ্ধিত বৃত্তীয় বা চক্রীয় ধর্ম (Modified Circular or Cyclic Property)** ঃ
এই ধর্মটোৱে বর্ণনা কৰে যে—

$$p_{a/b} \times p_{b/c} = p_{a/c}$$

এই ধর্ম তলত দিয়া ধৰণে প্রমাণ কৰিব পাৰি।

আমি পাওঁ, $p_{a/b} \times p_{b/c} = \frac{p_b}{p_a} \times \frac{p_c}{p_b}$

$$= \frac{p_c}{p_a} = p_{a/c}$$

১১.৬ সৰল সূচকাংক গঠন (CONSTRUCTION OF SIMPLE INDEX NUMBER)

সাধাৰণতে আমি কোনো বিশেষ দ্ৰব্যৰ মূল্য স্তৰৰ পৰিবৰ্তে সাধাৰণ মূল্য স্তৰতহে আগ্ৰহী। সেয়ে আমি একে সময়তে ভালেমান সামগ্ৰী বিবেচনা কৰিব লাগিব। যদি প্ৰত্যেক সামগ্ৰী পৃথক গুণ সম্পন্ন হয়, তেতিয়া এনেকুৱা আটাইবিলাক বৈশিষ্ট্যক বিবেচনা কৰিব লাগিব। মূল্য বা উৎপাদনৰ পৰিবৰ্তন জোখাৰ কাৰণে আমি একেলগে ভালেমান বস্তু বা সামগ্ৰী বিবেচনা কৰিব লাগিব।

তথ্যৰ উৎসবিলাক বিশ্বাসযোগ্য হ'ব লাগিব আৰু তথ্যৰ উৎসবিলাক নিৰ্বাচন কৰোতে সাৱধান হ'ব লাগিব। উদাহৰণ স্বৰূপে, উৎপাদনৰ কাৰণে সূচকাংক অভিগণনা কৰাৰ কাৰণে উৎপাদনকাৰী আৰু ব্যৱসায়ীৰ পৰা বিভাগীয় প্ৰকাশন আৰু আন বিশ্বাসযোগ্য অবিভাগীয় প্ৰতিবেনৰ কথা বিবেচান কৰিব লাগিব। যদি খাদ্য সামগ্ৰীৰ খুচুৰা মূল্য বিবেচনা কৰা হয়, তেন্তে পাইকাৰী বজাৰৰ পৰিবৰ্তে ষ্টোৰসমূহত দ্ৰব্যৰ মূল্য বিবেচনাৰ কাৰণে ল'ব লাগিব।

আমি এতিয়া নিৰ্দিষ্ট তথ্য সমষ্টি যেনে— সামগ্ৰীসমূহৰ মূল্য, সামগ্ৰীৰ উৎপাদনৰ পৰিমাণ ইত্যাদিৰ পৰা কেনেকৈ সৰল সূচকাংক গঠন কৰিব পাৰি আলোচনা কৰিম।

সৰল সূচকাংক দুটা পদ্ধতিৰে গঠন কৰিব পাৰি। এই দুটা হ'ল ঃ

১। সৰল সমষ্টিগত পদ্ধতি (Simple aggregate method)

২। আপেক্ষিৰ সৰল গড় পদ্ধতি (Method of simple average of relatives)

১। সৰল সমষ্টিগত পদ্ধতি ঃ এই পদ্ধতিত প্ৰত্যেক সামগ্ৰীৰ ওপৰত সমানভাৰ আৰোপ কৰা হয়। গতিকে এইক্ষেত্ৰত প্ৰত্যেক সামগ্ৰীক ভাৰ আৰোপ কৰা বা নকৰা একেই কথা। এইটোৱে সূচকাংক গঠনৰ আটাইতকৈ সহজ পদ্ধতি।

১.১। মূল্য সূচকাংক নিৰ্ণয়ৰ সৰল সমষ্টিগত পদ্ধতি ঃ মূল্য সূচকাংক উলিয়াবলৈ আমি তলৰ পৰ্যায় তিনিটা ব্যৱহাৰ কৰো।

পৰ্যায় - ১ ঃ তালিকাত অন্তৰ্ভুক্ত আটাইবিলাক সামগ্ৰীৰ চলিত বছৰৰ (অৰ্থাৎ নিৰ্দিষ্ট কালৰ) মূল্যবোৰৰ সমষ্টি নিৰ্ণয় কৰক। যদি চলিত বছৰক 1ৰে বুজোৱা হয়, তেন্তে Σp_1 নিৰ্ণয় কৰক।

পৰ্যায় - ২ ঃ তালিকাত অন্তৰ্ভুক্ত আটাইবিলাক সামগ্ৰীৰ ভিত্তি বছৰৰ মূল্যবোৰৰ সমষ্টি নিৰ্ণয় কৰক। যদি ভিত্তি বছৰক 0ৰে বুজোৱা হয়, তেন্তে Σp_0 নিৰ্ণয় কৰক।

পৰ্যায় - ৩ ঃ $p_{0/1} = \frac{\sum p_1}{\sum p_0} \times 100$ সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰক

উদাহৰণ - ৫

তলৰ তথ্যটোৰ বাবে সৰল সমষ্টিগত পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি মূল্য সূচকাংক নির্ণয় কৰক ঃ

সামগ্রী	একক	মূল্য (টকাত)	
		2000	2005
ঘেঁহু	কুইণ্টল	800	1200
চাউল	কুইণ্টল	1200	1600
গাখীৰ	লিটাৰ	12	18
চাহ	কিল'গ্রাম	100	120
কাপোৰ	মিটাৰ	30	40
মাংস	কিল'গ্রাম	80	120

সমাধান ঃ

2005 বর্ষৰ (চলিত বছৰ) মূল্যক p_1 আৰু 2000 বর্ষৰ (ভিত্তি বছৰ) মূল্যক p_0ৰে সূচিত কৰি তলৰ তালিকাখন নতুনকৈ প্রস্তুত কৰা হ'ল।

সামগ্রী	p_0	p_1
গম	800	1200
চাউল	1200	1600
গাখীৰ	12	18
চাহ	100	120
কাপোৰ	30	40
মাংস	80	120
	$\Sigma p_0=2222$	$\Sigma p_1=3098$

গতিকে, ভিত্তি বর্ষ 2000 সাপেক্ষে 2005 বর্ষৰ মূল্য সূচকাংক হ'ব ঃ

$$p_{01} = \frac{3098}{2222} \times 100 = 139.4$$

এতেকে মূল্য (বা মূল্যস্তৰ) বৃদ্ধি = 139.4–100 = 39.4%

উদাহৰণ - ৬

A, B, C সামগ্রী তিনিটাৰ 2005 চনত মূল্য 50 টকা, 7 টকা আৰু 3 টকাৰ পৰা বৃদ্ধি হৈ 2006 চনত ক্রমে 52 টকা, 8 টকা আৰু 5 টকা হয়। সৰল সমষ্টিগত পদ্ধতিৰে গড়মূল্য কিমান বৃদ্ধি পালে নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ

আমি এতিয়া তালিকাখন প্রস্তুত কৰোহ'ক।

সামগ্রী	2005 বর্ষত মূল (p_0)	2006 বর্ষত মূল (p_1)
A	50	52
B	7	8
C	3	5
	$\Sigma p_0 = 60$	$\Sigma p_1 = 65$

এতেকে ভিত্তিবর্ষ 2005 সাপেক্ষে 2006 বর্ষৰ মূল্য সূচকাংক হ'ল

$$p_{2005/2006} = \frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \times 100 = 108.33$$

ইয়াৰ পৰা এইটো দেখা যায় যে ভিত্তিবর্ষ 2005 সাপেক্ষে চলিত বর্ষ 2006ৰ মূল্য সূচকাংক হ'ল 108.33%। গতিকে এবছৰত মূল্য বৃদ্ধি হয় 108.33–100 = 8.33%

১.১। পৰিমাণ আপেক্ষিক নির্ণয় কৰাৰ সৰল সমষ্টিগত পদ্ধতি (Simple aggregate method to final quantity Index number) ঃ

আমি পৰিমাণ আপেক্ষিক নির্ণয় কৰাৰ কাৰণে তলৰ পর্যায় তিনিটা ব্যৱহাৰ কৰো। যেনে—

পর্যায় - ১ ঃ চলিত বর্ষৰ (অর্থাৎ নির্দিষ্ট কালৰ) আটাইবিলাক তালিকাভুক্ত উৎপাদন কৰা, উপভোগ কৰা বা আদান-প্রদান কৰা সামগ্রীৰ পৰিমাণৰ সমষ্টি নির্ণয় কৰক। যদি চলিত বর্ষক 1ৰে বুজোৱা হয়, তেন্তে Σq_1 নির্ণয় কৰক।

পর্যায় - ২ ঃ ভিত্তি বছৰত উৎপাদন কৰা, উপভোগ কৰা বা আদান-প্রদান কৰা তালিকাভুক্ত আটাইবিলাক সামগ্রীৰ পৰিমাণৰ সমষ্টি নির্ণয় কৰক। যদি ভিত্তি বছৰক 0ৰে বুজোৱা হয় তেন্তে Σq_0 নির্ণয় কৰক।

পর্যায় - ৩ ঃ $q_{0/1} = \frac{\Sigma q_1}{\Sigma q_0} \times 100$ সূত্রটো ব্যৱহাৰ কৰক।

২। আপেক্ষিকবোৰৰ সৰল গড় পদ্ধতি (Method of Simple Average of Relatives) ঃ

এই পদ্ধতিত আপেক্ষিকবিলাকৰ গড় কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ যিকোনো এটা মাপৰ সহায়ত নির্ণয় কৰা হয়। ইয়াত আমি বিশেষকৈ সমান্তৰ মাধ্যক আপেক্ষিক বিলাকৰ গড় হিচাপে ব্যৱহাৰ কৰিম। আমি এই পদ্ধতিটো কেৱল মূল্য সূচকাংকৰ কাৰণে চমুকৈ আলোচনা কৰিম। মূল্য সূচকাংকৰ পৰিবর্তে পৰিমাণ সূচকাংক আৰু মুঠ মূল্য সূচকাংক বিবেচনা কৰি একেধৰণে পৰিমাণ সূচকাংক আৰু মুঠ মূল্য সূচকাংক নির্ণয় কৰিব পাৰি। 'সম্ভাব্য প্রশ্ন'— খণ্ডত কেইটামান প্রশ্নৰ যোগেদি পৰিমাণ সূচকাংক আৰু মুঠ মূল্য সূচকাংক নির্ণয় কৰিবলৈ দিয়া হৈছে।

আপুনি সেই সমস্যাকেইটা তলত দিয়া মূল্য সূচকাংক বিষয়ক সমস্যাৰ সমাধানৰ সহায় লৈ সমাধান কৰিব পাৰিব।

২.১। মূল্য আপেক্ষিকবোৰৰ সৰল গড় পদ্ধতি (Method of Simple Average of Price Relatives) ঃ আমি জানো যে মূল্য আপেক্ষিক চলিত বর্ষৰ মূল্য আৰু ভিত্তি বছৰৰ মূল্যৰ

অনুপাতৰ বাহিৰে আন একো নহয়। আমি মূল্য আপেক্ষিকবোৰৰ সমান্তৰ মাধ্যক গড় হিচাপে লৈ মূল্য সূচকাংকৰ কাৰণে তলৰ সূত্ৰটো পাওঁ—

$$P_{0/1} = \frac{\Sigma\left(\frac{p_1}{p_0} \times 100\right)}{N}$$

য'ত N হ'ল সূচকাংকৰ কাৰণে অন্তর্ভুক্ত কৰা সামগ্ৰীবিলাকৰ সংখ্যা।

মূল্য আপেক্ষিকবোৰৰ সৰল গড় পদ্ধতিৰ সহায়ত মূল্য সূচকাংক নির্ণয় কৰাৰ পর্যায়ঃ

পর্যায় - ১ ঃ প্ৰত্যেক সামগ্ৰীৰ বাবে শতকৰা মূল্য সূচকাংক অর্থাৎ $\frac{p_1}{p_0} \times 100$ নির্ণয় কৰক।

পর্যায় - ২ ঃ শতকৰা মূল্য সূচকাংক বিলাকৰ সমষ্টি অর্থাৎ $\Sigma\left(\frac{p_1}{p_0} \times 100\right)$ নির্ণয় কৰক।

পর্যায় - ৩ ঃ তালিকাভুক্ত সামগ্ৰীবিলাকৰ সংখ্যাৰে $\Sigma\left(\frac{p_1}{p_0} \times 100\right)$ ক হৰণ কৰক।

উদাহৰণ - ৭

মূল্য আপেক্ষিকবোৰৰ সৰল গড় পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি অনুশীলনী-৫ৰ সমাধান দিয়ক।

সমাধান ঃ

আমি তলৰ তালিকাখন গঠন কৰোহ'ক।

ক্ৰমিক নম্বৰ	সামগ্ৰী	একক	মূল্য (টকাত)		মূল্য আপেক্ষিক
			2000 p_0	2005 p_1	$\frac{p_1}{p_0} \times 100$
1	ঘেঁহু	কুইণ্টল	800	1200	$\frac{1200}{800} \times 100 = 150.00$
2	চাউল	কুইণ্টল	1200	1600	$\frac{1600}{1200} \times 100 = 133.33$
3	গাখীৰ	লিটাৰ	12	18	$\frac{18}{12} \times 100 = 150.00$
4	চাহ	কিল'গ্ৰাম	100	120	$\frac{120}{100} \times 100 = 120.00$
5	কাপোৰ	মিটাৰ	30	40	$\frac{40}{30} \times 100 = 133.33$
6	মাংস	কিল'গ্ৰাম	80	120	$\frac{120}{80} \times 100 = 150.00$
N=6					$\Sigma\left(\frac{p_1}{p_0} \times 100\right) = 836.66$

গতিকে ভিত্তিবর্ষ 2000 সাপেক্ষে 2005 বর্ষৰ মূল্য সূচকাংক হ'ল ঃ

$$P_{0/1} = \frac{\sum\left(\frac{p_1}{p_0} \times 100\right)}{p_N} = \frac{836.66}{6} = 139.44$$

উদাহৰণ - ৮

মূল্য আপেক্ষিকবোৰৰ সৰল গড় পদ্ধতিৰ সহায়ত অনুশীলনী-৬ৰ সমাধান দিয়ক।

সমাধান ঃ

আমি প্রথমতে সিপিঠিৰ তালিকাখন প্রস্তুত কৰিম।

ক্রমিক নম্বৰ	সামগ্রী	মূল্য (টকাত)		মূল্য আপেক্ষিক $\frac{p_1}{p_0} \times 100$
		2005 p_0	2006 p_1	
1	A	50	52	$\frac{52}{50} \times 100 = 104.00$
2	B	7	8	$\frac{8}{7} \times 100 = 114.29$
3	C	3	5	$\frac{5}{3} \times 100 = 166.66$
N=3				$\sum\left(\frac{p_1}{p_0} \times 100\right) = 384.95$

গতিকে ভিত্তি বছৰ 2005 সাপেক্ষে 2006 বছৰৰ মূল্য আপেক্ষিক হ'ব ঃ

$$P_{0/1} = \frac{\sum\left(\frac{p_1}{p_0} \times 100\right)}{N} = \frac{384.95}{3} = 128.32$$

১১.৭ ভাৰিত সূচকাংক গঠন (CONSTRUCTION OF WEIGHTED INDEX NUMBERS)

ভাৰিত সূচকাংকত প্রতিটো সামগ্রীৰ ওপৰত সামগ্রীটোৰে তালিকাখনত পোৱা গুৰুত্ব অনুসৰি একোটা ভাৰ আৰোপ কৰা হয়। এই প্রকাৰৰ সূচকাংক অভিগণনা কৰাৰ কাৰণে পদ্ধতিসমূহৰ দুটা গ্রুপ বা সমষ্টি আছে। যেনে— (ক) ভাৰিত সমষ্টিগত পদ্ধতি আৰু (খ) মূল্য আপেক্ষিকবোৰৰ ভাৰিত গড় পদ্ধতিসমূহ। এই খণ্ডত আমি তিনি প্রকাৰৰ ভাৰিত সমষ্টিগত পদ্ধতি সম্পর্কে শিকিম। এই জনপ্রিয় পদ্ধতিকেইটা হ'ল ঃ (১) লাচপেয়াৰৰ পদ্ধতি (২) পাছিৰ পদ্ধতি আৰু (৩) ফিচাৰৰ পদ্ধতি। আটাইকেইটা পদ্ধতি ভাৰিত সূচকাংক নির্ণয় কৰাৰ কাৰণে

ব্যৱহাৰ কৰা হয়। লাচপেয়াৰৰ পদ্ধতি আৰু পাছিৰ পদ্ধতিৰ মাজত প্ৰধান পাৰ্থক্য হ'ল এই যে মূল্য সূচকাংক গঠনত লাচপেয়াৰে ভিত্তি বছৰৰ সামগ্ৰীসমূহৰ পৰিমাণ বিলাকক সিবিলাকৰ আপেক্ষিকভাৰ হিচাপে ব্যৱহাৰ কৰে, য'ত পাছিয়ে চলিত বৰ্ষৰ সামগ্ৰীসমূহৰ পৰিমাণবিলাকক সিবিলাকৰ আপেক্ষিক ভাৰ হিচাপে ব্যৱহাৰ কৰে।

(১) লাচপেয়াৰৰ পদ্ধতি (Laspeyre's Method) ঃ

লাচপেয়াৰৰ মূল্য সূচকাংক (Laspeyre's Price Index Number) ঃ এই সূচকাংকত ভিত্তি বছৰৰ সামগ্ৰীৰ পৰিমাণক (q_0) ভাৰ হিচাপে ব্যৱহাৰ কৰা হয়। তদানুসাৰে সূত্ৰটো হ'ব ঃ

$$P_L = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$$

লাচপেয়াৰৰ পৰিমাণ সূচকাংক (Laspeyre's Quantity Index Number) ঃ যদি আমি সামগ্ৰীৰ পৰিমাণক ভিত্তি বছৰৰ মূল্যৰে পূৰণ কৰো, তেন্তে আমি লাচপেয়াৰৰ পৰিমাণ সূচকাংক পাওঁ। এইদৰে, লাচপেয়াৰৰ পৰিমাণ সূচকাংকৰ সূত্ৰটো হ'ব ঃ

$$Q_L = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \times 100$$

লাচপেয়াৰৰ পদ্ধতিৰে ভাৰিত সূচকাংক নিৰ্ণয় কৰাৰ পৰ্যায়বিলাক (Steps to Calculate Weighted Index Number by Laspeyre's Method) ঃ

পৰ্যায় - ১ ঃ প্ৰতিটো বস্তু বা সামগ্ৰীৰ চলিত বৰ্ষৰ মূলক (p_1) তাৰ ভিত্তি বৰ্ষৰ পৰিমাণ (q_0) ৰে পূৰণ কৰি p_1q_0 নিৰ্ণয় কৰক।

পৰ্যায় - ২ ঃ প্ৰতিটো বস্তু বা সামগ্ৰীৰ ভিত্তি বৰ্ষৰ মূলক (p_0) তাৰ ভিত্তি বছৰৰ পৰিমাণ (q_0) ৰে পূৰণ কৰি p_0q_0 নিৰ্ণয় কৰক।

পৰ্যায় - ৩ ঃ Σp_1q_0 আৰু Σp_0q_0 পাবলৈ আটাইবিলাক p_1q_0 আৰু p_0q_0 পৃথকে পৃথকে যোগ কৰক।

পৰ্যায় - ৪ ঃ লাচপেয়াৰৰ মূল্য সূচকাংক পাবলৈ Σp_1q_0 ক Σp_0q_0 ৰে হৰণ কৰক আৰু 100 ৰে পূৰণ কৰক।

উদাহৰণ - ৯

তলৰ তথ্যটোৰ পৰা চালপেয়াৰৰ মূল্য সূচকাংক নিৰ্ণয় কৰক।

সামগ্ৰী	মূল্য (টকাত)		গোট হিচাপত কিনা সামগ্ৰীৰ পৰিমাণ	
	1995	1996	1995	1996
A	50	52	10	12
B	7	9	3	4
C	3	5	7	6

সমাধান ঃ

চলিত বছৰৰ মূল্য আৰু পৰিমাণক ক্ৰমে p_1 আৰু q_1 বে আৰু ভিত্তি বছৰৰ মূল্য আৰু পৰিমাণক ক্ৰমে p_0 আৰু q_0 বে সূচিত কৰক। এতিয়া পৰ্যায়-১ৰ পৰা পৰ্যায়-৩ ব্যৱহাৰ কৰি সিপিঠিৰ তালিকাখন প্ৰস্তুত কৰোহ'ক।

সামগ্ৰী		p_0	q_0	p_1	p_0q_0	p_1q_0
A	50	10	52	500	520	
B	7	3	9	21	27	
C	3	7	5	21	35	
					$\Sigma p_0q_0=542$	$\Sigma p_1q_0=582$

গতিকে লাচপেয়াৰৰ মূল্য সূচকাংক হ'ল ঃ

$$P_L = \frac{582}{542} \times 100 = 107.38$$

২। পাছিৰ পদ্ধতি (Paasche's Method) ঃ

পাছিৰ মূল্য সূচকাংক (Paasche's Price Index Number) ঃ এই সূচকাংকত চলিত বৰ্ষৰ পৰিমাণক (q_1) ভাৰ হিচাপে লোৱা হয়। এই হিচাপত সূত্ৰটো হ'ল ঃ

$$P_p = \frac{\Sigma p_1q_1}{\Sigma p_0q_1} \times 100$$

পাছিৰ পৰিমাণ সূচকাংক (Paasche's Quantity IndexNumber) ঃ

এই সূচকাংকত চলিত বৰ্ষৰ মূল্য (p_1)ক ভাৰ হিচাপে ব্যৱহাৰ কৰা হয়। গতিকে সূত্ৰটো হ'ল ঃ

$$Q_p = \frac{\Sigma q_1p_1}{\Sigma q_0p_1} \times 100$$

উদাহৰণ - ১০

অনুশীলনী- ৯ত দিয়া তথ্যৰ পৰা পাছিৰ মূল্য সূচকাংক নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ

p_1 আৰু q_1 ৰ দ্বাৰা ক্ৰমে চলিত বৰ্ষৰ মূল্য আৰু পৰিমাণক আৰু p_0 আৰু q_0 ৰ দ্বাৰা ক্ৰমে ভিত্তিবৰ্ষৰ মূল্য আৰু পৰিমাণক সূচিত কৰক। এতিয়া আমি তলৰ তালিকাখন গঠন কৰোহ'ক ঃ

সামগ্ৰীবোৰ		p_0	q_1	p_1	p_0q_1	p_1q_1
A	50	12	52	600	624	
B	7	4	9	28	36	
C	3	6	5	18	30	
					$\Sigma p_0q_1=646$	$\Sigma p_1q_1=690$

গতিকে পাছিৰ মূল্য সূচকাংক হ'ল ঃ

$$P_p = \frac{690}{646} \times 100 = 106.8$$

মন্তব্য ঃ আপুনি লক্ষ্য কৰিছে যে একেটা তথ্যৰ কাৰণে লাচপেয়াৰৰ সূচকাংকৰ মান (107.38) আৰু পাছিৰ সূচকাংকৰ মান (106.8) ৰ মাজত পার্থক্য আছে। এই পার্থক্য আৰোপিত ভাৰৰ পার্থক্যৰ কাৰণে পোৱা গৈছে।

৩। ফিচাৰৰ পদ্ধতি (Fisher's Method) ঃ

লাচপেয়াৰ আৰু পাছিৰ সূচকংক দুটাৰ গুণোত্তৰ মাধ্যই হ'ল ফিচাৰৰ মূল্য সূচকাংক। গতিকে ফিচাৰৰ মূল্য সূচকাংকৰ সূত্ৰ হ'ল ঃ

$$P_F = \sqrt{P_L \times P_P} = \sqrt{\left(\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100\right) \times \left(\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times 100\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}\right) \times \left(\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}\right)} \times 100 \qquad \ldots (1)$$

সেইদৰে, ফিচাৰৰ পৰিমাণ সূচকাংকৰ সূত্ৰ হ'ল ঃ

$$Q_F = \sqrt{Q_L \times Q_P} = \sqrt{\left(\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \times 100\right) \times \left(\frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} \times 100\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0}\right) \times \left(\frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}\right)} \times 100 \qquad \ldots (2)$$

উদাহৰণ - ১১

অনুশীলনী- ৯ত দিয়া তথ্যৰ পৰা ফিচাৰৰ মূল্য সূচকাংক নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ

প্রদত্ত তথ্যৰ ক্ষেত্রত ইতিমধ্যে আমি পাইছো যে—

P_L = 107.38 আৰু P_P=106.8

গতিকে ফিচাৰৰ মূল্য সূচকাংক হ'ল ঃ

$$P_F = \sqrt{10.73 \times 106.8} = 107.09$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৩ঃ শুদ্ধ নে অশুদ্ধ লিখক ঃ

(ক) দুই প্রকাৰৰ সূচকাংক আছে ঃ সৰল বা অভাৰিত আৰু ভাৰিত সূচকাংক । (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

(খ) সৰল সূচকাংক গঠন কৰাৰ দুটা পদ্ধতি আছে ঃ সৰল সমষ্টিগত পদ্ধতি আৰু সৰল গড় আপেক্ষিক। (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

(গ) সৰল সমষ্টিগত পদ্ধতি বা মূল্য আপেক্ষিকবোৰৰ সৰল গড় পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি আমি একে সূচকাংক পাওঁ। (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

(ঘ) লাচপেয়াৰে চলিত বৰ্ষৰ পৰিমাণক ভাৰ হিচাপে ব্যৱহাৰ কৰে। (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

(ঙ) পাছিয়ে ভিত্তিবৰ্ষৰ পৰিমাণক ভাৰ হিচাপে ব্যৱহাৰ কৰে। (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ খালী ঠাই পূৰ্ণ কৰক ঃ

(ক) লাচপেয়াৰৰ পদ্ধতিৰে মূল্য সূচকাংক নিৰ্ণয় কৰোতে আমি ——— পৰিমাণক ভাৰ হিচাপে ব্যৱহাৰ কৰো।

(খ) পাছিৰ পদ্ধতিৰে মূল্য সূচকাংক নিৰ্ণয় কৰোতে আমি ——————— পৰিমাণক ভাৰ হিচাপে ব্যৱহাৰ কৰো।

(গ) $I = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$ হ'ল ——————— ভাৰিত সূচকাংক।

(ঘ) $I = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times 100$ হ'ল ——————— ভাৰিত সূচকাংক।

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ (ক) লাচপেয়াৰ (খ) পাছি আৰু (গ) ফিচাৰৰ পদ্ধতিৰে পৰিমাণ সূচকাংক গণনা কৰক।

সামগ্ৰী	মূল্য (p_0)	2004 পৰিমাণ (p_0q_0)	মূল্য (p_1)	2006 পৰিমাণ (p_1q_1)
A	10	100	12	144
B	12	144	14	196
C	14	196	16	256
D	16	256	18	324
E	18	324	20	400

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ নিম্নলিখিত তথ্যৰ পৰা 2007 চনক ভিত্তি বৰ্ষ হিচাপে লৈ— (ক) লাচপেয়াৰ (খ) পাছি আৰু (গ) ফিচাৰৰ পদ্ধতিৰে মূল্য সূচকাংক গণনা কৰক—

সামগ্ৰী	2006		2007	
	মূল্য	পৰিমাণ	মূল্য	পৰিমাণ
A	20	8	40	6
B	50	10	60	5
C	40	15	50	15
D	20	20	20	25

১১.৮ সূচকাংকৰ পর্যাপ্তিৰ পৰীক্ষা (TEST OF ADEQUACY OF INDEX NUMBER)

১১.৫ খণ্ডত আমি দেখিছো যে আপেক্ষিকসমূহৰ কেইটামান গুৰুত্বপূর্ণ ধর্ম আছে। গাইগুটীয়া সমগ্রীৰ ক্ষেত্রত যি কথা সঁচা হয়, সেই কথা সামগ্রীৰ গোট বা গ্রুপ (Group)ৰ ক্ষেত্রতো সঁচা হ'ব লাগিব। সমষ্টিগত আপেক্ষিক হিচাপে সূচকাংকবিলাকে একে ধর্ম-সমষ্টি (Set of properties) দেখুৱাব লাগিব। উপযুক্ত সূচকাংকৰ যিবিলাক গুণ বা ধর্ম থকা উচিত, সেই সম্পর্কে এতিয়া আমি পৰীক্ষা কৰিম।

১। সময় প্রতিলোম পৰীক্ষা বা ধর্ম (Time Reversal Test or Property) ঃ

যদি ভিত্তি কাল আৰু প্রাসংগিক কাল দুয়োটা সাল-সলনি কৰা হয়, তেন্তে দুয়োটা সূচকাংকৰ গুণফল একৰ সমান হ'ব লাগিব। আন কথাত এটা আনটোৰ প্রতিক্রম হ'ব লাগিব। ভিত্তি বছৰ (0) সাপেক্ষে নির্ধাৰিত বছৰ (1)ৰ সূচকাংকক $I_{0/1}$ ৰে সূচিত কৰিলে $I_{1/0}$ য়ে বর্ষ (1) সাপেক্ষে বর্ষ (0)ৰ সূচকাংককৰ সূচিত কৰিব। গতিকে বছৰ দুটা সাল-সলনি কৰাৰ ক্ষেত্রত, সময় প্রতিলোম পৰীক্ষা অনুযায়ী হ'ব লাগিব ঃ

$$I_{0/1} \times I_{1/0} = 1 \text{ বা } I_{1/0} = \frac{1}{I_{0/1}}$$

ওপৰৰ ধর্মটো মানি চলা সূচকাংকক সময় প্রতিলোম পৰীক্ষাটো মানি চলা বুলি কোৱা হয়।

মন্তব্য ঃ ১১.৫ খণ্ডত যিবিলাক আপেক্ষিক পোৱা গৈছে, সেই আটাইবিলাকে সময় প্রতিলোম পৰীক্ষা মানি চলে।

এতিয়া আমি লাচপেয়াৰৰ সূচকাংকই এই ধর্মটো মানি চলে নে নচলে পৰীক্ষা কৰোহ'ক। আমি জানো যে লাচপেয়াৰৰ সূচকাংক (শতাংশত প্রকাশ নকৰাকৈ) হ'ল ঃ

$$\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0}$$

সময়ৰ পদাংক দুটা (Subscripts) সালসলনি কৰি আমি পাওঁ ঃ

$\frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_1 q_1}$ আৰু সেয়ে দুয়োটাৰে পূৰণফল হ'ব

ফলস্বৰূপে আমি ক'ব পাৰো যে লাচ পেয়াৰৰ মূল সূচকাংকই সময় প্রতিলোম ধর্ম মানি নচলে। সেইদৰে এইটো দেখিবলৈ পোৱা যাব যে লাচপেয়াৰৰ পৰিমাণ সূচকাংকই ও সময় প্রতিলোম ধর্ম মানি নচলে। আকৌ, পাছিৰ মূল্য আৰু পৰিমাণ সূচকাংক দুটাইও সময় প্রতিলোম ধর্ম মানি নচলে।

এতিয়া আমি ফিচাৰৰ মূল্য সূচকাংক বিবেচনা কৰিম। আমি সময়ৰ পদাংক দুটা সালসলনি কৰি আন এটা সূচকাংক পাওঁ। দুয়োটা সূচকাংকৰ পূৰণফল হ'ব ঃ

$$\sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}} \times \sqrt{\frac{\sum p_0 q_1}{\sum p_1 q_1} \times \frac{\sum p_0 q_0}{\sum p_1 q_0}}$$ আৰু

এই পূৰণফল 1ৰ সমান। গতিকে ফিচাৰৰ মূল্য সূচকাংকই সময় প্ৰতিলোম ধৰ্ম মানি চলে।

২। উপাদান প্ৰতিলোম পৰীক্ষা বা ধৰ্ম (Factor Reversal Test or Property) ঃ যদি মূল্য সূচকাংকৰ সূত্ৰত p আৰু q উপাদান দুটাক সালসলনি কৰা হয়, তেন্তে পৰিমাণ সূচকাংক পোৱা যায়। তেতিয়া দুয়োটা সূচকাংকৰ পূৰণফলৰ পৰা প্ৰকৃত মূঠ মূল্যৰ অনুপাত

$\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$ পাব লাগিব।

আন কথাত, মূল্য সূচকাংকক তাৰ অনুৰূপ পৰিমাণ সূচকাংকৰে পূৰণ কৰিলে ভিত্তিবৰ্ষ (0) সাপেক্ষে নিৰ্দিষ্ট বৰ্ষ (1)ৰ মূঠ মূলৰ আচল অনুপাতটো পাব লাগিব।

এই ধৰ্মটো গাইগুটীয়া সামগ্ৰীৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰযোজ্য, যিহেতু—

$$\frac{p_1}{p_0} \times \frac{q_1}{q_0} = \frac{p_1q_1}{p_0q_0}$$

কিন্তু, প্ৰায়ভাগ সূচকাংকৰ ক্ষেত্ৰত ধৰ্মটো প্ৰযোজ্য নহয়। উদাহৰণ স্বৰূপে —

$$P_L \times Q_L = \frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum q_1p_1}{\sum q_0p_0} \neq \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$$

এতিয়া আমি ফিচাৰৰ সূচকাংকক বিবেচনা কৰিম। সূত্ৰ 1 আৰু 2 ৰ পৰা আমি পাওঁ ঃ

$$P_F \times Q_F = \sqrt{\frac{\sum p_1q_0}{\sum p_0q_0} \times \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_1}} \times \sqrt{\frac{\sum q_1p_1}{\sum q_0p_0} \times \frac{\sum q_1p_1}{\sum q_0p_1}}$$

$$= \frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$$

এইটোৱে প্ৰমাণ কৰে যে ফিচাৰৰ সূচকাংকই উৎপাদন প্ৰতিলোম পৰীক্ষা ও সিদ্ধ কৰে। **সময় প্ৰতিলোম আৰু উপাদান প্ৰতিলোম- এই দুয়োটা পৰীক্ষা সিদ্ধ কৰা বিৰল সূচকাংকবিলাকৰ ভিতৰত ফিচাৰৰ সূচকাংক অন্যতম। সেই কাৰণে ইয়াক 'ফিচাৰৰ আদৰ্শ সূচকাংক' বুলি কোৱা হয়।**

৩। বৃত্তীয় পৰীক্ষা (Cicular Test) ঃ

এই পৰীক্ষাটো ভিত্তি বছৰ স্থান সলনি কৰাৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল। যদি $I_{i/J}$ য়ে নিৰ্দিষ্ট সময় (J)ৰ, ভিত্তি সময় (i) সাপেক্ষে সূচকাংকক বুজায়, তেন্তে বৃত্তীয় পৰীক্ষা অনুসৰি আমি পাব লাগিব ঃ

$$I_{a/b} \times I_{b/c} \times I_{c/a} = 1$$

মন্তব্য ঃ ১১.৫ খণ্ডত পোৱা আটাইবিলাক আপেক্ষিকে বৃত্তীয় পৰীক্ষা সিদ্ধ কৰে।



১১.৯ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- সূচকাংক হ'ল নির্দিষ্ট সময় আৰু স্থানত এটা বা পৰস্পৰ সম্বন্ধযুক্ত কিছুমান চলকৰ গড় পৰিবর্তন দেখুৱাই দিয়াৰ উদ্দেশ্যত ব্যৱহৃত এটা পৰিসাংখ্যিকীয় মাপ বা কৌশল।
- মূল্য সূচকাংকবিলাক সচৰাচৰ বেছিকৈ ব্যৱহাৰ কৰা হয়। ই নির্দিষ্ট সময়ৰ মূল্যৰ আপেক্ষিক পৰিবর্তন জোখে।
- আমি সৰল বা ভাৰিত সূচকাংক পাব পাৰো। সৰল সূচকাংকক অভাৰিত সূচকাংক বা সমভাৰযুক্ত সূচকাংকও বোলে। এই অধ্যায়ত আমি সৰল সূচকাংকৰ লগতে ভাৰিত সূচকাংকৰ বিষয়েও আলোচনা কৰিছো।
- আমি আপেক্ষিকবিলাকৰ চাৰিটা ধর্ম সম্পর্কে আলোচনা কৰিছো ঃ স্বনিহিত ধর্ম, সময় প্রতিলোম ধর্ম, বৃত্তীয় ধর্ম আৰু পৰিবর্দ্ধিত বৃত্তীয় ধর্ম।
- আমি সৰল সূচকাংক গঠন কৰাৰ বাবে দুটা পদ্ধতিৰ বিষয়ে শিকিছো। সৰল সমষ্টিগত পদ্ধতি আৰু মূল্য আপেক্ষিকবোৰৰ সৰল গড় পদ্ধতি। সৰল সমষ্টিগত পদ্ধতিৰে সূচকাংক নির্ণয় কৰাৰ সূত্রটো হ'ল ঃ

$$P_{0/1} = \frac{\sum p_1}{\sum p_0} \times 100$$

আকৌ মূল্য আপেক্ষিকবোৰৰ সৰল গড় পদ্ধতিৰে সূচকাংক নির্ণয় কৰাৰ সূত্রটো হ'ল ঃ

$$P_{0/1} = \frac{\sum\left(\frac{p_1}{p_0} \times 100\right)}{N}$$

- আমি ভাৰিত সূচকাংকৰ বিষয়েও শিকিছো। এই প্রকাৰৰ সূচকাংক নির্ণয় কৰাৰ কাৰণে দুটা পদ্ধতিৰ গোট বা গ্রুপ আছে। যেনে— (a) ভাৰিত সমষ্টিগত পদ্ধতি আৰু (b) মূল্য আপেক্ষিকৰ ভাৰিত গড় পদ্ধতি। আমি তিনি প্রকাৰৰ ভাৰিত সমষ্টিগত পদ্ধতি সম্পর্কে চমুকৈ আলোচনা কৰিছো। এই পদ্ধতি তিনিটা সচৰাচৰ (১) লাচপেয়াৰৰ পদ্ধতি (২) পাছিৰ পদ্ধতি আৰু (৩) ফিছাৰৰ পদ্ধতি হিচাপে জনা যায়।
- আমি সূচকাংকৰ পর্যাপ্ততা বা উপযুক্ততাৰ পৰীক্ষা সম্পর্কেও শিকিছো। এটা উত্তম সূচকাংকৰ তিনিটা ধর্ম থকা উচিত বুলি আমি উল্লেখ কৰিছিলো। ফিচাৰৰ সূচকাংকই সময় প্রতিলোম পৰীক্ষা আৰু উপাদান প্রতিলোম পৰীক্ষা দুয়োটাকে সিদ্ধ কৰে আৰু সেয়ে ইয়াক ফিচাৰৰ আদর্শ সূচকাংক হিচাপে জনা যায়।



১১.১০ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

১) Agarwal, D. R. (2006). Business Statistics. Delhi, Vrinda Publications.

২) Gupta S.C. (1994). Fundamentals of statistics. New Delhi, Himalayan Publishing House.

৩) Rajagopalan, S. P. & Sattanthan R. (2009).Business Statistics and Operations Research. New Delhi, Tata McGraw-Hill

৪) Sharma, J. K. (2007). Business Statistics. New Delhi. Pearson Education Ltd.

৫) Verma, A. P. (2007). Business Statistics. Guwahat, Asian Books Private Limited.



১১.১১ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (ক) শুদ্ধ (খ) শুদ্ধ (গ) অশুদ্ধ (ঘ) অশুদ্ধ (ঙ) শুদ্ধ

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (ক) গড় (খ) বিশেষ (গ) সম্পর্কযুক্ত (ঘ) 1990, 1998 (ঙ) সমান (চ) ভিত্তিবর্ষৰ মূল্য (ছ) 200%

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (ক) শুদ্ধ (খ) শুদ্ধ (গ) অশুদ্ধ (ঘ) অশুদ্ধ (ঙ) অশুদ্ধ

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (ক) ভিত্তিবর্ষ (খ) চলিত বর্ষ (গ) লাচপেয়াৰৰ (ঘ) পাছিৰ

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ সূচকাংক গণনা

p_0	q_0	p_1	q_1	p_0q_0	p_0q_1	p_1q_1	p_1q_0
10	10	12	12	100	120	144	120
12	12	14	14	144	168	196	168
14	14	16	16	196	224	256	224
16	16	18	18	256	288	324	288
18	18	20	20	324	360	400	360
		মুঠ	1020	1160	1320	1160	

(ক) লাচপেয়াৰৰ পদ্ধতি

$$\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$$

$$= \frac{1160}{1020} \times 100$$

$$= 113.7$$

(খ) পাছিৰ পদ্ধতি

$$\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times 100$$

$$= \frac{1320}{1160} \times 100$$

$$= 113.8$$

(গ) ফিচাৰৰ পদ্ধতি

$$\sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{113.7 \times 113.8}$$

$$= 113.75$$

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ সূচকাংক গণনা

সামগ্ৰী	2006		2007					
	p_0	q_0	p_1	q_1	p_1q_0	p_0q_0	p_1q_1	p_0q_1
A	20	8	40	6	320	160	240	120
B	50	10	60	5	600	500	300	250
C	40	15	50	15	750	600	750	600
D	20	20	20	25	400	400	500	500
					$\sum p_1q_0$ =2070	$\sum p_0q_0$ =1660	$\sum p_1q_1$ =1790	$\sum p_0q_1$ =1470

(ক) লাচপেয়াৰৰ পদ্ধতি

$$\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$$

$$= \frac{2070}{1660} \times 100$$

$$= 124.70$$

(খ) পাছিৰ পদ্ধতি

$$\frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times 100$$

$$= \frac{1790}{1470} \times 100$$

$$= 121.77$$

(গ) ফিচাৰৰ পদ্ধতি

$$\sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}} \times 100$$

$$= \sqrt{\frac{2070}{1660} \times \frac{1790}{1470}} \times 100$$

$$= \sqrt{1.5184} \times 100$$

$$= 1.2322 \times 100$$

$$= 123.22$$



১১.১২ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ সূচকাংকৰ অৰ্থ আৰু প্ৰধান বৈশিষ্ট্যসমূহ ব্যাখ্যা কৰক।

প্ৰশ্ন ২ঃ 'সূচকাংক হ'ল অৰ্থনৈতিক চাপমান যন্ত্ৰ'। কিয় সূচকাংকক তেনেকৈ কোৱা হয়? ব্যাখ্যা কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ঃ মূল্য আপেক্ষিক কি? ইয়াক কেনেকৈ নিৰ্ণয় কৰা হয়। এটা উদাহৰণৰ সহায়ত দেখুওৱাক।

প্ৰশ্ন ৪ঃ পৰিমাণ আৰু মুঠ মূল্য আপেক্ষিকৰ সংজ্ঞা দিয়ক। ইহঁতে কি জোখে?

প্ৰশ্ন ৫ঃ আপেক্ষিকবিলাকৰ গুৰুত্বপূৰ্ণ ধৰ্মবোৰ বৰ্ণনা কৰক।

প্ৰশ্ন ৬ঃ সৰল সমষ্টিগত পদ্ধতিৰে অভাৰিত সূচকাংক গঠন কৰাৰ বিষয়ে ব্যাখ্যা কৰক।

প্ৰশ্ন ৭ঃ মূল্য আপেক্ষিকৰ সৰল সমষ্টিগত পদ্ধতিৰে অভাৰিত সূচকাংকৰ গঠন পদ্ধতি সম্পৰ্কে ব্যাখ্যা কৰক।

প্ৰশ্ন ৮ঃ মাৰ্কিন ডলাৰৰ বিনিময় মূল্য জুলাই 2008 আৰু ফেব্ৰুৱাৰী 2009ত ক্ৰমে 44.00 টকা আৰু 50.00 টকা আছিল। মূল্য আপেক্ষিক নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৯ঃ অসমত ধানৰ উৎপাদন 2008 বৰ্ষৰ জানুৱাৰী মাহত 3608 টন আৰু 2009 চনৰ ফেব্ৰুৱাৰী মাহত 3700 টন আছিল। পৰিমাণ সূচকাংক নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ১০ঃ তলৰ তালিকাখনে 1970 আৰু 1978 বৰ্ষত উপভোগ কৰা সামগ্ৰীবিলাকৰ মূল্য দেখুৱাইছে।

সামগ্রী	একক	1970 মূল্য (টকাত)	1978 মূল্য (টকাত)
A	কিল'গ্রাম	4.00	4.60
B	লিটাৰ	8.00	8.75
C	মিটাৰ	7.00	8.00
D	কিল'গ্রাম	14.00	16.00
E	লিটাৰ	3.00	4.00

মূল্য সূচকাংক নির্ণয় কৰক ঃ

(ক) সৰল সমষ্টিগত পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি।

(খ) মূল্য আপেক্ষিকৰ সৰল গড় পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি।

প্রশ্ন ১১ঃ তলৰ তালিকাখনত ধান, গাখীৰ, কাপোৰ, ঘেহু আৰু পেট্রলৰ উৎপাদনৰ পৰিমাণ দিয়া হৈছে। 1980ক ভিত্তি বছৰ হিচাপে লৈ পৰিমাণ সূচকাংক অভিগণনা কৰক ঃ

(ক) সৰল সমষ্টিগত পদ্ধতিৰে

(খ) মূল্য আপেক্ষিকৰ সৰল গড় পদ্ধতিৰে।

সামগ্রী	একক		উৎপাদিত সামগ্রীৰ পৰিমাণ
		1980	1990
ধান	কিল'গ্রাম	400000	700000
গাখীৰ	লিটাৰ	800000	905000
কাপোৰ	মিটাৰ	100000	105000
ঘেঁহু	কিল'গ্রাম	140000	160000
পেট্রল	লিটাৰ	300500	400000

প্রশ্ন ১২ঃ সূচকাংকৰ পৰীক্ষা বুলিলে আপুনি কি বুজে?

প্রশ্ন ১৩ঃ এটা উত্তম সূচকাংকই সিদ্ধ কৰিবলগীয়া গুৰুত্বপূর্ণ নীতি বা পৰীক্ষা ব্যাখ্যা কৰক।

প্রশ্ন ১৪ঃ তলৰ তালিকাখনত পাঁচবিধ সামগ্রীৰ মূল্য আৰু পৰিমাণ দিয়া হৈছে। 2000 বর্ষক ভিত্তি বর্ষ হিচাপে লৈ মুঠ মূল্য সূচকাংক নির্ণয় কৰক ঃ

(ক) সৰল সমষ্টিগত পদ্ধতিৰ দ্বাৰা

(খ) মুঠ মূল্য আপেক্ষিকৰ সৰল সমষ্টিগত পদ্ধতিৰ দ্বাৰা

সামগ্রী	2000		2002	
	মূল্য (টকাত)	পৰিমাণ (কিঃগ্রামত)	মূল্য (টকাত)	পৰিমাণ (কিঃগ্রামত)
A	400	10	700	12
B	800	15	1905	17
C	100	5	125	5
D	140	7	160	7
E	300	6	400	6

প্রশ্ন ১৫ঃতলৰ তথ্যটোৰ পৰা লাচপেয়াৰৰ আৰু পাছিৰ মূল্য আৰু পৰিমাণ সূচকাংক নির্ণয় কৰক। লগতে ফিছাৰৰ মূল্য আৰু পৰিমাণ সূচকাংক নির্ণয় কৰক।

সামগ্রী	ভিত্তিবর্ষ		চলিত বর্ষ	
	মূল্য (টকাত) p_0	পৰিমাণ (কিঃগ্রামত) q_0	মূল্য (টকাত) p_1	পৰিমাণ (কিঃগ্রামত) q_1
A	5	25	6	30
B	10	5	15	4
C	3	40	2	50
D	6	30	8	35

প্রশ্ন ১৬ঃ তলৰ তালিকাখনত 2000 আৰু 2006 বর্ষত উপভোগ কৰা সামগ্রীৰ মূল্য আৰু পৰিমাণ দিয়া হৈছে।

সামগ্রী	2000		2006	
	মূল্য (টকাত)	পৰিমাণ (কিঃগ্রামত)	মূল্য (টকাত)	পৰিমাণ (কিঃগ্রামত)
I	400	35	460	35
II	800	10	1000	10
III	300	15	350	12
IV	4000	10	5000	8
V	250	20	300	20

তলৰ সূচকাংকবিলাক নির্ণয় কৰক ঃ

(১) লাচপেয়াৰৰ মূল্য আৰু পৰিমাণ সূচকাংক।

(২) পাছিৰ মূল্য আৰু পৰিমাণ সূচকাংক।

(৩) ফিছাৰৰ মূল্য আৰু পৰিমাণ সূচকাংক।

*** ***** ***

অধ্যায় ১২ ঃ সময় শ্রেণী (TIME SERIES)

অধ্যায় গাঁথনি

১২.১ উদ্দেশ্য
১২.২ পৰিচয়
১২.৩ সময় শ্রেণীৰ সংজ্ঞা
১২.৪ সময় শ্রেণী বিশ্লেষণৰ গুৰুত্ব
১২.৫ এটা সময় শ্রেণীৰ উপাদান
১২.৬ দীর্ঘকালীন প্ৰৱণতা জোখাৰ পদ্ধতি
১২.৭ সচল গড় (Moving Average) পদ্ধতিৰে দীর্ঘকালীন প্ৰৱণতাৰ আকলন
১২.৮ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১২.৯ অধিক জানিবলৈ
১২.১০ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান
১২.১১ আৰ্হি প্ৰশ্ন

১২.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- সময় শ্রেণীৰ ধাৰণাটো বুজি পাব
- সময় শ্রেণী বিশ্লেষণৰ গুৰুত্ব ব্যাখ্যা কৰিব পাৰিব
- এটা সময় শ্রেণীক প্ৰভাৱিত কৰা কাৰকবোৰৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- সময় শ্রেণীত দীর্ঘকালীন প্ৰৱণতা নির্ধাৰণ কৰাৰ পদ্ধতিবোৰ জানিব পাৰিব।

১২.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

অর্থনীতি, ব্যৱসায় আৰু বাণিজ্য ক্ষেত্ৰত ভৱিষ্যৎ পৰিকল্পনা কৰি লোৱাটো অতি জৰুৰী। যেনে— এগৰাকী অর্থনীতিবিদে সদায় ৰাষ্ট্ৰীয় আয়ৰ পৰিমাণ, দ্ৰব্যমূল্য আৰু হাজিৰা, জনসংখ্যা আদিৰ বিষয়ে জানিবলৈ আগ্ৰহী হৈ থাকে। এই তথ্যবোৰে তেওঁক ভৱিষ্যৎ পৰিকল্পনাত সহায় কৰে। নাইবা এগৰাকী ব্যৱসায়ীয়ে আহি থকা বছৰটোত হ'ব পৰা বিক্ৰীৰ পৰিকল্পনা কৰে যাতে তেওঁৰ হাতত থকা সামগ্ৰীবোৰ সেইমতে মিলাই ল'ব পাৰে। এনে পৰিকল্পনা তৈয়াৰ কৰাৰ সময়ত অতীতৰ পৰা তথ্য সংগ্ৰহ কৰিব লাগে। অর্থাৎ, এনে পৰিকল্পনাৰ বাবে সময়ৰ ক্ৰমিক বিৰতিত (অথবা সময়ৰ কোনো বিন্দুত) সংগ্ৰহ তথা খতিয়ানৱদ্ধ কৰি ৰখা পৰিসাংখ্যিক তথ্যৰ সহায় ল'বলগীয়া হয়। সময়ৰ সৈতে সম্পর্ক থকা এনে পৰিসাংখ্যিক তথ্যবোৰকে সময় শ্রেণী বোলা হয়। সময় শ্রেণীৰ বিশ্লেষণে অর্থনীতি, ব্যৱসায় আৰু বাণিজ্যত এক গুৰুত্বপূর্ণ ভূমিকা

পালন কৰে। সময় শ্রেণীৰ তথ্য বিশ্লেষণ কৰা বেছিভাগ পৰিসাংখ্যিক কৌশলেই অৰ্থনীতিবিদসকলে বিকশাই তুলিছে। কিন্তু এই কৌশলবোৰ ব্যৱসায় আৰু বাণিজ্য ক্ষেত্ৰৰ সৈতে প্ৰত্যক্ষ সম্পৰ্ক নথকা কিন্তু প্ৰাকৃতিক আৰু সমাজ বিজ্ঞানৰ যিকোনো শাখাতে এক নিৰ্দিষ্ট সময় জুৰি ক্ৰমানুসাৰে সংগ্ৰহ কৰা যিকোনো পৰিঘটনাৰ আচৰণ বুজোৱা তথ্য অধ্যয়নৰ বাবেও প্ৰয়োগ কৰিব পাৰি।

১২.৩ সময় শ্রেণীৰ সংজ্ঞা (DEFINITION OF TIME SERIES)

সাধাৰণতে (কিন্তু সদায়েই নহয়) সমান সময়ৰ ব্যৱদানত এক নিৰ্দিষ্ট কালৰ বাবে সংগ্ৰহ কৰা নিৰীক্ষণৰ সমষ্টিটোকে সময় শ্রেণী বোলে। অৰ্থাৎ, সময় নিৰ্ভৰ (বছৰ, ছমাহ, তিনিমাহ, সপ্তাহ, দিন ইত্যাদি) তথ্যৰ সমষ্টি এটাকে সময় শ্রেণী বুলি কোৱা হয়।

সময় শ্রেণীৰ দুটামান উদাহৰণ হ'ল—

(i) বিগত দহ বছৰত ভাৰততে হোৱা বছৰেকীয়া তীখা উৎপাদন।

(ii) পণ্য দ্ৰব্যৰ দোকান এখনত বছৰৰ বেলেগ বেলেগ মাহত হোৱা বিক্ৰী।

(iii) এমাহৰ বাবে বোম্বে ষ্ট'ক একচেঞ্জত কোনো এটা শ্বেয়াৰৰ দৈনিক ক্লু'জিং দৰ।

(iv) এখন চহৰত বতৰ বিজ্ঞান বিভাগে এঘণ্টাৰ মূৰে মূৰে খতিয়ানৰদ্ধ কৰা তাপমান।

(v) বিগত তিনি বছৰত কোনো এখন দেশৰ ত্ৰিমাসিক উপভোক্তা দৰ সূচ্যাংক।

(vi) মে', জুন, জুলাই আৰু আগষ্ট মাহত কোনো এখন নিৰ্দিষ্ট চহৰত দৈনিক হোৱা বৰষুণৰ পৰিমাণ।

গাণিত্যিকভাৱে এটা সময় শ্রেণীক কাৰ্যকৰী সম্পৰ্কেৰে/ফলনীয় সম্পৰ্কেৰে (functional relationship) বুজোৱা হয়— $Y = f(t)$

ইয়াত, y হ'ল t সময়ত বিবেচনাৰ বাবে গ্ৰহণ কৰা পৰিঘটনাৰ (অথবা চলকৰ) মান। অৰ্থাৎ, যদি $t_1, t_2, \ldots\ldots\ldots t_n$ সময়ত কোনো এটা পৰিঘটনাৰ (চলকৰ) মান ক্ৰমে $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots y_n$ হয়, তেন্তে শ্রেণী

t : t_1 t_2 $t_3 \ldots\ldots\ldots t_n$

y : y_1 y_2 $y_3 \ldots\ldots\ldots y_n$

এ এটা সময় শ্রেণী গঠন কৰিব।

১২.৪ সময় শ্রেণী বিশ্লেষণৰ গুৰুত্ব (IMPORTANCE OF TIME SERIES ANALYSIS)

ব্যৱসায়ী, অৰ্থনীতিবিদ, বিজ্ঞানী, সমাজতাত্বিক, ভূতত্ববিদ আৰু বিভিন্ন বিষয়ৰ গৱেষণা কৰ্মীৰ বাবে সময় শ্রেণীৰ বিশ্লেষণ এক বিশেষ গুৰুত্বপূৰ্ণ বিষয়। তলত সময় শ্রেণী বিশ্লেষণৰ গুৰুত্ব বুজাব পৰা দুটামান দিশ আলোচনা কৰা হ'ল।

১) **অতীত আচৰণ (Past Behaviour) ঃ** সময় শ্রেণীৰ বিশ্লেষণে আমাক কোনো এটা চলকৰ অতীত আচৰণ বুজাত সহায় কৰে। অতীতৰ তথ্য বিশ্লেষণে অধ্যয়নৰ বাবে লোৱা চলকটোৰ ওপৰত পৰা বিভিন্ন কাৰকৰ প্ৰভাৱ জনাত সহায় কৰে।

২) **ভৱিষ্যতবাণী (Forecasting) ঃ** অতীত আচৰণ জনাৰ পাছত কিছু নির্দিষ্ট সীমাৱদ্ধতাৰ ভিতৰত অধ্যয়নৰ বাবে লোৱা চলকটোৰ ভৱিষ্যৎ আচৰণ সম্পর্কে আগতীয়াকৈ কোৱাটো সম্ভৱপৰ হ'ব পাৰে। ই ভৱিষ্যৎ কার্য পৰিকল্পনা গ্ৰহণত সহায় কৰে। আমাৰ দেশৰ বিভিন্ন পঞ্চবার্ষিক পৰিকল্পনা অতীতৰ তথ্য বিশ্লেষণৰ আধাৰত প্ৰস্তুত কৰা হয়।

৩) **মূল্যায়ন (Evaluation) ঃ** সময় শ্রেণীৰ বিশ্লেষণে কোনো পৰিঘটনাৰ সাম্প্ৰতিক সাফল্য মূল্যায়ন কৰাত সহায় কৰে। সময় শ্রেণীৰ তথ্যৰ আধাৰত কোনো পৰিকল্পনাৰ ভেটিটোৰ অগ্ৰগতিৰ পুনৰীক্ষণ তথা মূল্যায়ন কৰা হয়। যেনে— আমাৰ দেশত বিভিন্ন পৰিকল্পনাৰ অগ্ৰগতি মুঠ ৰাষ্ট্ৰীয় উৎপাদিত দ্ৰব্যৰ (Gross National Product) বৃদ্ধিৰ বার্ষিক হাৰৰ সৈতে তুলনা কৰি জুখি চোৱা হয়।

৪) **তুলনা (Comparison) ঃ** সময় শ্রেণীৰ বিশ্লেষণে আমাক এছোৱা সময়ক আন এছোৱাৰ সৈতে তুলনা কৰি চোৱাত সহায় কৰে। ই প্ৰকৃত মূল্য আৰু প্ৰত্যাশিত মূল্যৰ তুলনা কৰাতো সহায় কৰে। অধ্যয়নৰ বাবে লোৱা চলকৰ বিচলনৰ (Variation) কাৰণ অধ্যয়ন আৰু পৃথক কৰি সময় শ্রেণীৰ বিশ্লেষণ তুলনাৰ এক বিজ্ঞানসন্মত ভেটি গঢ়ি দিয়ে।

১২.৫ এটা সময় শ্রেণীৰ উপাদান (COMPONENTS OF TIME SERIES)

সময় শ্রেণীৰ বিশ্লেষণৰ পৰা গম পোৱা গৈছে যে যদি বিভিন্ন সময়ত কোনো এটা পৰিঘটনাৰ মান লক্ষ্য কৰা যায় তেন্তে সেই সময়বোৰত লব্ধ মানবোৰত সদায় তাৰতম্য থাকে। এনে তাৰতম্যৰ আঁৰত বিভিন্ন কাৰকৰ (অথবা শক্তিৰ) যুটীয়া প্ৰভাৱ থাকে। এটা উদাহৰণ লোৱা হ'ল। এবিধ সামগ্ৰীৰ বিক্ৰী (y) নির্ভৰ কৰিবলগীয়া কাৰককেইটা হ'ল— (i) বিজ্ঞাপনত হোৱা ব্যয় (ii) সামগ্ৰীবিধৰ মূল্য (iii) উপভোক্তাৰ আয় (iv) বজাৰত থকা অন্য প্ৰতিদ্বন্দ্বী সামগ্ৰী (v) উপভোক্তাৰ ৰুচি, ফেশ্বন, অভ্যাস আৰু পৰম্পৰা ইত্যাদি। একেদৰে, কোনো এবিধ সামগ্ৰীৰ মূল নির্ধাৰণত প্ৰভাৱ পেলোৱা কাৰককেইটা হ'ল— (i) চাহিদা (ii) বজাৰত থকা অন্য প্ৰতিদ্বন্দ্বী সামগ্ৰী (iii) কেঁচামালৰ সহজলভ্যতা (iv) পৰিবহন ব্যয় ইত্যাদি।

এটা সময় শ্রেণীৰ আচল প্ৰকৃতি জানিবলৈ পৰিসংখ্যাবিদসকলে কোনো এক সময় শ্রেণীৰ পৰিঘটনা এটাৰ মান প্ৰভাৱিত কৰিব পৰা বিভিন্ন কার্য সম্পাদনকাৰী কাৰকক (শক্তিক) বহলভাৱে চাৰিটা ভাগত ভাগ কৰিছে। এই ভাগকেইটাক একেলগে **এটা সময় শ্রেণীৰ উপাদান** বুলি কোৱা হয়। উপাদান চাৰিটা হ'ল—

(ক) দীর্ঘকালীন প্ৰৱণতা অথবা প্ৰৱণতা (Secular Trend or Trend/T)

(খ) ঋতুনিষ্ঠ বিচলন (Seasonal Variation/S)

(গ) চক্রীয় বিচলন (Cyclical Variation/C)

(ঘ) অনিয়মিত অথবা যাদৃচ্ছিক বিচলন (Irregular or Random Variation/(I)

টোকা ঃ বিচলন (variation) শব্দটোৰ সলনি একে অর্থ বহনকাৰী তাৰতম্য (fluctuation) অথবা সঞ্চাৰ (movement) শব্দ দুটাও ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি।

সময় শ্রেণী তথ্যবোৰৰ মাজত দেখা পৰিৱর্তনবোৰৰ কাৰণ হ'ল এই চাৰিটা উপাদানৰ সন্মিলিত প্রভাৱ। এতিয়া আমি সময় শ্রেণীৰ উপাদানকেইটাৰ বিষয়ে চমুকৈ আলোচনা কৰিম।

(ক) দীর্ঘকালীন প্রৱণতা অথবা প্রৱণতা (Secular Trend or Trend /T) ঃ এক দীঘলীয়া সময়ৰ বাবে কোনো এক সময় শ্রেণীৰ তথ্যবোৰৰ অবিৰত বিকাশ (বৃদ্ধি), নিশ্চলতা (stagnation) অথবা নিম্নগামীতা (decline) প্রদর্শন কৰাৰ সাদাৰণ প্রৱণতাটোকে **দীর্ঘকালীন প্রৱণতা অথবা প্রৱণতা** বোলে। ব্যৱসায় আৰু অর্থনীতিৰ সৈতে সম্পর্ক থকা অধিকাংস সময় শ্রেণীতে এই পৰিঘটনাটো সাধাৰণতে লক্ষ্য কৰা যায়। জনসংখ্যা, দ্রব্যমূল্য, উপার্জন, সামগ্রী উৎপাদন আৰু বিক্রী, প্রচলিত হৈ থকা ধন আদিৰ সৈতে জড়িত সময় শ্রেণীৰ ক্ষেত্রত সাধাৰণতে একোটা উর্ধগামী প্রৱণতা দেখা যায়। আনহাতে জন্মহাৰ, মৃত্যুহাৰ আৰু চিকিৎসা বিজ্ঞান তথা চিকিৎসা সুবিধাৰ লগতে উন্নততৰ শৌচালয় প্রয়োগৰ অভ্যাস আৰু খাদ্য গ্রহণৰ অভ্যাসক আদিৰ বাবে কমি যোৱা মৃত্যুহাৰ আদিৰ সৈতে জড়িত সময় শ্রেণীৰ একোটা নিম্নগামী প্রৱণতা থকা দেখা যায়। চিম্পচন আৰু কাফ্কাই দীর্ঘকালীন প্রৱণতাৰ সংজ্ঞা তলত উল্লেখ কৰা ধৰণে দাঙি ধৰিছে— 'কোনো এছোৱা নির্দিষ্ট সময়ত এটা সময় শ্রেণীৰ বাঢ়ি যোৱা অথবা নামি যোৱাৰ স্বাভাৰিক আগ্রহকে প্রৱণতা বোলে। ইয়াক **দীর্ঘম্যাদী প্রৱণতা (Secular Trend)** অথবা দীর্ঘকালীন প্রৱণতা (long term trend) বুলিও কোৱা হয়। প্রৱণতাৰ ধাৰণাটোৱে হ্রস্ব-পৰিসৰৰ দোদুল্যমান শ্রেণীক (short-rang oscillation) সামৰি নলয়। কিন্তু এটা দীঘলীয়া সময়ৰ বাবে চলা স্থিৰ সঞ্চাৰ প্রৱণতাৰ অংশ।

অভিমত

এই কথা মনত ৰখা ভাল যে 'দীঘলীয়া সময়' (long period) বোলা কথাযাৰি আপেক্ষিক। ইয়াৰ কোনো প্রকৃত সংজ্ঞা দাঙি ধৰিব পৰা নাযায়। কিছুমান পৰিঘটনাৰ ক্ষেত্রত কেইঘণ্টামান সময়েই দীঘলীয়া সময় হ'ব পাৰে আন আন কিছুমানৰ ক্ষেত্রত ৩-৪ দিন সময়কো পর্যাপ্ত দীঘলীয়া সময় নহয় বুলি ধৰা হ'ব পাৰে। যেনে— এবিধ কৃষিজাত অথবা উদ্যোগজাত সামগ্রীৰ উৎপাদন যোৱা তিনি বছৰত বাঢ়িছে। এই ক্ষেত্রত ৩ বছৰটোক এটা দীর্ঘকালীন প্রৱণতা বুলি ধৰা নহয়। কাৰণ, কথাটো জনাৰ বাবে আমাক ৭-৮ বছৰৰ ডেটাৰ প্রয়োজন হৈছে। আনহাতে, ধৰা হ'ল এগৰাকী ৰোগীৰ খুউব জ্বৰ উঠিছে। ৰোগীৰ তদাৰক কৰি থকা চিকিৎসকগৰাকীয়ে প্রতি ৪ ঘণ্টাৰ মূৰে মূৰে বিশেষ দৰব এটাৰ প্রভাৱ পৰীক্ষা কৰিবলৈ ৰোগীগৰাকীৰ জ্বৰ জুখি থাকিবলৈ নির্দেশ দিছে। এই নির্দেশ ৪৮ৰ পৰা ৭২ ঘণ্টা পর্যন্ত বাহাল থাকিব। উদাহৰণটোৰ ক্ষেত্রত সেই সময়খিনিহে এক দীঘলীয়া সময়।

প্ৰৱণতাৰ প্ৰয়োগ

এক দীঘলীয়া সময়ৰ বাবে তথ্য অধ্যয়ন কৰি আমি বিবেচনাৰ বাবে গ্ৰহণ কৰা পৰিঘটনাটোৰ আচৰণ বিন্যাস সম্পৰ্কে এটা সাধাৰণ ধাৰণা কৰিব পাৰো। ই ব্যৱসায়কেন্দ্ৰিক পূৰ্বানুমান কৰাত আৰু ভৱিষ্যৎ কাৰ্য পৰিকল্পনা প্ৰস্তুত কৰাত সহায় কৰে। প্ৰৱণতা বিশ্লেষণে আমাক ভিন ভিন সময়ৰ দুটা অথবা ততোধিক সময় শ্রেণী তুলনা কৰি শ্রেণীবোৰ সন্দৰ্ভত গুৰুত্বপূৰ্ণ সিদ্ধান্তত উপনীত হোৱাত সহায় কৰে।

(খ) ঋতুনিষ্ঠ বিচলন (Seasonal Variations/S) : এটা সময় শ্রেণীৰ মানবোৰৰ এবছৰ অথবা তাতোকৈ কম সময়ৰ ভিতৰত ঘটা তাৰতম্য অথবা বিচলনকে ঋতুনিষ্ঠ বিচলন বোলে। ছন্দৱদ্ধ প্ৰকৃতিৰ বলৰ (forces) বাবে এনে বিচলনৰ সৃষ্টি হয়। এই বলৰ এবছৰতকৈ কম সময় জুৰি নিৰ্দিষ্ট সময়ৰ অন্তৰে অন্তৰে পুনৰাবৃত্তি ঘটে। যিবোৰ সময় শ্রেণীৰ তথ্যবোৰ প্ৰতি তিনি মাহৰ মূৰে মূৰে, এমাহৰ মূৰে মূৰে, প্ৰতি সপ্তাহৰ মূৰে মূৰে অথবা দৈনিক খতিয়ানৱদ্ধ কৰা হয় তেনে সময় শ্রেণীত এই বিচলনৰ উপস্থিতি দেকা যায়। অৰ্থাৎ, **যিটো সময় শ্রেণী তথ্যত কেৱল বাৰ্ষিক গণনাবোৰৰ উল্লেখ থাকে তেনে সময় শ্রেণীত ঋতুনিষ্ঠ বিচলন থাকিব নোৱাৰে।** অৰ্থনীতিকেন্দ্ৰিক বেছিভাগ সময় শ্রেণীয়েই উত্থান-পতনৰ দ্বাৰা প্ৰভাৱিত। উদাহৰণ স্বৰূপে দ্ৰব্যমূল্য, উৎপাদন আৰু পণ্যদ্ৰব্যৰ উপভোগ, কোনো আৱশ্যকীয় ৰচদ-পাতি থকা দোকানৰ বিক্ৰী আৰু লাভ, বেংকৰ বকেয়া ধন, জমা ধন আদিৰ ডেটা ঋতুনিষ্ঠ বিচলনৰ দ্বাৰা প্ৰভাৱিত। তলত উল্লেখ কৰা কাৰণ দুটাৰ বাবে ঋতুনিষ্ঠ বিচলন ঘটে—

(i) প্ৰাকৃতিক কাৰণ (Natural Causes) ঃ নামটোৰ পৰাই অনুমান কৰিব পাৰি যে ঋতুনিষ্ঠ বিচলনত বিভিন্ন ঋতু অথবা বতৰৰ অৱস্থা আৰু জলবায়ুৰ পৰিৱৰ্তনে গুৰুত্বপূৰ্ণ ভূমিকা পালন কৰে। যেনে— বৰষুণৰ বতৰত ছাতিৰ বিক্ৰী সৰ্বাদিক হয়, শীতত ঊণী কাপোৰৰ চাহিদা সবাতোকৈ বেছি হয়, গৰমৰ দিনত শীতল পানীয় আৰু আইচ-ক্ৰীমৰ বিক্ৰী বাঢ়ে, খেতি চপাবৰ সময়ত কৃষি কাৰ্যৰ বাবে প্ৰয়োজনীয় সামগ্ৰীবোৰৰ দাম সদায় কমি যায় আৰু খেতি চপোৱা হ'লে পুনৰ লাহে লাহে সামগ্ৰীবোৰৰ দাম উৰ্ধমুখী হয় ইত্যাদি।

(ii) নীতি-নিয়ম আৰু সামাজিক প্ৰথা (Rituals and Social Customs) ঃ মানৱ সৃষ্ট নীতি-নিয়ম, সামাজিক প্ৰথা আৰু পৰম্পৰাও কোনো এক সময় শ্রেণীৰ ঋতুনিষ্ঠ বিচলনৰ বাবে দায়ী। যেনে— দেৱালী আৰু বিয়াৰ বতৰত গহনাৰ বিক্ৰী বাঢ়ি যায়, শিক্ষাবৰ্ষৰ আৰম্ভণিত কিতাপ, কাগজ, ইউনিফ'ৰ্ম আদিৰ বিক্ৰী বাঢ়ে, নতুন বছৰৰ আৰম্ভণিত শুভেচ্ছা কার্ডৰ চাহিদা বাঢ়ি যায় ইত্যাদি।

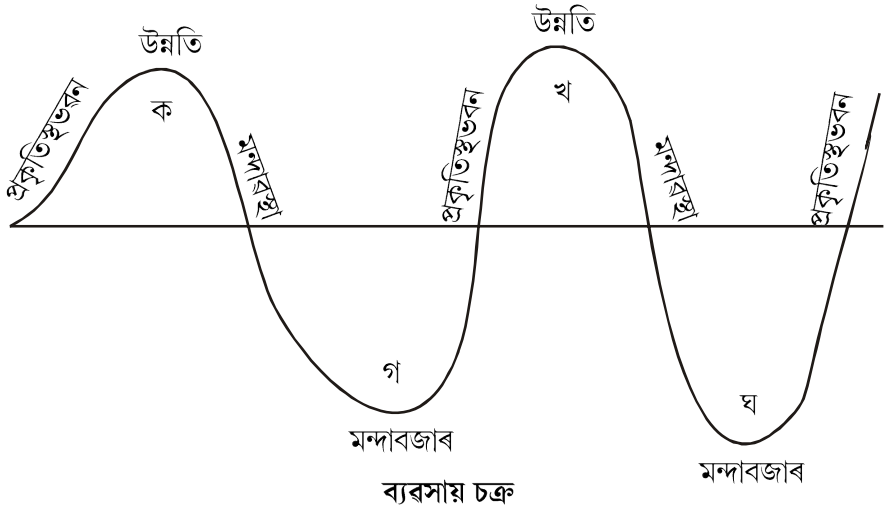
ঋতুনিষ্ঠ বিচলনৰ ব্যৱহাৰ ঃ

ঋতুনিষ্ঠ বিচলনৰ প্ৰধান উদ্দেশ্য হৈছে এনে বিচলনক প্ৰৱণতাৰ পৰা বিচ্ছিন্ন কৰা আৰু বিচলনবোৰৰ প্ৰভাৱ অধ্যয়ন কৰা। ঋতুনিষ্ঠ বিন্যাসৰ অধ্যয়ন ব্যৱসায়ী, উৎপাদক, বিক্ৰয় ব্যৱস্থাপক আদিৰ বাবে অত্যন্ত উপযোগী। এনে অধ্যয়নে ভৱিষ্যৎ কৰ্মপন্থাৰ পৰিকল্পনা কৰাত সহায় কৰে। ক্ৰয়, উৎপাদন, উদ্ভাৱনীমূলক নিয়ন্ত্ৰণ আৰু কাৰ্যসূচীৰ বিজ্ঞাপনকেন্দ্ৰিক বিভিন্ন নীতিগত সিদ্ধান্ত

লোৱাতো এনে বিচলনে সহায় কৰে। ঋতুনিষ্ঠ বিচলন সম্পৰ্কীয় জ্ঞানৰ অনুপস্থিতিত কোনো ঋতুসংগত উৰ্দ্ধমুখিতা এক উন্নততৰ ব্যৱসায় দশাৰ ইংগিত বুলি ভ্ৰমণ হ'ব পাৰে। একেদৰে এই জ্ঞানৰ অভাৱত কোনো ঋতুসংগত নিম্নগামীতা ব্যৱসায় দশা বেয়ালৈ ঢাল খোৱাৰ ইংগিত বুলি ভুলকৈ ধৰি লোৱা হ'ব পাৰে।

(গ) চক্ৰীয় বিচলন (Cyclical Variation/C) ঃ এবছৰতকৈ দীৰ্ঘকাল জুৰি হোৱা দোলন (oscillation) প্ৰদৰ্শন কৰা সময় শ্ৰেণীত ধৰা পৰা দোলন গতিবোৰকে চক্ৰীয় বিচলন বোলে। চক্ৰীয় বিচলন কম-বেছি পৰিমাণে নিয়মীয়া যদিও ই একেবাৰে সমৰূপভাৱে কাল-নিৰ্দিষ্ট (uniformly periodic) নহ'বও পাৰে। অৰ্থাৎ, এনে বিচলনে সম্পূৰ্ণ সমান অন্তৰৰ ব্যৱধান সম্পূৰ্ণ একে বিন্যাস অনুসৰণ কৰিবও পাৰে, নকৰিবও পাৰে। সাধাৰণতে এটা চক্ৰীয় কাল ৭ ৰ ৯ বছৰ পৰ্যন্ত চলিব পাৰে।

প্ৰায় সকলোবোৰ ব্যৱসায়িক আৰু অৰ্থনৈতিক সময় শ্ৰেণীতে চক্ৰীয় বিচলন দেখা পোৱা যায়। এইবোৰক **ব্যৱসায় চক্ৰ (business cycle)** অথবা **বাণিজ্য চক্ৰ (trade cycle)** বুলি কোৱা হয়। সময়ে সময়ে ব্যৱসায়ত হোৱা উত্থান-পতন (অথবা উৰ্দ্ধমুখীতা আৰু নিম্নগামীতা) হ'ল এই চক্ৰীয় বিচলনৰ প্ৰভাৱ। **এটা ব্যৱসায় চক্ৰত চাৰিটা প্ৰধান স্তৰ থাকে— উন্নতি (prosperity/boom), মন্দাৱস্থা (recession), মন্দা বজাৰ (depression)** আৰু **প্ৰকৃতিস্থভবন (recovery)**। এটা ব্যৱসায় চক্ৰ সম্পূৰ্ণ নোহোৱালৈকে প্ৰতিটো স্তৰেই ক্ৰমান্বয়ে পৰৱৰ্তী স্তৰলৈ সলনি হৈ গৈ থাকে।



ব্যৱসায় চক্ৰ

দুটা ক্ৰমিক উন্নতিকাল অথবা মন্দা বজাৰ কালৰ (ক আৰু খ অথবা গ আৰু ঘ) মাজৰ সময়ৰ ব্যৱধানকে চক্ৰ এটাৰ দৈৰ্ঘ্য বুলি কোৱা হয়।

চক্ৰীয় বিচলনৰ ব্যৱহাৰ ঃ ব্যৱসায় কাৰ্যবাহীসকলৰ বাবে চক্ৰীয় বিচলনৰ অধ্যয়ন এক গুৰুত্বপূৰ্ণ বিষয়। এনে বিচলন অধ্যয়ন কৰি ব্যৱসায়িক কাম-কাজৰ স্তৰবোৰ সুস্থিৰ কৰাৰ লক্ষ্যেৰে বিভিন্ন নীতি নিৰ্ধাৰণ কৰিব পৰা যায়। চক্ৰীয় বিচলনৰ জ্ঞানে এগৰাকী ব্যৱসায়ীক উন্নতি আৰু মন্দা বজাৰৰ মাজত থকা সময়ৰ ব্যৱধান সম্পৰ্কে ধাৰণা কৰাত সহায় কৰে। এই জ্ঞানৰ সহায়ত

ব্যৱসায়ীসকলে নিজৰ সামগ্ৰীৰ বাবে বজাৰখনৰ সুস্থিৰতা বৰ্তাই ৰাখিবলৈ সময়োপযোগী ব্যৱস্থা গ্ৰহণ কৰিব পাৰে।

টোকা ঃ ঋতুনিষ্ঠ বিচলন আৰু চক্ৰীয় বিচলন দুয়োটাৰে প্ৰকৃতি পৰ্যাবৃত্ত (periodic) যদিও দুয়োটাৰে মাজত কিছুমান বিশেষ প্ৰভেদো আছে। প্ৰভেদবোৰ তলত উল্লেখ কৰা হ'ল—

ঋতুনিষ্ঠ বিচলন	চক্ৰীয় বিচলন
(i) ঋতুনিষ্ঠ বিচলন এবছৰৰ ভিতৰত ঘটে	(i) চক্ৰীয় বিচলন এবছৰতকৈ দীৰ্ঘ সময়ৰ ভিতৰত ঘটে। সাধাৰণতে এটা চক্ৰীয় বিচলন কাল ৭ৰ পৰা ৯ বছৰ পৰ্যন্ত চলিব পাৰে।
(ii) ঋতুনিষ্ঠ বিচলনৰ পৰ্যাবৃত্ত কালৰ ব্যৱধান সমান	(ii) চক্ৰীয় বিচলনৰ পৰ্যাবৃত্ত কালৰ ব্যৱধান সমান নহয়। এনে বিচলন কেৱল মোটামুটিভাৱে নিয়মীয়াকৈ সংঘটিত হয়।
(iii) ঋতুনিষ্ঠ বিচলনৰ বাবে জলবায়ু পৰিৱৰ্তন আৰু মানৱ সৃষ্ট নীতি-নিয়ম তথা সামাজিক প্ৰথাক দায়ী কৰা হয়।	(iii) চক্ৰীয় বিচলনৰ বাবে দ্ৰব্যমূল্য, উৎপাদন, বিক্ৰী, চাহিদা আদিৰ দৰে অৰ্থনৈতিক কাৰকক দায়ী কৰা হয়।

(ঘ) অনিয়মিত অথবা যাদৃচ্ছিক বিচলন (Irregular Variations/I) ঃ এটা সময় শ্ৰেণীত অন্তৰ্নিহিত হৈ থকা, অনিয়মিত অথবা যাদৃচ্ছিক বিচলন বোলে। এনে বিচলনবোৰ সম্পূৰ্ণ যাদৃচ্ছিক আৰু অনিশ্চিত। দীৰ্ঘকালীন প্ৰৱণতা, ঋতুনিষ্ঠ বিচলন আৰু চক্ৰীয় বিচলনে সামৰি নোলোৱা সকলোবোৰ সঞ্চাৰণকে এই বিচলনৰ উদাহৰণ বুলি ধৰা হয়। বানপানী, দুৰ্ভিক্ষ, যুদ্ধ, ভূমিকম্প, অগ্নিকাণ্ড, মহামাৰী, শ্ৰমিক ইউনিয়নৰ হৰতাল, সন্ত্ৰাসবাদ আদিৰ দৰে পূৰ্বানুমান কৰিব নোৱৰা কাৰকে যাদৃচ্ছিক বিচলন সংঘটিত কৰে। যিহেতু এনে কাৰকবোৰৰ পূৰ্বানুমান সহজসাধ্য নহয়, সেয়েহে এইবোৰ মানুহে নিয়ন্ত্ৰণ কৰিব নোৱাৰে। প্ৰায় সকলোবোৰ সময় শ্ৰেণীতে অনিয়মিত বিচলনৰ উপস্থিতি অনিবাৰ্য। সাধাৰণতে এনে বিচলনে হ্ৰস্বম্যাদী তাৰতম্য সংঘটিত কৰে যদিও কেতিয়াবা এনে বিচলনৰ গাঢ়তাই নতুন চক্ৰীয় অথবা অন্য সঞ্চাৰণৰ সৃষ্টি কৰিব পাৰে।

এনে বিচলন অতি যাদৃচ্ছিক প্ৰকৃতিৰ বাবে ইয়াৰ বিশেষ অধ্যয়ন সম্ভৱ নহয়। এনে বিচলনৰ পূৰ্বানুমান অথবা পৰিকল্পনাও কৰিব পৰা নাযায়। এনে বিচলনৰ ক্ষেত্ৰত কৰিব পৰা একমাত্ৰ কামটো হ'ল মোটামুটি পৰিকল্পনা (অতীত অভিজ্ঞতাৰ ভিত্তিত) যুগুত কৰা আৰু ব্যৱসায়ৰ স্বাভাৱিক কাল চলি থকা সময়ত এনে অস্বাভাৱিকতাৰ মুখামুখি হ'ব পৰাকৈ বিকল্প ব্যৱস্থা সাজু কৰি ৰখা।

১২.৬ দীৰ্ঘকালীন প্ৰৱণতা জোখাৰ পদ্ধতি (METHODS OF MEASURING SECULAR TREND)

এটা সময় শ্ৰেণীৰ দীৰ্ঘকালীন প্ৰৱণতা অধ্যয়ন কৰাৰ আৰু জোখাৰ পদ্ধতি সাধাৰণতে চাৰিটা। পদ্ধতিকেইটা হ'ল—

(i) ভৌগলিক পদ্ধতি (Graphical Method)

(ii) অর্ধ-গড় পদ্ধতি (Semi-Average Method)

(iii) সচল-গড় পদ্ধতি (Moving Average Method)

(iv) লঘিষ্ঠ বর্গৰ পদ্ধতি (Method of Least Squars)

টোকা ঃ এই অধ্যায়টিত আমি কেৱল **সচল-গড় পদ্ধতি**টোৰ বিষয়েহে আলোচনা কৰিম।

১২.৭ সচল গড় পদ্ধতিৰে দীর্ঘকালীন প্রৱণতাৰ আকলন (ESTIMATION OF TREND BY METHOD OF MOUING AVERAGE)

সচল গড় পদ্ধতি হ'ল দীর্ঘকালীন প্রৱণতা জোখাৰ এক সৰল আৰু নমনীয় পদ্ধতি। এই পদ্ধতিৰে এক নির্দিষ্ট সময় ব্যৱধানৰ বাবে দিয়া মানবোৰৰ মাজৰ পৰা গড় মান (সমান্তৰ মাধ্য) বাহিৰ কৰা হয় আৰু সেই মানটোক প্রদত্ত সময় ব্যৱধানৰ কেন্দ্রত বহুওৱা হয়।

সচল গড়ৰ বৈশিষ্ট্য হ'ল ইয়াৰ ধ্রুৱকটো (constant)। ইয়াক সচল গড়ৰ **পর্যায়কাল (period)** বোলা হয়। অর্থাৎ, 'm' পর্যায়কালৰ সচল গড় হ'ল 'm' ৰ ক্রমিক গড়ৰ (সমান্তৰ মাধ্য) এটা শ্রেণী। ই 1st, 2nd, 3rd..... ইত্যাদি সময়ত আৰম্ভ হোৱা মানবোৰ অধিক্রমণ (overlapping) কৰি যায়। যেনে, $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, ...$, মানৰ সময় শ্রেণীটোৰ 'm' পর্যায়কালৰ সচল গড় (M. A) মানবোৰ হ'ব ক্রমে ঃ

1^{st} M.A = $\frac{1}{m}(y_1 + y_2 + ... + y_m)$

2^{nd} M.A = $\frac{1}{m}(y_2 + y_3 + ... + y_{m+1})$

3^{rd} M.A = $\frac{1}{m}(y_3 + y_4 + ... + y_{m+2})$ ইত্যাদি। তলত দুটা উদাহৰণ বহলাই আলোচনাকৰা হ'ল ঃ

উদাহৰণ (i) যেতিয়া পর্যায়কাল অযুগ্ম সংখ্যা (odd) হয় ঃ যদি সুচল গড়ৰ 'm' পর্যায়কাল অযুগ্ম হয়, তেন্তে সচল গড়ৰ পৰৱর্তী মানবোৰ অনুৰূপ কাল অন্তৰৰ একেবাৰে মাজৰ মানটোৰ বিপৰীতে বহুওৱা হয়। উদাহৰণ, যদি m = 5, তেন্তে প্রথম সচল গড় মানটো সময় শ্রেণীৰ ৩য় মানৰ বিপৰীতে বহুওৱা হ'ব, দ্বিতীয় সচল গড় মানটো সময় শ্রেণীৰ ৪র্থ মানৰ বিপৰীতে বহুওৱা হ'ব ইত্যাদি।

উদাহৰণ (ii) যেতিয়া পর্যায়কাল যুগ্ম সংখ্যা (even) হয় ঃ যদি সচল গড়ৰ 'm' পর্যায়কাল যুগ্ম হয়, তেন্তে ইয়াৰ দুটা মধ্য কাল (middle periods) থাকিব। শ্রেণীটোৱে সামৰি লোৱা শ্রেণী অন্তৰালৰ দুটা মধ্যকালৰ মাজত সচল গড়ৰ মানবোৰ বহুওৱা হ'ব। কিন্তু নিশ্চিতভাৱে এই ক্ষেত্রত সচল গড় মানবোৰ প্রদত্ত সময় শ্রেণীটোৰ পর্যায়কাল এটাৰ সংপাত (coincide) হ'ব নোৱাৰিব। সেইবাবে সচল গড়ৰ এটা দ্বি-পর্যায়কাল গড় (two-period average) উলিয়াই মৌলিক

তথ্যৰ সৈতে মানবোৰৰ মাজত কাল সংহতি (synchronise) অনাৰ প্ৰয়াস কৰা হয় আৰু এনে মানবোৰ অনুৰূপ কাল পৰ্যায়ৰ মাজত বহুওৱা হয়। এই কৌশলটোক **কেন্দ্ৰস্থকৰণ (centering)** বোলা হয় আৰু অনুৰূপ সচল গড় মানবোৰক **কেন্দ্ৰীভূত সচল গড় (centred moving average)** বোলা হয়। যেনে, যদি m = 4 হয়, তেন্তে প্ৰথম সচল গড় মানটো ২য় আৰু ৩য় আৰু ৪র্থ শ্ৰেণী অন্তৰালৰ মাজত বহিব ইত্যাদি। মানবোৰ তলত দিয়া ধৰণৰ হ'ব—

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{4}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{4}(y_2 + y_3 + y_4 + y_5)$$

$$\bar{y}_3 = \frac{1}{4}(y_3 + y_4 + y_5 + y_6)$$ আৰু

এতিয়া, $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3$ ইত্যাদিৰ দ্বি-পৰ্যায়কাল সচল গড় উলিয়াই ল'লে কেন্দ্ৰীভূত সচল গড়বোৰ পোৱা যাব।

অর্থাৎ,

প্ৰথম কেন্দ্ৰীভূত সচল গড় হ'ব $= \frac{1}{2}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2)$

দ্বিতীয় কেন্দ্ৰীভূত সচল গড় হ'ব $= \frac{1}{2}(\bar{y}_2 + \bar{y}_3)$ ইত্যাদি।

ইয়াত, কেন্দ্ৰীভূত সচল গড়বোৰ ৩য়, ৪র্থ, ৫ম ইত্যাদি পৰ্যায়ৰ মাজত বহুওৱা হ'ব।

সচল গড় পদ্ধতিৰ সুবিধা আৰু অসুবিধা

সুবিধা ঃ

(i) এই পদ্ধতিত কোনো গাণিতিক জটিলতা নাই। বুজিবলৈ আৰু প্ৰয়োগ কৰিবলৈ সহজ।

(ii) এই পদ্ধতিটোৰ কিছুমান অন্তর্নিহিত নমনীয়তা আছে। আগৰে পৰা থকা তথ্যৰ সৈতে আন দুটামান নতুন নিৰীক্ষণ যোগ দিলে ইতিমধ্যে লব্ধ দীর্ঘকালীন প্ৰবণতা মানবোৰৰ ওপৰত কোনো প্ৰভাৱ নপৰে। কেৱল ইয়াৰ ফলত অৱশেষত আন দুটামান অতিৰিক্ত মান পোৱা যাব।

(iii) যদি সচল গড়ৰ পৰ্যায়কাল আৰু ডেটাৰ চক্ৰীয় তাৰতম্যৰ পৰ্যায়ৰ সংপাত ঘটে তেন্তে এই পদ্ধতিটোৱে চক্ৰীয় তাৰতম্যৰ প্ৰভাৱ সম্পূৰ্ণৰূপে বিলোপ কৰে।

(iv) এই পদ্ধতিটোৱে ঋতুনিষ্ঠ, চক্ৰীয় আৰু যাদৃচ্ছিক বিচলনো জোখা হয়।

অসুবিধা ঃ

(i) সচল গড় পদ্ধতিৰ এটা প্ৰধান অসুবিধা হ'ল আমি ইয়াৰ দ্বাৰা সকলোবোৰ প্ৰদত্ত নিৰীক্ষণ ডেটাৰ বাবে দীর্ঘকালীন প্ৰবণতাৰ মান উলিয়াব নোৱাৰো। সচল গড়ৰ পৰ্যায়কালৰ ওপৰত নির্ভৰ কৰি আৰম্ভণি আৰু শেষৰ দীর্ঘকালীন প্ৰবণতা মান দুটামান বাদ পৰি যোৱাৰ সম্ভাৱনা থাকে।

(ii) এই পদ্ধতিটো পূর্বানুমান উদ্দেশ্যত প্রয়োগ কৰাৰ বাবে উপযুক্ত নহয়।

(iii) সচল গড়ৰ পর্যায়কাল বাছনি কৰাটো এটা জটিল কাম। পর্যায়কাল বাছনিৰ সময়ত অত্যন্ত সাৱধানতা অৱলম্বন কৰিব লাগে। সময় শ্রেণীত ব্যৱসায় চক্র নাথাকিলে এই কথা বিশেষভাৱে প্রযোজ্য।

(iv) সময় শ্রেণীটোৱে যদি ৰৈখিক দীর্ঘকালীন প্রবণতা দেখুৱায় তেতিয়াহে এই পদ্ধতিটো প্রযোজ্য হয়।

উদাহৰণ ১ঃ তলত দিয়া ডেটাবোৰৰ পৰা ত্রিবার্ষিক সচল গড় গণনা কৰি উলিয়াওক ঃ

বর্ষ	1980	1981	1982	1983	1984
উৎপাদন ('০০০ টন)	112	117	120	123	129
বর্ষ	1985	1986	1987	1988	1989
উৎপাদন ('০০০ টন)	134	140	146	149	152

সমাধান ঃ

ত্রিবার্ষিক সচল গড় গণনা তালিকা

বর্ষ (1)	উৎপাদন ('০০০ টন) (2)	ত্রিবার্ষিক সচলতাৰ মুঠ পৰিমাণ (3)	ত্রিবার্ষিক সচল গড় (4)
1980	112		
1981	117	349	116.3
1982	120	360	120
1983	123	372	124
1984	129	386	128.7
1985	134	403	134.3
1986	140	420	140
1987	146	435	14.5
1988	149	447	149
1989	152		

ব্যাখ্যা ঃ তৃতীয় স্তম্ভত (column 3) 112, 117 আৰু 120 এই প্রথম ডেটা তিনিটাৰ মুঠ পৰিমাণ এই সংহতিটোৰ মধ্যমান 117 ৰ বিপৰীতে লিখা হৈছে। তাৰ পাছত পৰৱর্তী ডেটা তিনিটাৰ ক্রমে 117, 120 আৰু 123 ৰ মুঠ পৰিমাণ 120 ৰ বিপৰীতে লিখা হৈছে, এনেকৈ ক্রমটো আগবাঢ়ি গৈ আছে। চতুর্থ স্তম্ভৰ (column 4) মানবোৰ সংখ্যাস্তম্ভক (column 3) 3 ৰে হৰণ কৰাৰ পাছত পোৱা গৈছে।

টোকা ঃ এই ত্রিবার্ষিক সচল গড় মানবোৰ হ'ল প্রদত্ত সময় শ্রেণীটোৰ দীর্ঘকালীন প্রৱণতা মান।

উদাহৰণ ২ঃ তলত দিয়া তথ্যবোৰৰ চতুর্বাষিক সচল গড় নির্ণয় পদ্ধতিৰে দীর্ঘকালীন প্রবণতা মানবোৰ গণনা কৰি উলিয়াওক।

বর্ষ	1991	1992	1993	1994	1995	1996
মান	44	64	59	52	57	71
বর্ষ	1997	1998	1999	2000	2001	2002
মান	66	64	71	77	82	80

সমাধান ঃ

চতুর্বাষিক সচল গড় নির্ণয় পদ্ধতিৰে দীর্ঘকালীন প্রবণতা মান গণনাৰ তালিকা

বর্ষ	মান	চতুর্বাষিক সচলতাৰ মুঠ পৰিমাণ	চতুর্বাষিক সচল গড়	স্তম্ভ (4)ৰ দ্বিবার্ষিক সচলতাৰ মুঠ পৰিমাণ	কেন্দ্রীভূত সচল গড় (দীর্ঘকালীন প্রবণতা মান)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6) = (5) ÷ 2
1991	44				
1992	64				
		219	54.75		
1993	59			112.75	56.375
		232	58		
1994	52			117.75	58.875
		239	59.75		
1995	57			121.25	60.625
		246	61.5		
1996	71			126	63
		272	68		
1997	66			132.5	68.75
		272	69.5		
1998	64			137.5	68.75
		278	69.5		
1999	71			143	71.5
		294	73.5		
2000	77			151	75.5
		310	77.5		
2001	82				
2002	80				

ব্যাখ্যা ঃ তৃতীয় স্তম্ভত (column 3) প্রথম চাৰিটা ডেটা ক্রমে 44, 64, 59 আৰু 52 ৰ মুঠ পৰিমাণ সংহতিটোৰ মধ্যত, অর্থাৎ 64 আৰু 59 ৰ মাজত লিখা হৈছে। তাৰ পাছত পৰৱর্তী চাৰিটা ডেটা, ক্রমে 64, 59, 52 আৰু 57 ৰ মাজত লিখা হৈছে। এনেকৈয়ে ক্রমটো আগবাঢ়ি গৈ আছে।

চতুর্থ স্তম্ভৰ (column 4) সংখ্যাবোৰ তৃতীয় স্তম্ভৰ সংখ্যাবোৰক ৪ৰে হৰণ কৰাৰ পাছত পোৱা গৈছে।

পঞ্চম স্তম্ভৰ (column 5) চতুর্থ স্তম্ভৰ প্রথম দুটা ডেটা, 54.76 আৰু 58 ৰ মুঠ পৰিমাণ লিখা হৈছে। (1993 বর্গৰ অনুৰূপ)। তাৰ পাছত 1994 বর্ষৰ অনুৰূপ দ্বিতীয় আৰু তৃতীয় ডেটা, 58 আৰু 59.75 ৰ মুঠ পৰিমাণ লিখা হৈছে। এনেকৈয়ে ক্রমটো আগবাঢ়ি গৈ আছে।

ষষ্ঠ স্তম্ভৰ (column 6) সংখ্যাবোৰ পঞ্চম স্তম্ভৰ সংখ্যাবোৰক 2 ৰে হৰণ কৰাৰ পাছত পোৱা গৈছে।

টোকা ঃ চতুর্বাৰিক কেন্দ্রীভূত সচল গড়বোৰেই হ'ল প্রদত্ত সময় শ্রেণীটোৰ দীর্ঘকালীন প্রবণতা মান।

উদাহৰণ ৩ঃ তলত দিয়া তথ্যবোৰৰ পৰা পঞ্চবার্ষিক সচল গড় নির্ণয় পদ্ধতিৰে দীর্ঘকালীন প্রবণতা মানবোৰ গণনা কৰি উলিয়াওক।

বর্ষ	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978
বিক্রী (লাখ টকাত)	130	127	124	135	140	132	129	127	145

সমাধান ঃ

পঞ্চবার্ষিক সচল গড় নির্ণয় পদ্ধতিৰে দীর্ঘকালীন প্রবণতা মান গণনাৰ তালিকা

বর্ষ	বিক্রী (লাখ টকাত)	পঞ্চবার্ষিক সচলতাৰ মুঠ পৰিমাণ	পঞ্চবার্ষিক সচল গড় (দীর্ঘকালীন প্রবণতা মান)
(1)	(2)	(3)	(4)
1970	130		
1971	127		
1972	124	656	131.2
1973	135	658	131.6
1974	140	660	132.0
1975	132	663	132.6
1976	129	673	
1977	127		
1978	145		

টোকা ঃ স্তম্ভ ৩ ৰ (column 3) প্ৰথমটো সচলতাৰ মুঠ পৰিমাণ হ'ল প্ৰথম মান পাঁচটা, 130, 127, 124, 135 আৰু 140 ৰ যোগফল। দ্বিতীয়টো সচলতাৰ মুঠ পৰিমাণ হ'ল 127 + 124 + 135 + 140 + 132 = 658। এই যোগফলটো প্ৰথম সচলতাৰ মুঠ পৰিমাণ 656 ৰ লগত (132 – 130) = 2 যোগ কৰিও পাব পাৰি। একে নিয়মেৰে তৃতীয় সচলতাৰ মুঠ পৰিমাণ হ'ল 658 + (129 – 127) = 660। এই ক্ৰমত গণনা আগবাঢ়ি গৈ থাকিব।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১ঃ খালী ঠাই পূৰণ কৰক ঃ

(i) ..... ব্যৱধানত এক নিৰ্দিষ্ট কালৰ বাবে সংগ্ৰহ কৰা তথ্যকে সময় শ্ৰেণী বোলে।

(ii) কোনো এছোৱা নিৰ্দিষ্ট সময়ত এটা সময় শ্ৰেণীৰ বাঢ়ি যোৱা অথবা নামি যোৱাৰ স্বাভাৱিক আগ্ৰহকে ..... বোলে।

(iii) সময় শ্ৰেণীৰ সহায়ত ..... বাণীও কৰিব পাৰি।

(iv) চক্ৰীয় বিচলনৰ কাৰক হ'ল ..... চক্ৰ।

(v) ..... প্ৰবণতা হ'ল কোনো এক সময় শ্ৰেণী তথ্য সমষ্টিয়ে এছোৱা ..... সময়ৰ বাবে দেখুওৱা সামগ্ৰিক ..... গামী অথবা ..... গামী প্ৰবণতা।

(vi) হ্ৰস্বকালীন বিচলনৰ ভাগ দুটা হ'ল (ক) ..... আৰু (খ) .....।

(vii) এটা ব্যৱসায় চক্ৰৰ (ক্ৰম অনুসৰি) পৰ্যায় চাৰিটা হ'ল ....., ..., ..., আৰু .....।

(viii) বাৰ্ষিক তথ্যত ..... উপাদানবিধ নাথাকে।

(ix) ঋতুনিষ্ঠ বিচলন সৃষ্টিকাৰী সবাতোকৈ গুৰুত্বপূৰ্ণ কাৰক দুটা হ'ল ..... আৰু .....।

প্ৰশ্ন নং ২ঃ তলত উল্লেখ কৰা পৰিস্থিতিবোৰৰ প্ৰতিটোৰে সৈতে সময় শ্ৰেণীৰ কোনটো উপাদান জড়িত কৰিব?

(i) উন্নতিৰ এটা যুগ।

(ii) এখন ডিপার্টমেণ্টেল দোকানত পূজাৰ পাচত হোৱা বিক্ৰী।

(iii) কাৰখানা এটাত চাৰি সপ্তাহৰ বাবে চলা উৎপাদনত বিলম্ব ঘটোৱা ধৰ্মঘট।

(iv) বৰষুণৰ বতৰত ছাতিৰ বিক্ৰী।

(v) চিকিৎসা বিজ্ঞানৰ অগ্ৰগতিৰ বাবে মৃত্যুহাৰ কমি যোৱাটো।

(vi) জনসংখ্যাৰ ক্ৰমবৰ্ধিত হাৰৰ বাবে ধান উৎপাদনৰ প্ৰয়োজনীয়তা বৃদ্ধি পোৱাটো।

প্রশ্ন নং ৩ঃ তলৰ বিকল্পবোৰৰ পৰা শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিয়াওক—

(ক) এটা সময় শ্রেণী হ'ল তথ্যৰ এনে এক সমষ্টি যিবোৰ খতিয়ানভুক্ত কৰা হয়—

(i) সময় অন্তৰালত

(ii) সময়ৰ ক্রমিক বিন্দুত

(iii) নির্দিষ্ট সময়ৰ মূৰে মূৰে

(iv) ওপৰৰ আটাইকেইটা উত্তৰ

(খ) জন্ম হাৰ নিম্নগামী হোৱাৰ কাৰণ—

(i) দীর্ঘকালীন প্রবণতা (ii) অনিয়মিত বিচলন

(iii) ঋতুনিষ্ঠ বিচলন (iv) চক্রীয় বিচলন

(গ) গৰমৰ দিনত শীতল পানীয়ৰ বিক্রীৰ সৈতে জড়িত বিচলনটো হ'ল—

(i) দীর্ঘকালীন প্রবণতা (ii) ঋতুনিষ্ঠ বিচলন

(iii) চক্রীয় বিচলন (iv) অনিয়মিত বিচলন

(ঘ) ঋতুনিষ্ঠ বিচলনৰ পুনৰাবৃত্তি ঘটে—

(i) ৫ বছৰৰ ভিতৰত (ii) ৪ বছৰৰ ভিতৰত

(iii) ৭ বছৰৰ ভিতৰত (iv) ওপৰৰ এটাও নহয়

(ঙ) ঋতুনিষ্ঠ বিচলনৰ বাবে দায়ী কাৰকবোৰ হ'ল—

(i) বতৰ (ii) উৎসৱ (iii) সামাজিক প্রথা

(iv) ওপৰৰ আটাইবোৰ

(চ) কোনো মহামাৰীৰ ফলত মৃত্যুহাৰ বৃদ্ধি পোৱাৰসৈতে জড়িত বিচলনটো হ'ল—

(i) দীর্ঘকালীন প্রবণতা (ii) চক্রীয় বিচলন

(iii) ঋতুনিষ্ঠ বিচলন (iv) ওপৰৰ এটাও নহয়



১২.৮ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- সমান সময়ৰ ব্যৱধানত এক নির্দিষ্ট কালৰ বাবে সংগ্রহ কৰা নিৰীক্ষণৰ সমষ্টিটোকে সময় শ্রেণী বোলে।
- এটা সময় শ্রেণীৰ মানবোৰক প্রভাৱিত কৰা কৰকবোৰকে সময় শ্রেণীৰ উপাদান বোলে।
- এটা সময় শ্রেণীত দীর্ঘকালীন সঞ্চাৰণৰ বাবে দায়ী উপাদানবোৰকে দীর্ঘকালীন প্রবণতা অথবা চমুকৈ প্রবণতা বোলে।
- এটা সময় শ্রেণীৰ যিবোৰ উপাদানে এবছৰতকৈ কম সময়ৰ ভিতৰত নিয়মীয়া আৰু

পর্যায়ক্রমিক বিন্যাসৰ সঞ্চাৰণ প্রদর্শন কৰে সেই উপাদানবোৰক ঋতুনিষ্ঠ উপাদান বোলে।

- এবছৰতকৈ দীর্ঘকাল জুৰি হোৱা দোলন প্রদর্শন কৰা সময় শ্রেণীত ধৰা পৰা দোলন গতিবোৰকে চক্রীয় বিচলন বোলে।
- অনিয়মিত সঞ্চাৰণ হ'ল এটা সময় শ্রেণীত অন্তর্নিহিত হৈ থকা বিচলন।
- সময় শ্রেণীৰ বিশ্লেষণে অতীত আচৰণ বুজাত, ভৱিষ্যৎবাণী কৰাত, সাম্প্রতিক সাফল্য মূল্যায়ন কৰাত আৰু দুটা সময় পর্যায়ৰ তুলনা কৰাত সহায় কৰে।
- দীর্ঘকালীন প্রবণতা চাৰিটা পদ্ধতিৰে জুখিব আৰু অধ্যয়ন কৰিব পাৰি।
- দীর্ঘকালীন প্রবণতা জোখা এটা পদ্ধতি হ'ল সচল গড় পদ্ধতি। এই পদ্ধতিত এক নির্দিষ্ট সময়ৰ বাবে তথ্যৰ ক্রমিক গোটবোৰৰ গড় উলিয়াই সময় শ্রেণী একোটাকৈ সুষমভাৱে সজাই লোৱা হয়।



১২.৯ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

১) Gupta S. C. *Fundamentals of Statistics*. Himalaya Publishing House.

২) Gupta S. C and Gupta Indira. *Business Statistics.* Himalaya Publishing House.

৩) P. N. Arora, Sumeet Arora, S. Arora. *Comprehensive Statistical Methods*. S. Chand & Company.

৪) R. K. Ghosh and S. Saha. *Business Mathematics and Statistics.* New Central Book Agency (P) Ltd.

৫) Agarwal D. R. *Business Statistics*. Delhi. Vrinda Publication.

৬) Sharma J. K. *Business Statistics.* Pearson Education Ltd.



১২.১০ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) সমান সময়ৰ (ii) দীর্ঘম্যাদী/দীর্ঘকালীন প্রবণতা (iii) ভৱিষ্যৎ (iv) ব্যৱসায়/বাণিজ্য (v) দীর্ঘম্যাদী, দীর্ঘলীয়া, উর্দ্ধ, নিম্ন (vi) (ক) ঋতুনিষ্ঠ, (খ) চক্রীয় (vii) উন্নতি, মন্দাৱস্থা, মন্দা বজাৰ, প্রকৃতিস্থভৱন (viii) ঋতুনিষ্ঠ (ix) বতৰ, সামাজিক প্রথা।

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) চক্রীয় (ii) ঋতুনিষ্ঠ (iii) অনিয়মিত (iv) ঋতুনিষ্ঠ (v) দীর্ঘম্যাদী (vi) দীর্ঘকালীন

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (ক) (iv) (খ) (i) (গ) (ii)
(ঘ) (iv) (ঙ) (iv) (চ) (iv)



১২.১১ আৰ্হি প্রশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্রশ্ন ১ঃ সময় শ্রেণীৰ সংজ্ঞা দিয়ক।

প্রশ্ন ২ঃ সময় শ্রেণীৰ উপাদানবোৰ ব্যাখ্যা কৰক।

প্রশ্ন ৩ঃ সময় শ্রেণীৰ বিশ্লেষণ বুলিলে কি বুজায়? ব্যৱসায়ত ইয়াৰ গুৰুত্ব আলোচনা কৰক।

প্রশ্ন ৪ঃ দীর্ঘকালীন প্রবণতা বুলিলে কি বুজে? উদাহৰণসহ ব্যাখ্যা কৰক।

প্রশ্ন ৫ঃ উদাহৰণসহ ঋতুনিষ্ঠ বিচলনৰ অর্থ ব্যাখ্যা কৰক।

প্রশ্ন ৬ঃ চক্রীয় বিচলন কি? এনে বিচলন কেনেদৰে সংঘটিত হয়?

প্রশ্ন ৭ঃ চক্রীয় বিচলন আৰু ঋতুনিষ্ঠ বিচলনৰ মাজত কি প্রভেদ আছে?

প্রশ্ন ৮ঃ তলৰ পৰিস্থিতিবোৰত সময় শ্রেণীৰ কোনটো উপাদান জড়িত কৰিব পৰা যাব?

(i) মন্দাৱস্থা।

(ii) এটা কাৰখানাত হোৱা অগ্নিকাণ্ডৰ ফলত উৎপাদনত ৩ সপ্তাহ বিলম্ব ঘটা।

(iii) মন্দা বজাৰৰ এটা যুগ।

(iv) গৰমৰ দিনত আইচক্রীমৰ বিক্রী।

(v) আধুনিক কৌশল প্রয়োগৰ বাবে অসমত ধানৰ উৎপাদন বৃদ্ধি।

প্রশ্ন ৮ঃ পঞ্চবার্ষিক সচল গড় নির্ণয় পদ্ধতি প্রয়োগ কৰি দীর্ঘকালীন প্রবণতাৰ মান উলিয়াওক—

বর্ষ ঃ	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
মান ঃ	242	250	252	249	253	255	251	257	260
বর্ষ ঃ	1999	2000							
মান ঃ	265	262							

প্রশ্ন ১০ঃ ত্রিবার্ষিক সচল গড় নির্ণয় পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি দীর্ঘকালীন প্রবণতাৰ মান উলিয়াওক।

বর্ষ ঃ	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
চেনী উৎপাদন (লাখ টকা)	37.4	31.2	38.7	39.6	47.6	42.6	48.5	56.2

বর্ষ ঃ	1989	1990
চেনী উৎপাদন (লাখ টকা)	60.6	58.2

প্রশ্ন ১১ঃ চতুর্বাষিক সচল গড় নির্ণয় পদ্ধতিৰে দীর্ঘকালীন প্রবণতাৰ মান উলিয়াওক—

বর্ষ ঃ	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
মান ঃ	39	59	53	46	51	65	59	58	65
বর্ষ ঃ	1994	1995	1996						
মান ঃ	71	76	74						

প্রশ্ন ১২ঃ প্রদত্ত তথ্যবোৰৰ বাবে সচল গড়ৰ পর্যায়কাল নির্ধাৰণ কৰক আৰু সেই পর্যায়কালত সচল গড়ৰ মান গণনা কৰি উলিয়াওক—

বর্ষ ঃ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
মান ঃ	130	127	124	135	140	132	129	127	145
বর্ষ ঃ	10	11	12	13	14	15			
মান ঃ	158	153	146	145	164	170.			

[**ইংগিত ঃ** প্রদত্ত তথ্যবোৰৰ শীর্ষমান 1, 5, 10 আৰু 15 বর্ষত পোৱা গৈছে। অর্থাৎ তথ্যবোৰে স্পষ্টকৈ 5 পর্যায়কালৰ এটা নিয়মীয়া চক্রীয় সঞ্চাৰণ প্রদর্শন কৰিছে। সেয়েহে দীর্ঘকালীন প্রবণতা মান নির্ণয়ৰ বাবে সচল গড়ৰ পর্যায়কালো 5 হ'ব (চক্রীয় বিচলনৰ পর্যায়কাল)]

*** ***** ***

অধ্যায় ১৩ঃ প্রতিচয়নৰ মৌলিক ধাৰণা (BASIC CONCEPT OF SAMPLING)

অধ্যায় গাঁথনি

১৩.১ উদ্দেশ্য

১৩.২ পৰিচয়

১৩.৩ সমষ্টি, প্রাচল আৰু প্রতিচয়নৰ সংজ্ঞা

১৩.৩.১ যাদৃচ্ছিক আৰু অযাদৃচ্ছিক প্রতিচয়নৰ পদ্ধতিসমূহ

১৩.৩.২ সপুনঃ স্থাপন আৰু অপুনঃ স্থাপন প্রতিচয়ন

১৩.৩.৩ বৃহৎ প্রতিদর্শ

১৩.৪ প্রতিচয়ন পদ্ধতিৰ ত্রুটি

১৩.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১৩.৬ অধিক জানিবলৈ

১৩.৭ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১৩.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

১৩.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি —

- প্রাচল আৰু প্রতিদর্শজৰ ধাৰণা আলোচনা কৰিব পাৰিব
- সপুনঃ স্থাপন আৰু অপুনঃ স্থাপন প্রতিচয়নৰ ধাৰণা ব্যাখ্যা আগবঢ়াব পাৰিব
- যাদৃচ্ছিক আৰু অযাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন ব্যাখ্যা কৰিব পাৰিব
- প্রতিচয়ন ত্রুটিৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিব পাৰিব
- প্রতিচয়নৰ বিভিন্ন পদ্ধতিবোৰ আলোচনা কৰিব পাৰিব
- প্রতিচয়নৰ সুবিধা আৰু সীমাবদ্ধতা ব্যাখ্যা আগবঢ়াব পাৰিব।

১৩.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

আমি প্রায়েই বৃহৎ সংখ্যক মানুহ বা বস্তুৰ থুপ বা সমষ্টি এটাৰ বিষয়ে সিদ্ধান্ত ল'বলগীয়া হয়। এই ক্ষেত্রত গোটেই থুপটোৰ প্রতিটো গোট পৰীক্ষা কৰা সাধাৰণতে সম্ভৱপৰ নহয়। সেয়ে থুপটোৰ এটা অংশ পৰীক্ষা কৰি তাৰ পৰাই গোটেই থুপটোৰ বিষয়ে এটা ধাৰণা কৰা হয়।

এইদৰে কোনো পৰিঘটনাৰ লগত জড়িত প্রতিটো গোটৰ থুপ বা সংহতিটোক সমষ্টি (Population) বোলা হয়। Population শব্দটোৰ অভিধানিক অর্থ জনসংখ্যা যদিও গণিত আৰু পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানত ইয়াৰ অর্থ হ'ল অধ্যয়ন কৰিবলৈ বাছি লোৱা সকলো বস্তু বা ব্যক্তিৰ

সংহতি। যদি সমষ্টি এটাত অন্তর্ভুক্ত প্রতিটো গোট বা একক সম্পর্কে তথ্য সংগ্রহ কৰা হয় তেন্তে তাক পিয়ল (Census) বা সম্পূর্ণ গণনা পদ্ধতি বোলে। কিন্তু বাস্তৱ ক্ষেত্রত সম্পূর্ণ গণনা পদ্ধতি সদায় সম্ভৱপৰ নহয়। তেতিয়া আমি অন্য এটা পদ্ধতি প্রয়োগ কৰোঁ। এই পদ্ধতিক প্রতিচয়ন (Sampling Method) বোলে। প্রতিদর্শ (Sample) সমষ্টি এটাৰ সসীম, অসীম বা প্রকল্পিত হ'ব পাৰে। উদাহৱণস্বৰূপে, এখন মহাবিদ্যালয়ৰ ছাত্র-ছাত্রীৰ সমষ্টি, গুৱাহাটী মহানগৰীত বাস কৰা পৰিয়ালবোৰৰ সমষ্টি ইত্যাদি। এটা মুদ্রা অসীম সংখ্যক বাৰ ওপৰলৈ দলিয়ালে পোৱা ফলাফল (মুণ্ড বা পুচ্ছ)ৰ সমষ্টি হ'ল এটা প্রকল্পিত সমষ্টি।

আমি বাতৰি কাকতত প্রায়েই পঢ়িবলৈ পাওঁ যে চৰকাৰে বছৰটোত কিমান ধান উৎপাদন হৈছে তাৰ এটা হিচাপ দিছে। এই হিচাপটো সম্পূর্ণ গণনা পদ্ধতিৰ দ্বাৰা কৰা নহয়। নির্দিষ্ট কিছুমান অঞ্চল বাছি লৈ তাত হোৱা ধানৰ উৎপাদনৰ ভিত্তিত ৰাজ্যখনৰ মুঠ ধানৰ উৎপাদনৰ এটা হিচাপ উলিওৱা হয়। এইটো এটা উদাহৱণহে। সাধাৰণতে আনুমানিক হিচাপ এইদৰে উলিওৱা হয়। সেয়ে প্রতিদর্শ লওঁতে সাৱধান হ'ব লাগে। প্রতিদর্শটো সমষ্টিটোৰ প্রতিনিধিত্বমূলক হ'ব লাগে।

১৩.৩ সমষ্টি, প্রাচল আৰু প্রতিচয়নৰ সংজ্ঞা (DEFINING POPULATION, PARAMETER AND SAMPLING)

আমি সাধাৰণতে প্রতিদর্শ (Sample)আৰু সমষ্টিক (Population) কিছুমান জোখ যেনে মাধ্য (Mean), মধ্যমা (Medium), বহুলক (Mode), প্রামাণিক বিচলন (Standard deviation) আদিৰ দ্বাৰা বর্ণনা কৰোঁ। যদি এই জোখবোৰে প্রতিদর্শৰ বৈশিষ্ট্য বর্ণনা কৰে তেন্তে সেইবোৰক **প্রতিদর্শজ** (Statistic) বোলে। অর্থাৎ প্রতিদর্শৰ গোটবোৰৰ ফলনে ই হৈছে প্রতিদর্শজ। যেনে প্রতিদর্শৰ মাধ্য $\overline{X}$, প্রতিদর্শৰ প্রসৰণ (Sample variances) S^2 ইত্যাদি।

কোনো এটা সমষ্টিৰ কোনো বৈশিষ্ট্য যেনে— মাধ্য, প্রামাণিক বিচলন আদিক সমষ্টিটোৰ প্রাচল (Parameter) বোলে।

সমষ্টি হৈছে কোনো এটা অনুসন্ধানৰ অন্তর্গত আটাইবোৰ গোট বা এককৰ এটা থুপ। সমষ্টি এটাৰ বিষয়ে অধ্যয়ন কৰিবলৈ সমষ্টিৰ পৰা প্রতিদর্শ নির্বাচন কৰা পদ্ধতিকে প্রতিচয়ন (sampling) বোলে।

প্রতিচয়ন তত্ত্বৰ মূল অভিধাৰণা হ'ল যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন(random sampling)। এই পদ্ধতিত সমষ্টি এটাৰ পৰা প্রতিদর্শ এনেদৰে নির্বাচন কৰা হয় যাতে সমষ্টিটোৰ প্রতিটো গোটৰে প্রতিদর্শত নির্বাচিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা একে হয়।

প্রতিচয়ন দুই ধৰণৰ — (১) যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন (random sampling) (২) অ-যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন (non-random sampling)।

প্রতিচয়নৰ উদ্দেশ্য ঃ প্রতিচয়নৰ উদ্দেশ্য হ'ল প্রতিদর্শ এটা অধ্যয়ন কৰি গোটেই সমষ্টিটোৰ বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে অনুমান কৰা। অর্থাৎ প্রতিচয়ন হৈছে এনে এটা পৰিসাংখ্যিকীয় কৌশল যাৰ

সহায়ত আমি সমষ্টি এটাৰ সৰু প্রতিনিধিত্বমূলক অংশ এটা পৰীক্ষা কৰি গোটেই সমষ্টিটোৰ বৈশিষ্ট্য সম্পর্কে অধ্যয়ন কৰিব পাৰো।

সাধাৰণ প্রতিচয়ন ঃ

কোনো এটা সমষ্টিৰ প্রতিটো এককৰ বা গোটৰ কোনো এটা গুণ (Attribute) থাকিবও পাৰে, নাথাকিবও পাৰে। প্রতিচয়নত কোনো এটা একক বাচনি কৰাকে প্রচেষ্টা (Trial) বুলি কোৱা হয় আৰু ফলাফলক ঘটনা বুলি কোৱা হয়। নির্বাচিত এককটোৰ নির্দিষ্ট গুণ A থাকিলে তাক কৃতকার্যতা বুলিব পাৰি। সাধাৰণ প্রতিচয়ন হৈছে এনে এটা যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন য'ত প্রতিটো ঘটনাতে কৃতকার্যতাৰ সম্ভাৱিতা (Probability) একে হয় আৰু এই কৃতকার্যতাৰ সম্ভাৱিতা পূর্ববর্তী প্রচেষ্টাৰ কৃতকার্যতা বা অকৃতকার্যতাৰ ওপৰত নির্ভৰ নকৰে। অর্থাৎ সাধাৰণ প্রতিচয়ন হৈছে যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়নৰ এটা বিশেষ ধৰণ। ইয়াত প্রচেষ্টাবোৰ স্বতন্ত্র আৰু কৃতকার্যতাৰ সম্ভাৱিতা এটা ধ্রুৱ (Constant) সংখ্যা।

এই উদাহৰণটোলৈ মন কৰক। ধৰা হ'ল এটা পাত্রত 2টা বগা আৰু 3টা ক'লা বল আছে। পাত্রটোৰ পৰা এটা এটাকৈ বল উলিয়াই অনা হ'ল। যদি প্রথমবাৰত এটা বগা বল উলিয়াই অনা হয় তেন্তে বগা বলটো উলিয়াই অনাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল $\frac{2}{5}$ । যদি বলটো পাত্রত ঘূৰাই থোৱা নহয় তেন্তে দ্বিতীয় প্রচেষ্টাত বগা বল এটা উলিয়াই অনাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল $\frac{1}{4}$ । গতিকে এই ক্ষেত্রত প্রতিচয়নটো যাদৃচ্ছিক হ'লেও সৰল নহয়।

অসীম সমষ্টি এটাৰ পৰা যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন ল'লে এই প্রতিচয়ন সদায় সৰল হয়। কাৰণ এটা একক উলিয়াই আনিলেও সম্ভাৱিতাৰ কোনো পৰিৱর্তন নহয়। কিন্তু সসীম সমষ্টি এটাৰ পৰা কৰা প্রতিচয়ন সৰল হ'বও পাৰে নহ'বও পাৰে।

n টা গোটৰ এটা সৰল প্রতিদর্শ বিবেচনা কৰা হওঁক। এই প্রতিদর্শটোৰ প্রতিটো গোট n টা স্বতন্ত্র প্রচেষ্টাত পোৱা কৃতকার্যতাৰ সংখ্যা। যিকোনো প্রচেষ্টাত কৃতকার্যতাৰ সম্ভাৱিতা p ধ্রুৱক হ'লে 0, 1, 2, ..., n সংখ্যক কৃতকার্যতাৰ সম্ভাৱিতাবোৰ হ'ব ক্রমে q^n, ${}^nc_1$, pq^{n-1}, ${}^nC_2\, p^2\, q^{n-2}$, ... p^n য'ত q = 1–p। এই সম্ভাৱিতাবোৰ হৈছে দ্বিপদ বিস্তৃতি $(q + p)^n$ ৰ ক্রমে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় ....., (n + 1)তম পদ। এইদৰে পোৱা বণ্টনক n টা প্রচেষ্টাত কৃতকার্যতাৰ সংখ্যাৰ প্রতিচয়ন বণ্টন বুলিব পাৰি। এই প্রতিচয়ন বণ্টনৰ মাধ্য আৰু মানক ত্রুটি (প্রতিচয়ন বণ্টনৰ মানক বিচলন) হ'ল ক্রমে np আৰু $\sqrt{npq}$ ।

কোনো এটা প্রতিদর্শত কৃতকার্যতাৰ অনুপাত 'p' হ'ল কৃতকার্যতাৰ সংখ্যা 'x' আৰু প্রতিদর্শত থকা এককৰ সংখ্যা 'n' ৰ অনুপাত অর্থাৎ $P = \frac{x}{n}$, এই কৃতকার্যতাৰ অনুপাতৰ প্রতিচয়ন বণ্টনটোৰ মাধ্য 'P' আৰু মানক বিচলন $\sqrt{\frac{pq}{n}}$ ।

আমি আগতেই আলোচনা কৰিছো যে প্রতিচয়ন দুই ধৰণৰ (১) যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন আৰু (২) আযাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন।

যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়নত সমষ্টি এটাৰ প্রতিটো গোটৰে প্রতিদর্শত নির্বাচিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা একে হয়। আনহাতে অযাদৃচ্ছিক প্রতিচয়নত অনুসন্ধানকাৰীজনে প্রতিদর্শত অন্তর্ভুক্ত কৰিবলগীয়া গোটবোৰ নিজৰ জ্ঞান আৰু বিবেচনাৰ ওপৰত ভিত্তি কৰি সমষ্টিটোৰ পৰা বাছি লয়। সেয়েহে এই ধৰণৰ প্রতিচয়নত প্রতিদর্শটো অনুসন্ধানকাৰীজনৰ দক্ষতাৰ ওপৰত নির্ভৰ কৰে। প্রতিচয়ন তত্ত্বৰ নীতিবোৰ যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়নৰ ক্ষেত্রতহে প্রযোজ্য। অযাদৃচ্ছিক প্রতিচয়নত প্রযোজ্য নহয়। যাদৃচ্ছিক প্রতিদর্শত সমষ্টিৰ কোনো এটা গোট প্রতিদর্শটোত অন্তর্ভুক্ত হোৱাৰ বা নোহোৱাৰ সম্ভাৱিতা জ্ঞাত হয়। সেয়ে প্রতিদর্শৰ পৰা পোৱা ফলাফলৰ ভিত্তিত সমষ্টিৰ বৈশিষ্ট্য গাণিতিকভাৱে আকলন কৰি ল'ব পাৰি।

তলত সমষ্টি আৰু প্রতিদর্শৰ পার্থক্য তালিকাৰ সহায়ত দেখুওৱা হ'ল

	সমষ্টি	প্রতিদর্শ
সংজ্ঞা	কোনো অনুসন্ধানৰ লগত জড়িত প্রতিটো গোটৰ থুপ বা সংহতি	অনুসন্ধানৰ বাবে সমষ্টিৰ পৰা বাছি লোৱা এটা প্রতিনিধিত্বমূলক অংশ
বৈশিষ্ট্য	প্রাচল	প্রতিদর্শজ
প্রতীক চিহ্ন	সমষ্টিৰ আকাৰ = N সমষ্টিৰ মাধ্য = μ সমষ্টিৰ মানস বিচলন = σ	প্রতিদর্শৰ আকাৰ = n প্রতিদর্শৰ মাধ্য = $\bar{x}$ প্রতিদর্শৰ মানক বিচলন = s

১৩.৩.১ যাদৃচ্ছিক আৰু অযাদৃচ্ছিক প্রতিচয়নৰ পদ্ধতিসমূহ (Random and Non-Random Sampling Methods)

সমষ্টি এটাৰ পৰা প্রতিদর্শ নির্বাচন কৰি সেই প্রতিদর্শৰ ভিত্তিত সমষ্টিটোৰ বিষয়ে অধ্যয়ন কৰা প্রক্রিয়াকে প্রতিচয়ন বোলে। এতিয়া আমি প্রতিচয়নৰ পদ্ধতিসমূহ আলোচনা কৰিম—

ক। যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন পদ্ধতি

(১) সাধাৰণ যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন (Simple Random Sampling)

(২) প্রণালীবদ্ধ প্রতিচয়ন (Systematic Sampling)

(৩) স্তৰীকৃত যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন (Stratified Random Sampling)

(৪) সমূহ প্রতিচয়ন (Cluster Sampling)

খ। অযাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন পদ্ধতি

(১) ঐচ্ছিক প্রতিচয়ন (Judgement Sampling)

(২) নির্দিষ্ট ভাগ অনুসৰি প্রতিচয়ন (Quota Sampling)

(৩) সুবিধা প্রতিচয়ন (Convenience Sampling)

১. সাধাৰণ যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন (Simple Random Sampling) ঃ

এই পদ্ধতিত সমষ্টিৰ পৰা প্রতিদর্শ এনেদৰে নির্বাচন কৰা হয় যাতে সমষ্টিটোৰ প্রতিটো গোটৰে প্রতিদর্শত নির্বাচিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা একে হয়। এই নির্বাচন দুই ধৰণে কৰা হয়—

- সপুনঃস্থাপন যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন (Random Sampling with Replacement)
- অপুনঃস্থাপন যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন (Random Sampling without Replacement)

ধৰা হ'ল আমি N টা গোট থকা এটা সমষ্টিৰ পৰা nটা গোটৰ এটা প্রতিদর্শ নির্বাচন কৰিম। যদি এই n টা গোট এটা এটাকৈ লোৱা হয় আৰু প্রত্যেকবাৰ লোৱাৰ পিছত গোটটো সমষ্টিলৈ ঘূৰাই দিয়া হয় যাতে প্রত্যেকবাৰতে সমষ্টিৰ Nটা গোটৰ প্রত্যেকৰে প্রতিদর্শত নির্বাচিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা সমান অর্থাৎ $\frac{1}{N}$ হয় তেনেহ'লে তাক সপুনঃস্থাপন সাধাৰণ যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন বোলে। ইয়াত স্পষ্টতঃ সমষ্টিৰ এটা গোট প্রতিদর্শত এবাৰতকৈ বেছিবাৰ থাকিব পাৰে। মুঠ সম্ভৱপৰ প্রতিদর্শৰ সংখ্যা N^n আৰু প্রতিটো প্রতিদর্শৰে সম্ভাৱিতা হ'ল $\frac{1}{N^n}$ ।

যদি প্রতিদর্শৰ n টা গোট এটা এটাকৈ নির্বাচিত কৰা হয় আৰু যিকোনো বাৰতে গোটটো লোৱাৰ পিছত সমষ্টিলৈ ঘূৰাই দিয়া নহয় আৰু যদি প্রতিবাৰতে বাকী থকা প্রত্যেকটো গোটৰে প্রতিদর্শত নির্বাচিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা সমান হয়, তেনেহ'লে এনে প্রতিচয়নক অপুনঃস্থাপন সাধাৰণ যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন বোলে। ইয়াত সমষ্টিৰ এটা গোট প্রতিদর্শত এবাৰতকৈ বেছি বাৰ থাকিব নোৱাৰে। মুঠ সম্ভৱপৰ প্রতিদর্শৰ সংখ্যা হ'ব N_{c_n} আৰু প্রতিটো প্রতিদর্শৰ সম্ভাৱিতা হ'ল —

$$\frac{n}{N}\cdot\frac{n-1}{N-1}\cdot\frac{n-2}{N-2}\cdot\frac{n-3}{N-3}-----\frac{1}{N-n+1}=\frac{1}{N_{c_n}}$$

এই পদ্ধতিত এটা নির্দিষ্ট গোট (ধৰা হ'ল i তম গোট) যিকোনো এবাৰত (ধৰা হ'ল r তম বাৰত) নির্বাচিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল

$$\frac{N-1}{N}\cdot\frac{N-2}{N-1}\cdot\frac{N-3}{N-2}-----\frac{N-r+1}{N-r+2}\cdot\frac{1}{N-r+1}=\frac{1}{N}$$

প্রতিদর্শ নির্বাচনত যাদৃচ্ছিকতা নিশ্চিত কৰিবলৈ যাদৃচ্ছিক সংখ্যা পদ্ধতি (Random Numbers Method) বা ল'টাৰী পদ্ধতি (Lottery Method) ব্যৱহাৰ কৰা হয়। যাদৃচ্ছিক সংখ্যা পদ্ধতিত প্রথমে প্রতিটো গোট ক্রম অনুসৰি চিনাক্তকৰণ কৰা হয়। এতিয়া যাদৃচ্ছিক সংখ্যা তালিকাৰ যিকোনো এটা পৃষ্ঠ লৈ সেই পৃষ্ঠাৰ যিকোনো শাৰী, স্তম্ভ বা কর্ণৰ দিশত সংখ্যাবোৰ ল'ব লাগে। এই সংখ্যাবোৰ অনুযায়ী সমষ্টিৰ গোটবোৰ বাছি উলিয়াই যাদৃচ্ছিক প্রতিদর্শটো গঠন কৰা হয়।

লটাৰী পদ্ধতিটো এটা উদাহৰণৰ সহায়ত বুজোৱা হ'ল। ধৰা হ'ল যে এটা

কোম্পানীৰ 1000 জন কর্মচাৰী আছে আৰু ইয়াৰ পৰা যিকোনো 10জন কর্মচাৰীৰ প্ৰতিদর্শ এটা বাছনি কৰিব লাগে। প্ৰথমে কর্মচাৰীসকলৰ প্ৰত্যেকৰে নাম কিছুমান একে আকাৰৰ সৰু সৰু কাগজৰ টুকুৰাত লিখি ভাজ কৰি এটা পাত্ৰত ভালদৰে মিহলোৱা হ'ল। এতিয়া এটা এটাকৈ 10 টুকুৰা কাগজ টানি আনি টুকুৰাবোৰত লিখা নাম অনুযায়ী প্ৰতিদর্শটোৰ গোটবোৰ লোৱা হয়।

২. প্ৰণালীবদ্ধ প্ৰতিচয়ন (Systematic Sampling) ঃ

এই পদ্ধতিত প্ৰতিদর্শটো প্ৰণালীবদ্ধভাৱে এটা সমান অন্তৰালত লোৱা হয়। এই অন্তৰাল সময়, ঠাই, ক্ৰম বা যিকোনো বৈশিষ্ট্য সাপেক্ষে হ'ব পাৰে। ধৰা হ'ল 100 জন ছাত্ৰৰ পৰা 5 জন ছাত্ৰ বাছি উলিয়াব লাগে। 100 জনক 5টা ভাগত এনেদৰে ভগাব লাগিব যাতে প্ৰতিভাগত 20 জনকৈ ছাত্ৰ থাকে। এতিয়া শ্ৰেণীৰ হাজিৰা বহী (attendence register) ৰ পৰা প্ৰথম 20 জন ছাত্ৰৰ যিকোনো এজনক যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰিব লাগিব। সেই ছাত্ৰজনৰ ক্ৰমিক নম্বৰৰ পৰা প্ৰতি 20তম ক্ৰমিক নম্বৰৰ ছাত্ৰকেইজনক বাছনি কৰিব লাগিব। অর্থাৎ প্ৰথমতে নির্বাচন কৰা ছাত্ৰজনৰ ক্ৰমিক নম্বৰ 6 হ'লে বাকী নির্বাচিত ছাত্ৰকেইজনৰ ক্ৰমিক নম্বৰ হ'ব 26, 46, 66,86। এই পদ্ধতিত প্ৰতিদর্শটোৰ প্ৰথম এককটোহে যাদৃচ্ছিকভাৱে নির্বাচন কৰা হয়। বাকী এককেইটা প্ৰথম নির্বাচিত একক অনুসৰি নির্দিষ্ট হৈ যায়। সাধাৰণ যাদৃচ্ছিক প্ৰতিচয়নৰ লগত এই পদ্ধতিটোৰ এইখিনিতে পার্থক্য। এই পদ্ধতিটো ব্যক্তিগত অভিৰুচি আৰু পক্ষপাতিত্বৰ দ্বাৰা প্ৰভাৱিত হ'ব পাৰে। কিন্তু পদ্ধতিটোৰ সুবিধা হ'ল যে এই পদ্ধতিটো সহজ, সময় কম লাগে আৰু খৰচৰ পৰিমাণ কম হয়।

৩. স্তৰীকৃত যাদৃ চ্ছিক প্ৰতিচয়ন (Stratified Random Sampling) ঃ

এই প্ৰতিচয়নত প্ৰথমে সমষ্টিটোক কিছুমান সমজাতীয় সংঘৰ (homogeneous group) ত ভাগ কৰা হয়। এই সংঘবোৰক স্তৰ (Strata) বুলি কোৱা হয়। প্ৰতিটো স্তৰৰ পৰা একোটাকৈ যাদৃচ্ছিক প্ৰতিদর্শ লোৱা হয় আৰু আটাইকেইটা প্ৰতিদর্শ লগ কৰি এটা প্ৰতিদর্শৰ সৃষ্টি কৰা হয়। দুই ধৰণে প্ৰতিদর্শ নির্বাচন কৰিব পাৰি— (ক) প্ৰতিটো স্তৰৰ পৰা নির্দিষ্ট সংখ্যক গোট যাদৃচ্ছিকভাৱে নির্বাচন কৰা হয়। (খ) স্তৰ এটাৰ পৰা নির্বাচন কৰা গোটৰ সংখ্যা আৰু স্তৰটোৰ আকাৰৰ অনুপাত প্ৰতিটো স্তৰৰ বাবে একে হয়। স্তৰীকৃত প্ৰতিচয়নত সমষ্টিটোৰ প্ৰত্যেক গোটৰে নির্বাচিত হোৱাৰ সম্ভাৱনা থাকে। কোনো এটা স্তৰৰ গোটবোৰৰ ভিতৰত বিশেষ পার্থক্য নাথাকে। কিন্তু এটা স্তৰৰ লগত আন এটা স্তৰৰ যথেষ্ট পার্থক্য থাকিব পাৰে।

৪. সমূহ প্ৰতিচয়ন (Cluster Sampling) ঃ

এই প্ৰতিচয়ন পদ্ধতিত সমষ্টিটোক কিছুমান সংঘত ভাগ কৰা হয়। এই সংঘবোৰক জোটা বা সমূহ (Clusters) বোলে। সমষ্টি এটাক ক্লাষ্টাৰবোৰত এনেদৰে ভাগ কৰা হয়, যাতে প্ৰতিটো ক্লাষ্টাৰে সমষ্টিটোক প্ৰতিনিধিত্ব কৰিব পাৰে। ইয়াৰ

পিছত এই ক্লাষ্টাৰবোৰৰ পৰা যাদৃচ্ছিক প্রতিদর্শ লোৱা হয়। এই পদ্ধতিত ক্লাষ্টাৰবোৰৰ আৰু গোটবোৰৰ মাজত পার্থক্য থাকিব পাৰে, কিন্তু এটা ক্লাষ্টাৰৰ লগত আনটো ক্লাষ্টাৰৰ সাদৃশ্য থাকে।

স্তৰীকৃত, প্রণালীবদ্ধ আৰু সমূহ প্রতিচয়ন হৈছে সাধাৰণ যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়নৰ কিছুমান বিশেষ ৰূপ। এই পদ্ধতি তিনিটা আর্থিক আৰু প্রায়োগিক দিশৰ প্রতি লক্ষ্য ৰাখি উলিওৱা হৈছে। সকলো প্রতিচয়নৰ মূলভেটি হ'ল সাধাৰণ যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন। পৰিসাংখ্যিকীয় অনুমিতিৰ মূল ভেটি হ'ল সাধাৰণ যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন।

অযাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন পদ্ধতি (Non-Random Sampling Methods) ঃ

ঐচ্ছিক বা অভিপ্রায়িক প্রতিচয়ন (Judgement Sampling) ঃ এই পদ্ধতিত অনুসন্ধানকাৰীজনে নিজৰ অভিজ্ঞতা আৰু বিচাৰ বুদ্ধিৰ ওপৰত নির্ভৰ কৰি সমষ্টিটোৰ যিবোৰ গোট প্রতিনিধিত্বমূলক বুলি ভাৱে সেইবোৰ গোটহে প্রতিদর্শত অন্তর্ভুক্ত কৰে। উদাহৰণস্বৰূপে ধৰা হ'ল 50 জন শিল্পীৰ মাজৰ পৰা 10 জন শিল্পী বাছিব লাগে। অনুসন্ধানকাৰীজনে এনে 10 জন শিল্পীক বাছনি কৰিব যিকেইজন তেওঁৰ দৃষ্টিত উপযুক্ত শিল্পী।

এই পদ্ধতিটো সহজ যদিও বিজ্ঞানসম্মত নহয়। কাৰণ অনুসন্ধানকাৰীজনৰ ব্যক্তিগত অভিৰুচি আৰু পক্ষপাতিত্বৰ প্রভাৱ প্রতিদর্শটোত পৰিব পাৰে। প্রতিদর্শৰ আকাৰ সৰু হ'লে এই পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি। সাধাৰণতে বাণিজ্যিক সমস্যা সমাধান কৰিবলৈ, ৰাজহুৱা আঁচনিৰ সিদ্ধান্ত ল'বলৈ বা প্রাৰম্ভিক অধ্যয়ন (pilot studies) এই পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

নির্দিষ্ট ভাগ অনুসৰি প্রতিচয়ন (Quota Sampling) ঃ

এই পদ্ধতিটো ঐচ্ছিক প্রতিচয়নৰে এটা ৰূপ। প্রথমতে প্রদত্ত বৈশিষ্ট্য অনুসৰি কিছুমান নির্দিষ্ট ভাগ (quota) গঠন কৰা হয়। এই ভাগবোৰৰ পৰা অভিপ্রায়িক প্রতিচয়ন পদ্ধতিৰে প্রতিদর্শৰ গোটবোৰ নির্বাচন কৰা হয়। উদাহৰণস্বৰূপে, ধৰা হ'ল 100 জন মানুহৰ সাক্ষাৎকাৰ লোৱা হ'ব। 50 জন হিন্দু, 50 জন মুছলমান, 50 জন শিখ আৰু 50 জন খ্রীষ্টিয়ান — এই চাৰিটা ভাগৰ পৰা সাক্ষাৎ লওঁতাজনে যিকোনো মানুহৰ সাক্ষাৎকাৰ ল'ব পাৰিব।

সুবিধা প্রতিচয়ন (Convenience Sampling) ঃ

এই পদ্ধতিত প্রতিদর্শটো সহজে পোৱা কোনো তালিকা যেনে টেলিফোন ডাইৰেক্টৰী, অটোমোবাইল ৰেজিষ্ট্রেচন আদিৰ পৰা লোৱা হয়।

প্রতিচয়ন পদ্ধতিৰ সুবিধাসমূহ ঃ

- এই পদ্ধতিত পিয়ল পদ্ধতিৰ তুলনাত কম সময় লাগে।
- প্রতিচয়নত যিহেতু সমষ্টিৰ এটা অংশহে অধ্যয়ন কৰা হয়, সেয়ে সম্পূর্ণ গণনাতকৈ ইয়াত খৰচ আৰু শ্রমৰ পৰিমাণ কম হয়।

- সমষ্টিৰ তুলনাত প্রতিদর্শৰ আকাৰ সৰু বাবে সবিশেষ তথ্য সংগ্রহ কৰিব পাৰি।
- প্রতিদর্শ সমীক্ষাৰ পৰা পোৱা ফলাফলসমূহ সম্পূর্ণ গণনাৰ পৰা পোৱা ফলাফলতকৈ বেছি নির্ভৰযোগ্য হয়। কাৰণ প্রতিদর্শ সমীক্ষাত উপযুক্ত অর্হতা থকা প্রশিক্ষণপ্রাপ্ত ব্যক্তি নিয়োগ কৰিব পাৰি, ভাল তদাৰকী ব্যৱস্থা আৰু উন্নতমানৰ সা-সজুলিৰ ব্যৱস্থাও কৰিব পাৰি।
- সমষ্টিটো অসীম হ'লে প্রতিদর্শ লোৱাৰ বাহিৰে আন উপায় নাথাকে।

প্রতিচয়নৰ সীমাবদ্ধতা ঃ

- উপযুক্ত পৰিকল্পনা অবিহনে প্রতিদর্শৰ পৰা পোৱা ফলাফলে ভুল সিদ্ধান্ত দিব পাৰে আৰু বিপথে পৰিচালিত কৰিব পাৰে।
- অনুসন্ধানকাৰীসকল উপযুক্ত অর্হতাসম্পন্ন নহ'লে প্রতিদর্শৰ পৰা পোৱা ফলাফল বিশ্বাসযোগ্য নহয়।
- যদি সমষ্টিৰ প্রতিটো গোটৰ পৰা তথ্য লাগে তেন্তে প্রতিচয়ন অর্থহীন।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ উপযুক্ত শব্দৰে খালি ঠাই পূৰ কৰক ঃ

(ক) ———————— প্রতিচয়নত সমষ্টিটোৰ প্রতিটো গোটৰে প্রতিদর্শত নির্বাচিত হোৱাৰ সম্ভাৱনা থাকে।

(খ) ———————— প্রতিচয়নত গোটবোৰ নির্বাচন কৰিবলৈ ব্যক্তিগত জ্ঞান আৰু মতামত ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

(গ) সুবিধাৰ প্রতিচয়ন হৈছে ———————— প্রতিচয়নৰ এটা পদ্ধতি।

(ঘ) ———————— প্রতিচয়নত সমষ্টিটো সমজাতীয় সংযত ভাগ কৰা হয়।

(ঙ) প্রতিচয়নত ———————— ৰ তুলনাত কম সময় লাগে।

১৩.৩.২ সপুনঃ স্থাপন আৰু অপুনঃ স্থাপন প্রতিচয়ন (Sampling With and Without Replacement)

সপুনঃ স্থাপন প্রতিচয়নত সমষ্টি এটাৰ প্রতিটো গোট এবাৰতকৈ বেছিবাৰ নির্বাচিত হ'ব পাৰে। আনহাতে অপুনঃ স্থাপন প্রতিচয়নত যিকোনো এটা গোট এবাৰতকৈ বেছিবাৰ নির্বাচিত হ'ব নোৱাৰে।

যদি এটা পাত্রৰ পৰা এটা বস্তু টানি অনা হয় তেন্তে পুনৰ আন এটা বস্তু টানি অনাৰ আগতে আমি প্রথম বস্তুটো পাত্রটোত ঘুৰাই থ'বও পাৰো নথ'বও পাৰো। ঘুৰাই থ'লে বস্তুটো বাৰে বাৰে আহিব পাৰিব। ঘুৰাই নথ'লে এবাৰহে আনিব পাৰিব।

যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন ঃ যদি সমষ্টি এটাৰ প্রতিটো গোটৰে প্রতিদর্শত নির্বাচিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা একে হয় তেনেহ'লে তেনে প্রতিচয়নক যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন বোলে।

N সংখ্যক গোট থকা সমষ্টি এটাৰ গোটসমূহক $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ ৰে চিহ্নিত কৰা হয়। এই সমষ্টিটোৰ পৰা n টা গোট থকা এটা যাদৃচ্ছিক প্রতিদর্শ লোৱা হ'ল। যাদৃচ্ছিক চলকবোৰক ক্রমে $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ ৰে চিহ্নিত কৰা হয়।

সমষ্টিৰ মাধ্য $\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}$

প্রতিদর্শৰ মাধ্য $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} xi}{n}$

এতিয়া $E(\bar{x}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(x_i)$ ———(1)

$E(x_i) = \frac{X_1}{N} + \frac{X_2}{N} + ----+ \frac{X_n}{N}$

[যিহেতু x_iয়ে সমষ্টিটোৰ $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_N$ এই মানকেইটাৰ যিকোনো এটা ল'ব পাৰে আৰু এই যিকোনো মান লোৱাৰ সম্ভাৱিতা $\frac{1}{N}$]

$\therefore E(x_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i = \mu$ ————(2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা

$E(\bar{x}) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} \mu = \frac{1}{n}.n\mu = \mu$

অর্থাৎ সাধাৰণ যাদৃচ্ছিক প্রতিদর্শৰ মাধ্য সমষ্টিৰ মাধ্যৰ অনভিনত আকলক।

সমষ্টিৰ প্রসৰণ $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu)^2$

উদাহৰণ ১

এটা সমষ্টি পাঁচটা সংখ্যা 2, 3, 6, 8 আৰু 11ৰে গঠিত। এই সমষ্টিটোৰ পৰা পুনঃ স্থাপন পদ্ধতিৰে ল'ব পৰা 2 আকাৰৰ সকলো সম্ভাব্য প্রতিদর্শ নির্বাচন কৰক। সমষ্টিটোৰ মাধ্য আৰু মানক বিচলন নির্ণয় কৰক। লগতে প্রতিদর্শ মাধ্য আৰু মানক বিচলন নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ

সমষ্টিৰ মাধ্য $\mu = \frac{2+3+6+8+11}{5} = \frac{30}{5} = 6$

সমষ্টিৰ প্রসৰণ

$\sigma^2 = \frac{(2-6)^2 + (3-6)^2 + (6-6)^2 + (8-6)^2 + (11-6)^2}{5}$

$$= \frac{16+9+0+4+25}{5}$$

= 10.8

∴ সমষ্টিৰ মানক বিচলন $\sigma = \sqrt{10.8} = 3.29$

2. আকাৰৰ সপুনঃ স্থাপন যাদৃচ্ছিক প্ৰতিদৰ্শবোৰ হ'ল—

(2, 2)	(2, 3)	(2, 6)	(2, 8)	(2, 11)
(3, 2)	(3, 3)	(3, 6)	(3, 8)	(3, 11)
(6, 2)	(6, 3)	(6, 6)	(6, 8)	(6, 11)
(8, 2)	(8, 3)	(8, 6)	(8, 8)	(8, 11)
(11, 2)	(11, 3)	(11, 6)	(11, 8)	(11, 11)

এইদৰে 25 টা প্ৰতিদৰ্শ পোৱা গ'ল। প্ৰতিদৰ্শৰ মাধ্যবোৰ হ'ল—

2.0	2.5	4.0	5.0	6.5
2.5	3	4.5	5.5	7.0
4.0	4.5	6.0	7.0	8.5
5.0	5.5	7.0	8.0	9.5
6.5	7.0	8.5	9.5	11.0

প্ৰতিচয়ন বণ্টনৰ মাধ্য হ'ল—

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{\text{প্ৰতিদৰ্শ মাধ্যৰ যোগফল}}{২৫}$$

$$= \frac{150}{25}$$

= 6

প্ৰতিদৰ্শৰ মানক বিচলনৰ বাবে প্ৰতিদৰ্শৰ মাধ্যবোৰৰ প্ৰতিটোৰ পৰা 6 বিয়োগ কৰি বিয়োগফলৰ বৰ্গ উলিয়াব লাগিব। এই বৰ্গফলবোৰৰ যোগফলক 25ৰে হৰণ কৰি প্ৰতিদৰ্শৰ প্ৰসৰণ পোৱা যাব।

∴ প্ৰসৰণ $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{135}{25} = 5.4$

∴ প্ৰতিদৰ্শৰ মানক বিচলন $= \sigma_{\bar{X}} = \sqrt{5.4} = 2.32$

একেটা উদাহৰণতে অপুনঃ স্থাপন পদ্ধতিৰে কৰিলে কি হ'ব চোৱা যাওঁক।

ইয়াত $\mu = 6$ (আগৰ দৰে)

$$\sigma = 3.29$$

'2' আকাৰৰ অপুনঃ স্থাপন যাদৃচ্ছিক প্ৰতিদৰ্শবোৰ হ'ল (2, 3), (2,6), (2,8),(2,11), (3, 6), (3, 8), (3, 11), (6, 8), (6, 11) আৰু (8, 11)। প্ৰতিদৰ্শৰ সংখ্যা 10. প্ৰতিদৰ্শ মাধ্যবোৰ হ'ল 2.5, 4.0, 5, 6.5, 4.5, 5.5, 7, 7, 8.5 আৰু 9.5। প্ৰতিদৰ্শ মাধ্যবোৰৰ মাধ্য হ'ল—

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{2.5+4+5+6.5+4.5+5.5+7+7+8.5+9.5}{10}$$

$$= \frac{60}{10}$$

$$= 6$$

অর্থাৎ $\mu_{\bar{X}} = \mu$

প্রতিদর্শ মাধ্যৰ প্রসৰণ হ'ল

$$\sigma^2_{\bar{X}} = \frac{(2.5-6)^2+(4-6)^2+(5-6)^2+(6.5-6)^2+(4.5-6)^2+(5.5-6)^2+(7-6)^2+(8.5-6)^2+(9.5-6)^2}{10}$$

$$= \frac{40.5}{10}$$

$$= 4.05$$

$$\therefore \sigma_{\bar{X}} = \sqrt{4.05} = 2.01$$

১৩.৩.৩ বৃহৎ প্রতিদর্শ (Large Samples)

সাধাৰণতে প্রতিদর্শৰ আকাৰ 30তকৈ বেছি হ'লে প্রতিদর্শটো বৃহৎ বুলি ধৰা হয়।

ধৰা হ'ল n টা স্বতন্ত্র বাৰন'লি অভিপ্রয়োগৰ (Bernoull's trials) পৰা x সংখ্যক কৃতকার্যতা পোৱা গ'ল। আমি পৰীক্ষা কৰিব বিচৰা ৰিক্ত প্রকল্পটো হ'ল প্রতিটো প্রচেষ্টাত কৃতকার্যতাৰ সম্ভাৱিতা p। প্রকল্পটো শুদ্ধ বুলি ধৰি ল'লে কৃতকার্যতাৰ সংখ্যাৰ প্রতিচয়ন বণ্টনটোৰ মাধ্য আৰু প্রসৰণ হ'ব ক্রমে np আৰু npq।

আকৌ আমি জানো যে n বৃহৎ হ'লে $Z = \frac{x - np}{\sqrt{npq}}$ এটা প্রামাণিক প্রসামান্য চলক (standard normal variate) হ'ব।

তালিকাৰ পৰা P(|Z|>3)=0.0027

গতিকে কৃতকার্যতাৰ সংখ্যাৰ প্রেক্ষিত মান x আৰু প্রত্যাশিত মান np ৰ পার্থক্য অতি বেছি হ'লে আমি প্রকল্পটো শুদ্ধ নহয় বুলি ধৰিম।

যদি |Z|<1.96 হয় আমি কম যে ৰিক্ত প্রকল্পটোৰ বিপক্ষে কোনো সাক্ষী নাই।

যদি |Z|>1.96 হয় তেনেহ'লে 5% সার্থকতা স্তৰত আমি প্রকল্পটো অগ্রাহ্য কৰিম।

ধৰা হ'ল n টা গোট থকা প্রতিদর্শ এটাত কৃতকার্যতাৰ প্রেক্ষিত অনুপাত $p(=\frac{x}{n}$ য'ত x কৃতকার্যতাৰ সংখ্যা)।

কৃতকার্যতাৰ অনুপাতৰ মাধ্য = p আৰু প্রসৰণ $= \frac{pq}{n}$

$$\therefore \frac{\frac{x}{n} - p}{\sqrt{pq/n}} \sim N(0,1)$$

n বৃহৎ হ'লেহে এই সার্থকতা পৰীক্ষাটো প্রযোজ্য।

মানক ত্রুটি (Standard Error) ঃ

প্রতিচয়ন বণ্টন এটাৰ প্রতিদর্শজটোৰ প্রামাণিক বিচলনক (Standard Deviation) মানক ত্রুটি বোলা হয়। প্রতিদর্শৰ আকাৰ n আৰু সমষ্টিৰ প্রসৰণ σ^2 হ'লে প্রতিদর্শ মাধ্য $\bar{x}$ৰ মানক ত্রুটি হ'ব $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$। বৃহৎ প্রতিদর্শ তত্ত্বৰ ক্ষেত্রত মানক ত্রুটিৰ ভূমিকা উল্লেখযোগ্য। প্রকল্প পৰীক্ষাৰ মূল ভেটি হ'ল মানক ত্রুটি। যদি t এটা প্রতিদর্শজ হয় তেন্তে বৃহৎ প্রতিদর্শৰ বাবে

$$Z = \frac{t - E(t)}{S.E\,(t)} \sim N(0,1)$$

যদি কোনো প্রতিদর্শৰ প্রেক্ষিত মান (observed value) আৰু প্রত্যাশিত মানৰ পার্থক্য Z>SE(t) তকৈ ডাঙৰ হয় তেন্তে নির্দিষ্ট সার্থকতা স্তৰত বিক্ত প্রকল্পটো অগ্রাহ্য কৰা হয়।

১৩.৪ প্রতিচয়ন পদ্ধতিৰ ত্রুটি (ERRORS IN SAMPLING PROCEDURE)

প্রতিদর্শ সমীক্ষাত দুই ধৰণৰ ত্রুটি দেখা যায়—

- প্রতিচয়ন ত্রুটি (Sampling error)
- অপ্রতিচয়ন ত্রুটি (Non-sampling error)

প্রতিচয়ন ত্রুটি ঃ প্রতিদর্শ এটা যিটো সমষ্টিৰ পৰা নির্বাচন কৰা হয় সেই সমষ্টিটোৰ এটা অংশহে প্রতিদর্শই সামৰি লয়। এই প্রতিদর্শৰ পৰা পোৱা তথ্যৰ ভিত্তিত সমষ্টিটোৰ বৈশিষ্ট্য সম্বন্ধে কিছুমান অনুমিতি (inferences) আদায় কৰা হয়। সেয়ে সমষ্টিটোৰ প্রাচল আৰু প্রতিদর্শটোৰ প্রতিদর্শজৰ ভিতৰত অমিল পোৱা যাব পাৰে। এইদৰে পোৱা ত্রুটিকে প্রতিচয়ন ত্রুটি বোলে। প্রতিচয়ন ত্রুটিৰ বাবে দুটা কাৰকক দায়ী কৰিব পাৰি— প্রতিচয়ন অভিনতি (sampling bias) আৰু হঠাৎ উদ্ভৱ হোৱা কাৰক (chance factor)। প্রতিদর্শ নির্বাচন কৰা পদ্ধতিটো ত্রুটিযুক্ত হ'লে প্রতিচয়ন অভিনতি দেখা যায়। প্রতিদর্শজৰ ভুল নির্বাচনৰ বাবেও অভিনতি হ'ব পাৰে। উপযুক্ত প্রতিচয়ন পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি এইধৰণৰ ত্রুটি আঁতৰাব পাৰি। প্রতিচয়ন অভিনতি নাথাকিলেও কিছুমান অনির্ণেয় কাৰণৰ বাবে ত্রুটি হ'ব পাৰে।

অপ্রতিচয়ন ত্রুটি ঃ এই ত্রুটি সম্পূর্ণ গণনা আৰু প্রতিদর্শ সমীক্ষা দুয়ো ক্ষেত্রতে দেখা যায়। বিভিন্ন ধৰণৰ অপ্রতিচয়ন ত্রুটিবোৰ হ'ল—

- **প্রশ্নোত্তৰ ত্রুটি ঃ** উত্তৰ দিওঁতাই ভুল উত্তৰ দিলে, মিছা উত্তৰ দিলে অথবা সঠিকভাৰে উত্তৰ নিদিলে এই ধৰণৰ ত্রুটি হ'ব পাৰে।

- **নিৰীক্ষণ ত্রুটি ঃ** নিৰীক্ষণ (observation) ৰ দ্বাৰা তথ্য সংগ্রহ কৰিলে ত্রুটি হ'ব পাৰে।
- **উত্তৰ নিদিয়া বাবে ত্রুটি ঃ** অনুসন্ধানকাৰীজনে কোনো গোটৰ বিষয়ে তথ্য সংগ্রহ কৰাত ব্যর্থ হ'ব পাৰে অথবা উত্তৰ দাতাই উত্তৰ দিবলৈ অস্বীকাৰ কৰিব পাৰে। ইয়াৰ ফলত ত্রুটি উদ্ভৱ হয়।

সার্থকতা পৰীক্ষা (Test of Significance) ঃ

প্রতিচয়ন তত্ত্বৰ এটা উল্লেখনীয় দিশ হৈছে সার্থকতা পৰীক্ষা অধ্যয়ন। প্রতিদর্শৰ গোটবোৰ যাদৃচ্ছিকভাৱে নির্বাচন কৰিলেহে সার্থকতা পৰীক্ষা প্রয়োগ কৰিব পাৰি। সার্থকতা পৰীক্ষা এনেকুৱা এটা পদ্ধতি যাৰ সহায়ত আমি এটা ৰিক্ত প্রকল্প গ্রহণ বা অগ্রাহ্য কৰিব পাৰো। সমষ্টিৰ প্রাচল সম্পর্কত ধৰি লোৱা উক্তিকে ৰিক্ত প্রকল্প বোলে। ৰিক্ত প্রকল্পটো শুদ্ধ বুলি ধৰি লৈ প্রতিদর্শজ T ৰ প্রতিচয়ন বণ্টন উলিওৱা হয়। প্রতিচয়ন বণ্টনৰ পৰা T ৰ বিশ্বাসযোগ্য সীমা উলিওৱা হয়। প্রদত্ত তথ্যৰ পৰা T ৰ প্রেক্ষিত মান নির্ণয় কৰা হয়। প্রেক্ষিত মান বিশ্বাসযোগ্য সীমাৰ বাহিৰত পৰিলে সেই সার্থকতা স্তৰত ৰিক্ত প্রকল্পটো অগ্রাহ্য কৰা হয়। অন্যথা গ্রহণ কৰা হয়।

উদাহৰণ ২

এটা লুডুগুটি 9000 বাৰ ওপৰলৈ দলিওৱাত 3240 বাৰ 3 বা 4 পোৱা গ'ল। দেখুৱাওক যে লুডুগুটিটো অভিনত (biased)

সমাধান ঃ ইয়াত N = 9,000

X কৃতকার্যতাৰ সংখ্যা = 3,240

প্রকল্প H : লুডুগুটিটো অনভিনত

p = 3 বা 4 পোৱাৰ সম্ভাৱিতা

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \quad = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \text{ প্রত্যাশিত মাধ্য } = np = 9000 \times \frac{1}{3} = 3{,}000$$

ইয়াত n বৃহৎ $|Z|$ = $\frac{x - np}{\sqrt{npq}}$

মানক ত্রুটি (S.E.) = $\sqrt{npq}$ = $\sqrt{9000 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}$

$$= \sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$$

$$Z = \frac{3240 - 3000}{20\sqrt{5}} = \frac{240}{20\sqrt{5}} = \frac{12\sqrt{5}}{5}$$

$$= 24\sqrt{5}$$

$$= 5.36$$

যিহেতু |Z|>3, ৰিক্ত প্রকল্পটো অগ্রাহ্য হ'ব। অর্থাৎ লুডুগুটিটো অভিনত।

উদাহৰণ ৩

বহুতো আনাৰসৰ মাজৰ পৰা 500 টা আনাৰসৰ যাদৃচ্ছিক প্রতিদর্শ এটা লোৱা হ'ল। ইয়াতে 65 টা আনাৰস বেয়া। দেখুৱাওক যে বেয়া আনাৰসৰ অনুপাতৰ মানক ত্রুটি 0.015।

সমাধান ঃ ইয়াত n = 500

x = প্রতিদর্শত বেয়া আনাৰসৰ সংখ্যা

= 65

p = বেয়া আনাৰসৰ অনুপাত

$$= \frac{65}{500} = 0.13$$

q = 1– p

= 1– 0.13

= 0.87

$$\therefore \text{ মানক ত্রুটি } = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{0.13 \times 0.87}{500}} = 0.015$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ২ঃ গুৱাহাটীত বাস কৰা 1000 জন মানুহৰ প্রতিদর্শ এটাত 840 জন মানুহে ভাত আৰু বাকীকেইজনে ৰুটি খায়। Z গণনা কৰক।

.....

.....

.....

.....



১৩.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

এই অধ্যায়টিত আমি যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়নৰ কিছুমান ধাৰণা শিকিলোঁ আৰু যাদৃচ্ছিক প্রতিদর্শৰ এটা বিশেষ ধৰণ হিচাপে সাধাৰণ প্রতিচয়ন আলোচনা কৰিলো। আমি সপুনঃ স্থাপন আৰু অপুনঃ স্থাপন প্রতিচয়ন আলোচনা কৰিলো। এই সকলোবোৰত প্রতিদর্শ সামান্য সমষ্টিৰ

পৰা লোৱা হৈছে।

আমি প্রতিচয়নৰ কিছুমান পদ্ধতি যেনে সাধাৰণ যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন, প্রণালীবদ্ধ প্রতিচয়ন, স্তৰীকৃত প্রতিচয়ন আৰু সমূহ প্রতিচয়ন আলোচনা কৰিলো। লগতে আমি কিছুমান অযাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন যেনে ঐচ্ছিক প্রতিচয়ন, নির্দিষ্ট ভাগ অনুসৰি প্রতিচয়ন আৰু সুবিধাৰ প্রতিচয়ন আলোচনা কৰিলো। প্রতিচয়ন আৰু অপ্রতিচয়ন ত্রুটিৰ বিষয়েও আলোচনা কৰা হ'ল।



১৩.৬ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

১) Agarwal, D. R. (2006). Business Statistics. Delhi, Vrinda Publications.

২) Gupta S.C. (1994). Fundamentals of statistics. New Delhi, Himalayan Publishing House.

৩) Rajagopalan, S. P. & Sattanthan R. (2009).Business Statistics and Operations Research. New Delhi, Tata McGraw-Hill

৪) Sharma, J. K. (2007). Business Statistics. New Delhi. Pearson Education Ltd.

৫) Verma, A. P. (2007). Business Statistics. Guwahat, Asian Books Private Limited.



১৩.৭ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (ক) যাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন (খ) অযাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন (গ) অযাদৃচ্ছিক প্রতিচয়ন (ঘ) স্তৰীকৃত প্রতিচয়ন (ঙ) পিয়ল

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ 24.64



১৩.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ এটা সমষ্টি কিছুমান গ্ৰুপৰ দ্বাৰা গঠিত। গ্ৰুপবোৰৰ প্ৰতিটোৰ ভিতৰত পাৰ্থক্য আছে কিন্তু এটা গ্ৰুপৰ লগত আন এটা গ্ৰুপৰ বিশেষ পাৰ্থক্য নাই। এই সমষ্টিটোৰ বাবে কোনবিধ প্ৰতিচয়ন উপযুক্ত হ'ব?

প্ৰশ্ন ২ঃ পিয়লৰ তুলনাত প্ৰতিচয়নৰ সুবিধাবোৰ কি কি?

প্ৰশ্ন ৩ঃ এটা সমষ্টি চাৰিটা গোট 3, 7, 11 আৰু 15ৰে গঠিত। এই সমষ্টিটোৰ পৰা সপুনঃ স্থাপন পদ্ধতিৰে নিৰ্বাচন কৰিব পৰা 2 আকাৰৰ সম্ভাব্য প্ৰতিদৰ্শবোৰ নিৰ্ণয় কৰক। সমষ্টিৰ মাধ্য আৰু মানক বিচলন লগতে প্ৰতিচয়ন বণ্টনৰ মধ্য আৰু মানক বিচলন গণনা কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ঃ ওপৰোক্ত প্ৰশ্নটো অপুনঃ স্থাপন পদ্ধতিৰ বাবে সমাধা কৰক।

প্ৰশ্ন ৫ঃ 1500 টা বল বিয়াৰিঙৰ ওজনৰ বণ্টন প্ৰসামান্য বুলি ধৰিব পাৰি যাৰ মাধ্য 22.4 কিঃ গ্ৰাম আৰু প্ৰামাণিক বিচলন 0.048 কিঃ গ্ৰাম। যদি 36 আকাৰৰ 3000 টা যাদৃচ্ছিক প্ৰতিদৰ্শ এই সমষ্টিটোৰ পৰা লোৱা হয় তেন্তে প্ৰতিচয়ন মাধ্য আৰু প্ৰামাণিক বিচলন নিৰ্ণয় কৰক যদিহে প্ৰতিচয়ন (i) সপুনঃ স্থাপন (ii) অপুনঃ স্থাপন পদ্ধতিৰে কৰা হয়।

প্ৰশ্ন ৬ঃ কোনো এখন জিলাৰ পৰা লোৱা 500 জন মানুহৰ প্ৰতিদৰ্শ এটাত 300 জন মানুহে চিগাৰেট খায়। আন এখন জিলাৰ 1000 জন মানুহৰ প্ৰতিদৰ্শ এটাৰ 550 জনে চিগাৰেট খায়। Z গণনা কৰা।

প্ৰশ্ন ৭ঃ এটা মুদ্ৰা 10,000 বা ওপৰলৈ দলিওৱাত মুণ্ড 5,195 বাৰ পোৱা গ'ল। মুদ্ৰাটো অনভিনত বুলি ধৰিব পাৰিনে?

প্ৰশ্ন ৮ঃ লুডুগুটি দলিওৱা পৰীক্ষা এটাত 75,145 বাৰৰ ভিতৰত 49,152 বাৰ 4, 5 বা 6 পোৱা গ'ল। লুডুগুটিটো অনভিনত (unbiased) হয়নে?

প্ৰশ্ন ৯ঃ 500 টা আপেলৰ প্ৰতিদৰ্শ এটাত 60 আপেল বেয়া পোৱা গ'ল। মানক ত্ৰুটি গণনা কৰা।

প্ৰশ্ন ১০ঃ900 টা গোট থকা প্ৰতিদৰ্শ এটাত মাধ্য 3.4 ছেঃ মিঃ আৰু প্ৰামাণিক বিচলন 2.61 ছেঃ মিঃ পোৱা গ'ল। এই প্ৰতিদৰ্শটো মাধ্য 3.25 ছেঃ মিঃ আৰু প্ৰামাণিক বিচলন 2.61 ছেঃ মিঃ যুক্ত এটা বৃহৎ সমষ্টিৰ পৰা অনা হৈছে নেকি?

*** ***** ***



প্রসঙ্গ পুথি

১) Agarwal, D. R. (2006). Business Statistics. Delhi, Vrinda Publications.

২) Gupta S.C. (1994). Fundamentals of statistics. New Delhi, Himalayan Publishing House.

৩) Rajagopalan, S. P. & Sattanthan R. (2009).Business Statistics and Operations Research. New Delhi, Tata McGraw-Hill

৪) Sharma, J. K. (2007). Business Statistics. New Delhi. Pearson Education Ltd.

৫) Verma, A. P. (2007). Business Statistics. Guwahat, Asian Books Private Limited.