# অধ্যায় ২ ঃ দ্বৈত প্রক্রিয়া (BINARY OPERATION)

## অধ্যায় গাঁথনি


২.১ উদ্দেশ্য

২.২ পৰিচয়

২.৩ দ্বৈত প্রক্রিয়া

২.৩.১ ক্রম বিনিময়ে দ্বৈত প্রক্রিয়া (Commutative Binary Operation)

২.৩.২ সাহচর্য্য দ্বৈত প্রক্রিয়া (Associative Binary Operation)

২.৩.৩ একক মৌল (Identity Element)

২.৩.৪ মৌলৰ বিপৰীত (Inverse of an Element)

২.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

২.৫ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

২.৬ অধিক জানিবলৈ

২.৭ আৰ্হি প্রশ্ন


## ২.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- সংহতি (set) এটাৰ দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব

## ২.২ পৰিচয়

ইয়াৰ আগৰ অধ্যায়বোৰত আমি সম্বন্ধ (relation) আৰু ফলনৰ (function) বিষয়ে অধ্যয়ন কৰিছো। এই অধ্যায়টিত আমি দ্বৈত প্রক্রিয়া আৰু ইয়াৰ প্রকাৰবোৰৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

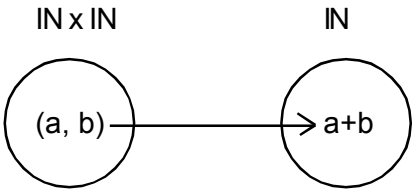
## ২.৩ দ্বৈত প্রক্রিয়া (BINARY OPERATION)

ধৰা হ'ল, IN এটা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি।

প্রতিটো ক্রমিক যুটী (ordered pair) $(a, b) \in IN \times IN$ ৰ বাবে

আমি একমাত্র এটা সংহতি $a+b \in IN$ পাম।

অর্থাৎ, আমি f ফলনৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিব পাৰিম $f : IN \times IN \to IN$, $f(a, b) = a+b$.



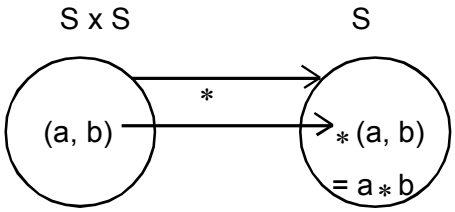

এই ফলনটোক (function) IN ৰ দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া বোলা হয়। অৰ্থাৎ, যোগ কৰা কামটো হ'ল IN ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

একেদৰে, পূৰণ কৰা কামটো হ'ল IN ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া। কাৰণ, প্ৰতিটো ক্ৰমিক যুটী (a, b) $\in$ IN x IN হয়। ইয়াৰ পৰা পোৱা একমাত্ৰ সংহতিটো হ'ল ab $\in$ IN। কিন্তু, বিয়োগ কৰা কামটো IN ৰ ওপৰত চলা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া নহয়। কাৰণ, প্ৰতিটো ক্ৰমিক যুটী (a, b) $\in$ IN x IN ৰ বিয়োগফল a–b $\in$ IN নহয়। ধৰা হ'ল (2, 3) $\in$ IN x IN, কিন্তু 2–3 = -1 $\notin$ IN.

**সংজ্ঞা ঃ** এটা অ-শূন্য (non-empty) সংহতি S ৰ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া হ'ব S x S ৰ পৰা S লৈ হোৱা ফলন।

যেনে—

$* : S \times S \to S$




ইয়াত, (a, b) $\in$ S x S ৰ প্ৰতিবিম্বটো $*$ ফলনৰ অধীন। অৰ্থাৎ $*$ (a, b) ক আমি a $*$ b বুলিও বুজাব পাৰোঁ।

ইয়াৰ পৰা গম পোৱা গ'ল যে

সকলো a, b $\in$ S ৰ ক্ষেত্ৰত, যদি a $*$ b $\in$ S হয়, তেন্তে $*$ হ'ল S ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

**সংজ্ঞা ঃ** ধৰা হ'ল, $*$ হ'ল এটা অ-শূন্য সংহতি S ৰ দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া,

H হ'ল Sৰ এটা উপ-সংহতি।

যদি সকলো a b $\in$ H হয়, তেন্তে H ক $*$ ৰ বন্ধনীৰ অধীন বুলি কোৱা হ'ব।

অৰ্থাৎ, আমি পালো a x b $\in$ H.

**এটা সসীম সংহতিৰ ওপৰত চলা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ সংখ্যা (Number of Binary operations on a finite set)**

ধৰা হ'ল, A আৰু B দুটা সসীম সংহতি, যদি n (A) = m আৰু n (B) = n তেন্তে,

A ৰ পৰা B লৈ ফলনৰ সংখ্যা হ'ব $n^m$. [A ৰ প্ৰথম উপাদানটোৰ n ধৰণে সহযোগ বিধি ঘটাব পৰা যাব, দ্বিতীয় উপাদানটোৰ n ধৰণে সহযোগ বিধি ঘটাব পৰা যাব আৰু শেষত m তম

উপাদানটোৰ n ধৰণে সহযোগ বিধি ঘটাব পৰা যাব।

$\therefore$ ফলনৰ সংখ্যা হ'ব

= n. n ... ... n (m সংখ্যক উৎপাদক) = $n^m$]

আমি জানো যে, n (A x A) = mm = $m^2$

$\therefore$ A ৰ ওপৰত চলা দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ সংখ্যা হ'ব

= A x A ৰ পৰা A লৈ হোৱা ফলনৰ সংখ্যা

= $m^{m^2}$

**উদাহৰণ**

1. যোগ কৰা কামটো হ'ল IN ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।
2. বিয়োগ কৰা কামটো IN ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া নহয়।
3. পূৰণ কৰা কামটো হ'ল IN ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।
4. যোগ কৰা কামটো হ'ল Z ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।
5. অ-শূন্য অখণ্ড সংখ্যাৰে গঠিত S = Z – {0} সংহতিটোৰ ওপৰত যোগ কৰা কামটোৱে দ্বৈত প্রক্রিয়া সংঘটিত কৰিব নোৱাৰে। কাৰণ, যদি ইয়াত $3 \in S$, $-3 \in S$ বুলি ধৰা হয়, তেন্তে $3+(-3) = 0 \notin S$.
6. বিয়োগ কৰা কামটো হ'ল Z ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।
7. ধৰা হ'ল, আটাইবোৰ বাস্তৱ মেট্রিক্সৰ সংগ্রহ হ'ল S। এতিয়া মেট্রিক্সবোৰৰ যোগফল S ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া নহ'ব। কাৰণ আমি এটা 2 x 3 মেট্রিক্স আৰু এটা 3 x 4 মেট্রিক্সৰ যোগফল উলিয়াব নোৱাৰো।
8. ধৰা হ'ল, $M_{mxn}$ হ'ল সকলোবোৰ m x n বাস্তৱ মেট্রিক্সৰ সংগ্রহ। ইয়াৰ মেট্রিক্স যোগ কৰা কামটো হ'বা $M_{mxn}$ ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।
9. ধৰা হ'ল, $M_{nxn}$ হ'ল সকলোবোৰ n x n বাস্তৱ মেট্রিক্সৰ সংগ্রহ। ইয়াৰ মেট্রিক্স পূৰণ কৰা কামটো হ'ব $M_{nxn}$ ৰ এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।
10. যোগ (আৰু পূৰণ) কৰা কামটো হ'ল জটিল সংখ্যাৰ সংহতি C ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

**উদাহৰণ ১ঃ** $a * b = a-b+10$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত $*$ টো Z ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'ব পাৰেনে?

**সমাধান ঃ** ধৰা হ'ল, $a, b \in Z$

দিয়া আছে, $a-b+10 \in Z, \forall\ a, b \in Z$

অর্থাৎ, $a * b \in Z, \forall\ a, b \in Z$

$\therefore$ $*$ হ'ল Z ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

**উদাহৰণ ২ঃ** $a * b = \frac{ab}{5}$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত $*$ টো Q ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'ব

পাৰেনে?

**সমাধান ঃ** ধৰা হ'ল, $a, b \in Q$

$\therefore ab \in Q$ (দুটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ পূৰণফল সদায় এটা পৰিমেয় সংখ্যাই হ'ব)

$\therefore \frac{ab}{5} \in Q$

অর্থাৎ, $a * b \in Q, \forall a, b \in Q$

$\therefore *$ হ'ল Q ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

**উদাহৰণ ৩ঃ** ধৰা হ'ল, P হৈছে এটা অ-শূন্য সংহতি S ৰ সকলোবোৰ উপ-সংহতিৰ সংহতি। সংযুক্তকৰণ (union) আৰু খণ্ডিতকৰণ (intersection) P ৰ ওপৰত চলা দুটা দ্বৈত প্রক্রিয়া বুলি প্রমাণ কৰক।

**সমাধান ঃ** ধৰা হ'ল, $A, B \in P$ ইয়াত $A \subseteq S, B \subseteq S$

$\therefore A \cup B \subseteq S$ ইয়াত $A \cup B \in P$

$\therefore \cup$ হ'ল P ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া

একেদৰে, $A \cap B \in P, \forall A, B \in P$

$\therefore \cap$ হ'ল P ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

**প্রক্রিয়া (অথবা সংযোজন) তালিকা [Operation (or composition) Table]**

ধৰা হ'ল, S এটা সসীম সংহতি। S ত থকা উপাদানৰ সংখ্যা কম। সংহতিটোৰ উপাদানেৰে আমি এখন তালিকা গঠন কৰিব পাৰো। ইয়াক প্রক্রিয়া (অথবা সংযোজন) তালিকা বোলা হয়। তালিকাখন এনেধৰণৰ হ'ব—

ধৰা হ'ল, $A = \{a_1, a_2, a_3\}$.

আমি সংহতিটোৰ উপাদানবোৰ $a_1, a_2, a_3$ পথালি শাৰীত আৰু দীঘলীয়া স্তম্ভত লিখিব পাৰে।। ওপৰফালে বাওঁকোণৰ দ্বৈত প্রক্রিয়া $*$ লিখিব পাৰোঁ। তাৰ ÂeÆÃÂçÊ ২.১ত দেখুওৱাৰ দৰে (i, j) তম কক্ষত আমি $9(=3^2)$ টাৰ প্রতিটো উপাদান $a_i * a_j$ (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3) লিখিম। এই 9 টা সংখ্যাৰ প্রতিটোৱেই A ৰ উপাদান। কাৰণ $*$ হ'ল A ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

| $*$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ |
|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_1 * a_1$ | $a_1 * a_2$ | $a_1 * a_3$ |
| $a_2$ | $a_2 * a_1$ | $a_2 * a_2$ | $a_2 * a_3$ |
| $a_3$ | $a_3 * a_1$ | $a_3 * a_2$ | $a_3 * a_3$ |

তালিকা ২.১

**উদাহৰণ ৪ঃ** {–1, 0, 1} ৰ ওপৰত পূৰণ কৰা কামটো এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'বনে?

**সমাধান ঃ** 9 টা উপাদানৰ প্রতিটোৱেই A ৰ অংশ।

$\therefore$ পূৰণ কৰা কামটো {–1, 0, 1} ৰ এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

**উদাহৰণ ৫ঃ** {–1, 0, 1} ৰ ওপৰত যোগ কৰা কামটো এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'বনে?

**সমাধান ঃ** $-2 \notin \{-1, 0, 1\}$

$2 \notin \{-1, 0, 1\}$

$\therefore$ যোগ কৰা কামটো {–1, 0, 1} ৰ ওপৰত চলা

| $*$ | –1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| –1 | 1 | 0 | –1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | –1 | 0 | 1 |

তালিকা ২.২

দ্বৈত প্রক্রিয়া নহয়।

**উদাহৰণ ৬ঃ** $a * b=|a-b|$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত $*$ টো $\{0, 1, 2\}$ ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'বনে?

**সমাধান ঃ** $0 * 0 = |0-0|=0$,

$0 * 1 = |0-1|=1$,

$0 * 2 = |0-2|=2$;

$1 * 0 = |1-0|=1$, $1 * 1 = |1-1|=0$,

$1 * 2 = |1-2|=1$;

$2 * 0 = |2-0|=2$, $2 * 1 = |2-1|=1$,

$2 * 2 = |2-2|=0$,

তালিকাৰ সহায়ত আমি গম পালোঁ যে $*$ হ'ল $\{0, 1, 2\}$ ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

| x | –1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| –1 | –2 | –1 | 0 |
| 0 | –1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |

তালিকা ২.৩

| x | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 0 |

তালিকা ২.৪

## ২.৩.১ ক্রম বিনিময়ে দ্বৈত প্রক্রিয়া (Commutative Binary Operation)

যদি $a * b = b * a$ আৰু $\forall a, b \in S$ হয়, তেন্তে এটা অ-শূন্য S সংহতিৰ দ্বৈত প্রক্রিয়াটো ক্রম বিনিময়ে প্রকৃতিৰ হ'ব।

**টোকা ঃ** কোনো এটা সসীম সংহতিৰ দ্বৈত প্রক্রিয়াটো তেতিয়াহে ক্রম বিনিময়ে প্রকৃতিৰ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি প্রক্রিয়া তালিকাৰ অন্তর্ভুক্ত উপাদানবোৰ প্রধান বিকর্ণ মেট্রিক্স (principal diagonal) অনুসৰি সমমিত (symmetric) হয়।

উদাহৰণ স্বৰূপে তালিকা ২.৪ত অন্তর্ভুক্ত উপাদানবোৰ প্রধান বিকর্ণ মেট্রিক্স 0, 0, 0 অনুসৰি সমমিত। সেয়েহে উদাহৰণ 6 ত উল্লেখ কৰা $*$ টো $\{0, 1, 2\}$ৰ ওপৰত চলা ক্রম বিনিময়ে দ্বৈত প্রক্রিয়া।

**উদাহৰণ ৭ঃ** $a * b = a-b+5$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত দ্বৈত প্রক্রিয়া $*$ টো Z ৰ ওপৰত চলা ক্রম বিনিময়ে প্রক্রিয়া হয়নে?

**সমাধান ঃ** দিয়া আছে, $a * b = a-b+5$

$b * a = b-a+5$, $\forall a, b \in Z$

স্পষ্টকৈ গম পোৱা গ'ল যে, $a * b \neq b * a$

$\therefore$ $*$ প্রক্রিয়াটো Z ৰ ওপৰত চলা ক্রম বিনিময়ে প্রক্রিয়া নহয়।

**উদাহৰণ ৮ঃ** ধৰা হ'ল, Q এটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি।

$a * b = ab^2$, $\forall a, b \in Q$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত $*$ হ'ল Q ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া। এতিয়া, $*$ এটা ক্রম বিনিময়ে প্রক্রিয়া হ'বনে?

**সমাধান ঃ** $a * b = ab^2$, $b * a = ba^2$, $\forall a, b \in Q$

$\therefore a * b \neq b * a$

$\therefore$ $*$ ক্রম বিনিময়ে দ্বৈত প্রক্রিয়া নহয়।

## ২.৩.২ সাহচর্য্য দ্বৈত প্রক্রিয়া (Associative Binary Operation)

এটা অ-শূন্য সংহতি S ৰ ওপৰত চলা $*$ দ্বৈত প্রক্রিয়াটোক সহযোগ বিধিৰ বুলি তেতিয়াহে কোৱা হ'ব যেতিয়া $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in S$ হ'ব।

**উদাহৰণ ৯ঃ** $a * b = a-b+5$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত $*$ দ্বৈত প্রক্রিয়াটো Z ৰ ওপৰত চলা সহযোগ বিধিৰ প্রক্রিয়া হ'বনে?

**সমাধান ঃ** ধৰা হ'ল, $a, b, c \in Z$.

$(a * b) * c = (a-b+5) * c$

$= (a-b+5) - c+5$

$= a-b-c+10$

$a * (b * c) = a * (b-c+5)$

$= a - (b-c+5)+ 5$

$= a - b + c - 5 + 5$

$= a - b + c$

$\therefore (a * b) * c \neq a * (b * c)$

$\therefore *$ সহযোগ বিধিৰ দ্বৈত প্রক্রিয়া নহয়।

**উদাহৰণ ১০ঃ** ধৰা হ'ল, X হৈছে ১ নথকা পৰিমেয় সংখ্যাৰ এটা সংহতি।

1. X ৰ ওপৰত $*$ ক আমি তলত দিয়া ধৰণে নির্ধাৰণ কৰিব পাৰোঁ—

$a * b = a + b - ab$, $\forall a, b \in X$.

প্রমাণ কৰক যে $*$ হ'ল X ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

$*$ প্রক্রিয়াটো (i) ক্রম বিনিময় নে (ii) সহযোগি বিধিৰ পৰীক্ষা কৰক।

**সমাধান ঃ** ধৰা হ'ল, $a, b \in X$

$\therefore$ a, b দুটা পৰিমেয় সংখ্যা আৰু $a \neq 1, b \neq 1$.

এতিয়া, $a + b - ab$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা আৰু $a+b-ab \neq 1$, যদি $a+b-ab=1$, তেন্তে

$a+b-ab-1=0$

অর্থাৎ, $(a-1)-b(a-1)=0$

অর্থাৎ, $(a-1)(1-b)=0$

অর্থাৎ, $a-1=0, 1-b=0$

অর্থাৎ, $a = 1, b = 1$, ই এক অসংগতি।

$\therefore a+b-ab \in X$

অর্থাৎ, $a * b \in X$, $\forall a, b \in X$

$\therefore$ $*$ হ'ল X ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

**দ্বিতীয় অংশ**

$a * b = a+b-ab$

$= b+a-ba$

$= b * a$

$\therefore$ $*$ হ'ল X ৰ ওপৰত চলা ক্রম বিনিময় দ্বৈত প্রক্রিয়া

আকৌ, $(a * b) * c$

$= (a+b-ab) * c$

$= (a+b-ab) + c - (a+b-ab)c$

$= a+b-ab+c - ac-bc+abc$

$= a+b+c-ab-bc-ca+abc$

$a*(b*c) = a * (b+c-bc)$

$= a+(b+c-bc) - a(b+c-bc)$

$= a+b+c-ab-bc-ca+abc$

$\therefore (a*b) * c = a * (b*c)$

$\therefore$ $*$ হ'ল এটা সহযোগ বিধিৰ দ্বৈত প্রক্রিয়া।

## ২.৩.৩ একক মৌল (Identity Element)

ধৰা হ'ল, S এটা অ-শূন্য সংখ্যাৰ সংহতি আৰু $*$ ইয়াৰ এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া। এতিয়া, $e \in S$ মৌলটোক তেতিয়াহে $*$ ৰ অভেদ মৌল বোলা হ'ব যদিহে—

$$a * e = a = e * a, \forall a \in S.$$

**টোকা ঃ** যদি কোনো দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ বাবে কোনো অভেদ মৌল থাকে, তেন্তে ই একক মৌল হ'ব।

**উদাহৰণ ঃ**

1. IN ৰ ওপৰত পূৰণ কৰা কামটো এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া। ইয়াত এটা $1 \in$ IN আছে, যিটো

$$a * 1 = a = 1 * a, \forall a \in IN$$

$\therefore$ 1 হ'ল IN ত পূৰণৰ বাবে থকা একমাত্র অভেদ মৌল।

2. যোগ কৰা কামটো হ'ল Z ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।
ইয়াত এটা $0 \in Z$ আছে, যিটো

$$a + 0 = a = 0+a, \forall a \in Z$$

$\therefore$ 0 হ'ল Z ত যোগৰ বাবে থকা একমাত্র অভেদ মৌল।

3. যোগ কৰা কামটো হ'ল IN ৰ ওপৰত চলা এক দ্বৈত প্রক্রিয়া। কিন্তু IN ত যোগ কৰাৰ বাবে কোনো অভেদ মৌল নাই।

4. মেট্রিক্স যোগ হ'ল $M_{mxn}$ ৰ ওপৰত চলা এক দ্বৈত প্রক্রিয়া। আটাইবোৰ m x n বাস্তৱ মেট্রিক্সৰ সংহতি হ'ল $M_{mxn}$। m x n নথকা শূন্য মেট্রিক্সটো হ'ব $M_{mxn}$ত মেট্রিক্স যোগৰ অভেদ মৌল।

## ২.৩.৪ মৌলৰ বিপৰীত (Inverse of an Element)

ধৰা হ'ল, S এটা অ-শূন্য সংখ্যাৰ সংহতি। ইয়াৰ $*$ হ'ল এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া আৰু e হ'ল অভেদ মৌল। এতিয়া $*$ ৰ অধীনত $b \in S$ এটা প্রতিলোম মৌল হ'ব যদিহে

$$a * b = e = b * a$$

**টোকা ঃ** 1. মৌলৰ প্রতিলোম হ'ল কোনো এক দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ অধীনস্থ এটা উপাদান। যদি প্রক্রিয়া এটাত প্রতিলোমৰ উপস্থিতি ধৰা পৰে তেন্তে ই হ'ব একক উপাদান।

2. a মৌলৰ প্রতিলোম বুজাবলৈ সাধাৰণতে $a^{-1}$ লিখা হয়। বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্রত যোগ অংকৰ অধীনস্থ সংখ্যাৰ প্রতিলোমক (যোগাত্মক প্রতিলোম/additive inverse) –a বুলি লিখা হয়। পূৰণ অংকৰ অধীনস্থ a মৌলৰ ($a \neq 0$) প্রতিলোমক (গুণক প্রতিলোম/multiplicative inverse) $\frac{1}{a}$ বুলি লিখা হয়।

**উদাহৰণ ঃ**

1. পূৰণ কৰা কামটো হ'ল IN ৰ ওপৰত চলা এক দ্বৈত প্রক্রিয়া। $1 \in$ IN হ'ল পূৰণৰ বাবে থকা অভেদ মৌল। কিন্তু 1 ৰ বাহিৰে IN ৰ আন কোনো উপাদানৰে IN ত পূৰণ কার্যৰ অধীনত প্রতিলোম নাথাকে।

2. যোগ কৰা কামটো হ'ল Z ৰ ওপৰত চলা এক দ্বৈত প্রক্রিয়া। $0 \in Z$ হ'ল যোগৰ বাবে থকা অভেদ মৌল। প্রতিটো $a \in Z$ ৰ বাবে একোটা $-a \in Z$ থাকে, য'ত $a+(-a) = 0=(-a) + a$.

   $\therefore$ –a হ'ল যোগৰ প্রতিলোম।



**অগ্রগতি নিৰীক্ষণ**

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল A এটা সসীম সংহতি। ইয়াত 4 টা উপাদান আছে। A ৰ ওপৰত চলা দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ সংখ্যা কিমান?

প্রশ্ন নং ২ঃ $a * b = \frac{a}{b}$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত $*$ টো IR ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'বনে?

প্রশ্ন নং ৩ঃ $\{-1, 1, i, -i\}$ ৰ ওপৰত পূৰণ কৰা কামটো এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'বনে? ইয়াত $i = \sqrt{-1}$.

প্রশ্ন নং ৪ঃ ধৰা হ'ল, Q এটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি। $a * b = a + ab$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত $*$ টো Q ৰ ওপৰত চলা এক দ্বৈত প্রক্রিয়া বুলি প্রমাণিত কৰক। $*$ টো (i) ক্রম বিনিময় নে, (ii) সহযোগ বিধিৰ পৰীক্ষা কৰক।



## ২.৪ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- এটা অ-শূন্য সংহতি S ৰ দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'ব S x S ৰ পৰা S লৈ হোৱা ফলন।
- যদি S এটা m সংখ্যক উপাদান থকা সসীম সংহতি হয়, তেন্তে S ৰ ওপৰত চলা দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ সংখ্যা হ'ব $m^{m^2}$.
- যদি $a * b = b * a$ আৰু $\forall\, a, b \in S$ হয়, তেন্তে এটা অ-শূন্য S সংহতিৰ দ্বৈত প্রক্রিয়াটো ক্রম বিনিময় প্রকৃতিৰ হ'ব।
- এটা অ-শূন্য সংহতি S ৰ ওপৰত চলা $*$ দ্বৈত প্রক্রিয়াটোক সাহচর্য্য বিধিৰ বুলি তেতিয়াহে কোৱা হ'ব যেতিয়া $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall\, a, b, c \in S$ হ'ব।
- এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া সম্বলিত অ-শূন্য সংহতি S ত থকা e মৌলটোক একক মৌল বোলা হ'ব যদিহে $a * e = a = e * a$, $\forall\, a \in S$ হয়।
- এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া সম্বলিত অ-শূন্য সংহতি S ত থকা b মৌলটোক S সংহতিৰ a মৌলৰ বিপৰীত বোলা হ'ব যদিহে $a * b = e = b * a$ হয়।



## ২.৫ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

**১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ** $4^{4^2} = 4^{16}$

**২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ** নহয়।

**৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ** হয়।

**৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ** ক্রম বিনিময়ে নহয়, সহযোগ বিধিৰ নহয়।



## ২.৬ অধিক জানিবলৈ


1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.
2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).
3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).
4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.
5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.




## ২.৭ আৰ্হি প্রশ্ন (MODEL QUESTIONS)

**প্রশ্ন ১ঃ** ধৰা হ'ল IR এটা বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি। $a * b = a+5b$; $a, b \in IR$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত দ্বৈত প্রক্রিয়া $*$ টো (i) ক্রম বিনিময়ে নে (ii) সাহচর্য্য বিধিৰ পৰীক্ষা কৰক।

**প্রশ্ন ২ঃ** ধৰা হ'ল S সংহতিটোৰ 3 টা উপাদান আছে। S ৰ ওপৰত কিমানটা দ্বৈত প্রক্রিয়া চলিব পাৰে?

*** ***** ***