অধ্যায় ৭ ঃ নিশ্চৰ উপসংঘ আৰু ভাগফল সংঘ (NORMAL SUBGROUP & QUOTIENT GROUP)

অধ্যায় গাঁথনি

৭.১ উদ্দেশ্য

৬.২ পৰিচয়

৭.৩ নিশ্চৰ উপসংঘ

৭.৪ ভাগফল সংঘ

৭.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৭.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৭.৭ অধিক জানিবলৈ

৭.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

৭.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি অধোলিখিত বিষয়বোৰৰ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব—

- নিশ্চৰ উপসংঘ
- ভাগফল সংঘ

৭.২ পৰিচয়

এই অধ্যায়টিত আমি সংঘৰ নিশ্চৰ উপসংঘৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। আকৌ এই অধ্যায়টিত ভাগফল সংঘৰ বিষয়েও আলোচনা কৰা হ'ব।

৭.৩ নিশ্চৰ উপসংঘ

সংজ্ঞা ঃ সংঘ G ৰ কোনো উপসংঘ H অক নিশ্চৰ উপসংঘ (normal subgroup) বুলি কোৱা হয় যদি $aH = Ha$, $\forall a \in G$, অর্থাৎ যদি H অৰ বাওঁ আৰু সোঁ সহসংহতি একে হয়।

প্রতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে প্রকাশ কৰা হয় $H \Delta G$.

টোকা ঃ এটা সংঘ G ৰ অন্ততঃ দুটা নিশ্চৰ উপসংঘ আছে, যথা, G আৰু {e}. G আৰু {e} ৰ বাহিৰে অন্য নিশ্চৰ উপসংঘ নথকা সংঘক **সৰল সংঘ** (simple group) বোলে।

উদাহৰণ ঃ ধৰা হ'ল $G = \{-1, 1, -i, i\}$

আমি জানো যে পূৰণ প্রক্রিয়ৰ অধীনত G এটা সংঘ।

ধৰা হ'ল $H = \{-1, 1\}$, আৰু $H \leq G$

এতিয়া $1H = \{-1, 1\} = H1 = H$

$(-1)H = \{1, -1\} = H(-1)$

$iH = \{-i, i\} = Hi$

$(-i)H = \{i, -i\} = H(-i)$

এইদৰে $aH = Ha, \ \forall \ a \in G$

$\therefore H \ \Delta \ G.$

টোকা ঃ ওপৰৰ উদাহৰণটোত H অৰ দুটা পৃথক বাওঁ (বা সোঁ) সহসংহতি আছে, যথা H, iH.[$H = (-1)H, iH = (-i)H$] মন কৰিব লগীয়া যে iH, H অৰ উপসংঘ নহয়।

উপপাদ্য ১ ঃ প্ৰত্যেক আবেলীয় সংঘৰ উপসংঘ নিশ্চৰ।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা আবেলীয় সংঘ।

ধৰা হ'ল $H \leq G.$

ধৰা হ'ল $a \in G$

এতিয়া $aH = \{ah : h \in H\}$

$= \{ha : h \in H\}$ [$\because$ G আবেলীয়]

$= Ha$

$\therefore H \Delta G.$

উপপাদ্য ২ ঃ সংঘ G ৰ এটা উপসংঘ H নিশ্চৰ হ'ব যদি আৰু যদিহে $ghg^{-1} \in H, \ \forall \ g \in G, h \in H$

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল $H \ \Delta \ G$

$\therefore aH = Ha, \ \forall a \in G$

ধৰা হ'ল $g \in G, h \in H$

$\therefore gh \in gH$

$\Rightarrow gh \in Hg$ [$\because H \ \Delta \ G, gH = Hg$]

$\Rightarrow gh = hg$, কোনো $h_1 \in H$ অৰ বাবে

$\Rightarrow ghg^{-1} = h_1 gg^{-1}$, e হ'ল Gৰ একক মৌল

$\Rightarrow ghg^{-1} = h_1 \in H$

অৰ্থাৎ $ghg^{-1} \in H$

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল $H \leq G$ যাতে $ghg^{-1} \in H, \ \forall g \in G, h \in H.$

ধৰা হ'ল $a \in G \ \ \therefore ah \in aH$

প্ৰদত্ত চৰ্তমতে $aha^{-1} \in H$

$\Rightarrow (aha^{-1})a \in Ha$

$\Rightarrow ah(a^{-1}a) \in Ha$

$\Rightarrow ah \in Ha$

অর্থাৎ $ah \in aH \Rightarrow ah \in Ha$

$\therefore aH \subseteq Ha$ (1)

এতিয়া $ha \in Ha$

ধৰা হ'ল $a^{-1} = b \in G$

$\therefore bhb^{-1} \in H$

$\Rightarrow a^{-1}h(a^{-1})^{-1} \in H$

$\Rightarrow a^{-1}ha \in H$

$\Rightarrow a(a^{-1}ha) \in aH$

$\Rightarrow (aa^{-1})ha \in aH$

$\Rightarrow ha \in aH$

অর্থাৎ $ha \in Ha \Rightarrow ha \in aH$

$\therefore Ha \subseteq aH$ (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা $aH = Ha$

$\therefore H \Delta G$.

উপপাদ্য ৩ ঃ এটা সংঘৰ দুটা নিশ্চৰ উপসংঘৰ ছেদনো এটা নিশ্চৰ উপসংঘ।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু $H \Delta G$, $K \Delta G$.

$\therefore H \leq G, K \leq G$ আৰু $H \cap K \leq G$.

ধৰা হ'ল $g \in G, h \in H \cap K$

এতিয়া $h \in H \cap K \Rightarrow h \in H$ আৰু $h \in K$

এতিয়া $g \in G, h \in H$ আৰু $H \Delta G$

$\therefore ghg^{-1} \in H$

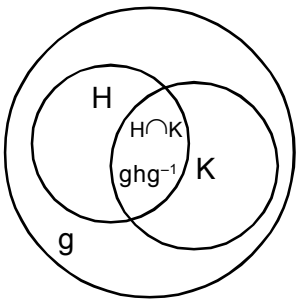
আকৌ $g \in G, h \in K$ আৰু $K \Delta G$

$\therefore ghg^{-1} \in K$

অর্থাৎ $ghg^{-1} \in H$ আৰু $ghg^{-1} \in K$

$\therefore ghg^{-1} \in H \cap K$

$\therefore H \cap K \Delta G$.



টোকা ঃ দুটা নিশ্চৰ উপসংঘৰ মিলন এটা নিশ্চৰ উপসংঘ নহ'বও পাৰে। উদাহৰণস্বৰূপে, $2z \Delta z, 3z \Delta z$ কিন্তু $2z \Delta z, 3z \Delta z$ আৰু সেই কাৰণে ই $2z \cup 3z \not< z$ৰ নিশ্চৰ উপসংঘ নহয়।

৭.৪ ভাগফল সংঘ

ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু H, G ৰ এটা নিশ্চৰ উপসংঘ।

যিহেতু H এটা নিশ্চৰ উপসংঘ, এটা বাওঁ সহসংহতি আৰু অনুৰূপ সোঁ সহসংহতিৰ মাজত

পার্থক্য নাই। গতিকে সহসংহতি বুলি ক'লে আমি বাওঁ সহসংহতি (বা সোঁ সহসংহতিক) বুজিম।

ধৰা হ'ল G ত H অৰ সকলো সহসংহতিৰ সংহতিটো G/H .

ধৰা হ'ল $a, b \in G$ $\therefore aH, bH \in G/H$

G/H অত এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল

$(aH)(bH) = abH, ab \in G$

আমি দেখুৱাম যে দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াটো সুসংজ্ঞাৱদ্ধ।

ধৰা হ'ল $aH = cH, bH = dH; a, b, c, d \in H$

এতিয়া $aH = cH \Rightarrow a^{-1}(aH) = a^{-1}(cH)$

$\Rightarrow (a^{-1}a)H = a^{-1}cH$

$\Rightarrow H = a^{-1}cH$

$\Rightarrow a^{-1}c \in H$ [উপপাদ্য ৬ (i)]

$\Rightarrow a^{-1}c = h_1$, কোনো $h_1 \in H$ অৰ বাবে

সেইদৰে $bH = dH \Rightarrow b^{-1}d \in H \Rightarrow b^{-1}d = h_2$, কোনো $h_2 \in H$ অৰ বাবে

এতিয়া $(ab)^{-1}(cb) = (b^{-1}a^{-1})(cd)$

$= b^{-1}(a^{-1}c)d$

$= b^{-1}h_1d$

$= b^{-1}dh_1$ [$\because dH = Hd$]

$= h_2h_1 \in H$

অৰ্থাৎ $(ab)^{-1}(cd) \in H$

$\therefore (ab)^{-1}(cd)H = H$

$\Rightarrow abH = cdH$

অৰ্থাৎ $\left.\begin{matrix} aH = cH \\ bH = dH \end{matrix}\right\} \Rightarrow abH = cdH$

$\therefore$ উপৰিউক্ত দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াটো সুসংজ্ঞাৱদ্ধ।

উপপাদ্য ৪ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু H, G ৰ এটা নিশ্চৰ উপসংঘ। G ত H অৰ সকলো সহসংহতিৰ সংহতিটোক G/H এৰে বুজোৱা হ'ল। তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞাৱদ্ধ দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G/H এটা সংঘ।

$(aH)(bH) = abH ; a, b \in G$

প্ৰমাণ ঃ (i) $(aH)(bH) = abH \in G/H; a, b \in G$

আকৌ আমি জানো যে দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াটো সুসংজ্ঞাৱদ্ধ।

(ii) ধৰা হ'ল $a, b, c \in G$

$\therefore aH, bH, cH \in G/H$

এতিয়া $\{(aH)(bH)\}(cH) = (abH)(cH)$

$= (ab)c\ H$

$= a(bc)H$ [$\because$G এটা সংঘ, $(ab)c = a(bc)$]

$= (aH)\{(bc)H\}$

$= (aH)\{(bH)(cH)\}$

$\therefore$ দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াটোৰে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e.

$\therefore eH = H \in G/H$

এতিয়া $(aH)H = (aH)(eH) = aeH = aH$

$H(aH) = (eH)(aH) = eaH = aH.$

$\therefore$ H একক মৌল।

(iv) $a \in G \Rightarrow a^{-1} \in G$

$(aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = H$

$(a^{-1}H)(aH) = (a^{-1}a)H = eH = H$

$\therefore$ aH অৰ বিপৰীত মৌল $a^{-1}H$.

$\therefore$ উপৰিউক্ত দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G/H এটা সংঘ।

টোকা ঃ এই সংঘটোক H অৰ দ্বাৰা G ৰ ভাগফল সংঘ বা উৎপাদক সংঘ (quotient group or factor group) বোলা হয়।

উপপাদ্য ৫ ঃ আবেলীয় সংঘৰ প্ৰতিটো ভাগফল সংঘই আবেলীয়।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা আবেলীয় সংঘ আৰু $H \leq G$

$\therefore$ G আবেলীয়, $\therefore$ H এটা নিশ্চৰ উপসংঘ।

গতিকে আমি G/H ভাগফল সংঘটো গঠন কৰিব পাৰোঁ।

ধৰা হ'ল $a, b \in G$. $\therefore aH, bH \in G/H$.

এতিয়া $(aH)(bH) = abH$

$= baH$ [$\because$ G আবেলীয়, $ab = ba$]

$= (bH)(aH)$

$\therefore$ G/H আবেলীয়।

উপপাদ্য ৬ ঃ চক্ৰীয় সংঘৰ প্ৰতিটো ভাগফল সংঘই চক্ৰীয়।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল $G = \langle a \rangle$ এটা চক্ৰীয় সংঘ।

ধৰা হ'ল $H \leq G$

$\because$ G চক্ৰীয়, $\therefore$G আবেলীয় আৰু সেয়ে H, G ৰ নিশ্চৰ উপসংঘ।

গতিকে আমি G/H ভাগফল সংঘটো গঠন কৰিব পাৰোঁ।

ধৰা হ'ল $x \in G$, $\therefore xH \in G/H$.

এতিয়া $x = a^m$, m এটা অখণ্ড সংখ্যা

ধৰা হ'ল $m > 0$

এতিয়া $xH = a^mH$

$= (a\ a\ a \ldots\ a)H$

m বাৰ

$= (aH)(aH)(aH) \ldots (aH)$

$= (aH)^m$

$\therefore$ aH অৰ দ্বাৰা জনিত G/H এটা চক্ৰীয় সংঘ।

$m = 0$ বা $m < 0$ ৰ বাবেও আমি ফলটো অনায়াসে প্ৰমাণ কৰিব পাৰোঁ।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১ঃ এটা অনা-আবেলীয় সংঘ চক্ৰীয় হ'ব পাৰে নে? যুক্তি দিয়ক।

প্ৰশ্ন নং ২ঃ দেখুৱাওক যে এটা অনা-আবেলীয় সংঘত অন্ততঃ 6 টা মৌল থাকিবই লাগিব।

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ ধৰা হ'ল $G = \{1, \omega, \omega^2\}$, ω একৰ জটিল ঘনমূল। G সংহতিটো পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত সংঘ। এই সংঘটো সৰল হয়নে?

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ এটা সংঘৰ ক্ৰম 7 হ'লে সংঘটো অনা-আবেলীয় হ'ব পাৰেনে?

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Z যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ।

$3Z = \{0, \pm 3, \pm 6, \ldots.\}$ Z অৰ এটা উপসংঘ। ভাগফল উপসংঘ $Z/3Z$ অৰ মৌলৰ সংখ্যা কিমান?



৭.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- সংঘ G ৰ কোনো উপসংঘ H অক নিশ্চৰ উপসংঘ বুলি কোৱা হয় যদি $aH = Ha$, $\forall$ $a \in G$.
- সংঘ G ৰ H এটা নিশ্চৰ উপসংঘ হ'লে G ত H অৰ সকলো সহসংহতিৰ সংহতি G/H ও এটা সংঘ। ইয়াক ভাগফল সংঘ (বা উৎপাদক সংঘ) বুলি কোৱা হয়।



৭.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ প্রত্যেক চক্রীয় সংঘ আবেলীয়। গতিকে অনা-আবেলীয় সংঘ অনা-চক্রীয়।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ হয়। G, {1} ত বাহিৰে ইয়াৰ আন কোনো নিশ্চৰ উপসংঘ নাই।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নহয়। মৌলিক ক্রমৰ প্রত্যেক সংঘই চক্রীয় আৰু প্রত্যেক চক্রীয় সংঘ আবেলীয়।

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ তিনিটা।



৭.৭ অধিক জানিবলৈ

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.
2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).
3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).
4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.
5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



৭.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

প্রশ্ন ১ঃ যদি $N_1, N_2, \ldots N_r$ এটা সংঘ G ৰ নিশ্চৰ উপসংঘ হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰক যে $(N_1 \cap N_2 \cap \ldots N_n)$ এটা G ৰ নিশ্চৰ উপসংঘ।

প্ৰশ্ন ২ঃ ধৰা হ'ল G = $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ o & d \end{pmatrix} : a, b, d \in IR \text{ আৰু } ad \neq 0 \right\}$

দেখুৱাওক যে মৌলকক্ষৰ পূৰণৰ অধীনত G এটা অনা-আবেলীয় সংঘ।

ধৰা হ'ল H = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ o & 1 \end{pmatrix} : b \in IR \right\}$

দেখুৱাওক যে G ৰ H এটা নিশ্চৰ উপসংঘ।

প্ৰশ্ন ৩ঃ দেখুৱাওক যে এটা সংঘৰ মৌলৰ সংখ্যা মৌলিক সংখ্যা হ'লে সংঘটো সৰল।

*** ***** ***