অধ্যায় ৮ ঃ সংঘৰ অনুৰূপতা (HOMOMORPHISM OF GROUPS)

অধ্যায় গাঁথনি

৮.১ উদ্দেশ্য
৮.২ পৰিচয়
৮.৩ সংঘৰ অনুৰূপতা ঃ সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ
৮.৪ অনুৰূপতাৰ বিভিন্ন প্ৰকাৰ
৮.৫ অনুৰূপতাৰ ধৰ্ম
৮.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
৮.৭ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান
৮.৮ অধিক জানিবলৈ
৮.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন

৮.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- সংঘৰ অনুৰূপতাৰ ধাৰণা সম্পৰ্কে অৱগত হ'ব
- বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ অনুৰূপতা সম্পৰ্কে জানিব পাৰিব
- অনুৰূপতাৰ ধৰ্ম আৰু আনুষংগিক উপপাদ্য সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

৮.২ পৰিচয়

অনুৰূপতাক ইংৰাজীত homomorphism বুলি কোৱা হয়। homomorphism শব্দটো গ্ৰীক ভাষাৰ homos (অৰ্থ একে) আৰু morphe (অৰ্থ ৰূপ বা আকৃতি) শব্দযুগলৰ পৰা আহিছে। গতিকে homomorphism শব্দটোৰ অৰ্থ 'একে ৰূপৰ বা অনুৰূপৰ'।

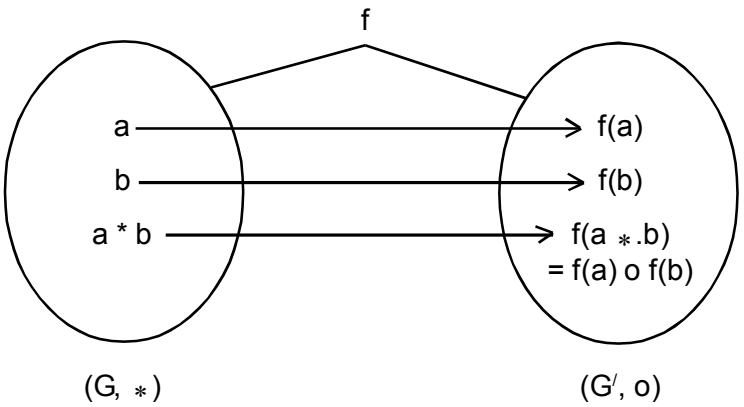
অনুৰূপতা হ'ল দুটা বীজগণিতীয় গাঁথনিৰ মাজৰ গাঁথনি-সংৰক্ষিত মানচিত্ৰণ। গতিকে, সংঘৰ অনুৰূপতা হ'ল এনে অনুৰূপতা যিয়ে সংঘৰ গাঁথনি সংৰক্ষণ কৰে।

৮.৩ সংঘৰ অনুৰূপতা (HOMOMORPHISM OF GROUPS)

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল ' * ' দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G এটা সংঘ আৰু ' o ' দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G' এটা সংঘ।

ধৰা হ'ল $f : G \to G'$ এটা মানচিত্ৰণ। f অক এটা অনুৰূপতা (homomorphism) বুলি কোৱা হয় যদি

$f(a * b) = f(a) \text{ of } (b),\ \forall\ a, b \in G$



টোকা ঃ 1. এই ক্ষেত্ৰত a ৰ লগত f(a) যুক্ত, b ৰ লগত f(b) যুক্ত। আকৌ $a * b$ ৰ লগত f(a) o f(b) যুক্ত। গতিকে f মানচিত্ৰণে অকল G ৰ দুটা মৌলক G/ অৰ দুটা অদ্বিতীয় মৌলৰ লগত সংযুক্ত নকৰে, ই $a * b$ ক G/ অৰ f(a) o f(b)ৰ লগতো সংযুক্ত কৰে। গতিকে দেখা গ'ল যে f মানচিত্ৰণে প্ৰণালীটোৰ বীজগণিতীয় গাঁথনি সংৰক্ষণ কৰে।

2. ইয়াৰ পিছৰ আলোচনাবোৰত আমি দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ বাবে প্ৰতীক ব্যৱহাৰ নকৰোঁ। আমি এনেদৰে লিখিম f(ab) = f(a) f(b).

কিন্তু এইটো কথা মনত ৰাখিব লাগিব যে দুয়োটা সংঘৰ দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া একে নহ'ব পাৰে।

উদাহৰণ ১ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণ এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল

$$f : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{Z}},\ \ f(x) = -x, \forall x \in \underline{\underline{Z}}$$

ধৰা হ'ল $a,\ b \in \underline{\underline{Z}}$

এতিয়া f(a+b) = –(a+b), f অৰ সংজ্ঞামতে

= – a – b

= (–a) + (–b)

= f(a) + f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

টোকা ঃ ওপৰৰ উদাহৰণটোত দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া হ'ল "+" । তদুপৰি, একে দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত দুয়োটা সংঘই একে।

উদাহৰণ ২ঃ ধৰা হ'ল R বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ আৰু R_+ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ গুণাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণ এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল

$f : R \to R_+,\ f(x) = e^x$

f অনুৰূপতা হয়নে নহয়, সেয়া পৰীক্ষা কৰিব লাগে। R অত দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া হ'ল " + ", আৰু R_+ অত দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া হ'ল " . ". গতিকে f(a+b) = f(a) f(b), $\forall\ a, b \in R$ হয়নে নহয়, সেয়া পৰীক্ষা কৰিব লাগে।

এতিয়া $f(a+b) = e^{a+b}$, f অৰ সংজ্ঞামতে

$= e^a e^b$

$= f(a)\ f(b)$

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

উদাহৰণ ৩ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণ এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল

$f : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{Z}},\ \ f(x) = x + 5$

ধৰা হ'ল $a,\ b \in \underline{\underline{Z}}$

এতিয়া f(a+b) = (a+b) + 5

f(a) + f(b) = (a+5) + (b+5)

= (a+b) +10

$\therefore$ f(a+b) $\neq$ f(a) + f(b)

$\therefore$ f অনুৰূপতা নহয়।

উদাহৰণ ৪ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। ধৰা হ'ল G = {–1, 1} গুণাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হ'ল

$$f(x)\begin{cases} = 1, & \text{যদি } x \text{ যুগ্ম} \\ = -1, & \text{যদি } x \text{ অযুগ্ম} \end{cases}$$

ধৰা হ'ল $a,\ b \in \underline{\underline{Z}}$

প্ৰথম ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল a যুগ্ম, b যুগ্ম।

$\therefore$ f(a) = 1, f(b) = 1

আকৌ, a + b যুগ্ম

$\therefore$ f (a + b) = 1

= 1 x 1

= f(a) f(b)

দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল a অযুগ্ম, b অযুগ্ম

$\therefore$ f(a) = –1, f(b) = –1

$\therefore$ a, b অযুগ্ম, $\therefore$ a + b যুগ্ম

$\therefore$ f (a + b) = 1

= (–1) x (–1)

= f(a) f(b)

তৃতীয় ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল a যুগ্ম, b অযুগ্ম

$\therefore$ f(a) = 1, f(b) = –1

$\because$ a যুগ্ম আৰু b অযুগ্ম, $\therefore$ a + b অযুগ্ম

$\therefore$ f(a + b) = –1

= 1 x (–1)

= f(a) f(b)

সেইদৰে, যদি a অযুগ্ম আৰু b যুগ্ম, তেনেহ'লে f(a + b) = f(a) f(b)

দেখা গ'ল যে তিনিওটা ক্ষেত্ৰতে f(a + b) = f(a) f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

উদাহৰণ ৫ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু G ৰ একক মৌল e. এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে।

f(x) = e, $\forall\ x \in G$

ধৰা হ'ল $a,\ b \in G$

$\therefore\ ab \in G$

এতিয়া f(a) = e, f(b) = e

আকৌ f(ab) = e

= e e ($\because$ e একক মৌল)

= f(a) f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ১

প্ৰশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$f : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{Z}},\ f(x) = 5x$

f অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে।

$f : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{Z}},\ f(x) = x + 3$

f অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{R}}_+$ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ গুণাধীনত সংঘ আৰু $\underline{\underline{R}}$ হ'ল বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$f : \underline{\underline{R}}_+ \to \underline{\underline{R}}_+,\ f(x) = \frac{1}{x}$

f অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{R}}_+$ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ গুণাধীনত সংঘ আৰু $\underline{\underline{R}}$ হ'ল বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্রণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে।

$$f : \underline{\underline{R}}_+ \to \underline{\underline{R}}, \quad f(x) = \log_e x$$

f অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}, S_3 হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ দ্বাৰা গঠিত সংঘ। ধৰা হ'ল G = {–1, 1} গুণাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্রণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$$f(\alpha)\begin{cases} = 1, & \text{যদি } \alpha \text{ এটা যুগ্ম বিন্যাস} \\ = -1, & \text{যদি } \alpha \text{ এটা অযুগ্ম বিন্যাস} \end{cases}$$

f অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

৮.৪ অনুৰূপতাৰ বিভিন্নপ্রকাৰ (TYPES OF HOMOMORPHISM)

ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G′ সংঘলৈ $f : G \to G'$ এটা অনুৰূপতা।

1. অনুৰূপতা f অক এটা একৈকী অনুৰূপতা (monomorphism) বুলি কোৱা হয় যদি f একৈকী হয়।
2. অনুৰূপতা f অৰ এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা (epimorphism) বুলি কোৱা হয় যদি f আচ্ছাদক হয়।
3. এটা সংঘৰ পৰা নিজলৈকে অনুৰূপতাক স্বানুৰূপতা (endomorphism) বুলি কোৱা হয়।
4. অনুৰূপতা f অক সম অনুৰূপতা (isomorphism) বুলি কোৱা হয় যদি f একৈকী আৰু আচ্ছাদক অর্থাৎ দ্বিমুখী।

   ইংৰাজী 'isomorphism' শব্দটোৱো গ্রীক ভাষাৰ "isos" অর্থ সমান আৰু "morphe" (অর্থ ৰূপ বা আকৃতি) শব্দদ্বয়ৰ পৰা আহিছে। দুটা সংঘৰ মাজত এটা সম অনুৰূপতা থাকিলে, সিহঁতক 'বিমূর্তভাৱে সর্বাংগসম' বুলি ক'ব পাৰি। সিহঁতক দুটা পৃথক সংঘ হিচাপে বিবেচনা নকৰি এটা সংঘ হিচাপে ল'ব পাৰি।
5. এটা সংঘৰ পৰা নিজলৈকে এটা সম অনুৰূপতাক সম স্বানুৰূপতা (automorphism) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ ৬ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্রণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$$f : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{Z}}, \; f(x) = -x, \; \forall \; x \in \underline{\underline{Z}}$$

(i) ইতিমধ্যে আমি দেখুৱাইছোঁ যে f এটা অনুৰূপতা (উদাহৰণ ১)।

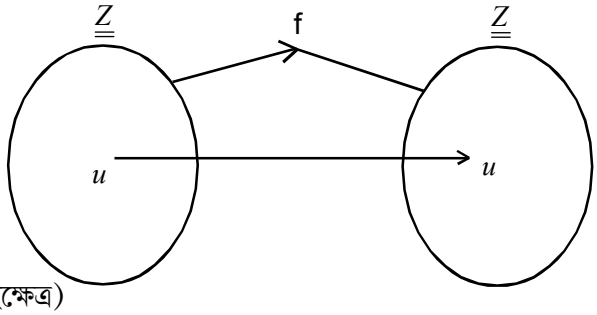
(ii) ধৰা হ'ল $a,b \in \underline{\underline{Z}}$

f(a) = f(b)

$\Rightarrow$ –a = – b

$\Rightarrow$ a = b

$\therefore$ f একৈকী।



(iii) ধৰা হ'ল $u \in \underline{\underline{Z}}$ (সহক্ষেত্ৰ)

গতিকে $\underline{\underline{Z}}$ অত (আদিক্ষেত্ৰ) এটা মৌল $-u$ আছে যাতে

$f(-u) = -(-u) = u$

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

গতিকে দেখা গ'ল যে f আচ্ছাদক, f একৈকী আৰু f আচ্ছাদক।

$\therefore$ f এটা সম অনুৰূপতা।

যিহেতু $\underline{\underline{Z}}$ অৰ পৰা $\underline{\underline{Z}}$ অলৈ f এটা সম অনুৰূপতা,

$\therefore$ f এটা সম স্বানুৰূপতা।

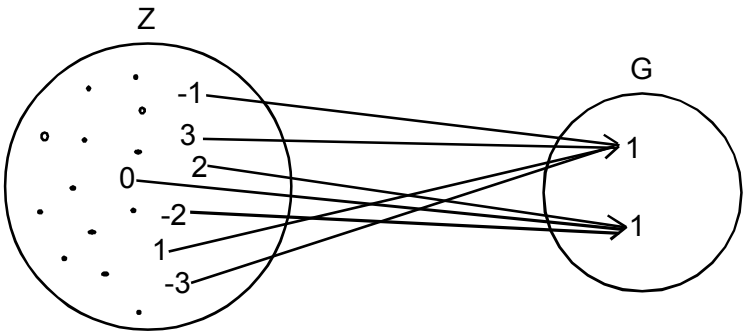
উদাহৰণ ৭ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। ধৰা হ'ল G = {–1, 1} গুণাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$$f(x)\begin{cases} = 1, & \text{যদি } x \text{ যুগ্ম} \\ = -1, & \text{যদি } x \text{ অযুগ্ম} \end{cases}$$

(i) ইতিমধ্যে আমি দেখুৱাইছোঁ যে f এটা অনুৰূপতা (উদাহৰণ ৪)।

(ii) স্পষ্টতঃ f একৈকী নহয়।

(iii) স্পষ্টতঃ f আচ্ছাদক।



সকলো যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ প্ৰতিচ্ছায়া 1, আৰু সকলো অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ প্ৰতিচ্ছায়া –1।

গতিকে, f এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা, কিন্তু সম অনুৰূপতা নহয়।

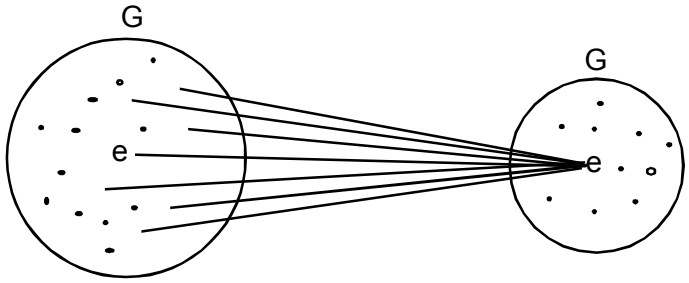
উদাহৰণ ৮ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু ধৰা হ'ল e ৰ G একক মৌল। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা

এনেদৰে দিয়া আছে।

$$f(x) = e,\ \forall x \in G$$

(i) ইতিমধ্যে আমি দেখুৱাইছোঁ যে f এটা অনুৰূপতা (উদাহৰণ ৫)।

(ii) স্পষ্টতঃ f একৈকী নহয়। সকলোবোৰ মৌল e ৰ লগত যুক্ত।



(iii) f আচ্ছাদক নহয়। e য়েই একমাত্ৰ প্ৰতিচ্ছায়া।

∴ f সম অনুৰূপতা নহয়। f একৈকী অনুৰূপতা নহয়, f আচ্ছাদক অনুৰূপতাও নহয়।

যিহেতু f, G অৰ পৰা G লৈ এটা অনুৰূপতা, গতিকে ই স্বানুৰূপতা।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ ধৰা হ'ল C জটিল সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণ f অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে।

$$f : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{C}},\ f(z) = \bar{z},\ \forall z \in \underline{\underline{C}}$$

f সম স্বানুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৭ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{R}}$ বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ আৰু $\underline{\underline{R}}_+$ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ গুণাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণ f অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে,

$$f : \underline{\underline{R}} \to \underline{\underline{R}}_+,\ f(x) = e^x$$

f সম অনুৰূপণতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৮ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ আৰু $\underline{\underline{2Z}}$ যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ গুণাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$$f : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{2Z}},\ f(x) = 2x,\ \forall x \in \underline{\underline{Z}}$$

f সম অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৯ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{2Z}} = \{\ldots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 9, \ldots\}$

$\underline{\underline{3Z}} = \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$

$\underline{\underline{2Z}}$ আৰু $\underline{\underline{3Z}}$ যোগাধীনত সংঘ।

এটা মানচিত্ৰণ f অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে f : $\underline{\underline{2Z}} \to \underline{\underline{3Z}}$, f(2x)=3x য'ত x এটা অখণ্ড সংখ্যা।

f সম অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ১০ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{R}}_+$ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ গুণাধীনত সংঘ, আৰু $\underline{\underline{R}}$ বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণ f অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$f : \underline{\underline{R}}_+ \to \underline{\underline{R}},\ f(x) = \log_{10} x$

f সম অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

৮.৫ অনুৰূপতাৰ ধৰ্ম (PROPERTIES OF HOMOMORPHISM)

উপপাদ্য ঃ ধৰা হ'ল G, G′ দুটা সংঘ। ধৰা হ'ল e, e′ ক্ৰমে G, G′ অৰ একক মৌল। ধৰা হ'ল f : G $\to$ G′ এটা অনুৰূপতা, তেনেহ'লে

(i) f(e) = e′

(ii) f(x^{-1}) = (f(x))$^{-1}$, $x \in G$

(iii) f(x^n) = (f(x))^n, $x \in G$, n এটা অখণ্ড সংখ্যা।

প্ৰমাণ ঃ (i) আমি জানো

e e = e

$\Rightarrow$ f(e e) = f(e)

$\Rightarrow$ f(e) f(e) = f(e), $\because$ f এটা অনুৰূপতা

$\Rightarrow$ f(e) f(e) = f(e)e′, f(e) $\in$ G′ আৰু e′ হ'ল G′ অৰ একক মৌল।

$\Rightarrow$ f(e) = e′, বাওঁ বিলোপন বিধিৰ সহায়ত

(ii) আমি জানো

$$x x^{-1} = e = x^{-1} x$$

$$\Rightarrow f(x x^{-1}) = f(e) = f(x^{-1} x)$$

$$\Rightarrow f(x) f(x^{-1}) = e' = f(x^{-1}) f(x)$$

$\Rightarrow f(x^{-1})$ অৰ বিপৰীত হ'ল f

অৰ্থাৎ $(f(x)^{-1}) = f(x^{-1})$

(iii) ধৰা হ'ল n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা ঃ

তেনেহ'লে $f(x^n) = f(x x x \ldots x)$

= $f(x) f(x) f(x) f(x) \ldots f(x)$, $\because$ f এটা অনুৰূপতা

= $(f(x))^n$

ধৰা হ'ল n = 0 :

তেনেহ'লে x^0 = e

$\therefore$ f (x^0) = f(e)

$= e'$

$= (f(x))^0$

ধৰা হ'ল n এটা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা ঃ

ধৰা হ'ল $n = -m$, য'ত m এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

এতিয়া $f(x^n) = f(x^{-m})$

$= f(x^{-1})^m)$

$= ((f(x))^{-1})^m$

$= (f(x))^{-m}$

$= (f(x))^n$

গতিকে, $f(x^n) = (f(x))^n$, যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা n অৰ বাবে

উপপাদ্য ঃ ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G′ সংঘলৈ $f : G \to G'$ এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা। যদি G আবেলীয়, তেনেহ'লে G′ ও আবেলীয়।

প্ৰমাণ ঃ এই ক্ষেত্ৰত $f : G \to G'$ এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা। ধৰা হ'ল $u, v \in G'$

$\because$ f আচ্ছাদক, G ত মৌল a, b আছে, যাতে f(a) = u, f(b) = v

এতিয়া $uv = f(a)\, f(b)$

$= f(ab)$, $\because$ f এটা অনুৰূপতা

$= f(ba)$, $\because$ G আবেলীয়

$= f(b)\, f(a)$, $\because$ f এটা অনুৰূপতা

$= vu$

গতিকে, $uv = vu, \ \forall u, v \in G'$

$\therefore$ G আবেলীয়।

টোকা ঃ ওপৰৰ উপপাদ্যটোৰ বিপৰীতটো সত্য নহয়।

S = {1, 2, 3} সংহতিত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংঘ S_3 বোলা হ'ল।

ধৰা হ'ল G = {–1, 1} গুণাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণ এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল।

$$f(\alpha)\begin{cases} = 1, & \text{যদি } \alpha \text{ এটা যুগ্ম বিন্যাস} \\ = -1, & \text{যদি } \alpha \text{ এটা অযুগ্ম বিন্যাস} \end{cases}$$

f এটা অনুৰূপতা। তদুপৰি f আচ্ছাদক, অৰ্থাৎ, f এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা।

G আবেলীয়, কিন্তু S_3 আবেলীয় নহয়।

উপপাদ্য ঃ ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G′ সংঘলৈ $f : G \to G'$ এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা। যদি G চক্ৰীয়, তেনেহ'লে G′ ও চক্ৰীয়।

প্ৰমাণ ঃ এই ক্ষেত্ৰত $f : G \to G'$ এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা।

ধৰা হ'ল চক্রীয় সংঘ G ৰ $a \in G$ এটা জনক।

ধৰা হ'ল $u \in G$

গতিকে G ত এটা মৌল ρ আছে যাতে

u = f(ρ)

= $f(a^m)$, $\because$ $p = a^m$, যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা m অৰ বাবে

= $(f(a))^m$

$\Rightarrow$ G/ এটা চক্রীয় সংঘ আৰু f(a) ইয়াৰ এটা জনক।

টোকা ঃ ওপৰৰ উপপাদ্যটোৰ বিপৰীতটো সত্য নহয়।

আগৰ উপপাদ্যটোৰ উদাহৰণটো লোৱা হ'ল।

ইয়াত G = {–1, 1} চক্রীয়, কিন্তু S_3 চক্রীয় নহয়।

উপপাদ্য ঃ ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G/ সংঘলৈ $f : G \to G'$ এটা অনুৰূপতা।

(i) যদি G ৰ H এটা উপসংঘ, তেনেহ'লে G/ অৰ f(H) এটা উপসংঘ।

(ii) যদি G/ অৰ K এটা উপসংঘ, তেনেহ'লে G ৰ $f^{-1}(K)$ এটা উপসংঘ।

[f(H) = {f(h) : h ∈ H}, ইয়াক f অৰ অধীনত H অৰ প্রতিচ্ছায়া বুলি কোৱা হয়।

$f^{-1}(K) = \{a \in G : f(a) \in K\}$, ইয়াক f অৰ অধীনত K ৰ বিপৰীত প্রতিচ্ছায়া বুলি কোৱা হয়।

মন কৰিব লগীয়া যে যদিও f এটা অনুৰূপতা, f^{-1} অনুৰূপতা নহ'বও পাৰে।]

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e আৰু G/ অৰ একক মৌল e/.

$\therefore$ f(e) = e/

(i) আমি জানো e/ = f(e) ∈ f(H)

$\therefore$ $f(H) \neq \phi$

ধৰা হ'ল $u, v \in f(H)$

$\therefore$ H অত মৌল a, b আছে যাতে f(a) = u, f(b)= v

এতিয়া uv^{-1} = $f(a)\,(f(b))^{-1}$

= $f(a)\,f(b^{-1})$

= $f(ab^{-1})$

$\because$ G ৰ H এটা উপসংঘ, $\therefore$ $ab^{-1} \in H$

$\therefore$ $f(ab^{-1}) \in f(H)$

$\therefore$ $uv^{-1} \in f(H)$

দেখা গ'ল যে $u, v \in f(H) \Rightarrow uv^{-1} \in f(H)$

$\therefore$ G/ অৰ f(H) এটা উপসংঘ।

(ii) আমি জানো $e' \in K$

$\Rightarrow f(e) \in K$

$\Rightarrow e \in f^{-1}(K)$

$\therefore f^{-1}(K) \neq \phi$

ধৰা হ'ল a, $b \in f^{-1}(K)$

$\therefore f(a) \in K, f(b) \in K$

$\Rightarrow f(a)\,(f(b))^{-1} \in K,$ $\because$ G/ অৰ K এটা উপসংঘ

$\Rightarrow f(a)\,f(b^{-1}) \in K$

$\Rightarrow f(ab^{-1}) \in K$

$\Rightarrow ab^{-1} \in f^{-1}(K)$

দেখা গ'ল যে a, $b \in f^{-1}(K)$ $\Rightarrow ab^{-1} \in f^{-1}(K)$

$\therefore$ G/ অৰ $f^{-1}(K)$ এটা উপসংঘ।

উদাহৰণ ৯ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ। ধৰা হ'ল মানচিত্ৰণ $f : G \to G, f(x) = x^{-1}$ এটা অনুৰূপতা। দেখুওৱা যে G আবেলীয়।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল a, $b \in G$.

এতিয়া f(ab) = f(a) f(b), $\because$ f এটা অনুৰূপতা f অৰ সংজ্ঞাৰ পৰা

$\Rightarrow ((ab)^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1}\,(a^{-1})^{-1}$

$\Rightarrow ab = (b^{-1})^{-1}(a^{-1})^{-1}$

$\Rightarrow ab = ba$

$\therefore$ G আবেলীয়।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৩

প্ৰশ্ন নং ১১ঃ ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা Gলৈকে $f : G \to G, f(x) = x$ এটা মানচিত্ৰণ। প্ৰমাণ কৰক যে f এটা সম স্বানুৰূপতা।

প্ৰশ্ন নং ১২ঃ ধৰা হ'ল G এটা আবেলীয় সংঘ। প্ৰমাণ কৰক যে $f : G \to G, f(x) = x^{-1}$ এটা সম স্বানুৰূপতা।



৮.৬ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

ধৰা হ'ল $*$ দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G এটা সংঘ আৰু o দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G/ এটা সংঘ। ধৰা হ'ল $f : G \to G'$ এটা মানচিত্ৰণ। f অক এটা অনুৰূপতা বুলি কোৱা হয় যদি $f(a * b) = f(a)\,(b)\ \forall a, b \in G$

- এটা অনুৰূপতাক একৈকী অনুৰূপতা বুলি কোৱা হয় যদি ই একৈকী হয়।
- এটা অনুৰূপতাক আচ্ছাদক অনুৰূপতা বুলি কোৱা হয় যদি ই আচ্ছাদক হয়।
- এটা অনুৰূপতাক সম অনুৰূপতা বুলি কোৱা হয় যদি ই একৈকী আৰু আচ্ছাদক হয়।
- এটা সংঘৰ পৰা নিজলৈকে অনুৰূপতাক স্বানুৰূপতা বুলি কোৱা হয়।
- এটা সংঘৰ পৰা নিজলৈকে এটা সম অনুৰূপতাক সম স্বানুৰূপতা বুলি কোৱা হয়।
- ধৰা হ'ল G, G′ দুটা সংঘ। ধৰা হ'ল e, e′ ক্ৰমে G, G′ অৰ একক মৌল।
  (i) f(e) = e′
  (ii) f(x^{-1}) = (f(x))$^{-1}$, $x \in G$
  (iii) f(x^n) = (f(x))^n, n এটা অখণ্ড সংখ্যা।
- ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G′ সংঘলৈ f $G \to G'$ এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা।
  (i) যদি G আবেলীয়, তেনেহ'লে G′ ও আবেলীয়।
  (ii) যদি G চক্ৰীয়, তেনেহ'লে G′ ও চক্ৰীয়।
  ওপৰৰ (i) আৰু (ii) ৰ প্ৰত্যেকৰে বিপৰীতটো সত্য নহয়।
- ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G′ সংঘলৈ f : $G \to G'$ এটা অনুৰূপতা।
  (i) যদি G ৰ H এটা উপসংঘ, তেনেহ'লে G′ অৰ f(H) এটা উপসংঘ।
  (ii) যদি G′ অৰ K এটা উপসংঘ, তেনেহ'লে G ৰ f^{-1}(K) এটা উপসংঘ।



৮.৭ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{Z}}, \quad f(x) = 5x$

ধৰা হ'ল $a, b \in \underline{\underline{Z}}$

এতিয়া f(a+b) = 5(a+b)

=5a+ 5b

= f(a) + f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{Z}}, \quad f(x) = x + 3$

ধৰা হ'ল $a, b \in \underline{\underline{Z}}$

f(a+b) = (a+b) + 3 = a+b+3

f(a) +f(b) = (a+3) + (b+3)

= a + b + 6

$\therefore$ f(a+b) $\neq$ f(a) + f(b)

$\therefore$ f অনুৰূপতা নহয়।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ অ $f : \underline{\underline{R}}_+ \to \underline{\underline{R}}_+,\ f(x) = \frac{1}{x}$

ধৰা হ'ল $a, b \in \underline{\underline{R}}_+$

এতিয়া $f(ab) = \frac{1}{ab}$

$= \frac{1}{a}\frac{1}{b}$

= f(a)f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : \underline{\underline{R}}_+ \to \underline{\underline{R}},\ f(x) = \log_e x$

ধৰা হ'ল $a, b \in \underline{\underline{R}}_+$

এতিয়া $f(ab) = \log_e ab$

$= \log_e a + \log_e b$

$= f(a) + f(b)$

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : S_3 \to G = \{-1, 1\}$, য'ত

$$f(\alpha)\begin{cases} = 1, & \text{যদি } \alpha \text{ এটা যুগ্ম বিন্যাস} \\ = -1, & \text{যদি } \alpha \text{ এটা অযুগ্ম বিন্যাস} \end{cases}$$

প্ৰথম ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল α, β যুগ্ম বিন্যাস।

$\therefore\ f(\alpha) = 1,\ f(\beta) = 1$

আমি জানো যে দুটা যুগ্ম বিন্যাসৰ পূৰণফল এটা যুগ্ম বিন্যাস

$\therefore\ f(\alpha\beta) = 1$

$= 1 \times 1$

$= f(\alpha) f(\beta)$

দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল α, β অযুগ্ম বিন্যাস।

$\therefore\ f(\alpha) = -1,\ f(\beta) = -1$

আমি জানো যে দুটা অযুগ্ম বিন্যাসৰ পূৰণফল এটা অযুগ্ম বিন্যাস।

$\therefore\ f(\alpha\beta) = 1$

$= (-1) \times (-1)$

$= f(\alpha) f(\beta)$

তৃতীয় ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল α এটা যুগ্ম বিন্যাস আৰু β এটা অযুগ্ম বিন্যাস।

$\therefore\ f(\alpha) = 1,\ f(\beta) = -1$

আমি জানো যে এটা যুগ্ম বিন্যাস আৰু এটা অযুগ্ম বিন্যাসৰ পূৰণফল এটা অযুগ্ম বিন্যাস।

$\therefore f(\alpha\beta) = -1$

$= 1 \times (-1)$

$= f(\alpha) f(\beta)$

সেইদৰে, যদি α এটা অযুগ্ম বিন্যাস আৰু β এটা যুগ্ম বিন্যাস, তেতিয়াও

$f(\alpha\beta) = f(\alpha) f(\beta)$

গতিকে, সকলো ক্ষেত্ৰতে দেখা গ'ল যে

$f(\alpha\beta) = f(\alpha) f(\beta)$

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{C}},\ f(x) = \bar{z}$

ধৰা হ'ল $z, w \in \underline{\underline{C}}$

এতিয়া $f(z+w) = \overline{z+w}$

$= \bar{z} + \overline{w}$

$= f(z) + f(w)$

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

ধৰা হ'ল f(z) = f(w)

$\Rightarrow \bar{z} = \overline{w}$

$\Rightarrow z = w$

$\therefore$ f এটা একৈকী।

ধৰা হ'ল $z \in \underline{\underline{C}}$ (সহক্ষেত্ৰ)

গতিকে আদিক্ষেত্ৰ $\bar{z} \in \underline{\underline{C}}$ মৌল আছে যাতে

$f(\bar{z}) = (\bar{\bar{z}}) = z$

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

$\therefore$ f এটা সম অনুৰূপতা।

$\because$ $\underline{\underline{C}}$ ৰ পৰা নিজলৈকে f এটা সম অনুৰূপতা,

$\therefore$ f এটা সম স্বানুৰূপতা।

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : \underline{\underline{R}} \to \underline{\underline{R}}_+,\ f(x) = e^x$

ধৰা হ'ল $a, b \in \underline{\underline{R}}$

এতিয়া $f(a+b) = e^{a+b}$

$= e^a e^b$

$= f(a)\, f(b)$

ধৰা হ'ল f(a) = f(b)

$\Rightarrow e^a = e^b$

$\Rightarrow a = b$

$\therefore$ f একৈকী।

ধৰা হ'ল $u \in \underline{\underline{R}}_+$ যাতে f(c) = u

$\therefore e^c = u$

$\therefore e = \log_e u \in \underline{\underline{R}}$

দেখা গ'ল যে প্ৰত্যেক $u \in \underline{\underline{R}}_+$, অৰ বাবে, $\log_e u \in \underline{\underline{R}}$ আছে যাতে $f(\log_e u) = u$

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

$\therefore$ f এটা সম অনুৰূপতা।

৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : \underline{\underline{Z}} \to 2\underline{\underline{Z}},\ f(x) = 2x$

ধৰা হ'ল $a, b \in \underline{\underline{Z}}$

এতিয়া f(a+b) = z(a+b)

= 2a + 2b

= f(a) + f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

ধৰা হ'ল f(a) = f(b)

$\Rightarrow$ 2a = 2b

$\Rightarrow$ a = b

$\therefore$ f একৈকী।

ধৰা হ'ল $u \in 2\underline{\underline{Z}}$

গতিকে $\frac{u}{2} \in \underline{\underline{Z}}$ যাতে $f\left(\frac{u}{2}\right) = 2\frac{u}{2} = u$

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

$\therefore$ f এটা সম অনুৰূপতা।

৯ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : \underline{\underline{2Z}} \to \underline{\underline{3Z}},\ f(2x) = 3x$, য'ত x এটা অখণ্ড সংখ্যা।

ধৰা a, b অখণ্ড সংখ্যা।

$\therefore 2a, 2b \in 2Z$

এতিয়া f (2a+2b) = f(2(a+b))

= 3(a+b)

= 3a + 3b

= f(2a)+ f(2b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

ধৰা হ'ল f(2a) = f(2b)

$\Rightarrow$ 3a = 3b

$\Rightarrow$ a = b

$\Rightarrow$ 2a = 2b

$\therefore$ f এটা একৈকী।

ধৰা হ'ল $3u \in 3\underline{\underline{Z}}$, য'ত u এটা অখণ্ড সংখ্যা।

গতিকে $2u \in 2Z$ আছে যাতে f (2u) = 3u

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

$\therefore$ f এটা সম অনুৰূপতা।

১০ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : \underline{\underline{R}}_+ \to \underline{\underline{R}}_+ \quad f(x) = \log_{10} x$

ধৰা হ'ল $a, b \in \underline{\underline{R}}_+$

এতিয়া f(ab) = $\log_{10}$ ab

= $\log_{10}$a = $\log_{10}$b

= f(a) + f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

ধৰা হ'ল f(a) = f(b)

$\Rightarrow$ $\log_{10}$a = $\log_{10}$b

$\Rightarrow$ a = b

$\therefore$ f একৈকী।

ধৰা হ'ল $u \in \underline{\underline{R}}$

গতিকে $10^u \in \underline{\underline{R}}_+$ যাতে

$$f(10^u) = \log_{10}{}^{10^u}$$

$$= u \log_{10}{}^{10}$$

$$= u$$

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

$\therefore$ f এটা সম অনুৰূপতা।

১১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : G \to G, \quad f(x) = x$

ধৰা হ'ল $a, b \in G$

এতিয়া f(ab) = ab

= f(a) f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

f(a) = f(b)

$\Rightarrow$ a = b

$\therefore$ f এঁকেকী।

প্ৰত্যেক $a \in G$ ৰ বাবে, f(a) = a

$\therefore$ f আচ্ছাদক

$\therefore$ G ৰ পৰা নিজলৈকে f এটা সম অনুৰূপতা।

$\therefore$ f এটা সম স্বানুৰূপতা।

১২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : G \to G, \quad f(x) = x^{-1}$

ধৰা হ'ল $a, b \in G$

এতিয়া $f(ab) = (ab)^{-1}$

$= b^{-1} a^{-1}$

$= a^{-1}b^{-1}$, $\because$ G আবেলীয়

$= f(a) f(b)$

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

ধৰা হ'ল f(a) = f(b)

$\Rightarrow$ a = b

$\therefore$ f এঁকেকী।

ধৰা হ'ল $u \in G$.

গতিকে $u^{-1} \in G$ যাতে

$f(u^{-1}) = (u^{-1})^{-1}$

$= u$

$\therefore$ f আচ্ছাদক

$\therefore$ G ৰ পৰা নিজলৈকে f এটা সম অনুৰূপতা।

$\therefore$ f এটা সম স্বানুৰূপতা।



৮.৮ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

১) Fraleigh, Johu B : *A First Course in Abetract Algebra* (2003), Pearson Education (Singapure) Pvt. Ltd, Indian Branch, Delhi 110092.

২) Mapa, S.K. : *Higher Algebra* (Abstract and Linear) (1994), Asoke Prakasan, Calcutta 700007.

৩) Khanna, V. K. and Bhambri, S. K. : *A Course in Abstract Algebra* (2006), Vikas Publishing House Pvt. Ltd. New Delhi 110014.



৮.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{R}}$ বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ।

$f : \underline{\underline{R}} \to \underline{\underline{R}}, f(x) = 5x$

এটা মানচিত্ৰণ।

f অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ২ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{3Z}}$ ={. . . ., –9, –6, –3, 0, 3, 6, 9, ...}

$\underline{\underline{5Z}}$ ={. . . ., –20, –15, –10, –5, 0, 5, 10, 15, 20, ...}

$\underline{\underline{3Z}}$ আৰু $\underline{\underline{5Z}}$ যোগাধীনত সংঘ।

ধৰা হ'ল $f : \underline{\underline{3Z}} \to \underline{\underline{5Z}}, \ f(3x) = 5x$, য'ত x এটা অখণ্ড সংখ্যা।

f অনুৰূপতা হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ঃ এটা অসীম সংঘৰ পৰা এটা সসীম সংঘলৈ এটা অনুৰূপতাৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্ৰশ্ন ৪ঃ ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G/ সংঘলৈ $f : G \to G'$ এটা সম অনুৰূপতা। যদি G/ আবেলীয়, প্ৰমাণ কৰক যে G আবেলীয়।

প্ৰশ্ন ৫ঃ ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G/সংঘলৈ $f : G \to G'$ এটা সম অনুৰূপতা। যদি G/ চক্ৰীয়, প্ৰমাণ কৰক যে G চক্ৰীয়।

*** ***** ***