GMA S2 01

বিমুর্ত বীজগণিত আৰু বিচ্ছিন্ন গণিত

দ্বিতীয় ষাণ্মাসিক

গণিত

খণ্ড ঃ ১

কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

বিষয় বিশেষজ্ঞ

অধ্যাপক নন্দৰাম দাস, গণিত বিভাগ, গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়
ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা, প্রাক্তন মুৰব্বী, গণিত বিভাগ, কটন কলেজ, গুৱাহাটী

সমন্বয়ৰক্ষীঃ হৰেকৃষ্ণ ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

প্রস্তুতি গোটৰ সদস্য

অধ্যায়	*অৰিহণা যোগাইছে*	*ভাষান্তৰকাৰী*
১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ৮	ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা কটন মহাবিদ্যালয়, গুৱাহাটী	অধ্যায় ১, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ৮, ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা অধ্যায় ২ গীতাঞ্জলি মেধি

সম্পাদনাঃ

বিষয়বস্তু সম্পাদনা ঃ অধ্যাপক বিশ্বজিৎ ভাগৱতী, প্রাক্তন মুৰব্বী অধ্যাপক গণিত বিভাগ, কটন কলেজ

গাঁথনিক সম্পাদনা ঃ হৰেকৃষ্ণ ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

প্রথম প্রকাশঃ জানুৱাৰী, ২০১৮

Copyright © Krishna Kanta Handiqui State Open University
This Self Learning Material (SLM) of the Krishna Kanta Handiqui State Open University is made available under a Creative Commons Attribution-Non Commercial-Share Alike 4.0 License (international): http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/
For the avoidance of doubt, by applying this license KKHSOU does not waive any privileges or immunities from claims that it may be entitled to assert, nor does KKHSOU submit to the jurisdiction, courts, legal processes or laws of any jurisdiction.

কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ৰ হৈ পঞ্জীয়কৰ দ্বাৰা মুদ্রিত আৰু প্রকাশিত।

মুখ্য কার্যালয় ঃ পাটগাওঁ, ৰাণী গেট, গুৱাহাটী- ৭৮১০১৭
উপমুখ্য কার্যালয় ঃ হাউচফেড কমপ্লেক্স, দিচপুৰ, গুৱাহাটী - ৭৮১০০৬ ;
Web : www.kkhsou.in

পাঠ্যবিষয় পৰিচয়

‘বিমূর্ত বীজগণিত আৰু বিচ্ছিন্ন গণিত’ হ’ল স্নাতক (কলা) গণিত বিষয়ৰ দ্বিতীয় পাঠ্যবিষয়। এই পাঠ্যবিষয়টি দুটা খণ্ডত ভাগ কৰা হৈছে। প্ৰথম খণ্ডটি আঠটা আৰু দ্বিতীয় খণ্ডটি ছটা অধ্যায়েৰে গঠিত।

প্ৰথম খণ্ডত সম্বন্ধ, ফলন আৰু দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হৈছে। সহসংহতি আৰু লাগ্ৰাঞ্জৰ উপসংঘ ক্ৰমৰ উপপাদ্যৰ বিষয়েও এই খণ্ডটিত সামৰি লোৱা হৈছে। সংঘৰ অনুৰূপতাৰ, অনুৰূপতাৰ বিভিন্ন প্ৰকাৰ আৰু অনুৰূপতাৰ ধৰ্মৰ বিষয়ে এই খণ্ডটিৰ কিছু ধাৰণা আগবঢ়োৱা হৈছে।

দ্বিতীয় খণ্ডটিত বলয়, সমাকল প্ৰান্ত আৰু ক্ষেত্ৰৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হৈছে। ভেক্টৰ স্থানৰ বিষয়েও এই খণ্ডটি আলোচনা কৰা হৈছে। মিশ্ৰিত গণিত আৰু গাণিতিক যুক্তিৰ বিষয়েও এই খণ্ডটিত সামৰি লোৱা হৈছে। শেষত বুলীয় বীজগণিতৰ কিছু ধাৰণা এই খণ্ডটি আগবঢ়োৱা হৈছে।

এই পাঠ্যবিষয়টি অধ্যয়ন কৰোতে মূল পাঠত ‘জানি থোৱা ভাল’ বাকচবোৰৰ মূল পাঠৰ সৈতে জড়িত কিছু গুৰুত্বপূৰ্ণ তথ্যৰ সম্ভেদ আছে। প্ৰতিটো অধ্যায়ত থকা ‘অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ’ যোগে আগবঢ়োৱা প্ৰশ্নাৱলীয়ে অধ্যয়নৰ অগ্ৰগতি সম্পৰ্কে স্ব-পৰীক্ষণৰ সুবিধা দিব। অধ্যয়নৰ লগে লগে উক্ত প্ৰশ্নাৱলীৰ উত্তৰসমূহ লিখি শেষত দিয়া ‘অগ্ৰগতিৰ খতিয়ানে’ৰ সৈতে ৰিজাই চোৱাটো অধিক লাভদায়ক হ’ব। অধ্যায়বোৰৰ শেষত ‘আৰ্হি প্ৰশ্ন’ হিচাপে কেইটিমান প্ৰশ্নৰ আৰ্হিও তুলি দিয়া হৈছে।

খণ্ড পৰিচয়

এই খণ্ডটি ‘বিমুর্ত বীজগণিত আৰু বিচ্ছিন্ন গণিত’ পাঠ্যবিষয়টিৰ প্ৰথমখণ্ড। এই খণ্ডটি সৰ্বমুঠ আঠটা অধ্যায়েৰে গঠিত।

এই খণ্ডটিৰ প্ৰথম অধ্যায়টোত সম্বন্ধ আৰু ফলনৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব। এই অধ্যায়টিত বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ সম্বন্ধ আৰু ফলনৰ বিষয়েও জানিব পাৰিব।

দ্বিতীয় অধ্যাটিত দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ সংজ্ঞা আৰু বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া বিষয়ে আলোচনা কৰা হ’ব।

তৃতীয় অধ্যায়টোত সংঘ আৰু ইয়াৰ বিভিন্ন ধৰ্ম বিষয়ে জানিব পাৰিব।

সেইদৰে চতুৰ্থ অধ্যায়টিত উপসংঘ আৰু ইয়াৰ বিভিন্ন ধৰ্ম বিষয়ে আলোচনা কৰা হৈছে। ইয়াৰ উপৰিও চক্ৰীয় উপসংঘৰ বিষয়ে এই অধ্যায়টিত জানিব পাৰিব।

পঞ্চম অধ্যায়টিত বিন্যাস সংঘৰ বিষয়ে আমি জানিব পাৰিম। বিন্যাসৰ সংজ্ঞা, বিন্যাসৰ পূৰণ আৰু বিন্যাস সংঘৰ বিষয়ে এই অধ্যায়টিত আলোচনা কৰা হ’ব।

ষষ্ঠ অধ্যায়টিত সহসংহতি আৰু লাগ্ৰাঞ্জৰ উপসংঘ ক্ৰমৰ উপপাদ্য বিষয়ে আলোচনা কৰা হ’ব।

সপ্তম অধ্যায়টিত নিশ্চৰ উপসংঘ আৰু ভাগফল সংঘৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।

অষ্টম অধ্যায়টিত সংঘৰ অনুৰূপতা বিষয়ে অৱগত কৰা হ’ব। এই অধ্যায়টিত অনুৰূপতা বিভিন্ন প্ৰকাৰ আৰু অনুৰূপতাৰ ধৰ্মৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।

এই পাঠ্যবিষয়টি অধ্যয়ন কৰোতে মূল পাঠত ‘জানি থোৱা ভাল’ বাকচবোৰৰ মূল পাঠৰ সৈতে জড়িত কিছু গুৰুত্বপূৰ্ণ তথ্যৰ সম্ভেদ আছে। প্ৰতিটো অধ্যায়ত থকা ‘অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ’ যোগে আগবঢ়োৱা প্ৰশ্নাৱলীয়ে অধ্যয়নৰ অগ্ৰগতি সম্পৰ্কে স্ব-পৰীক্ষণৰ সুবিধা দিব। অধ্যয়নৰ লগে লগে উক্ত প্ৰশ্নাৱলীৰ উত্তৰসমূহ লিখি শেষত দিয়া ‘অগ্ৰগতিৰ খতিয়ানে’ৰ সৈতে ৰিজাই চোৱাটো অধিক লাভদায়ক হ’ব। অধ্যায়বোৰৰ শেষত ‘আৰ্হি প্ৰশ্ন’ হিচাপে কেইটিমান প্ৰশ্নৰ আৰ্হিও তুলি দিয়া হৈছে।

বিষয় সূচী

পৃষ্ঠা নং

অধ্যায় ১ঃ **সম্বন্ধ আৰু ফলন** ৭-২৯

সম্বন্ধৰ ধাৰণা, বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ সম্বন্ধ, সমতুল্যতা সম্বন্ধ, ফলনৰ ধাৰণা, বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ ফলন।

অধ্যায় ২ঃ **দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া** ৩০-৩৯

দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া ঃ ক্ৰম বিনিময়ে দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, সাহচৰ্য্য দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, একক মৌল, মৌলৰ বিপৰীত।

অধ্যায় ৩ঃ **সংঘ** ৪০-৪৯

সংঘ, সংঘৰ ধৰ্ম।

অধ্যায় ৪ঃ **উপসংঘ** ৫০-৫৯

উপসংঘ, উপসংঘৰ ধৰ্ম, চক্ৰীয় উপসংঘ।

অধ্যায় ৫ঃ **বিন্যাস সংঘ** ৬০-৮১

বিন্যাসৰ সংজ্ঞা, উদাহৰণ, বিন্যাসৰ পূৰণ, বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ বিন্যাস, বিন্যাস সংঘ।

অধ্যায় ৬ঃ **সহ সংহতি** ৮২-৮৮

সহসংহতি, লাগ্ৰাঞ্জৰ উপসংঘ ক্ৰমৰ উপপাদ্য।

অধ্যায় ৭ঃ **নিশ্চৰ উপসংঘ আৰু ভাগফল সংঘ** ৮৯-৯৬

নিশ্চৰ উপসংঘ, ভাগফল সংঘ।

অধ্যায় ৮ঃ **সংঘৰ অনুৰূপতা** ৯৭-১১৪

সংঘৰ অনুৰূপতা, সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ, অনুৰূপতাৰ বিভিন্ন প্ৰকাৰ, অনুৰূপতাৰ ধৰ্ম।

অধ্যায় ১ ঃ সম্বন্ধ আৰু ফলন (RELATIONS AND FUNCTIONS)

অধ্যায় গাঁথনি

১.১ উদ্দেশ্য

১.২ পৰিচয়

১.৩ সম্বন্ধৰ ধাৰণা

  ১.৩.১ একক সম্বন্ধ

  ১.৩.২ বিপৰীত সম্বন্ধ

১.৪ বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ সম্বন্ধ

  ১.৫.১ সমতুল্যতা শ্ৰেণী

১.৫ সমতুল্যতা সম্বন্ধ

১.৬ ফলনৰ ধাৰণা

  ১.৬.১ একক সম্বন্ধ

  ১.৬.২ ধ্ৰুৱক সম্বন্ধ

১.৭ বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ ফলন

১.৮ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১.৯ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১.১০ অধিক জানিবলৈ

১.১১ আৰ্হি প্ৰশ্ন

১.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি অধোলিখিত বিষয়বোৰৰ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব—

- সম্বন্ধৰ ধাৰণা
- বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ সম্বন্ধ
- সমতুল্যতা সম্বন্ধ, সমতুল্যতা শ্ৰেণী
- ফলনৰ ধাৰণা
- বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ ফলন

১.২ পৰিচয়

সংহতি তত্ত্বক (Set Theory) আধুনিক গণিতৰ ভাষা বুলি ক'ব পাৰি। আমি জানো যে সংহতি (set) হ'ল সুসংজ্ঞাৰদ্ধ 'বস্তুৰ' সংগ্ৰহ (well-defined collection of objects)। আমি সংহতিৰ উপসংহতিৰ কথাও জানো। যদি এটা সংহতি B ৰ প্ৰতিটো মৌল বা উপাদান

সংহতি A ত থাকে, তেনেহ'লে B ক A ৰ উপসংহতি বুলি কোৱা হয়। প্ৰতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে বুজোৱা হয় $B \subseteq A$.

আমি এইটোৰো জানো যে n টা মৌলবিশিষ্ট এটা সসীম সংহতিৰ (finite set) উপসংহতিৰ সংখ্যা হ'ল 2^n.

আকৌ A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি হ'লে A ৰ আৰু B কার্টেজীয় পূৰণফল (cartesian product) A x B ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা হ'ল– $A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$

(a, b) ক এটা ক্ৰমিত যোৰ (ordered pair) বুলি কোৱা হয়।

ধৰা হ'ল $a \in A$, $c \in A$; $b \in B$, $d \in B$.

$\therefore (a, b) \in A \times B$, $(c, d) \in A \times B$

আমি জানো যে $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$.

আকৌ আমি জানো যে যদি A, B দুটা সসীম সংহতি আৰু n(A)=x, n(B)=y, তেনেহ'লে n(AxB) = n(BxA)=xy

[ইয়াত n(A) য়ে Aৰ মৌলৰ সংখ্যা বুজাইছে।]

যদি A আৰু B সংহতি দুটাৰ এটা অসীম হয়, তেনেহ'লে A x B আৰু B x A অসীম।

এই অধ্যায়ত আমি সম্বন্ধ (relations) আৰু ফলন (functions) সম্বন্ধে অধ্যয়ন কৰিম। সম্বন্ধ আৰু ফলন হ'ল দুটা সংহতিৰ কার্টেজীয় পূৰণফলৰ উপসংহতি।

স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতিক 'N' এৰে, অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিক Z এৰে, পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতিক Q ৰে, বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতিক IR এৰে আৰু জটিল সংখ্যাৰ সংহতিক C ৰে বুজোৱা হ'ব।

১.৩ সম্বন্ধৰ ধাৰণা

তলৰ বাক্যবোৰলৈ মন কৰক।

(1) 10 অতকৈ 11 ডাঙৰ।

(2) 7 এৰে 35 বিভাজ্য।

(3) ভাৰতবৰ্ষৰ ৰাজধানী নতুন দিল্লী।

প্ৰতিটো বাক্যত এযোৰ 'বস্তুৰ' মাজত এটা সম্বন্ধ আছে।

সংহতি-তত্ত্বত সম্বন্ধই কি বুজায়, সেয়া এতিয়া চোৱা যাওক।

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল A আৰু B দুটা অৰিক্ত সংহতি। A x B ৰ যিকোনো উপসংহতিক A ৰ পৰা B লৈ এটা **সম্বন্ধ** (relation) বুলি কোৱা হয়।

যদি A=B, তেনেহ'লে A x A ৰ যিকোনো উপসংহতিক Aত এটা সম্বন্ধ বুলি কোৱা হয়।

যদি $R \subseteq A \times B$, আৰু $(a, b) \in R$; $a \in A$, $b \in B$, তেনেহ'লে ইয়াক aRbৰেও বুজোৱা হয় আৰু ইয়াক এনেদৰে পঢ়া হয় ঃ b ৰ লগত a ৰ R সম্বন্ধ আছে।

টোকা ঃ 1. R অৰ ক্রমিত যোৰবোৰৰ প্রথম উপাদানৰ সংহতিটোক **আদিক্ষেত্র** (domain) আৰু দ্বিতীয় উপাদানৰ সংহতিটোক পৰিসৰ (range) বুলি কোৱা হয়।

2. যদি A, B সসীম সংহতি আৰু n(A)=x, n(B)=y; তেনেহ'লে n(AxB)=xy. গতিকে AxBৰ উপসংহতিৰ সংখ্যা 2^{xy}. গতিকে Aৰ পৰা B লৈ সম্বন্ধৰ সংখ্যা 2^{xy}.

উদাহৰণ ১ ঃ ধৰা হ'ল A ={1, 2, 3}, B={8, 9}

$\therefore$ A x B ={(1, 8), (1, 9), (2, 8), (2, 9), (3, 8), (3, 9)}

ধৰা হ'ল R = {(1, 8), (2, 9), (3, 9)}

স্পষ্টত ঃ $R \subseteq$ AxB

$\therefore$ R হ'ল Aৰ পৰা Bলৈ এটা সম্বন্ধ।

আকৌ 1R8, 2R9, 3R9

R অৰ আদিক্ষেত্র = {1, 2, 3}

R অৰ পৰিসৰ = {8, 9}

উদাহৰণ ২ ঃ ধৰা হ'ল IR বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল R = {(x, y) : x, y $\in$IR, x<y} $\subseteq$IR x IR

$\therefore$ IR অত R এটা সম্বন্ধ।

$\because$ 3<5, $\therefore$ (3, 5)$\in$R অর্থাৎ 3R5

19<27, $\therefore$ (19, 27)$\in$R অর্থাৎ 19R27

কিন্তু 5>3, $\therefore$ (5, 3)$\notin$ R, অর্থাৎ 5 $\not R$3.

উদাহৰণ ৩ ঃ ধৰা হ'ল X অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল R = {(x, y) : x, y $\in$ X আৰু x+y অযুগ্ম}

আমি জানো যে দুটা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগফল এটা যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।

$\therefore$ যদি x, y অযুগ্ম হয়, তেনেহ'লে x+y অযুগ্ম হ'ব নোৱাৰে।

$\therefore$ R = $\phi \subseteq$ X x X

এই ক্ষেত্রত R অক X অত **ৰিক্ত সম্বন্ধ** (empty relation) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ ৪ ঃ ধৰা হ'ল E যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল R = {(x, y) : x, y $\in$ E আৰু x+y যুগ্ম}

আমি জানো যে দুটা যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগফল এটা যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা।

$\therefore$ যদি x, y যুগ্ম হয়, তেনেহ'লে x+y সদায় যুগ্ম।

$\therefore$ R = E x E $\in$ E x E

এই ক্ষেত্রত R অক Eঅত **সর্বজনীন সম্বন্ধ** (Universal relation) বুলি কোৱা হয়।

১.৩.১ একক সম্বন্ধ

ধৰা হ'ল A অৰিক্ত সংহতি।

$I_A = \{(a, a) : a \in A\} \subseteq A \times A$

I_A ক Aত **একক সম্বন্ধ** (identity relation) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ ৫ ঃ ধৰা হ'ল A = {1, 2, 3, 4}

তেনেহ'লে I_A ={(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)} $\subseteq$ A x A.

স্পষ্টত ঃ A ত I_A একক সম্বন্ধ।

১.৩.২ বিপৰীত সম্বন্ধ

A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি। Aৰ পৰা B লৈ R এটা সম্বন্ধ। অর্থাৎ R $\subseteq$ AxB। R অৰ ÁÕ¤ÃÕ¤ÏÎ Âü¥gßÁ(inverse relation) R^{-1}ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা হ'ল এনেধৰণৰ–

$R^{-1}=\{(b, a) : (a, b) \in R\} \subseteq B \times A$

স্পষ্টত ঃ R^{-1} অৰ আদিক্ষেত্র = R অৰ পৰিসৰ

R^{-1} অৰ পৰিসৰ = R অৰ আদিক্ষেত্র

উদাহৰণ ৬ ঃ ধৰা হ'ল A = {1, 2, 3}

B = {5, 6}

R = {(1, 5), (2, 6), (3, 5)} $\subseteq$ A x B

R^{-1} = {(5, 1), (6, 2), (5, 3)} $\subseteq$ B x A.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল A, B দুটা সসীম সংহতি আৰু n(A)=4, n(B)=3. Aৰ পৰা B লৈ কিমানটা সম্বন্ধ আছে?

প্রশ্ন নং ২ঃ ধৰা হ'ল A ত সসীম সংহতি আৰু n(A) =5 ত কিমানটা সম্বন্ধ আছে?

প্রশ্ন নং ৩ঃ IN স্বাভাৰিক সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল R = {(x, y) : x, y$\in$IN, x > y}.

তলৰ ক্রমিত যোৰবোৰ Rঅত আছেনে নাই পৰীক্ষা কৰক।

(7, 4), (23, 32), (5, 5), (72, 27), (18, 19).

প্রশ্ন নং ৪ঃ E হ'ল যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল R = {(x, y) : x, y$\in$ E আৰু x+y অযুগ্ম}

E ত R ৰিক্ত সম্বন্ধ হয়নে? যুক্তি যুক্ততা প্রতিপন্ন কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ ধৰা হ'ল A = {1, 2, 3, 4, 5}

A ত একক সম্বন্ধটো লিখক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ ধৰা হ'ল A = {4, 5, 6}, B = {7, 8, 9}

ধৰা হ'ল R = {(4, 7), (5, 8), (6, 7), (6, 8), (6, 9)}

R^{-1}টো লিখক।

১.৪ বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ সম্বন্ধ

ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি আৰু Aত R এটা সম্বন্ধ, অৰ্থাৎ $R \subseteq A \times A$.

1. R সম্বন্ধটো **প্ৰতিফলনীয়** (reflexive) বুলি কোৱা হয় যদি $(a, a) \in R$, অৰ্থাৎ যদি aRa, $\forall a \in A$.
2. R সম্বন্ধটো **সমমিত (বা প্ৰতিসম)** (symmetric) বুলি কোৱা হয় যদি $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$, অৰ্থাৎ যদি aRb, তেনেহ'লে bRa; $a, b \in A$.
3. R সম্বন্ধটো **প্ৰতিসমমিত** (anti-symmetric) বুলি কোৱা হয় যদি $(a, b) \in R$, $(b, a) \in R \Rightarrow a = b$, অৰ্থাৎ, যদি aRb, $bRa \Rightarrow a=b$; $a, b \in A$.
4. R সম্বন্ধটো **সংক্ৰামক** (transitive) বুলি কোৱা হয় যদি (a, b), $(b, c) \in R$, তেনেহ'লে $(a, c) \in R$, অৰ্থাৎ যদি aRb, bRc, তেনেহ'লে aRc; $\forall a, b, c \in A$.

উদাহৰণ ৭ ঃ ধৰা হ'ল $A = \{1, 2, 3\}$

$R = (1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1)\}$

R প্ৰতিফলনীয়, সমমিত, প্ৰতিসমমিত আৰু সংক্ৰামক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ $(1, 1) \in R$, $(2, 2) \in R$; কিন্তু $(3, 3) \notin R$.

$\therefore$ R প্ৰতিফলনীয় নহয়।

আকৌ, $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

$\therefore$ R সমমিত।

আকৌ, $(1, 2) \in R$, $(2, 1) \in R$, কিন্তু $1 \neq 2$

$\therefore$ R প্ৰতিসমমিত নহয়।

আকৌ, যদি $(a, b) \in R$, $(b, c), \in R$, তেনেহ'লে $(a, c) \in R$

$\therefore$ R সংক্ৰামক।

উদাহৰণ ৮ ঃ Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি, আৰু $R = \{(x, y) : x, y \in Z, x \leq y\}$

R প্ৰতিফলনীয়, সমমিত, প্ৰতিসমমিত আৰু সংক্ৰামক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে $a \leq a$, $\forall a \in Z$

অৰ্থাৎ, $(a, a) \in R$, $\forall a \in Z$

$\therefore$ R প্ৰতিফলনীয়।

আকৌ, যদি $a \leq b$, $b \leq a$

অৰ্থাৎ, $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$

$\therefore$ R সমমিত নহয়।

আকৌ, $a \leq b$, $b \leq a \Rightarrow a = b$

অৰ্থাৎ, $(a, b) \in R$, $(b, a) \in R \Rightarrow a = b$

$\therefore$ R প্ৰতিসমমিত।

আকৌ, $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$

অর্থাৎ $(a, b), (b, c), \in R \Rightarrow (a, c) \in R$

$\therefore$ R সংক্রামক।

উদাহৰণ ৯ ঃ এনে এটা সম্বন্ধৰ উদাহৰণ দিয়ক যিটো সংক্রামক; কিন্তু প্রতিফলনীয় নহয়, সমমিতও নহয়।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $A = \{1, 2\}$

ধৰা হ'ল $R = \{(1, 1), (1, 2)\} \subseteq A \times A$

স্পষ্টত ঃ A ত R এটা সম্বন্ধ।

$(2, 2) \notin R$.

$\therefore$ R প্রতিফলনীয় নহয়।

আকৌ, $(1, 2) \in R$, কিন্তু $(2, 1) \notin R$

$\therefore$ R সমমিত নহয়।

কিন্তু R সংক্রামক।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল A = {1, 2, 3) আৰু সর্বনিম্ন ক্রমিতযোৰ বিশিষ্ট R এটা প্রতিফলনীয় সম্বন্ধ। A ত R সম্বন্ধটো লিখক।

প্রশ্ন নং ২ঃ A = {1, 2, 3, 4} সংহতিটোত এটা সম্বন্ধ লিখক যাতে

(i) সম্বন্ধটো প্রতিসম, কিন্তু প্রতিফলনীয় নহয়, সংক্রামকো নহয়;

(ii) প্রতিফলনীয় আৰু সংক্রামক, কিন্তু সমমিত নহয়;

(iii) প্রতিফলনীয় আৰু সমমিত, কিন্তু সংক্রামক নহয়।

১.৫ সমতুল্যতা সম্বন্ধ

ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি আৰু A ত R এটা সম্বন্ধ। R সম্বন্ধটোক সমতুল্যতা সম্বন্ধ (equivalence relation) বুলি কোৱা হয় যদি ই প্রতিফলনীয়, সমমিত আৰু সংক্রামক হয়।

উদাহৰণ ১০ ঃ Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি আৰু

$R = \{(x, y) : x, y \in Z$ আৰু $x+y$ যুগ্ম$\}$

Z অত R সম্বন্ধটো সমতুল্যতা সম্বন্ধে হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $x \in Z$

$\therefore x+x$ যুগ্ম

$\Rightarrow (x, x) \in R, \forall x \in Z$

$\therefore$ R প্ৰতিফলনীয়।

$(x, y) \in R \Rightarrow x+y$ যুগ্ম

$\Rightarrow y+x$ যুগ্ম

$\Rightarrow (y, x) \in R.$

$\therefore$ R সমমিত

আকৌ, $(x, y) \in R, (y, z) \in R$

$\Rightarrow x+y$ যুগ্ম, $y+z$ যুগ্ম

$\Rightarrow (x+y)+(y+z)$ যুগ্ম

$\Rightarrow (x+z)+2y$ যুগ্ম

$\Rightarrow x+z$ যুগ্ম

$(x, z) \in R$

$\therefore$ R সংক্ৰামক

$\therefore$ Z অত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

উদাহৰণ ১১ ঃ এখন সমতলত থকা সকলো সৰল ৰেখাৰ সংহতি A লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $R = \{(x, y) : x, y \in A$ আৰু $x \perp y\}$

R সম্বন্ধটো প্ৰতিফলনীয়, সমমিত আৰু সংক্ৰামক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ এডাল ৰেখা নিজৰ ওপৰত লম্ব হ'ব নোৱাৰে, অৰ্থাৎ $x \not\perp x$

$\therefore (x, x) \notin R$

$\therefore$ R প্ৰতিফলনীয় নহয়।

এডাল ৰেখা x আন এডাল ৰেখা y ৰ ওপৰত লম্ব হ'লে, y ৰেখাডাল x অৰ ওপৰত লম্ব হ'ব,

অৰ্থাৎ $x \perp y \Rightarrow y \perp x$

$\therefore (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$

$\therefore$ R সমমিত।

যদি $x \perp y, y \perp z$, তেনেহ'লে $x \not\perp z$

$\therefore (x, y), (y, z) \in R \not\Rightarrow (x, z) \in R$

যদি x, y ৰ ওপৰত লম্ব; আৰু y, z অৰ ওপৰত লম্ব, তেনেহ'লে x, z অৰ সমান্তৰাল।

$\therefore$ R সংক্ৰামক নহয়।

উদাহৰণ ১২ ঃ এখন সমতলত থকা সকলো সৰল ৰেখাৰ সংহতি A লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $R = \{(x, y) : x, y \in A$ আৰু $x \| y\}$

A ত R সম্বন্ধটো সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ এডাল ৰেখা নিজেই নিজৰ সমান্তৰাল, অৰ্থাৎ $x \| x \ \forall \ x \in A$

$\therefore (x, x) \in R, \forall x \in R$

$\therefore$ R প্ৰতিফলনীয়।

$x||y \Rightarrow y||x$

$\therefore (x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$

$\therefore$ R সমমিত।

$x||y, y||z \Rightarrow x||z$

$\therefore (x, y), (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R.$

$\therefore$ R সংক্রামক।

গতিকে, A ত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

উদাহৰণ ১৩ ঃ IN স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি। IN x IN অত R সম্বন্ধটো এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল ঃ

(a, b) R (c, d) যদি আৰু যদিহে ad = bc.

প্ৰমাণ কৰক যে IN x IN অত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

সমাধান ঃ আমি জানো ab = ba

$\therefore$ (a, b) R (a, b)

$\therefore$ R প্ৰতিফলনীয়।

(a, b) R (c, d) $\Rightarrow$ ad = bc; a, b, c, d, $\in$ IN

$\Rightarrow$ cb = da

$\Rightarrow$ (c, d) R (a, b)

$\therefore$ R সমমিত।

(a, b) R (c, d) আৰু (c, d) R (e, f); a, b, c, d, e, f, $\in$ IN

$\Rightarrow$ ad = bc আৰু cf = de

$\Rightarrow$ adcf = bcde

$\Rightarrow$ af = be

$\Rightarrow$ (a, b) R (e, f)

$\therefore$ R সংক্রামক।

গতিকে, IN x IN অত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

উদাহৰণ ১৪ ঃ (সৰ্বাংসমতা ম'ডুল' n)

Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি, আৰু n এটা স্থিৰ ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

ধৰা হ'ল a, b$\in$ Z

a, b ৰ সৰ্বাংগসম ম'ডুল' n (congruent modulo n) বুলি কোৱা হয় যদি আৰু যদিহে n অৰ দ্বাৰা a–b বিভাজ্য। প্ৰতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে লিখা হয় a $\equiv$b (mod n)

দেখুৱাওক যে 'সৰ্বাংগসমতা ম'ডুল' n' (congruence modulo n) সম্বন্ধটো Z অত এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

সমাধান ঃ আমি জানো যে n অৰ দ্বাৰা a–a বিভাজ্য, অৰ্থাৎ a $\equiv$a (mod n)

∴ সম্বন্ধটো প্ৰতিফলনীয়।

ধৰা হ'ল $a \equiv b \pmod n$

$\Rightarrow$ n অৰ দ্বাৰা a–b বিভাজ্য

$\Rightarrow$ n অৰ দ্বাৰা b–a বিভাজ্য

$\Rightarrow b \equiv a \pmod n$

∴ সম্বন্ধটো সমমিত।

ধৰা হ'ল $a \equiv b \pmod n$, $b \equiv c \pmod n$

$\Rightarrow$ n অৰ দ্বাৰা a–b বিভাজ্য, n অৰ দ্বাৰা b–c বিভাজ্য

$\Rightarrow$ n অৰ দ্বাৰা a–b+b–c বিভাজ্য

$\Rightarrow$ n অৰ দ্বাৰা a–c বিভাজ্য

$\Rightarrow a \equiv c \pmod n$

∴ সম্বন্ধটো সংক্ৰামক।

গতিকে, Z অত 'সৰ্বাংগসমতা ম'ডুল' n' এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

আমি জানো যে 4 অৰ দ্বাৰা 15-3 বিভাজ্য।

∴15, 3 ৰ সৰ্বাংগসম ম'ডুল' 4 অৰ্থাৎ

$15 \equiv 3 \pmod 4$

7 অৰ দ্বাৰা15–3 বিভাজ্য নহয়।

∴15, 3 ৰ সৰ্বাংগসম ম'ডুল' 7 নহয় অৰ্থাৎ$15 \not\equiv 3 \pmod 7$

উদাহৰণ ১৫ ঃ Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল $R = \{(a, b) : a, b \in Z, ab \geq 0\}$

Z অত R সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো $aa \geq 0$

$\therefore (a, a) \in R, \forall a \in Z$

∴ R প্ৰতিফলনীয়।

ধৰা হ'ল $(a, b) \in R$

$\therefore ab \geq 0$

$\Rightarrow ba \geq 0$

$\Rightarrow (b, a) \in R$

∴ R সমমিত।

আমি জানো $(–2) \times 0 = 0, 0 \times 2 = 0$

$\therefore (–2, 0), (0, 2) \in R$

কিন্তু $(–2) \times 2 = – 4 < 0$

$\therefore (–2, 2) \notin R$

$\therefore$ R সংক্রামক নহয়।

গতিকে, R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ নহয়।

উপপাদ্য ১ ঃ এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধৰ বিপৰীতো এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি। ধৰা হ'ল A ত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

R প্ৰতিফলনীয়।

$\therefore (x, x) \in R, \forall x \in A$

$\Rightarrow (x, x) \in R^{-1}, \forall x \in A$

$\therefore R^{-1}$ প্ৰতিফলনীয়।

ধৰা হ'ল $(x, y) \in R^{-1}$

$\Rightarrow (y, x) \in R$ [R^{-1} অৰ সংজ্ঞামতে]

$\Rightarrow (x, y) \in R$ [$\therefore$ R সমমিত]

$\Rightarrow (y, x) \in R^{-1}$

$\therefore R^{-1}$ সমমিত।

ধৰা হ'ল $(x, y), (y, z) \in R^{-1}$

$\Rightarrow (y, x), (z, y) \in R$ [R^{-1} অৰ সংজ্ঞামতে]

$\Rightarrow (z, y), (y, x) \in R$

$\Rightarrow (z, x) \in R$ [$\therefore$ R সংক্রামক]

$\Rightarrow (x, z) \in R^{-1}$

$\therefore R^{-1}$ সংক্রামক।

গতিকে, R^{-1} এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

উপপাদ্য ২ ঃ দুটা সমতুল্যতা সম্বন্ধৰ ছেদনো এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি।

ধৰা হ'ল A ত R আৰু S দুটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

R আৰু S প্ৰতিফলনীয়।

$\therefore (x, x) \in R$ আৰু $(x, x) \in S, \forall x \in A$

$\Rightarrow (x, x) \in R \cap S, \forall x \in A$

$\therefore R \cap S$ প্ৰতিফলনীয়।

ধৰা হ'ল $(x, y) \in R \cap S$

$\Rightarrow (x, y) \in R$ আৰু $(x, y) \in S$

$\Rightarrow (y, x)$ R আৰু $(y, x) \in S$ [$\therefore$ R, S সমমিত]

$\Rightarrow (y, x) \in R \cap S$

$\therefore R \cap S$ সমমিত।

ধৰা হ'ল $(x, y) \in R \cap S, (y, z) \in R \cap S$

$\Rightarrow$ (x, y) R আৰু (x, y) $\in$ S, (y, z) $\in$ R আৰু (y, z)$\in$S

$\Rightarrow$ (x, y) $\in$ R, (x, z) $\in$ R আৰু (x, y) $\in$ S, (y, z)$\in$S

$\Rightarrow$ (x, x)$\in$ R আৰু (x, z)$\in$ S [$\therefore$ R, S সংক্রামক]

$\Rightarrow$ (x, z)$\in$ R$\cap$S

$\therefore$ R$\cap$S সংক্রামক।

গতিকে, R$\cap$S এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

মন্তব্য ঃ দুটা সমতুল্যতা সম্বন্ধৰ মিলন সদায় সমতুল্যতা সম্বন্ধ নহয়।

A = {1, 2, 3} সংহতিটো লোৱা হ'ল।

R = {(1, 1), 2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1)}

S = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1)}

A ত দুটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

R$\cup$S = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 3), (3, 1), (1, 2), (2, 1)}

(2, 1) $\in$ R$\cup$S, (1, 3)$\in$ R$\cup$S)

কিন্তু (2, 3) $\notin$ R$\cup$S

$\therefore$ R$\cup$S সংক্রামক নহয়।

$\therefore$ R$\cup$S এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ নহয়।

১.৫.১ সমতুল্যতা শ্রেণী

অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Z লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল R = {(a, b) : a, b $\in$ Z, 3 ৰ দ্বাৰা a–b বিভাজ্য}

অর্থাৎ R = {(a, b) : a, b$\in$Z, a $\equiv$b (mod 3)}

স্পষ্টত ঃ R প্রতিফলনীয়, সমমিত আৰু সংক্রামক।

$\therefore$ Z অত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

ধৰা হ'ল [0] এ 3n আকাৰৰ সংখ্যাবোৰ বুজাইছে। (n$\in$Z) গতিকে

[0] = {...., –9, –6, –3, 0, 3, 6, 9, ...}

[1] এ 3n+1 আকাৰৰ সংখ্যাবোৰ বুজাইছে।

[1] = {..., –8, –5, –2, 1, 4, 7, 10, ...}

[2] এ 3n+2 আকাৰৰ সংখ্যাবোৰ বুজাইছে।

[2] = {...., –7, – 4, –1, 2, 5, 8, 11, ...}

আমি দেখিম যে—

..... = [0] = [3] = [6] =.....

..... = [1] = [4] = [7] =.....

..... = [2] = [5] = [8] =.....

[0], [1], [2] ৰ প্ৰত্যেককে **সমতুল্যতা শ্ৰেণী** (equivalence class) বুলি কোৱা হয়। [0] হ'ল 0 ৰ সমতুল্যতা শ্ৰেণী, [1] হ'ল 1 অৰ সমতুল্যতা শ্ৰেণী, [2] হ'ল 2 ৰ সমতুল্যতা শ্ৰেণী।

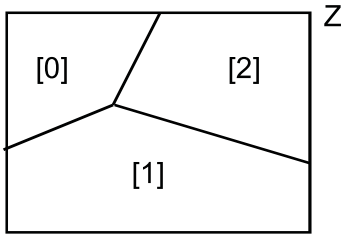
আমি দেখিলোঁ যে তিনিটা পৃথক (distinct) সমতুল্যতা শ্ৰেণী আছে, যথা, [0], [1], [2].

আকৌ আমি দেখিছোঁ যে

$[0] \cup [1] \cup [2] = Z$

$[0] \cap [1] = \phi$, $[1] \cap [2] = \phi$ $[2] \cap [0] = \phi$

{[0], [1], [2]} সংহতিটোক Z অৰ এটা বিভাজন (partition) বুলি কোৱা হয়।



সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি আৰু A ত R এটা সম্বন্ধ।

কোনো $a \in A$ ৰ বাবে, a ৰ সমতুল্যতা শ্ৰেণী [a]ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$[a] = \{x \in A : xRa\}$

অৰ্থাৎ a ৰ সমতুল্যতা শ্ৰেণী [a] হ'ল A ৰ সেইবোৰ মৌলৰ সংহতি যিবোৰ R সম্বন্ধৰ অধীনত a ৰ লগত সম্পৰ্কিত।

টোকা ঃ $[a] \neq \phi$, $\because aRa$

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি। Aৰ অৰিক্ত উপসংহতিৰ সংহতি P ক A ৰ এটা বিভাজন বুলি কোৱা হয় যদি

(i) P ৰ সকলোবোৰ উপাদানৰ মিলন A,

(ii) P ৰ যিকোনো দুটা পৃথক উপাদান অসংযুক্ত (disjoint)।

উপপাদ্য ৩ ঃ ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি আৰু A ত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ। ধৰা হ'ল $a, b \in A$. তেনেহ'লে $[a] = [b]$ যদি আৰু যদিহে $(a, b) \in R$.

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল $[a] = [b]$

$\because$ R প্ৰতিফলনীয়, $\therefore aRa$

$\therefore a \in [a]$

$\Rightarrow a \in [b]$ $[\because [a]=[b]]$

$\Rightarrow aRb$

$\Rightarrow (a, b) \in R$

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল $(a, b) \in R$. $\therefore aRb$

ধৰা হ'ল $x \in [a]$. $\therefore xRa$

এতিয়া xRa আৰু aRb

$\therefore xRb$ [$\because$ R সংক্রামক]

$\Rightarrow x \in [b]$

গতিকে, $x \in [a] \Rightarrow x \in [b]$

$\therefore [a] \subseteq [b]$ ... (1)

আকৌ, ধৰা হ'ল $y \in [b]$ $\therefore yRb$

এতিয়া, yRb আৰু bRa [$\because$ R সমমিত, $aRb \Rightarrow bRa$]

$\therefore yRa$ [$\because$ R সংক্রামক]

$\Rightarrow y \in [a]$

গতিকে, $y \in [b] \Rightarrow y \in [a]$

$\therefore [b] \subseteq [a]$ ... (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা [a] = [b]

উপপাদ্য ৪ ঃ দুটা সমতুল্যতা শ্রেণী সমান বা অসংযুক্ত।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি। ধৰা হ'ল A ত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

ধৰা হ'ল $a, b \in A$.

তেনেহ'লে [a], [b] হয় অসংযুক্ত নতুবা অসংযুক্ত নহয়।

ধৰা হ'ল [a], [b] অসংযুক্ত নহয়

অর্থাৎ $[a] \cap [b] \neq \phi$.

ধৰা হ'ল $x \in [a] \cap [b]$

$\Rightarrow x \in [a]$ আৰু $x \in [b]$

$\Rightarrow$ xRa আৰু xRb

$\Rightarrow$ aRx আৰু xRb [$\because$ R প্রতিসম, $xRa \Rightarrow aRx$]

$\Rightarrow$ aRb[$\because$ R সংক্রামক]

ধৰা হ'ল $y \in [a]$

$\Rightarrow$ yRa

এতিয়া yRa আৰু aRb

$\therefore yRb$ [$\because$ R সংক্রামক]

$\Rightarrow y \in [b]$

গতিকে, $y \in [a] \Rightarrow y \in [b]$

$\therefore [a] \subseteq [b]$

সেইদৰে, $[b] \subseteq [a]$

$\therefore$ [a] = [b]



A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি হ'লে হয় $A \cap B \neq \phi$ নতুবা $A \cap B = \phi$

গতিকে, যদি [a], [b] অসংযুক্ত নহয়, তেনেহ'লে সিহঁত সমান।

∴ [a], [b] সমান বা অসংযুক্ত।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৩

প্রশ্ন নং ১ঃ কোনো সংহতিত এটা সম্পন্ধ প্রতিফলনীয়, প্রতিসম আৰু সংক্রামক হ'লে সম্বন্ধটোৰ নাম কি?

প্রশ্ন নং ২ঃ স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি IN অত "<" সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয়নে? উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা প্রতিপন্ন কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি। ধৰা হ'ল

$R = \{(a, b) : a, b \in Z, 5$ অৰ দ্বাৰা $(a-b)$ বিভাজ্য$\}$

Z অত R সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ এখন সমতলত থকা সকলো ত্রিভুজৰ সংহতি A লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $R = \{(x, y) : x, y \in A, x, y$ ৰ সদৃশ$\}$

A ত R সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল $R = \{(x, y) : x, y \in Z, x-y$ যুগ্ম$\}$

Z অত R সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয়নে? উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা প্রতিপন্ন কৰক।

১.৬ ফলনৰ ধাৰণা

ধৰা হ'ল A আৰু B দুটা অৰিক্ত সংহতি আৰু $f \subseteq A \times B$ যাতে

(i) $(x, y) \in f$, $\forall x \in A$ আৰু যিকোনো $y \in B$

(ii) $(x, y) \in f$ আৰু $(x, y') \in f \Rightarrow y = y'$.

এই ক্ষেত্রত f অক A ৰ পৰা B লৈ **ফলন** বা **মানচিত্রণ** (function or mapping) বুলি কোৱা হয় আৰু ইয়াক $f : A \to B$ প্রতীকেৰে বুজোৱা হয়।

A ক f অৰ **আদিক্ষেত্র** (domain) আৰু B ক f অৰ **সহক্ষেত্র** (codomain) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ ১৬ ঃ ধৰা হ'ল $A = \{1, 2\}$, $B = \{7, 8, 9\}$

$f = \{(1, 8), (2, 7)\} \subseteq A \times B$.

A ৰ প্রতিটো মৌলই f অৰ ক্রমিতযোৰৰ প্রথম মৌল। তদুপৰি প্রতিটো ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌলৰ বিপৰীতে পৃথক দ্বিতীয় মৌল নাই।

∴A ৰ পৰা B লৈ f এটা ফলন।

উদাহৰণ ১৭ ঃ ধৰা হ'ল $A = \{1, 2\}$, $B = \{7, 8, 9\}$

$g = \{(1, 7), (1, 9)\} \subseteq A \times B$

g ত এনে ক্রমিত যোৰ নাই যাৰ প্রথম মৌল 2 অর্থাৎ A ৰ প্রতিটো মৌলই g ৰ ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌল নহয়। তদুপৰি ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌল 1 অৰ বিপৰীতে দুটা পৃথক দ্বিতীয় মৌল 7, 9 আছে।

∴সেয়ে, A ৰ পৰা B লৈ g ফলন নহয়।

উদাহৰণ ১৮ ঃ ধৰা হ'ল $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{x, y, z, w\}$

অধোলিখিত সম্বন্ধবোৰ A ৰ পৰা B লৈ ফলন হয়নে?

(i) $f_1 = \{(1, x), (1, w), (2, x), (2, z), (4, w)\}$

(ii) $f_2 = \{(1, y), (2, z), (3, x), (4, w)\}$

সমাধান ঃ (i) নহয়। (1, x), (1, w) ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌল একে। কিন্তু দ্বিতীয় মৌল বেলেগ বেলেগ। তদুপৰি f_1 অত এনে ক্রমিত যোৰ নাই যাৰ প্রথম মৌল 3।

∴ f_1 ফলন নহয়।

(ii) হয়। A ৰ প্রতিটো মৌলই f_2 ৰ ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌল। তদুপৰি প্রতিটো ক্রমিত যোৰৰ প্রথম মৌলৰ বিপৰীতে পৃথক দ্বিতীয় মৌল নাই।

আমি দেখিলোঁ যে

প্রত্যেক ফলনেই এটা সম্বন্ধ, কিন্তু প্রত্যেক সম্বন্ধই ফলন নহয়।

ফলনৰ এই ধাৰণাটোক এনেদৰেও সংজ্ঞাকৃত কৰিব পাৰি। যদি দুটা অৰিক্ত সংহতি A আৰু B ৰ মৌলবোৰৰ মাজত এনে এটা যোগাযোগ থাকে যে A ৰ প্রতিটো মৌলৰ সৈতে B ৰ এটা অদ্বিতীয় মৌল সংযুক্ত হয়, তেনেহ'লে যি নিয়মটোৱে এই সংযোগ স্থাপন কৰে, তাক A ৰ পৰা B লৈ এটা ফলন বোলা হয়। ইয়াক f, g ইত্যাদি আখৰেৰে বুজোৱা হয়। A, B সংহতি দুটা একে হ'ব পাৰে।

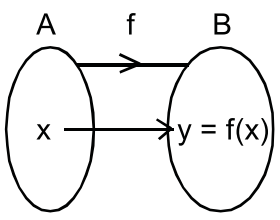
ধৰা হ'ল A সংহতিৰ পৰা B সংহতিলৈ f এটা ফলন অর্থাৎ $f : A \to B$ এটা ফলন। ফলন f এ Bৰ যিটো অদ্বিতীয় মৌল y ক Aৰ মৌল x অৰ লগত সংযোগ কৰে, তাক f -অৰ অধীনত x অৰ **প্রতিচ্ছায়া** (image) বোলা হয় আৰু x অক y ৰ **পূর্বচ্ছায়া** (pre-image) বোলা হয়। Bৰ যিবোৰ মৌল A ৰ মৌলবোৰৰ প্রতিচ্ছায়া, সেই সকলোবোৰ মৌল লৈ গঠিত সংহতিটোক **পৰিসৰ** (range) বোলে।

উদাহৰণ ১৯ ঃ IN স্বাভাৰিক সংখ্যাৰ সংহতি আৰু Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

$f : IN - Z$, $f(x) = (-1)^x$; $x \in IN$

স্পষ্টত ঃ f অৰ আদিক্ষেত্র = IN

f অৰ সহক্ষেত্র = Z



এতিয়া $f(1) = (-1)^1 = -1$, $f(2) = (-1)^2 = 1$, $f(3) = (-1)^3 = -1$ ইত্যাদি।

∴ f অৰ পৰিসৰ = {–1, 1}.

১.৬.১ একক ফলন

ধৰা হ'ল A এটা অৰিক্ত সংহতি আৰু $i : A - A,\ i(x) = x,\ \forall x \in A$

i ক একক ফলন (identity function) বোলে।

টোকা ঃ একক ফলনৰ ক্ষেত্ৰত আদিক্ষেত্ৰ আৰু সহক্ষেত্ৰ একে।

১.৬.২ ধ্ৰুবক ফলন

A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি আৰু $f : A \to B$ এটা ফলন যাতে $f(x) = k,\ \forall x \in A$

f অক ধ্ৰুবক ফলন (constant function) বোলে।

টোকা ঃ ধ্ৰুবক ফলনৰ পৰিসৰ এটা এক মৌল সংহতি (singleton set)

১.৭ বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ ফলন

A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি আৰু $f : A \to B$ এটা ফলন।

1. যদি B ত অন্ততঃ এটা মৌল থাকে যিটো A ৰ কোনো মৌলৰ প্ৰতিচ্ছায়া নহয়, তেনেহ'লে f ফলনটোক **অনাচ্ছাদক ফলন** (into function) বুলি কোৱা হয়।
2. যদি B ৰ প্ৰতিটো মৌল A ৰ অন্ততঃ এটা মৌলৰ প্ৰতিচ্ছায়া হয়, তেনেহ'লে f **আচ্ছাদক ফলন** (onto function or surjective function or surjection) বুলি কোৱা হয়।

টোকা ঃ আচ্ছাদক ফলনৰ ক্ষেত্ৰত, f অৰ পৰিসৰ = f অৰ আদিক্ষেত্ৰ।

3. A ৰ ভিন্ন ভিন্ন মৌলৰ প্ৰতিচ্ছায়াত B ত ভিন্ন ভিন্ন হ'লে, f ফলনটোক **একৈকী ফলন** (one-one fuction or injective function or injection) বোলে।
4. যদি A ৰ দুটা (বা ততোধিক) মৌলৰ B ত একেটা প্ৰতিচ্ছায়া থাকে, তেনেহ'লে f অক **বহু-এক** ফলন (many-one function) বোলে।
5. এটা ফলনক **দ্বিমুখী** (bijective) বুলি কোৱা হয় যদি ই একৈকী আৰু আচ্ছাদক।

টোকা ঃ একক ফলন দ্বিমুখী।

এটা ফলন f একৈকী বুলি কেনেদৰে প্ৰমাণ কৰিব লাগে ?

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \in A$

যদি $f(x) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, তেনেহ'লে f একৈকী।

বা,

যদি $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, তেনেহ'লে f ঐকৈকী।

এটা ফলন f আচ্ছাদক বুলি কেনেদৰে প্ৰমাণ কৰিব লাগে ?

ধৰা হ'ল $y \in B$ (codomain)

ধৰা হ'ল $y = f(x)$

y ৰ মাধ্যমত x অক প্ৰকাশ কৰা হ'ল।

যদি $x \in A$, তেনেহ'লে f আচ্ছাদক, অন্যথা নহয়।

উদাহৰণ ২০ ঃ IN স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল $f : IN \to IN$, $f(x) = 3x+7$

f ফলনটো দ্বিমুখী বুলি প্ৰমাণ কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $x_1, x_2 \in IN$ (আদিক্ষেত্ৰ)

$f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow 3x_1+7=3x_2+7$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$f এটাকৈ।

ধৰা হ'ল $y \in IN$ (সহক্ষেত্ৰ)

ধৰা হ'ল $y = f(x)$

$\Rightarrow y = 3x + 7$

$\Rightarrow x = \frac{y-7}{3}$

যদি $y = 1$, $x = \frac{1-7}{3} = -2 \notin N$

$\therefore$ f আচ্ছাদক নহয়।

$\therefore$ f দ্বিমুখী নহয়।

উদাহৰণ ২১ ঃ ধৰা হ'ল 1 তাৰ বাহিৰে সকলো বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতিটো X। প্ৰমাণ কৰক যে f

: $X \to X$, $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ ফলনটো এটাকৈ আৰু আচ্ছাদক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $x_1, x_2, x_2 \in X$ (আদিক্ষেত্ৰ)

ধৰা হ'ল $f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1}$

$\Rightarrow \frac{(x_1+1)+(x_1-1)}{(x_1-1)-(x_1-1)} = \frac{(x_2+1)+(x_2-1)}{(x_2-1)-(x_2-1)}$ (যোগ-ভাগ ক্ৰিয়াৰ সহায়ত)

$\Rightarrow \frac{2x_1}{2} = \frac{2x_2}{2}$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore$ f এটাকৈ।

ধৰা হ'ল $y \in X$ (সহক্ষেত্ৰ)

$y = f(x)$

$\Rightarrow y = \frac{x+1}{x-1}$

$\Rightarrow y(x-1) = x+1$

$\Rightarrow yx-y = x+1$

$\Rightarrow yx - x = y+1$

$\Rightarrow x(y-1) = y+1$

$\Rightarrow x = \frac{y+1}{y-1} \in X$ (আদিক্ষেত্ৰ)

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

উদাহৰণ ২২ ঃ ধৰা হ'ল A = {1, 2, 3,}. A ৰ পৰা A লৈকে সকলো দ্বিমুখী ফলন লিখক।

সমাধান ঃ

$i : A \to A, i(1) = 1, i(2) = 2, i(3) = 3$

$f_1 : A \to A, f_1(1) = 1, f_1(2) = 3, f_1(3) = 2$

$f_2 : A \to A, f_2(1) = 2, f_2(2) = 1, f_2(3) = 3$

$f_3 : A \to A, f_3(1) = 3, f_3(2) = 2, f_3(3) = 1$

$f_4 : A \to A, f_4(1) = 2, f_4(2) = 3, f_4(3) = 1$

$f_5 : A \to A, f_5(1) = 3, f_5(2) = 1, f_5(3) = 2$

টোকা ঃ A = {1, 2, 3} ৰ পৰা A লৈকে মুঠতে 6 =3! টা দ্বিমুখী ফলন আছে।

যদি A ৰ মৌলৰ সংখ্যা n টা হয়, A ৰ পৰা A লৈকে n! টা দ্বিমুখী ফলন থাকিব।

উপপাদ্য ৫ ঃ ধৰা হ'ল A এটা সসীম সংহতি আৰু $f : A \to A$ আচ্ছাদক। তেনেহ'লে f এটা একৈকী।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল A এটা সসীম সংহতি আৰু A ৰ মৌলৰ সংখ্যা n.

ধৰা হ'ল $A = \{a_1, a_2, \ldots\ldots\ldots\ldots a_n\}$, য'ত a_i^{-1} বোৰ ভিন্ন ভিন্ন।

ধৰা হ'ল $f : A \to A$ আচ্ছাদক

f অৰ পৰিসৰ = $\{f(a_1), f(a_2), \ldots\ldots\ldots\ldots, f(a_n)\}$

$\therefore$ f আচ্ছাদক, f অৰ পৰিসৰ = f অৰ সহক্ষেত্ৰ = A.

$\therefore A = \{f(a_1), f(a_2), \ldots\ldots\ldots\ldots, f(a_n)\}$

$\therefore$ A ৰ মৌলৰ সংখ্যা n,

$\therefore f(a_1), f(a_2), \ldots\ldots\ldots\ldots, f(a_n)$ ভিন্ন ভিন্ন।

গতিকে, Aৰ (আদিক্ষেত্ৰ) ভিন ভিন মৌলৰ প্ৰতিচ্ছায়াও A ত (সহক্ষেত্ৰ) ভিন ভিন।

$\therefore$ f একৈকী।

টোকা ঃ অসীম সংহতিৰ ক্ষেত্ৰত এই ফলটো প্ৰযোজ্য নহয়।

IN স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি।

$f : IN \to IN, f(x)\begin{cases} =1, \text{ যদি } x = 1 \text{ আৰু } x = 2, \\ = x-1, \text{ যদি } x \geq 3 \end{cases}$

স্পষ্টত ঃ f আচ্ছাদক, কিন্তু একৈকী নহয়।

উপপাদ্য ৬ ঃ ধৰা হ'ল A এটা সসীম সংহতি আৰু $f:A \to A$ একৈকী। তেনেহ'লে f আচ্ছাদক।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল A এটা সসীম সংহতি আৰু A ৰ মৌল সংখ্যা n.

ধৰা হ'ল $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, য'ত a_i বোৰ ভিন্ন ভিন্ন।

ধৰা হ'ল $f : A \to A$ এটা একৈকী।

$\therefore f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)$ হ'ল Aৰ (সহক্ষেত্ৰ) n টা পৃথক মৌল।

ধৰা হ'ল $u \in A$ (সহক্ষেত্ৰ)

ধৰা হ'ল $u = f(a_i)$, $1 \leq i \leq n$

$\therefore$ A ত (আদিক্ষেত্ৰ) a_i আছে যাতে $f(a_i) = u$.

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

টোকা ঃ অসীম সংহতিৰ ক্ষেত্ৰত এই ফলটো প্ৰযোজ্য নহয়।

IN স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি।

$f : IN \to IN, f(x) = 5x$

স্পষ্টত ঃ f একৈকী, কিন্তু আচ্ছাদক নহয়।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৪

প্ৰশ্ন নং ১ঃ IN স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি।

$f : IN \to IN, f(x) = x^2+1$

f (i) একৈকী, (ii) আচ্ছাদক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২ঃ IR বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি।

$f : IR \to IR$ এনেদৰে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{যদি } x > 0 \\ 0, & \text{যদি } x = 0 \\ -1, & \text{যদি } x < 0 \end{cases}$$

f (i) একৈকী, (ii) আচ্ছাদক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ $f : IR \to IR$ এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হৈছে $f(x) = |x|$

f (i) একৈকী, (ii) আচ্ছাদক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

$$\left[f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{যদি } x \geq 0 \\ -x, & \text{যদি } x < 0 \end{cases} \right]$$

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ যদি $A = \{1, 2\}$, A ৰ পৰা A লৈকে সকলো দ্বিমুখী ফলন লিখক।

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ কি চর্তৰ অধীনত এটা ধ্ৰুবক ফলন আচ্ছাদক হ'ব?

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ কি চর্তৰ অধীনত এটা ধ্ৰুবক ফলন একৈকী হ'ব?



১.৮ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি হ'লে, A x B ৰ এটা উপ সংহতিক A ৰ পৰা B লৈ এটা সম্বন্ধ বুলি কোৱা হয়।
- যদি A, B দুটা সসীম সংহতি হয় আৰু n(A) = x, n(B) = y, A ৰ পৰা B লৈ সম্বন্ধৰ সংখ্যা 2^{xy}.
- A এটা অৰিক্ত সংহতি হ'লে, $I_A = \{(a, a) : a \in A\}$ ক A ত একক ফলন বুলি কোৱা হয়।
- A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি আৰু R, A ৰ পৰা B লৈ এটা সম্বন্ধ হ'লে, বিপৰীত সম্বন্ধ R^{-1} অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

  $R^{-1} = \{(b, a) : (a, b) \in R\}$
- অৰিক্ত সংহতি A ত এটা সম্বন্ধ R অক

  (i) প্রতিফলনীয় বুলি কোৱা হয় যদি $(a, a) \in R, \forall a \in A$;

  (ii) সমমিত বুলি কোৱা হয় যদি $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$;

  (iii) প্রতিসমমিত বুলি কোৱা হয় যদি $(a, b) \in R, (b, a) \in R \Rightarrow a = b$;

  (iv) সংক্রামক বুলি কোৱা হয় যদি $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.
- অৰিক্ত সংহতি Aত এটা সম্বন্ধ R অক সমতুল্যতা সম্বন্ধ বুলি কোৱা হয় যদি ই প্রতিফলনীয়, সমমিত আৰু সংক্রামক হয়।
- এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধৰ বিপৰীতো এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।
- দুটা সমতুল্যতা সম্বন্ধৰ ছেদনো এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।
- কোনো অৰিক্ত সংহতি A ত R এটা সম্বন্ধ হ'লে, কোনো $a \in A$ ৰ সমতুল্যতা শ্রেণী [a] হ'ল A ৰ সেইবোৰ মৌলৰ সংহতি যিবোৰ R সম্বন্ধৰ অধীনত a ৰ লগত সম্পর্কিত।
- দুটা সমতুল্যতা শ্রেণী সমান বা অসংযুক্ত।
- যদি দুটা অৰিক্ত সংহতি A আৰু B ৰ মৌলবোৰৰ মাজত এনে এটা যোগাযোগ থাকে যে A ৰ প্রতিটো মৌলৰ সৈতে B ৰ এটা অদ্বিতীয় মৌল সংযুক্ত হয়, তেনেহ'লে যি নিয়মটোৰে এই সংযোগ স্থাপন কৰে, তাক A ৰ পৰা B লৈ এটা ফলন বোলা হয়।
- প্রত্যেক ফলনেই এটা সম্বন্ধ, কিন্তু প্রত্যেক সম্বন্ধই ফলন নহয়।
- আদিক্ষেত্রৰ ভিন্ন ভিন্ন মৌলৰ প্রতিচ্ছায়াও সহক্ষেত্রত ভিন্ন ভিন্ন হ'লে ফলনটো একৈকী।
- যদি সহ ক্ষেত্রৰ প্রতিটো মৌল আদি ক্ষেত্রৰ অন্ততঃ এটা মৌলৰ প্রতিচ্ছায়া হয়, তেনেহ'লে ফলনটো আচ্ছাদক।
- এটা ফলন দ্বিমুখী যদি ই একৈকী আৰু আচ্ছাদক।

- A এটা সসীম সংহতি আৰু f : A→A আচ্ছাদক হ'লে, f একৈকী।
- A এটা সসীম সংহতি আৰু f : A→A একৈকী হ'লে, f আচ্ছাদক।



১.৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ 2^{12}

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ 2^{25}

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (7, 4), (72, 27) R অত আছে।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ হয়। দুটা যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগফল অযুগ্ম হ'ব নোৱাৰে।

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $I_A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $R^{-1} = \{(7, 4), (8, 5), (7, 6), (8, 6), (9, 6)\}$

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৩

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নহয়। প্রতিফলনীয় নহয়, সমমিতও নহয়।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ হয়।

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৪

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ একৈকী, কিন্তু আচ্ছাদক নহয়।

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ একৈকী নহয়, আচ্ছাদকো নহয়।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ একৈকী নহয়, আচ্ছাদকো নহয়।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $i : A \to A, i(1) = 1, i(2) = 2$

$f : A \to A, f(1) = 2, f(2) = 1$

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ সহক্ষেত্র এটা একমৌল সংহতি।

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ আদিক্ষেত্র এটা একমৌল সংহতি।



১.১০ অধিক জানিবলৈ

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.
2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).
3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).
4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.
5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



১.১১ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ঃ ধৰা হ'ল A = {1, 2, 3}, B = {3, 4, 5}.
A ৰ পৰা B লৈ কিমানটা সম্বন্ধ আছে? A ৰ পৰা B লৈ যিকোনো চাৰিটা সম্বন্ধ লিখক।

প্ৰশ্ন ২ঃ ধৰা হ'ল A = {3, 4, 5}, B = {5, 6, 7}
তলৰ কোনবোৰ সম্বন্ধ A ৰ পৰা B লৈ ফলন? যদি ফলন হয়, ই একৈকী হয়নে? আচ্ছাদক হয়নে?
(i) {(3, 5), (4, 5), (5, 7)}
(ii) {(3, 7), (4, 5), (5, 6)}
(iii) {(3, 6), (4, 6), (5, 6)}
(iv) {(3, 6), (4, 7), (5, 5)}

প্ৰশ্ন ৩ঃ Q পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি। f : Q→Q ফলনটো এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হৈছে।
f(x) = 4x+5
ফলনটো দ্বিমুখী হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ঃ এখন সমতলত থকা সকলো ত্ৰিভুজৰ সংহতি A লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $R = \{(x, y) : x, y \in A$ আৰু x, y ৰ সৰ্বাংগসম$\}$

A ত R সম্বন্ধটো সমতুল্যতা সম্বন্ধ হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ৫ঃ IN স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ সংহতি। IN x IN অত R সম্বন্ধটো এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'লঃ (a, b), R (c, d) যদি আৰু যদিহে a+d = b+c, দেখুৱাওক যে IN x IN অত R এটা সমতুল্যতা সম্বন্ধ।

প্ৰশ্ন ৬ঃ ধৰা হ'ল A = {1, 2, 3}

R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), 2, 3)}

দেখুৱাওক যে R প্ৰতিফলনীয়; কিন্তু সমমিত নহয়, সংক্ৰামকো নহয়।

প্ৰশ্ন ৭ঃ C জটিল সংখ্যাৰ সংহতি আৰু IR বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি।

$f : C \rightarrow IR$, $f(z) = |z|$, $z \in C$.

f (i) এঁকেকী, (ii) আচ্ছাদক হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ৮ঃ A, B দুটা অৰিক্ত সংহতি।

$f : A \times B \rightarrow B \times A$, $f(a, b) = (b, a)$; $(a, b) \in A \times B$

দেখুৱাওক যে f দ্বিমুখী।

প্ৰশ্ন ৯ঃ $f : IN \times IN \rightarrow IN$, $f(a, b) = 3^a 4^b$, $(a, b) \in IN \times IN$

f (i) এঁকেকী, (ii) আচ্ছাদক হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ১০ঃ $f : Z \times Z \rightarrow Z$, $f(a, b) = ab$, $(a, b) \in Z \times Z$

f (i) এঁকেকী, (ii) আচ্ছাদক হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

*** ***** ***

অধ্যায় ২ ঃ দ্বৈত প্রক্রিয়া (BINARY OPERATION)

অধ্যায় গাঁথনি

২.১ উদ্দেশ্য

২.২ পৰিচয়

২.৩ দ্বৈত প্রক্রিয়া

২.৩.১ ক্রম বিনিময়ে দ্বৈত প্রক্রিয়া (Commutative Binary Operation)

২.৩.২ সাহচর্য্য দ্বৈত প্রক্রিয়া (Associative Binary Operation)

২.৩.৩ একক মৌল (Identity Element)

২.৩.৪ মৌলৰ বিপৰীত (Inverse of an Element)

২.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

২.৫ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

২.৬ অধিক জানিবলৈ

২.৭ আৰ্হি প্রশ্ন

২.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- সংহতি (set) এটাৰ দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব

২.২ পৰিচয়

ইয়াৰ আগৰ অধ্যায়বোৰত আমি সম্বন্ধ (relation) আৰু ফলনৰ (function) বিষয়ে অধ্যয়ন কৰিছো। এই অধ্যায়টিত আমি দ্বৈত প্রক্রিয়া আৰু ইয়াৰ প্রকাৰবোৰৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

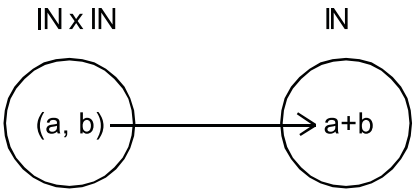
২.৩ দ্বৈত প্রক্রিয়া (BINARY OPERATION)

ধৰা হ'ল, IN এটা স্বাভাৰিক সংখ্যাৰ সংহতি।

প্রতিটো ক্রমিক যুটী (ordered pair) $(a, b) \in IN \times IN$ ৰ বাবে

আমি একমাত্র এটা সংহতি $a+b \in IN$ পাম।

অর্থাৎ, আমি f ফলনৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিব পাৰিম $f : IN \times IN \to IN$, $f(a, b) = a+b$.



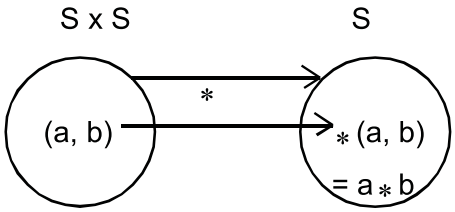
এই ফলনটোক (function) IN ৰ দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া বোলা হয়। অৰ্থাৎ, যোগ কৰা কামটো হ'ল IN ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

একেদৰে, পূৰণ কৰা কামটো হ'ল IN ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া। কাৰণ, প্ৰতিটো ক্ৰমিক যুটী (a, b) $\in$ IN x IN হয়। ইয়াৰ পৰা পোৱা একমাত্ৰ সংহতিটো হ'ল ab $\in$ IN। কিন্তু, বিয়োগ কৰা কামটো IN ৰ ওপৰত চলা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া নহয়। কাৰণ, প্ৰতিটো ক্ৰমিক যুটী (a, b) $\in$ IN x IN ৰ বিয়োগফল a–b $\in$ IN নহয়। ধৰা হ'ল (2, 3) $\in$ IN x IN, কিন্তু 2–3 = -1 $\notin$ IN.

সংজ্ঞা ঃ এটা অ-শূন্য (non-empty) সংহতি S ৰ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া হ'ব S x S ৰ পৰা S লৈ হোৱা ফলন।

যেনে—

$* : S \times S \to S$



ইয়াত, (a, b) $\in$ S x S ৰ প্ৰতিবিম্বটো $*$ ফলনৰ অধীন। অৰ্থাৎ $*$ (a, b) ক আমি a $*$ b বুলিও বুজাব পাৰোঁ।

ইয়াৰ পৰা গম পোৱা গ'ল যে

সকলো a, b $\in$ S ৰ ক্ষেত্ৰত, যদি a $*$ b $\in$ S হয়, তেন্তে $*$ হ'ল S ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল, $*$ হ'ল এটা অ-শূন্য সংহতি S ৰ দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া,

H হ'ল Sৰ এটা উপ-সংহতি।

যদি সকলো a b $\in$ H হয়, তেন্তে H ক $*$ ৰ বন্ধনীৰ অধীন বুলি কোৱা হ'ব।

অৰ্থাৎ, আমি পালো a x b $\in$ H.

এটা সসীম সংহতিৰ ওপৰত চলা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ সংখ্যা (Number of Binary operations on a finite set)

ধৰা হ'ল, A আৰু B দুটা সসীম সংহতি, যদি n (A) = m আৰু n (B) = n তেন্তে,

A ৰ পৰা B লৈ ফলনৰ সংখ্যা হ'ব n^m. [A ৰ প্ৰথম উপাদানটোৰ n ধৰণে সহযোগ বিধি ঘটাব পৰা যাব, দ্বিতীয় উপাদানটোৰ n ধৰণে সহযোগ বিধি ঘটাব পৰা যাব আৰু শেষত m তম

উপাদানটোৰ n ধৰণে সহযোগ বিধি ঘটাব পৰা যাব।

$\therefore$ ফলনৰ সংখ্যা হ'ব

= n. n ... ... n (m সংখ্যক উৎপাদক) = n^m]

আমি জানো যে, n (A x A) = mm = m^2

$\therefore$ A ৰ ওপৰত চলা দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ সংখ্যা হ'ব

= A x A ৰ পৰা A লৈ হোৱা ফলনৰ সংখ্যা

= m^{m^2}

উদাহৰণ

1. যোগ কৰা কামটো হ'ল IN ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।
2. বিয়োগ কৰা কামটো IN ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া নহয়।
3. পূৰণ কৰা কামটো হ'ল IN ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।
4. যোগ কৰা কামটো হ'ল Z ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।
5. অ-শূন্য অখণ্ড সংখ্যাৰে গঠিত S = Z – {0} সংহতিটোৰ ওপৰত যোগ কৰা কামটোৱে দ্বৈত প্রক্রিয়া সংঘটিত কৰিব নোৱাৰে। কাৰণ, যদি ইয়াত $3 \in S$, $-3 \in S$ বুলি ধৰা হয়, তেন্তে $3+(-3) = 0 \notin S$.
6. বিয়োগ কৰা কামটো হ'ল Z ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।
7. ধৰা হ'ল, আটাইবোৰ বাস্তৱ মেট্রিক্সৰ সংগ্রহ হ'ল S। এতিয়া মেট্রিক্সবোৰৰ যোগফল S ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া নহ'ব। কাৰণ আমি এটা 2 x 3 মেট্রিক্স আৰু এটা 3 x 4 মেট্রিক্সৰ যোগফল উলিয়াব নোৱাৰো।
8. ধৰা হ'ল, M_{mxn} হ'ল সকলোবোৰ m x n বাস্তৱ মেট্রিক্সৰ সংগ্রহ। ইয়াৰ মেট্রিক্স যোগ কৰা কামটো হ'বা M_{mxn} ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।
9. ধৰা হ'ল, M_{nxn} হ'ল সকলোবোৰ n x n বাস্তৱ মেট্রিক্সৰ সংগ্রহ। ইয়াৰ মেট্রিক্স পূৰণ কৰা কামটো হ'ব M_{nxn} ৰ এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।
10. যোগ (আৰু পূৰণ) কৰা কামটো হ'ল জটিল সংখ্যাৰ সংহতি C ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

উদাহৰণ ১ঃ $a * b = a-b+10$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত $*$ টো Z ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'ব পাৰেনে?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $a, b \in Z$

দিয়া আছে, $a-b+10 \in Z, \forall\ a, b \in Z$

অর্থাৎ, $a * b \in Z, \forall\ a, b \in Z$

$\therefore$ $*$ হ'ল Z ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

উদাহৰণ ২ঃ $a * b = \frac{ab}{5}$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত $*$ টো Q ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'ব

পাৱেনে?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $a, b \in Q$

$\therefore ab \in Q$ (দুটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ পূৰণফল সদায় এটা পৰিমেয় সংখ্যাই হ'ব)

$\therefore \frac{ab}{5} \in Q$

অর্থাৎ, $a * b \in Q, \forall a, b \in Q$

$\therefore *$ হ'ল Q ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

উদাহৰণ ৩ঃ ধৰা হ'ল, P হৈছে এটা অ-শূন্য সংহতি S ৰ সকলোবোৰ উপ-সংহতিৰ সংহতি। সংযুক্তকৰণ (union) আৰু খণ্ডিতকৰণ (intersection) P ৰ ওপৰত চলা দুটা দ্বৈত প্রক্রিয়া বুলি প্রমাণ কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $A, B \in P$ ইয়াত $A \subseteq S, B \subseteq S$

$\therefore A \cup B \subseteq S$ ইয়াত $A \cup B \in P$

$\therefore \cup$ হ'ল P ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া

একেদৰে, $A \cap B \in P, \forall A, B \in P$

$\therefore \cap$ হ'ল P ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

প্রক্রিয়া (অথবা সংযোজন) তালিকা [Operation (or composition) Table]

ধৰা হ'ল, S এটা সসীম সংহতি। S ত থকা উপাদানৰ সংখ্যা কম। সংহতিটোৰ উপাদানেৰে আমি এখন তালিকা গঠন কৰিব পাৰো। ইয়াক প্রক্রিয়া (অথবা সংযোজন) তালিকা বোলা হয়। তালিকাখন এনেধৰণৰ হ'ব—

ধৰা হ'ল, $A = \{a_1, a_2, a_3\}$.

আমি সংহতিটোৰ উপাদানবোৰ a_1, a_2, a_3 পথালি শাৰীত আৰু দীঘলীয়া স্তম্ভত লিখিব পাৰে।। ওপৰফালে বাওঁকোণৰ দ্বৈত প্রক্রিয়া $*$ লিখিব পাৰোঁ। তাৰ ÀëÀÄ ২.১ত দেখুওৱাৰ দৰে (i, j) তম কক্ষত আমি $9(=3^2)$ টাৰ প্রতিটো উপাদান $a_i \times a_j$ (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3) লিখিম। এই 9 টা সংখ্যাৰ প্রতিটোৱেই A ৰ উপাদান। কাৰণ $*$ হ'ল A ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

$*$	a_1	a_2	a_3
a_1	$a_1 * a_1$	$a_1 * a_2$	$a_1 * a_3$
a_2	$a_2 * a_1$	$a_2 * a_2$	$a_2 * a_3$
a_3	$a_3 * a_1$	$a_3 * a_2$	$a_3 * a_3$

তালিকা ২.১

উদাহৰণ ৪ঃ {–1, 0, 1} ৰ ওপৰত পূৰণ কৰা কামটো এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'বনে?

সমাধান ঃ 9 টা উপাদানৰ প্রতিটোৱেই A ৰ অংশ।

$\therefore$ পূৰণ কৰা কামটো {–1, 0, 1} ৰ এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

উদাহৰণ ৫ঃ {–1, 0, 1} ৰ ওপৰত যোগ কৰা কামটো এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'বনে?

সমাধান ঃ $-2 \notin \{-1, 0, 1\}$

$2 \notin \{-1, 0, 1\}$

$\therefore$ যোগ কৰা কামটো {–1, 0, 1} ৰ ওপৰত চলা

$*$	–1	0	1
–1	1	0	–1
0	0	0	0
1	–1	0	1

তালিকা ২.২

দ্বৈত প্রক্রিয়া নহয়।

উদাহৰণ ৬ঃ $a * b=|a-b|$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত $*$ টো $\{0, 1, 2\}$ ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'বনে?

সমাধান ঃ $0 * 0 = |0-0|=0$,

$0 * 1 = |0-1|=1$,

$0 * 2 = |0-2|=2$;

$1 * 0 = |1-0|=1$, $1 * 1 = |1-1|=0$,

$1 * 2 = |1-2|=1$;

$2 * 0 = |2-0|=2$, $2 * 1 = |2-1|=1$,

$2 * 2 = |2-2|=0$,

তালিকাৰ সহায়ত আমি গম পালোঁ যে $*$ হ'ল $\{0, 1, 2\}$ ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

x	–1	0	1
–1	–2	–1	0
0	–1	0	1
1	0	1	2

তালিকা ২.৩

x	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	1
2	2	1	0

তালিকা ২.৪

২.৩.১ ক্রম বিনিময়ে দ্বৈত প্রক্রিয়া (Commutative Binary Operation)

যদি $a * b = b * a$ আৰু $\forall a, b \in S$ হয়, তেন্তে এটা অ-শূন্য S সংহতিৰ দ্বৈত প্রক্রিয়াটো ক্রম বিনিময়ে প্রকৃতিৰ হ'ব।

টোকা ঃ কোনো এটা সসীম সংহতিৰ দ্বৈত প্রক্রিয়াটো তেতিয়াহে ক্রম বিনিময়ে প্রকৃতিৰ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি প্রক্রিয়া তালিকাৰ অন্তর্ভুক্ত উপাদানবোৰ প্রধান বিকর্ণ মেট্রিক্স (principal diagonal) অনুসৰি সমমিত (symmetric) হয়।

উদাহৰণ স্বৰূপে তালিকা ২.৪ত অন্তর্ভুক্ত উপাদানবোৰ প্রধান বিকর্ণ মেট্রিক্স 0, 0, 0 অনুসৰি সমমিত। সেয়েহে উদাহৰণ 6 ত উল্লেখ কৰা $*$ টো $\{0, 1, 2\}$ৰ ওপৰত চলা ক্রম বিনিময়ে দ্বৈত প্রক্রিয়া।

উদাহৰণ ৭ঃ $a * b = a-b+5$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত দ্বৈত প্রক্রিয়া $*$ টো Z ৰ ওপৰত চলা ক্রম বিনিময়ে প্রক্রিয়া হয়নে?

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $a * b = a-b+5$

$b * a = b-a+5$, $\forall a, b \in Z$

স্পষ্টকৈ গম পোৱা গ'ল যে, $a * b \neq b * a$

$\therefore *$ প্রক্রিয়াটো Z ৰ ওপৰত চলা ক্রম বিনিময়ে প্রক্রিয়া নহয়।

উদাহৰণ ৮ঃ ধৰা হ'ল, Q এটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি।

$a * b = ab^2$, $\forall a, b \in Q$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত $*$ হ'ল Q ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া। এতিয়া, $*$ এটা ক্রম বিনিময়ে প্রক্রিয়া হ'বনে?

সমাধান ঃ $a * b = ab^2$, $b * a = ba^2$, $\forall a, b \in Q$

$\therefore a * b \neq b * a$

$\therefore *$ ক্রম বিনিময়ে দ্বৈত প্রক্রিয়া নহয়।

২.৩.২ সাহচর্য্য দ্বৈত প্রক্রিয়া (Associative Binary Operation)

এটা অ-শূন্য সংহতি S ৰ ওপৰত চলা $*$ দ্বৈত প্রক্রিয়াটোক সহযোগ বিধিৰ বুলি তেতিয়াহে কোৱা হ'ব যেতিয়া $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in S$ হ'ব।

উদাহৰণ ৯ঃ $a * b = a-b+5$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত $*$ দ্বৈত প্রক্রিয়াটো Z ৰ ওপৰত চলা সহযোগ বিধিৰ প্রক্রিয়া হ'বনে?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $a, b, c \in Z$.

$(a * b) * c = (a-b+5) * c$

$= (a-b+5) - c+5$

$= a-b-c+10$

$a * (b * c) = a * (b-c+5)$

$= a - (b-c+5)+ 5$

$= a - b + c - 5 + 5$

$= a - b + c$

$\therefore (a * b) * c \neq a * (b * c)$

$\therefore *$ সহযোগ বিধিৰ দ্বৈত প্রক্রিয়া নহয়।

উদাহৰণ ১০ঃ ধৰা হ'ল, X হৈছে ১ নথকা পৰিমেয় সংখ্যাৰ এটা সংহতি।

1. X ৰ ওপৰত $*$ ক আমি তলত দিয়া ধৰণে নির্ধাৰণ কৰিব পাৰোঁ—

$a * b = a + b - ab$, $\forall a, b \in X$.

প্রমাণ কৰক যে $*$ হ'ল X ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

$*$ প্রক্রিয়াটো (i) ক্রম বিনিময় নে (ii) সহযোগি বিধিৰ পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $a, b \in X$

$\therefore a, b$ দুটা পৰিমেয় সংখ্যা আৰু $a \neq 1, b \neq 1$.

এতিয়া, $a + b - ab$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা আৰু $a+b-ab \neq 1$, যদি $a+b-ab=1$, তেন্তে

$a+b-ab-1=0$

অর্থাৎ, $(a-1)-b(a-1)=0$

অর্থাৎ, $(a-1)(1-b)=0$

অর্থাৎ, $a-1=0, 1-b=0$

অর্থাৎ, $a = 1, b = 1$, ই এক অসংগতি।

$\therefore a+b-ab \in X$

অর্থাৎ, $a * b \in X$, $\forall a, b \in X$

$\therefore$ $*$ হ'ল X ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

দ্বিতীয় অংশ

$a * b = a+b-ab$

$= b+a-ba$

$= b * a$

$\therefore$ $*$ হ'ল X ৰ ওপৰত চলা ক্ৰম বিনিময় দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া

আকৌ, $(a * b) * c$

$= (a+b-ab) * c$

$= (a+b-ab) + c - (a+b-ab)c$

$= a+b-ab+c - ac-bc+abc$

$= a+b+c-ab-bc-ca+abc$

$a*(b*c) = a * (b+c-bc)$

$= a+(b+c-bc) - a(b+c-bc)$

$= a+b+c-ab-bc-ca+abc$

$\therefore (a*b) * c = a * (b*c)$

$\therefore$ $*$ হ'ল এটা সহযোগ বিধিৰ দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

২.৩.৩ একক মৌল (Identity Element)

ধৰা হ'ল, S এটা অ-শূন্য সংখ্যাৰ সংহতি আৰু $*$ ইয়াৰ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া। এতিয়া, $e \in S$ মৌলটোক তেতিয়াহে $*$ ৰ অভেদ মৌল বোলা হ'ব যদিহে—

$$a * e = a = e * a, \forall a \in S.$$

টোকা ঃ যদি কোনো দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ বাবে কোনো অভেদ মৌল থাকে, তেন্তে ই একক মৌল হ'ব।

উদাহৰণ ঃ

1. IN ৰ ওপৰত পূৰণ কৰা কামটো এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া। ইয়াত এটা $1 \in$ IN আছে, যিটো

$$a * 1 = a = 1 * a, \forall a \in IN$$

$\therefore$ 1 হ'ল IN ত পূৰণৰ বাবে থকা একমাত্ৰ অভেদ মৌল।

2. যোগ কৰা কামটো হ'ল Z ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।
ইয়াত এটা $0 \in Z$ আছে, যিটো

$$a + 0 = a = 0+a, \forall a \in Z$$

$\therefore$ 0 হ'ল Z ত যোগৰ বাবে থকা একমাত্ৰ অভেদ মৌল।

3. যোগ কৰা কামটো হ'ল IN ৰ ওপৰত চলা এক দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া। কিন্তু IN ত যোগ কৰাৰ বাবে কোনো অভেদ মৌল নাই।

4. মেট্রিক্স যোগ হ'ল M_{mxn} ৰ ওপৰত চলা এক দ্বৈত প্রক্রিয়া। আটাইবোৰ m x n বাস্তৱ মেট্রিক্সৰ সংহতি হ'ল M_{mxn}। m x n নথকা শূন্য মেট্রিক্সটো হ'ব M_{mxn}ত মেট্রিক্স যোগৰ অভেদ মৌল।

২.৩.৪ মৌলৰ বিপৰীত (Inverse of an Element)

ধৰা হ'ল, S এটা অ-শূন্য সংখ্যাৰ সংহতি। ইয়াৰ $*$ হ'ল এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া আৰু e হ'ল অভেদ মৌল। এতিয়া $*$ ৰ অধীনত $b \in S$ এটা প্রতিলোম মৌল হ'ব যদিহে

$$a * b = e = b * a$$

টোকা ঃ 1. মৌলৰ প্রতিলোম হ'ল কোনো এক দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ অধীনস্থ এটা উপাদান। যদি প্রক্রিয়া এটাত প্রতিলোমৰ উপস্থিতি ধৰা পৰে তেন্তে ই হ'ব একক উপাদান।

2. a মৌলৰ প্রতিলোম বুজাবলৈ সাধাৰণতে a^{-1} লিখা হয়। বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্রত যোগ অংকৰ অধীনস্থ সংখ্যাৰ প্রতিলোমক (যোগাত্মক প্রতিলোম/additive inverse) –a বুলি লিখা হয়। পূৰণ অংকৰ অধীনস্থ a মৌলৰ ($a \neq 0$) প্রতিলোমক (গুণক প্রতিলোম/multiplicative inverse) $\frac{1}{a}$ বুলি লিখা হয়।

উদাহৰণ ঃ

1. পূৰণ কৰা কামটো হ'ল IN ৰ ওপৰত চলা এক দ্বৈত প্রক্রিয়া। $1 \in$ IN হ'ল পূৰণৰ বাবে থকা অভেদ মৌল। কিন্তু 1 ৰ বাহিৰে IN ৰ আন কোনো উপাদানৰে IN ত পূৰণ কার্যৰ অধীনত প্রতিলোম নাথাকে।

2. যোগ কৰা কামটো হ'ল Z ৰ ওপৰত চলা এক দ্বৈত প্রক্রিয়া। $0 \in Z$ হ'ল যোগৰ বাবে থকা অভেদ মৌল। প্রতিটো $a \in Z$ ৰ বাবে একোটা $-a \in Z$ থাকে, য'ত $a+(-a) = 0=(-a) + a$.

   $\therefore$ –a হ'ল যোগৰ প্রতিলোম।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল A এটা সসীম সংহতি। ইয়াত 4 টা উপাদান আছে। A ৰ ওপৰত চলা দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ সংখ্যা কিমান?

প্রশ্ন নং ২ঃ $a * b = \frac{a}{b}$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত $*$ টো IR ৰ ওপৰত চলা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'বনে?

প্রশ্ন নং ৩ঃ $\{-1, 1, i, -i\}$ ৰ ওপৰত পূৰণ কৰা কামটো এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'বনে? ইয়াত $i = \sqrt{-1}$.

প্রশ্ন নং ৪ঃ ধৰা হ'ল, Q এটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি। $a * b = a + ab$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত $*$ টো Q ৰ ওপৰত চলা এক দ্বৈত প্রক্রিয়া বুলি প্রমাণিত কৰক।

$*$ টো (i) ক্রম বিনিময় নে, (ii) সহযোগ বিধিৰ পৰীক্ষা কৰক।



২.৪ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- এটা অ-শূন্য সংহতি S ৰ দ্বৈত প্রক্রিয়া হ'ব S x S ৰ পৰা Sলৈ হোৱা ফলন।
- যদি S এটা m সংখ্যক উপাদান থকা সসীম সংহতি হয়, তেন্তে Sৰ ওপৰত চলা দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ সংখ্যা হ'ব m^{m^2}.
- যদি $a * b = b * a$ আৰু $\forall\, a, b \in S$ হয়, তেন্তে এটা অ-শূন্য S সংহতিৰ দ্বৈত প্রক্রিয়াটো ক্রম বিনিময় প্রকৃতিৰ হ'ব।
- এটা অ-শূন্য সংহতি S ৰ ওপৰত চলা $*$ দ্বৈত প্রক্রিয়াটোক সাহচর্য্য বিধিৰ বুলি তেতিয়াহে কোৱা হ'ব যেতিয়া $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall\, a, b, c \in S$ হ'ব।
- এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া সম্বলিত অ-শূন্য সংহতি Sত থকা e মৌলটোক একক মৌল বোলা হ'ব যদিহে $a * e = a = e * a$, $\forall\, a \in S$ হয়।
- এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া সম্বলিত অ-শূন্য সংহতি S ত থকা b মৌলটোক S সংহতিৰ a মৌলৰ বিপৰীত বোলা হ'ব যদিহে $a * b = e = b * a$ হয়।



২.৫ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $4^{4^2} = 4^{16}$

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নহয়।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ হয়।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ক্রম বিনিময়ে নহয়, সহযোগ বিধিৰ নহয়।



২.৬ অধিক জানিবলৈ

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.

2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).

3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).

4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.

5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



২.৭ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্রশ্ন ১ঃ ধৰা হ'ল IR এটা বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি। $a * b = a+5b$; $a, b \in IR$ ৰ দ্বাৰা নির্ধাৰিত দ্বৈত প্রক্রিয়া $*$ টো (i) ক্রম বিনিময়ে নে (ii) সাহচর্য্য বিধিৰ পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন ২ঃ ধৰা হ'ল S সংহতিটোৰ 3 টা উপাদান আছে। S ৰ ওপৰত কিমানটা দ্বৈত প্রক্রিয়া চলিব পাৰে?

*** ***** ***

অধ্যায় ৩ ঃ সংঘ (GROUP)

অধ্যায় গাঁথনি

৩.১ উদ্দেশ্য

৩.২ পৰিচয়

৩.৩ সংঘ

৩.৪ সংঘৰ ধৰ্মসমূহ

৩.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৩.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৩.৭ অধিক জানিবলৈ

৩.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

৩.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি অধোলিখিত বিষয়বোৰৰ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব—

- সংঘ
- সংঘৰ ধৰ্মসমূহ

৩.২ পৰিচয়

দ্বিতীয় অধ্যায়ত আমি সংহতিৰ দ্বৈত প্রক্রিয়া বিষয়ে আলোচনা কৰিছোঁ। এই অধ্যায়ত সংঘৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব। সংঘ হ'ল এটা বীজগণিতীয় গাঁথনি, অর্থাৎ কেইটামান নির্দিষ্ট স্বীকার্য সিদ্ধ কৰা দ্বৈত প্রক্রিয়াযুক্ত এটা অৰিক্ত সংহতি। বিমূর্ত বীজগণিতৰ অধ্যয়নত সংঘ-তত্ত্বই এক গুৰুত্বপূর্ণ স্থান অধিকাৰ কৰি আছে।

৩.৩ সংঘ

দ্বৈত প্রক্রিয়া $*$ যুক্ত এটা অৰিক্ত সংহতি G ক সংঘ (group) বুলি কোৱা হয় যদি তলৰ স্বীকার্যকেইটা সিদ্ধ হয়।

(i) সাহচর্য্য বিধি

$(a * b) * c = a * (b * c), \forall a, b, c \in G$

(ii) একক মৌলৰ অস্তিত্ব

G ত এনে এটা মৌল e আছে যাতে

$a * e = a = e * a, \forall a \in G.$

e ক একক মৌল বুলি কোৱা হয়।

(iii) বিপৰীত মৌলৰ অস্তিত্ব

প্ৰত্যেক $a \in G$ ৰ বাবে G ত এটা মৌল b আছে যাতে

$a * b = e = b * a$

b ক a ৰ বিপৰীত বুলি কোৱা হয় আৰু ইয়াক a^{-1}ৰে চিহ্নিত কৰা হয়।

তদুপৰি যদি দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া $*$ ক্ৰমবিনিময় হয়, তেনেহ'লে G ক আবেলীয় সংঘ (Abelian group) বুলি কোৱা হয়। স্মৰ্তব্য যে নিলছ হেনৰিক আবেল (1802–1829) আছিল নৰৱেৰ এজন প্ৰথিতযশা গণিতজ্ঞ।

টোকা ঃ 1. সংঘ হ'বলৈ হ'লে উপৰিউক্ত স্বীকাৰ্যকেইটা সিদ্ধ কৰা এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াযুক্ত অৰিক্ত সংহতি থাকিব লাগিব। পাছত আমি 'ধৰা হ'ল G এটা সংঘ' বুলি লিখিম। এইটো কথা মনত ৰাখিব লাগে যে G ত এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া আছে।

2. আমি দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ প্ৰতীকটো বাদ দিম আৰু ab বুলিহে লিখিম। মনত ৰাখিব লাগিব যে এয়া আমাৰ সাধাৰণ পূৰণ নহয়।

3. দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াযুক্ত এটা অৰিক্ত সংহতি G ক **অৰ্ধসংঘ** (semigroup) বুলি কোৱা হয় যদিহে দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াটো সাহচৰ্য্য হয়।

সসীম আৰু অসীম সংঘ

এটা সংঘ G ক **সসীম সংঘ** (finite group) বুলি কোৱা হয় যদি G সংহতিটো সসীম, অন্যথাই ইয়াক **অসীম সংঘ** (infinite group) বুলি কোৱা হয়।

সংঘৰ ক্ৰম

এটা সসীম সংঘৰ G ৰ মৌলৰ সংখ্যাক G ৰ ক্ৰম (order) বুলি কোৱা হয়। প্ৰতীকৰ সহায়ত $0(G)$ বা $|G|$ ৰে বুজোৱা হয়।

উদাহৰণ ১ ঃ ধৰা হ'ল $G = \{1\}$

স্পষ্টত ঃ G ত পূৰণ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

তদুপৰি সংঘৰ আটাইকেইটা স্বীকাৰ্য সিদ্ধ হয়।

$\therefore$পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G এটা সংঘ।

তদুপৰি G এটা আবেলীয় সংঘ।

উদাহৰণ ২ ঃ ধৰা হ'ল $G = \{-1, 1\}$, অৰ্থাৎ G সংহতিটো একৰ বৰ্গমূল দুটাৰে গঠিত।

x	–1	1
–1	1	–1
1	–1	1

তালিকা ৩.১

(i) সাৰণীৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে G ত পূৰণ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

(ii) আমি জানো যে বাস্তৱ সংখ্যাৰ পূৰণে সাহচৰ্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত একক মৌল হ'ল 1।

(iv) G ৰ প্ৰতিটো মৌলৰ G ত গুণাত্মক বিপৰীত আছে,

যথা 1 অৰ গুণাত্মক বিপৰীত 1।

–1 অৰ গুণাত্মক বিপৰীত –1.

∴ পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G এটা সংঘ।

(v) তদুপৰি বাস্তৱ সংখ্যাৰ পূৰণে ক্ৰমবিনিময় বিধি মানি চলে।

∴ G এটা আবেলীয় সংঘ।

উদাহৰণ ৩ ঃ ধৰা হ'ল G = {z : z জটিল সংখ্যা আৰু $z^n=1$}, অৰ্থাৎ G সংহতিটো একৰ n তম মূলেৰে গঠিত। ($n \in IN$)

(i) ধৰা হ'ল $z_1, z_2 \in G$

∴ $z_1^n=1, z_2^n=1$

এতিয়া $(z_1 z_2)^n = z_1^n z_2^n = 1$ ∴ $z_1 z_2 \in G$

∴ G ত পূৰণ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

(ii) আমি জানো যে জটিল সংখ্যাৰ পূৰণে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) $1 \in G$ আৰু $1z = z = z1, \forall z \in G$.

∴1 হ'ল একক মৌল।

(iv) ধৰা হ'ল $z \in G$. ∴$z^n = 1$

এতিয়া $\frac{1}{z}$ এটা জটিল সংখ্যা আৰু $\left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n} = 1$

$$\therefore \frac{1}{z} \in G$$

গতিকে, প্ৰত্যেক $z \in G$ ৰ বাবে, $\frac{1}{z} \in G$ যাতে $z\frac{1}{z}=1=\frac{1}{z}z$

∴ $\frac{1}{z}$ হ'ল z অৰ বিপৰীত।

∴ জটিল সংখ্যাৰ পূৰণৰ অধীনত G এটা সংঘ।

(v) তদুপৰি, জটিল সংখ্যাৰ পূৰণে ক্ৰমবিনিময় বিধি মানি চলে।

∴ G এটা আবেলীয় সংঘ।

টোকা ঃ আমি দেখিলোঁ যে প্ৰত্যেক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n অৰ বাবে এটা n ক্ৰমৰ আবেলীয় সংঘ আছে।

উদাহৰণ ৪ ঃ Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

(i) ধৰা হ'ল $a, b \in Z$

∴ $a+b \in Z, \forall\ a, b \in Z$

Z অত যোগ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

(ii) আমি জানো যে অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) $0 \in Z$ আৰু $a+0 = a = 0+a, \forall a \in Z$

∴ 0 একক মৌল।

(iv) প্ৰত্যেক $a \in Z$ অৰ বাবে, $-a \in Z$ যাতে $a+(-a) = 0 = (-a) +a$.

∴ যোগৰ অধীনত Z এটা সংঘ।

(v) তদুপৰি অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগ ক্ৰমবিনিময়।

∴ যোগৰ অধীনত Z এটা আবেলীয় সংঘ।

টোকা ঃ Z এটা অসীম সংঘ।

সংঘৰ আন কেইটামান উদাহৰণ

- যোগৰ অধীনত Q এটা আবেলীয় সংঘ।
- যোগৰ অধীনত IR এটা আবেলীয় সংঘ।
- পূৰণৰ অধীনত অশূন্য পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতি Q_0 এটা আবেলীয় সংঘ।
- পূৰণৰ অধীনত অশূন্য বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি IR_0 এটা আবেলীয় সংঘ।
- যোগৰ অধীনত C এটা আবেলীয় সংঘ।
- পূৰণৰ অধীনত অশূন্য জটিল সংহতি C_0 এটা আবেলীয় সংঘ।

উদাহৰণ ৫ ঃ ধৰা হ'ল G = $\left\{\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} : \alpha \in IR\right\}$

(i) ধৰা হ'ল $A_\alpha = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix} \in G,$

$$A_\beta = \begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix} \in G;\ \alpha,\beta \in IR$$

এতিয়া $A_\alpha\ A_\beta = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta)\\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix} = A_{\alpha+\beta} \in G$$

অৰ্থাৎ G ত মৌলকক্ষৰ পূৰণ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

(ii) আমি জানো যে মৌলকক্ষৰ পূৰণে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}\cos 0 & -\sin 0\\ \sin 0 & \cos 0\end{pmatrix} \in G$$

আৰু $A_\alpha I = A_\alpha = IA_\alpha, \forall A_\alpha \in G$.

∴ I হ'ল একক মৌল।

(iv) $|A_\alpha| = \begin{vmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}$

$$= \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \neq 0$$

$\therefore A_\alpha^{-1}$ আছে

$$\therefore \text{adj}A_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$\therefore A_\alpha^{-1} = \frac{1}{|A_\alpha|} adj\ A_\alpha$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} \in G$$

∴মৌলকক্ষৰ পূৰণৰ অধীনত G এটা সংঘ।

(v) তদুপৰি $A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta} = A_{\beta+\alpha} = A_\beta A_\alpha$

∴ G এটা আবেলীয় সংঘ।

উদাহৰণ ৬ ঃ ধৰা হ'ল G = $\left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} : x \in IR,\ x \neq 0 \right\}$

(i) ধৰা হ'ল $\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \in G,\ \begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix} \in G$

$x, y \in IR,\ x \neq 0,\ y \neq 0$

এতিয়া $\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{pmatrix} \in G,\ xy \in IR,\ xy \neq 0$

(ii) আমি জানো যে মৌলকক্ষৰ পূৰণে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \in G$

আৰু $\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{2}+\frac{x}{2} & \frac{x}{2}+\frac{x}{2} \\ \frac{x}{2}+\frac{x}{2} & \frac{x}{2}+\frac{x}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$$

$\therefore \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ হ'ল একক মৌল।

(iv) প্ৰত্যেক $\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix} \in G$ ৰ বাবে $\begin{pmatrix} \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \\ \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \end{pmatrix} \in G$

যাতে $\begin{pmatrix} X & X \\ X & X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \\ \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \\ \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & X \\ X & X \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$ অৰ বিপৰীত হ'ল $\begin{pmatrix} \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \\ \frac{1}{4x} & \frac{1}{4x} \end{pmatrix}$.

$\therefore$ মৌলকক্ষৰ পূৰণৰ অধীনত G এটা সংঘ।

(v) তদুপৰি $\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2xy & 2xy \\ 2xy & 2xy \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 2yx & 2yx \\ 2yx & 2yx \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} y & y \\ y & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \end{pmatrix}$$

$\therefore$ G এটা আবেলীয় সংঘ।

টোকা ঃ উপৰিউক্ত উদাহৰণটোত একক মৌল $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

উদাহৰণ ৭ ঃ ধৰা হ'ল 1 অৰ বাহিৰে সকলো পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংহতিটো G. G ত $*$ এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল— $a * b = a+b-ab, \forall\ a, b \in G$

(i) G ত $*$ এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া।

[দ্রষ্টব্য অধ্যায় 2 ৰ উদাহৰণ 10]

(ii) G ত $*$ এ সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) $0 \in G$ আৰু

$a * 0 = a + 0 - a0 = a$

$0 * a = 0 + a - 0a = a$

$\therefore *$ সাপেক্ষে 0 একক মৌল।

(iv) প্রত্যেক $a \in G$ ৰ বাবে, $\frac{a}{a-1} \in G$ যাতে

$$a * \frac{a}{a-1} = 0 = \frac{a}{a-1} * a$$

$\therefore *$ সাপেক্ষে a ৰ বিপৰীত $\frac{a}{a-1}$.

$\therefore$ $*$ সাপেক্ষে G এটা সংঘ।

(v) তদুপৰি, $*$ ক্ৰমবিনিময়ে।

[দ্ৰষ্টব্য অধ্যায় 2 ৰ উদাহৰণ 10]

$\therefore$ G এটা আবেলীয় সংঘ।

৩.৪ সংঘৰ ধৰ্মসমূহ

উপপাদ্য ১ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ। তেনেহ'লে

(i) একক মৌল অদ্বিতীয় (unique);

(ii) G ৰ প্ৰত্যেক মৌলৰ বিপৰীত অদ্বিতীয়;

(iii) $(a^{-1})^{-1} = a$, $\forall a \in G$, য'ত a^{-1} এ a ৰ বিপৰীত বুজাইছে;

(iv) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, $\forall a, b \in G$

(v) $ab = ac \Rightarrow b = c$, (বাওঁ বিলোপন বিধি)

$ba = ca \Rightarrow b = c$, (সোঁ বিলোপন বিধি) $\forall a, b, c \in G$.

প্ৰমাণ ঃ (i) যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল Gৰ দুটা একক মৌল e, f.

$\therefore ef = e = fe$ [$\because$ f একক মৌল]

আকৌ $ef = f = fe$ [$\because$ e একক মৌল]

$\therefore e = f$

গতিকে, একক মৌল অদ্বিতীয়।

(ii) ধৰা হ'ল $a \in G$ আৰু G ৰ একক মৌল e.

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল b আৰু c, a ৰ দুটা বিপৰীত।

$\therefore ab = e = ba$ [$\because$ b, a ৰ বিপৰীত]

$ac = e = ca$ [$\because$ c, a ৰ বিপৰীত]

এতিয়া $b = be$ [$\because$ e একক মৌল]

$= b(ac)$ [$\because$ $e = ac$]

$= (ba)c$ [সাহচর্য্য বিধিৰ পৰা]

$= ec$

$= c$ [$\because$ e একক মৌল]

গতিকে a ৰ বিপৰীত অদ্বিতীয়।

(iii) আমি জানো $aa^{-1} = e = a^{-1}a$

$\therefore a^{-1}$, a ৰ বিপৰীত, তেনেদৰে a, a^{-1} ৰ বিপৰীত।

$\therefore (a^{-1})^{-1} = a$

(iv) ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e আৰু $a, b \in G$

এতিয়া $(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1}$

$= a\ e\ a^{-1}$

$= aa^{-1}$

$= e$

$(b^{-1}a^{-1})(ab) = b^{-1}(a^{-1}a)b$

$= b^{-1}\ eb$

$= b^{-1}\ b$

$= e$

$\therefore b^{-1}a^{-1}$, abৰ বিপৰীত, অৰ্থাৎ, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

(v) $ab = ac$

$\Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac)$

$\Rightarrow (a^{-1}a)b=(a^{-1}a)c$, [সাহচর্য্য বিধিৰ পৰা]

$\Rightarrow eb = ec$

$\Rightarrow b = c$, [$\because$ e একক মৌল]

আকৌ $ba = ca$

$\Rightarrow (ba)a^{-1} = (ca)\ a^{-1}$

$\Rightarrow b(aa^{-1}) = c(aa^{-1})$ [সাহচর্য্য বিধিৰ পৰা]

$\Rightarrow be = ce$

$\Rightarrow b = c$ [$\because$ e একক মৌল]

উদাহৰণ ৮ ঃ যদি এটা সংঘ G ত, প্ৰত্যেক মৌল নিজেই নিজৰ বিপৰীত হয়, প্ৰমাণ কৰক যে G আবেলীয়।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ। ধৰা হ'ল $a, b \in G$

$\therefore a^{-1} = a, b^{-1} = b$ (দিয়া আছে)

এতিয়া $ab = (ab)^{-1}$ (দিয়া আছে)

$= b^{-1}\ a^{-1}$ [উপপাদ্য ১ (iv)]

$\therefore$ G আবেলীয়।

উদাহৰণ ৯ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে এটা সংঘ G আবেলীয় হ'ব যদি আৰু যদিহে $(ab)^2 = a^2b^2$, $\forall$ $a, b \in G$.

সমাধান ঃ $(ab)^2 = a^2\ b^2$

$\Leftrightarrow (ab)\ (ab) = (aa)\ (bb)$

$\Leftrightarrow a(ba)b = a(ab)b$

$\Leftrightarrow (ba)b = (ab)b$, [বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা]

$\Leftrightarrow ba = ab$, [সোঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা]

$\Leftrightarrow$ G আবেলীয়



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ দেখুৱাওক যে একৰ ঘনমূল কেইটাৰ দ্বাৰা গঠিত $G = \{1, \omega, \omega^2\}$ সংহতিটো পূৰণ প্রক্রিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ। (ω একৰ এটা জটিল ঘনমূল)

প্রশ্ন নং ২ঃ দেখুৱাওক যে বাস্তৱ সংখ্যাত সকলো 2 x 2 অক্ষীয়মান মৌলকক্ষেৰে (non-singular matrices) গঠিত G সংহতিটো মৌলকক্ষৰ পূৰণৰ অধীনত এটা সংঘ।

প্রশ্ন নং ৩ঃ ধৰা হ'ল $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : x \in IR,\ x \neq 0 \right\}$ দেখুৱাওক যে মৌলকক্ষৰ পূৰণৰ অধীনত G এটা আবেলীয় সংঘ।

প্রশ্ন নং ৪ঃ কোনো সংঘ G ৰ প্রতিটো মৌল a ৰ বাবে যদি $a^2 = e$ হয়, প্রমাণ কৰক যে G আবেলীয়। (e হ'ল Gৰ একক মৌল)



৩.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- সংঘ হ'ল এটা বীজগণিতীয় গাঁথনি, অর্থাৎ কেইটামান নির্দিষ্ট স্বীকার্য্য সিদ্ধ কৰা দ্বৈত প্রক্রিয়াযুক্ত এটা অৰিক্ত সংহতি।
- সংঘৰ প্রাথমিক ধর্মসমূহ আলোচনা কৰা হ'ল।



৩.৬ অধিক জানিবলৈ

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.
2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).
3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).

4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.

5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



৩.৭ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে কৰিবলৈ চেষ্টা কৰক।

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে কৰিবলৈ চেষ্টা কৰক।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে কৰিবলৈ চেষ্টা কৰক।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে কৰিবলৈ চেষ্টা কৰক।



৩.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

প্রশ্ন ১ঃ ধৰা হ'ল G অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি। G ত দ্বৈত প্রক্রিয়া $*$ এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হৈছে। $a * b = a+b-1;\ a, b \in G.$

দেখুৱাওক যে $*$ প্রক্রিয়াৰ অধীনত G এটা আবেলীয় সংঘ।

প্রশ্ন ২ঃ প্রমাণ কৰক যে এটা সংঘ G এটা আবেলীয় হ'ব যদি আৰু যদিহে $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, $\forall\, a, b \in G.$

*** ***** ***

অধ্যায় ৪ ঃ উপসংঘ (SUBGROUPS)

অধ্যায় গাঁথনি

৪.১ উদ্দেশ্য
৪.২ পৰিচয়
৪.৩ উপসংঘ
৪.৪ চক্রীয় সংঘ
৪.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
৪.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
৪.৭ অধিক জানিবলৈ
৪.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

৪.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি অধোলিখিত বিষয়বোৰৰ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব—

- উপসংঘ
- চক্রীয় সংঘ

৪.২ পৰিচয়

তৃতীয় অধ্যায়টিত আমি সংঘ আৰু ইয়াৰ ধর্মসমূহৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিলো। এই অধ্যায়টিত আমি উপসংঘ আৰু ইয়াৰ ধর্মসমূহৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। আমি চক্রীয় সংঘৰ বিষয়েও এই অধ্যায়টিত আলোচনা কৰিম।

৪.৩ উপসংঘ

অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Z লোৱা হ'ল।

আমি জানো যে যোগ প্রক্রিয়াৰ অধীনত Z এটা সংঘ।

$2Z = \{0, \pm 2, \pm 4, ...\}$ হ'ল যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

স্পষ্টত ঃ 2Z, Z অৰ এটা অৰিক্ত উপসংহতি।

তদুপৰি যোগ প্রক্রিয়াৰ অধীনত 2Z এটা সংঘ।

এই ক্ষেত্রত 2Z অক Z অৰ এটা অৰিক্ত উপসংঘ বুলি কোৱা হয়।

সংজ্ঞা ঃ এটা সংঘ G ৰ কোনো অৰিক্ত উপসংহতি H অক উপসংঘ (subgroup) বুলি কোৱা হয় যদি G ৰ দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ অধীনত H ও এটা সংঘ হয়। প্রতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে লিখা হয় $H \leq G$.

টোকা ঃ (1) যদি e, G ৰ একক মৌল হয়, {e} ও G ৰ এটা উপসংঘ। ইয়াক তুচ্ছ (trivial) উপসংঘ বুলি কোৱা হয়। বাকীবোৰ উপসংঘ অতুচ্ছ।

(2) G নিজেই G ৰ এটা উপসংঘ। ইয়াক G ৰ অপ্রকৃত উপসংঘ (improper subgroup) বুলি কোৱা হয়। বাকীবোৰ উপসংঘ প্রকৃত।

[দ্রষ্টব্য John B. Fraleigh, A First Course in Abstract Algebra (First Indian Reprint, 2003)]

উদাহৰণ ১ ঃ ধৰা হ'ল G = {–1, 1, –i, i}, i = $\sqrt{-1}$

আমি জানো যে পূৰণ প্রক্রিয়াৰ অধীনত G এটা সংঘ।

ধৰা হ'ল H = {–1, 1}.

স্পষ্টত ঃ H ⊆ G.

আকৌ, পূৰণ প্রক্রিয়া সাপেক্ষে H এটা সংঘ।

∴ H ≤ G এইটো G ৰ প্রকৃত উপসংঘ।

টোকা ঃযোগ প্রক্রিয়াৰ অধীনত বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি IR এটা সংঘ। পূৰণ প্রক্রিয়াৰ অধীনত ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি IR_+ এটা সংঘ। IR_+, IR অৰ এটা উপসংহতি, কিন্তু উপসংঘ নহয়। দ্বৈত প্রক্রিয়া বেলেগ।

উপপাদ্য ১ ঃ G সংঘৰ H এটা উপসংঘ। তেনেহ'লে

(i) H অৰ একক মৌলই G ৰ একক মৌল,

(ii) H অৰ কোনো মৌলৰ বিপৰীত, G ৰ মৌল হিচাপেও সেই একেটা মৌলৰ বিপৰীত একে।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু H≤G.

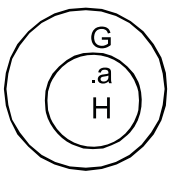
(i) যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e আৰু H অৰ একক মৌল f.

ধৰা হ'ল a ∈ H

∴ af = a = fa [∵ H অৰ একক মৌল f]

আকৌ a ∈ H ⇒ a ∈ G

∴ ae = a = ea [∵ G ৰ একক মৌল e]



∴ af = ae

⇒ f = e [বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা]

(ii) ধৰা হ'ল Gৰ একক মৌলও e.

∴ H অৰ একক মৌল e.

ধৰা হ'ল a ∈ H

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল H অত a ৰ বিপৰীত b আৰু Gত a ৰ বিপৰীত c.

∴ ab = e = ba

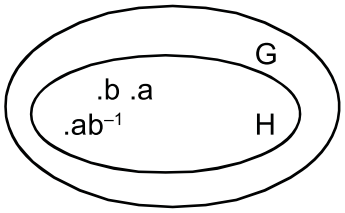
ac = e = ca

∴ ab = ac .⇒ b = c [বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা]

টোকা ঃ সংঘ G ৰ H, K দুটা উপসংঘ হ'লে আৰু G ৰ একক মৌল e হ'লে, H আৰু K উভয়ৰে একক মৌল হ'ব e. গতিকে H আৰু K ৰ অন্ততঃ এটা উমৈহতীয়া মৌল আছে, যথা একক মৌল। গতিকে আমি এইটো সিদ্ধান্তত উপনীত হ'ব পাৰো যে এটা সংঘৰ দুটা অসংযুক্ত (disjoint) উপসংঘ থাকিব নোৱাৰে।

উপপাদ্য ২ ঃ সংঘ G ৰ এটা অৰিক্ত উপসংহতি H, G ৰ উপসংঘ হ'ব যদি আৰু যদিহে

$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.



প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল $H \leq G$

ধৰা হ'ল $a, b \in H$

$b \in H \Rightarrow b^{-1} \in H$ [$\because$ H এটা সংঘ]

এতিয়া $a \in H, b^{-1} \in H$

$\therefore ab^{-1} \in H$

বিপৰীত ক্ৰমে, ধৰা হ'ল $H \subseteq G$ যাতে $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$

(i) এতিয়া $a, a \in H \Rightarrow aa^{-1} \in H$ (প্ৰদত্ত চৰ্তমতে)

$\Rightarrow e \in H$,

য'ত e হ'ল Gৰ একক মৌল।

(ii) $e \in H, a \in H \Rightarrow ea^{-1} \in H$

$\Rightarrow a^{-1} \in H$

$\therefore$ H অৰ প্ৰতিটো মৌলৰ বিপৰীত H অত আছে।

(iii) $b \in H \Rightarrow b^{-1} \in H$ ((ii)ৰপৰা)

এতিয়া $a \in H, b^{-1} \in H \quad \Rightarrow a(b^{-1})^{-1} \in H$

$\Rightarrow ab \in H$

(iv) যিহেতু দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াটোৱে G ত সাহচৰ্য্য বিধি মানি চলে, ই H অতো মানি চলিব।

$\therefore$ G ৰ যিটো দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, সেই একে দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত H এটা সংঘ। আকৌ $H \subseteq G$.

$\therefore H \leq G$.

টোকা ঃ যদি যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G এটা সংঘ হয়, তেনেহ'লে G ৰ এটা অৰিক্ত উপসংহতি H, Gৰ উপসংঘ হ'ব যদি আৰু যদিহে $a, b \in H \Rightarrow a-b \in H$.

উপপাদ্য ৩ ঃ এটা সংঘৰ দুটা উপসংঘৰ ছেদনো এটা উপসংঘ।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু e, G ৰ একক মৌল।

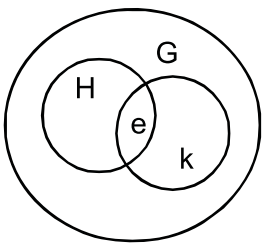
ধৰা হ'ল $H \leq G, K \leq G$.

আমি জানো যে $H \cap K \neq \phi$,

কিয়নো অন্ততঃ একক মৌল $e \in H \cap K$

ধৰা হ'ল $a, b \in H \cap K$

$a \in H \cap K \Rightarrow a \in H$ আৰু $a \in K$



$b \in H \cap K \Rightarrow b \in H$ আৰু $b \in K$

এতিয়া $a, b \in H$ আৰু $H \leq G$. $\therefore ab^{-1} \in H$

$a, b \in K$ আৰু $K \leq G$. $\therefore ab^{-1} \in K$

$ab^{-1} \in H$ আৰু $ab^{-1} \in K \Rightarrow ab^{-1} \in H \cap K$

$\therefore H \cap K \leq G$

টোকা ঃ দুটা উপসংঘৰ মিলন সদায় এটা উপসংঘ নহয়।

অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$ যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ।

ধৰা হ'ল $2Z = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, ...\}$

$3Z = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, ...\}$

স্পষ্টত ঃ $2Z \leq Z$, $3Z \leq Z$

এতিয়া $2 \in 2Z \cup 3Z$, $3 \in 2Z \cup 3Z$

কিন্তু $2+3 = 5 \notin 2Z \cup 3Z$

$\therefore 2Z \cup 3Z$ অত যোগ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া নহয়।

$\therefore 2Z \cup 3Z$ সংঘ হ'ব নোৱাৰে।

উপপাদ্য ৪ ঃ দুটা উপসংঘৰ মিলন এটা উপসংঘ হ'ব যদি আৰু যদিহে এটা আনটোৰ উপসংহতি হয়।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু $H \leq G$, $K \leq G$

ধৰা হ'ল $H \subseteq K$. $\therefore H \cup K = K$

$\because K \leq G$, $\therefore H \cup K \leq G$

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল $H \leq G, K \leq G$ যাতে $H \cup K \leq G$.

ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e.

প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে $H \subseteq K$বা $K \subseteq H$

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল এইটো সত্য নহয়।

$\therefore H \not\subseteq K$ আৰু $K \not\subseteq H$

$\therefore$ H অত এনে এটা a আছে যাতে $a \notin K$

আৰু K ত এনে এটা b আছে যাতে $b \notin H$

এতিয়া $a \in H \Rightarrow a \in H \cup K$

$b \in K \Rightarrow b \in H \cup K$

$\therefore ab \in H \cup K \Rightarrow ab \in H$ বা $ab \in K$

যদি $ab \in H$, তেনেহ'লে $a \in H$, $ab \in H \Rightarrow a^{-1}(ab) \in H$

$\Rightarrow (a^{-1}a)b \in H$

$\Rightarrow eb \in H$

$\Rightarrow b \in H$,

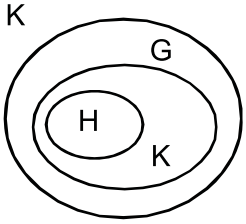
এইটো স্ববিৰোধী কথা।

সেইদৰে, যদি $ab \in K$, তেনেহ'লে $ab \in K, b \in K \Rightarrow (ab)b^{-1} \in K$

$\Rightarrow a(bb^{-1}) \in K$

$\Rightarrow ae \in K$

$\Rightarrow a \in K,$



এইটো স্ববিৰোধী কথা।

গতিকে আমি ধৰি লোৱা কথাটো ভুল।

সেয়ে $H \subseteq K$ বা $K \subseteq H$.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

প্রশ্ন নং ১ঃ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি IR_+ গুণাত্মকত সংঘ আৰু বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি IR যোগাধীনত সংঘ। IR_+, IR অৰ উপসংঘ হয়নে? যুক্তি দিয়ক।

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা সংঘৰ দুটা অসংযুক্ত উপসংঘ থাকিব পাৰেনে? যুক্তি দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ এটা আবেলীয় সংঘৰ এটা অনা-আৱেলীয় উপসংঘ থাকিব পাৰেনে? যুক্তি দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Z যোগাধীনত এটা সংঘ। m এটা নির্দিষ্ট অখণ্ড সংখ্যা। দেখুৱাওক যে $mZ = \{0, \pm m, \pm 2m, \pm 3m, ...\}$ সংহতিটো Z অৰ এটা উপসংঘ।

প্রশ্ন নং ৫ঃ 2 x 2 আকাৰৰ সকলো অপ্রতিম বাস্তৱ মৌলকক্ষৰ সংহতি G মৌলকক্ষৰ পূৰণৰ অধীনত এটা সংঘ।

ধৰা হ'ল $H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \text{ বাস্তৱ আৰু } ad-bc = 1 \right\}$

দেখুৱাওক যে H, G ৰ এটা উপসংঘ।

প্রশ্ন নং ৬ঃ এটা উদাহৰণ দি দেখুৱাওক যে এটা সংঘক ইয়াৰ দুটা প্রকৃত উপসংঘৰ মিলন হিচাপে প্রকাশ কৰিব নোৱাৰি।

৪.৪ চক্রীয় সংঘ

সংজ্ঞা ঃ এটা সংঘ G ক চক্রীয় (cyclic) বুলি কোৱা হয় যদি G ত এটা মৌল a থাকে যাতে G ৰ প্রতিটো মৌলক a^n, $n \in Z$ আকাৰত প্রকাশ কৰিব পাৰি। a ক G ৰ এটা জনক (generator) বুলি কোৱা হয়। প্রতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে লিখা হয় $G = \langle a \rangle$, অর্থাৎ, a ৰ দ্বাৰা জনিত G এটা চক্রীয় সংঘ। আমি এনেকৈও লিখিব পাৰো $G = \{a^2 : a \in G : n \in z\}$ এ

টোকা ঃ যদি G সংঘটো যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত হয়, G ৰ প্ৰতিটো মৌল na আকাৰত প্ৰকাশ কৰা হয়।

উদাহৰণ ঃ

(1) আমি জানো যে G = {–1, 1} সংহতিটো পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ।

এতিয়া, $(-1)^1 = -1$, $(-1)^2=1$

∴ – 1 অৰ দ্বাৰা জনিত G এটা চক্ৰীয় সংঘ অৰ্থাৎ G = <–1>

(2) আমি জানো যে G = {1, ω , ω^2} সংহতিটো পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ, ω হ'লে একৰ এটা জটিল ঘনমূল।

এতিয়া $\omega^1 = \omega^2$, $\omega^2 = \omega^2$, $\omega^3 = 1$

∴ ω অৰ দ্বাৰা জনিত G এটা চক্ৰীয় সংঘ অৰ্থাৎ G = $<\omega>$, সেইদৰে G = $<\omega^2>$

(3) আমি জানো যে G = {–1, 1, –i, i} সংহতিটো পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ।

এতিয়া $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -1$, $i^4 = 1$

∴ i ৰ দ্বাৰা জনিত G এটা চক্ৰীয় সংঘ অৰ্থাৎ G = < i >

সেইদৰে G = < – i >

(4) অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Z যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ।

ধৰা হ'ল $x \in Z$ এতিয়া x = 1x

∴ 1 অৰ দ্বাৰা জনিত G এটা চক্ৰীয় সংঘ অৰ্থাৎ G = < 1 >

সেইদৰে G = < –1 >.

উপপাদ্য ৫ ঃ প্ৰত্যেক চক্ৰীয় সংঘই আবেলীয়।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল G = < a > এটা চক্ৰীয় সংঘ।

ধৰা হ'ল $x, y \in G$.

গতিকে এনে অখণ্ড সংখ্যা m, n আছে যাতে $x = a^m$, $y = a^n$

এতিয়া $xy = a^m a^n$

$= a^{m+n}$

$= a^{n+m}$

$= a^n a^m$

$= yx$

∴ G আবেলীয়।

উপপাদ্য ৬ ঃ এটা চক্ৰীয় সংঘ G ৰ a এটা জনক হ'লে, a^{-1} ও G ৰ এটা জনক।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল G = < a > এটা চক্ৰীয় সংঘ।

ধৰা হ'ল $x \in G$.

গতিকে এনে এটা অখণ্ড সংখ্যা m আছে যাতে $x = a^m = (a^{-1})^{-m}$

$\therefore G = < a^{-1} >$.

Z অৰ বাবে হৰণৰ নিয়ম

b এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা আৰু a এটা অখণ্ড সংখ্যা হ'লে, অদ্বিতীয় (unique) অখণ্ড সংখ্যা, q, r আছে যাতে $a = bq+r$, $0 \leq r < b$.

ইয়াক Z অৰ বাবে হৰণৰ নিয়ম (Division Algorithm) বুলি কোৱা হয়।

উপপাদ্য ৭ ঃ এটা চক্রীয় সংঘৰ উপসংঘও চক্রীয়।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল $G = <a>$ এটা চক্রীয় সংঘ।

ধৰা হ'ল $H \leq G$

ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e.

প্রথম ক্ষেত্র ঃ ধৰা হ'ল $H = \{e\}$, তেনেহ'লে প্রমাণ কৰিবলৈকে একো নাই।

দ্বিতীয় ক্ষেত্র ঃ ধৰা হ'ল $H = G$, এই ক্ষেত্রতো প্রমাণ কৰিবলৈ একো নাই।

তৃতীয় ক্ষেত্র ঃ ধৰা হ'ল $H \neq G$, $H \neq \{e\}$

H অৰ প্রতিটো মৌলই a ৰ ঘাত (power)।

ধৰা হ'ল m য়েই **সবাতোকৈ সৰু** ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা যাতে $a^m \in H$.

ধৰা হ'ল $x \in H$.

তেনেহ'লে কোনো p ৰ বাবে $x = a^p$

এতিয়া হৰণৰ নিয়মৰ পৰা এনে অদ্বিতীয় অখণ্ড সংখ্যা q আৰু r আছে যাতে

$p = mq + r$, য'ত $0 \leq r < m$

$\therefore r = p - mq$

$\therefore a^r = a^{p-mq} = a^p (a^m)^{-q} = x(a^m)^{-q}$

এতিয়া $x (a^m)^{-q} \in H$ $\quad \therefore a^r \in H$

কিন্তু m য়েই সবাতোকৈ সৰু ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা যাতে $a^m \in H$.

$\therefore$ r শূন্য হ'ব লাগিব।

$\therefore p = mq$

$\Rightarrow x = a^p = a^{mq} = (a^m)^q$

$\therefore H = <a^m>$ এটা চক্রীয় সংঘ।

উপপাদ্য ৮ ঃ এটা সংঘৰ ক্রম মৌলিক সংখ্যা হ'লে সংঘটো চক্রীয়।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সসীম সংঘ আৰু $0 (G) = p$, য'ত p এটা মৌলিক সংখ্যা।

ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e.

ধৰা হ'ল $a \in G$ যাতে $a \neq e$.

ধৰা হ'ল $H = \{a^n : n$ এটা অখণ্ড সংখ্যা$\}$

স্পষ্টতঃ H, G ৰ এটা চক্রীয় উপসংঘ।

$\therefore$ লাগ্রাঞ্জৰ উপসংঘৰ ক্রম সম্বন্ধীয় উপপাদ্যৰ পৰা, 0 (H)ৰ দ্বাৰা 0 (G) বিভাজ্য।

ইয়াৰ পৰা আমি পাম 0(H) = 1 বা p, যিহেতু 0(G) এটা মৌলিক সংখ্যা।

কিন্তু 0(H) $\neq$1, $\because$ a $\neq$e.

$\therefore$ 0 (H) = p = 0(G)

$\therefore$ H = G

$\therefore$ a ৰ দ্বাৰা জনিত G এটা চক্ৰীয় সংঘ।

উদাহৰণ ২ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে এটা সংঘৰ ক্ৰম $\leq$ 5 হ'লে সংঘটো আবেলীয়।

সমাধান ঃ স্পষ্টতঃ এটা সংঘৰ ক্ৰম 1 অৰ্থাৎ মৌলৰ সংখ্যা 1 হ'লে সংঘটো আবেলীয়।

আমি জানো যে এটা সংঘৰ ক্ৰম মৌলিক সংখ্যা হ'লে সংঘটো চক্ৰীয় আৰু প্ৰত্যেক চক্ৰীয় সংঘই আবেলীয়।

$\therefore$ যিবোৰ সংঘৰ ক্ৰম 2, 3 আৰু 5 সেইবোৰ আবেলীয়।

এতিয়া এটা চাৰিটা মৌল বিশিষ্ট সংঘ লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল G = {e, a, b, c} য'ত সকলোবোৰ মৌল পৃথক আৰু G ৰ একক মৌল হ'ল e.

স্পষ্টতঃ e নিজেই নিজৰ বিপৰীত। সেইদৰে, যদি বাকী তিনিটা মৌলৰ প্ৰতিটোৱেই নিজৰ বিপৰীত হয়, তেনেহ'লে G আবেলীয়। (দ্ৰষ্টব্য উদাহৰণ 18)

যদি নহয়, ধৰা হ'ল $b^{-1} = c$, $c^{-1} = b$. তেনেহ'লে $a^{-1} = a$

এতিয়া প্ৰক্ৰিয়া-সাৰণীখন সম্পূৰ্ণ কৰা যাওক।

$\because$ $a^{-1} = a$ $\therefore$ aa = e

G ৰ প্ৰতিটো মৌল প্ৰক্ৰিয়া-সাৰণীখনৰ প্ৰতিটো শাৰী বা স্তম্ভত মাত্ৰ এবাৰকৈ থাকিব।

$\therefore$ ab = b or ab = c.

এতিয়া ab = b $\Rightarrow$ ab = eb $\Rightarrow$ a = e (সোঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা)

এইটো স্ববিৰোধী কথা।

$\therefore$ ab = c আৰু $\therefore$ ac = b

$\therefore$ b = c^{-1}, $\therefore$ bc = e

$\therefore$ ba = a বা ba = c

ba = a $\Rightarrow$ba = ea$\Rightarrow$ b = e,

এইটো স্ববিৰোধী কথা।

$\therefore$ ba = c আৰু bb = a

আকৌ, $\because$ c = b^{-1} $\therefore$ cb = e

$\therefore$ ca = a বা ca = b

ca = a $\Rightarrow$ c = e, এইটো স্ববিৰোধী কথা।

$\therefore$ ca = b, আৰু cc = a

.	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	a	e
c	c	b	e	a

সাৰণী ৪.১

আমি দেখিলোঁ যে প্ৰক্ৰিয়া-সাৰণীখন মুখ্য কৰ্ণ সাপেক্ষে সমমিত।

$\therefore$ G আবেলীয়।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

প্রশ্ন নং ১ঃ এটা চক্রীয় সংঘ a ৰ ক্রম 10 ৰ কিমানটা জনক থাকিব?

প্রশ্ন নং ২ঃ তলৰ কোনটোৰ সংঘ চক্রীয়? প্রত্যেকটো চক্রীয় সংঘৰ বাবে জনকবোৰ উল্লেখ কৰক।

(a) $G = \langle z, + \rangle$ **(b)** $G = \langle Q, + \rangle$ **(c)** $G = \langle Q^+, + \rangle$ **(d)** $G = \{6^n : n \in z\}$ পূৰণৰ অধীনত।



৪.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- এটা সংঘ G ৰ কোনো অৰিক্ত উপসংহতি H অক উপসংঘ বুলি কোৱা হয় যদি G ৰ দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ অধীনত H ও এটা সংঘ হয়।
- এটা সংঘ G ক চক্রীয় বুলি কোৱা হয় যদি G ৰ প্রতিটো মৌলক a^n আকাৰত প্রকাশ কৰিব পাৰি, $n \in Z$.



৪.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নহয়। দ্বৈত প্রক্রিয়া বেলেগ বেলেগ।

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নহয়। দুটা উপসংঘৰ মাজত অতি কমেও এটা উমৈহতীয়া মৌল থাকে যেনে- একক মৌলটো।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নহয়।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে কৰিবলৈ চেষ্টা কৰক।

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে কৰিবলৈ চেষ্টা কৰক।

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ এটা যোগাত্মক সংঘ।

$2Z = \{0, \pm 2, \pm 3, \pm 6 \ldots\}$ আৰু

$3Z = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 0 \ldots\}$ হ'ল Z ৰ দুটা উপসংঘ

$\therefore \ Z \neq eZ \cup 3Z$

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ যিহেতু 1, 3, 7, 9 হ'ল 10 ৰ আপেক্ষিক মৌলিক। গতিকে a ৰ জনকবোৰ হ'ব a, a^3, a^7 আৰু a^9.

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে কৰিবলৈ চেষ্টা কৰক।



৪.৭ অধিক জানিবলৈ

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.
2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).
3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).
4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.
5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



৪.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ঃ ধৰা হ'ল G এটা আবেলীয় সংঘ। প্ৰমাণ কৰক যে $H = \{x \in G : x = x^{-1}\}$ সংহতিটো G ৰ এটা উপসংঘ।

প্ৰশ্ন ২ঃ দেখুৱাওক যে এটা সংঘৰ মৌলৰ সংখ্যা 4 হ'লে সংঘটো আবেলীয়।

প্ৰশ্ন ৩ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু e, G ৰ একক মৌল। প্ৰমাণ কৰক যে G আবেলীয় যদি $b^{-1}a^{-1}\, ba = e$, $\forall\, a, b \in G$

*** ***** ***

অধ্যায় ৫ ঃ বিন্যাস সংঘ (GROUP OF PERMUTATIONS)

অধ্যায় গাঁথনি

৫.১ উদ্দেশ্য

৫.২ পৰিচয়

৫.৩ বিন্যাসৰ সংজ্ঞা, উদাহৰণ

৫.৪ বিন্যাসৰ পূৰণ

৫.৫ বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ বিন্যাস

৫.৬ বিন্যাস সংঘ

৫.৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৫.৮ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

৫.৯ অধিক জানিবলৈ

৫.১০ আৰ্হি প্ৰশ্ন

৫.১ উদ্দেশ্য

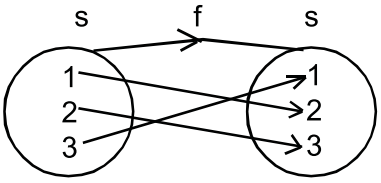
এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- বিন্যাসৰ সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- বিন্যাসৰ পূৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- বিভিন্ন ধৰণৰ বিন্যাস সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- বিন্যাস সংঘ সম্বন্ধে জানিব।

৫.২ পৰিচয়

বিন্যাস শব্দটো দুই ধৰণে ব্যৱহৃত হয়। প্ৰথমতে ই হ'ল পৃথক মৌলৰ এটা সসীম সংহতিৰ মৌলবোৰৰ ক্ৰমিত সজ্জা। মিশ্ৰিত গণিতত আমি ক্ৰমিত সজ্জা হিচাপে বিন্যাস শব্দটো ব্যৱহাৰ কৰোঁ। দ্বিতীয়তে এটা অৰিক্ত সংহতিৰ পৰা সেই একেটা সংহতি এটা একৈয়ী আৰু আচ্ছাদক ফলনেই হ'ল বিন্যাস। সংঘ-তত্ত্বত বিন্যাস বুলি ক'লে আমি এটা অৰিক্ত, সংহতিৰপৰা নিজলৈকে একৈকী আৰু আচ্ছাদক ফলন বুলি বুজিম। এই অধ্যায়ত আমি বিন্যাসৰ সংজ্ঞা দিম, উদাহৰণ দিম আৰু এটা অৰিক্ত সংহতিৰ পৰা নিজলৈকে বিন্যাসৰ সংখ্যা নিৰ্ধাৰণ কৰিম। আমি প্ৰমাণ কৰিম যে এটা সসীম সংহতিৰ বিন্যাসৰ সংহতিটো বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত এটা সংঘ। এই সংঘটোক বিন্যাস সংঘ (বা সমমিত সংঘ) বুলি কোৱা হয়।

৫.৩ বিন্যাসৰ সংজ্ঞা, উদাহৰণ (DEFINITION OF PERMUTATION, EXAMPLES)



এটা অৰিক্ত সংহতি পৰা নিজলৈকে এটা একৈকী আৰু আচ্ছাদক ফলনক সংহতিটোত এটা বিন্যাস (permutation) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ 1 ঃ S = {1, 2, 3} সংহতিটো লোৱা হ'ল। ধৰাহ'ল f ; S $\rightarrow$ S এটা ফলন যাতে f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1

স্পষ্টত ঃ S অৰ পৰা S অলৈকে f এটা একৈকী আৰু আচ্ছাদক ফলন।

$\therefore$ S অত f এটা বিন্যাস।

বিন্যাসৰ বাবে প্রতীক

ওপৰৰ বিন্যাসটো লোৱা হ'ল।

S = {1, 2, 3}

f : S $\rightarrow$ S, f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1

ওপৰৰ বিন্যাসটোক সাধাৰণতে এনেধৰণে লিখা হয়।

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

আমি প্রথম শাৰীত S সংহতিটোৰ মৌলবোৰ লিখোঁ। দ্বিতীয় শাৰীত আমি অনুৰূপ মৌলবোৰ লিখো। f অৰ অধীনত 1 অৰ প্রতিচ্ছায়া 2। 1 অৰ ঠিক তলত 2 লিখা হয়। সেইদৰে 2 ৰ প্রতিচ্ছায়া 3। 2 ৰ ঠিক তলত 3 লিখা হয়। সেইদৰে 3 ৰ ঠিক তলত। লিখা হয়। এনেধৰণে বিন্যাস এটা লিখা হয়।

S = {1, 2, 3} সংহতিত বিন্যাসৰ সংখ্যা

S সংহতিটোত তিনিটা পৃথক মৌল আছে।

এতিয়া 1 মৌলটো তিনিধৰণে সংযোগ কৰিব পাৰি। ইয়াক 1 অৰ সৈতে বা 2 ৰ সৈতে বা 3 ৰ সৈতে সংযোগ কৰিব পাৰি।

2 ক দুটা উপায়ে সংযোগ কৰিব পাৰি।

3 ক এটা উপায়ে সংযোগ কৰিব পাৰি।

$\therefore$ বিন্যাসৰ সংখ্যা = $3 \times 2 \times 1 = 3!$

n টা মৌলবিশিষ্ট এটা সসীম সংহতিত বিন্যাসৰ সংখ্যা

ধৰা হ'ল S সংহতিটোত n টা পৃথক মৌল আছে।

প্রথম মৌলটো n টা উপায়ে সংযোগ কৰিব পাৰি।

দ্বিতীয় মৌলটো (n-1) টা উপায়ে সংযোগ কৰিব পাৰি।

তৃতীয় মৌলটো (n-2) টা উপায়ে সংযোগ কৰিব পাৰি।

এনেদৰে (n-1)তম মৌলটো দুটা উপায়ে সংযোগ কৰিব পাৰি, আৰু n তম মৌলটো

এটা উপায়ে সংযোগ কৰিব পাৰি।

$\therefore$ বিন্যাসৰ সংখ্যা

= n(n-1)(n-2) . . . . . 2.1 = n!

উদাহৰণ 2 ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2}. S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাস লিখক।

সমাধান ঃ S অৰ মৌলৰ সংখ্যা হ'ল 2.

$\therefore$ S অত 2! টা অর্থাৎ 2 টা বিন্যাস আছে। সেইকেইটা হ'ল

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

টোকা ঃ i বিন্যাসটোক একক বিন্যাস (identity permutation) বুলি কোৱা হয়। এই ক্ষেত্রত 1 অৰ প্রতিচ্ছায়া 1, 2 ৰ প্রতিচ্ছায়া 2.

উদাহৰণ 3 ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}. S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাস লিখক।

সমাধান ঃ S অৰ মৌলৰ সংখ্যা 3.

$\therefore$ S অত 3! টা অর্থাৎ 6 টা বিন্যাস আছে।

সেইকেইটা হ'ল

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

টোকা ঃ এই ক্ষেত্রত $i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

হ'ল একক বিন্যাস।

একক বিন্যাস

ধৰা হ'ল S = {a_1, a_2, ..., a_n} য'ত সকলোবোৰ a_i পৃথক।

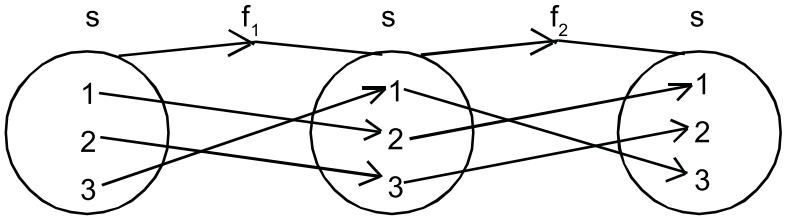
S অত একক বিন্যাস i ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$i = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 .....a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 .....a_n \end{pmatrix}$$

৫.৪ বিন্যাসৰ পূৰণ (MULTIPLICATION OF PERMUTATION)

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}. S অত তলৰ বিন্যাস দুটা লোৱা হ'ল।

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$



গতিকে আমি তলৰ সংযুক্ত ফলনটো পাম

$f_2of_1 : S \to S$, যাতে

$(f_2of_1)(1) = f_2(f_1(1)) = f_2(2) = 1$

$(f_2of_1)(2) = f_2(f_1(2)) = f_2(3) = 2$

$(f_2of_1)(3) = f_2(f_1(3)) = f_2(1) = 3$

স্পষ্টতঃ, S অত f_2of_1 এটা বিন্যাস আৰু $f_2of_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

সেইদৰে S অত f_1of_2 ও এটা বিন্যাস।

f_2o f_1 সংযুক্ত ফলনৰ দ্বাৰা বিন্যাসৰ পূৰণফল f_2f_1 অৰ সংজ্ঞা দিয়া হয়।

$$f_2f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

টোকা ঃ 1. আমি জানো যে দুটা এঁকেকী আৰু আচ্ছাদক ফলনৰ সংযুক্ত ফলনো এটা এঁকেকী আৰু আচ্ছাদক ফলন। গতিকে, দুটা বিন্যাসৰ পূৰণফলো এটা বিন্যাস।

2. আমি জানো যে ফলনৰ সংযোগে (composition) সাহচর্য্য বিধি মানি চলে। গতিকে, বিন্যাসৰ পূৰণে সাহচর্য বিধি মানি চলে।

3. আমি জানো যে ফলনৰ সংযোগে সাধাৰণতে ক্রমবিনিময় বিধি মানি নচলে। গতিকে, বিন্যাসৰ পূৰণে সাধাৰণতে ক্রমবিনিময় বিধি মানি নচলে।

ধৰা হ'ল $S = \{a_1, a_2, ..., a_3\}$ য'ত সকলোবোৰ a_i পৃথক।

ধৰা হ'ল S অত দুটা বিন্যাস।

$$f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & .....a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & f(a_3).....f(a_n) \end{pmatrix}$$

$$g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & .....a_n \\ g(a_1) & g(a_2) & g(a_3).....g(a_n) \end{pmatrix}$$

তেনেহ'লে $fg = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & ..... a_n \\ f(g(a_1)) & f(g(a_2)) & f(g(a_3)).....f(g(a_n)) \end{pmatrix}$

সেইদৰে

$$fg = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots\ldots\ldots\ a_n \\ g(f(a_1)) & g(f(a_2)) & g(f(a_3)) & \ldots\ldots g(f(a_n)) \end{pmatrix}$$

উদাহৰণ 4 ঃ ধৰা হ'ল S ={1, 2, 3, 4}. S অত তলৰ f আৰু g বিন্যাস দুটা লোৱা হ'ল।

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

fg আৰু gf নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $fg = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ f(g(1) & f(g(2) & f(g(3) & f(g(4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ f(4) & f(2) & f(1) & f(3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$gf = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ g(f(1) & g(f(2) & g(f(3) & g(f(4) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ g(2) & g(3) & g(4) & g(1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

স্পষ্টত ঃ $fg \neq gf$ [দুটা ফলনৰ সমতাৰ সংজ্ঞা দ্ৰষ্টব্য।]

উদাহৰণ 5 ঃ ধৰা হ'ল S= {1, 2, 3, 4}. S অত তলৰ বিন্যাস দুটা লোৱা হ'ল।

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},\ \psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$\phi\psi$ আৰু $\psi\phi$ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $\phi\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\psi\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

এই ক্ষেত্রত $\phi\psi = \psi\phi$

উদাহৰণ 6 ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4}. S অত তলৰ বিন্যাস দুটা লোৱা হ'ল।

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

hf আৰু fh নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $fh = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = i$$

$$hf = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = i$$

এই ক্ষেত্রত fh = hf = i

টোকা ঃ ওপৰৰ উদাহৰণটোত fh=hf = i, য'ত i হ'ল একক বিন্যাস। f অক h অৰ বিপৰীত (inverse) বুলি কোৱা হয়, h অক f অৰ বিপৰীত বোলা হয়। ইয়াক এনেদৰে লিখা হয়

$f = h^{-1}$ or $h = f^{-1}$

বিন্যাসৰ বিপৰীত

ধৰা হ'ল $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ য'ত সকলোবোৰ a_i পৃথক।

ধৰা হ'ল S অত $f = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & f(a_3) & \ldots & f(a_n) \end{pmatrix}$ এটা বিন্যাস। f অৰ বিপৰীতক f^{-1} এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} f(a_1) & f(a_2) & f(a_2) & \ldots & f(a_n) \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

মন কৰিবলগীয়া যে $ff^{-1} = f^{-1}f = i$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল S = {a_1, a_2, a_3}, য'ত সকলোবোৰ a_i পৃথক। S অত মুঠতে কিমানটা বিন্যাস আছে? S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাস লিখক।

প্রশ্ন নং ২ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4}. S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ যিকোনো পাঁচটা বিন্যাস লিখক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5}. S অত তলৰ বিন্যাসকেইটা লোৱা হ'ল।

$$f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix},\quad g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&1&5\end{pmatrix}$$

$$\phi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix},\quad \psi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&4&2&1\end{pmatrix}$$

(i) $fg,\ f\phi,\ f\psi,\ g\psi$ নির্ণয় কৰক।

(ii) $g\phi,\ \phi g$, নির্ণয় কৰক। সিহঁত সমাননে?

(iii) $\phi\psi,\ \psi\phi$, নির্ণয় কৰক। সিহঁত সমাননে?

প্রশ্ন নং ৪ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}. S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ তলৰ প্রতিটো বিন্যাসৰ বিপৰীতটো লিখক।

(i) $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\2&3&4&5&6&7&1\end{pmatrix}$

(ii) $g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\7&6&5&4&3&2&1\end{pmatrix}$

(iii) $h=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&4&5&6&7&2&1\end{pmatrix}$

৫.৫ বিভিন্ন প্রকাৰৰ বিন্যাস (DIFFERENT KINDS OF PERMUTATION)

চক্রীয় বিন্যাস

ধৰা হ'ল S এটা সসীম সংহতি। ধৰা হ'ল S অত f এটা বিন্যাস। f অক চক্রীয় বিন্যাস (cyclic permutation) বুলি কোৱা হয় যদি S অত $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ মৌল থাকে যাতে $f(a_1) = a_2$, $f(a_2) = a_3$, $f(a_3)=a_4$, ..., $f(a_{n-1}) = a_n$, $f(a_n) = a_1$, আৰু বাকী সকলোবোৰ মৌল, যদিহে থাকে, f অৰ অধীনত স্থিৰ হৈ থাকে, অর্থাৎ f(a) = a, সকলোবোৰ $a \in S$ অৰ বাবে।

এই ক্ষেত্রত f অক $(a_1, a_2, a_3 \ldots . a_n)$ এৰে বুজোৱা হয়।

f অক n দৈর্ঘ্যৰ (length) চক্রীয় বিন্যাস বুলি কোৱা হয়।

টোকা ঃ এটা চক্রীয় বিন্যাসক চক্র (cycle) বুলিও কোৱা হয়। এটা n দৈর্ঘ্যৰ চক্রীয় বিন্যাসক n চক্র বুলি কোৱা হয়।

পৰিৱর্ত

2 দৈর্ঘ্যৰ এটা চক্রীয় বিন্যাসক পৰিৱর্ত (transposition) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ 7 ঃ ধৰা হ'ল S ={1, 2, 3}

ধৰা হ'ল S অত $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

ইয়াত f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 1

$1 \to 2 \to 3 \to 1$

গতিকে, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3)$

f হ'ল 3 দৈর্ঘ্যৰ এটা চক্রীয় বিন্যাস বা 3-চক্র।

উদাহৰণ 8 ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5}. ধৰা হ'ল

S অত $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ এটা বিন্যাস।

ইয়াত f(2) = 3, f(3) = 4, f(4) = 2

$2 \to 3 \to 4 \to 2$

আৰু f(1) = 1, f(5) = 5

অর্থাৎ, f অৰ অধীনত 1, 5 স্থিৰ হৈ থাকে, অর্থাৎ f(1) = 1, f(5) = 5

গতিকে, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (2 \quad 3 \quad 4)$

f হ'ল 3 দৈর্ঘ্যৰ এটা চক্রীয় বিন্যাস বা 3-চক্র।

উদাহৰণ 9 ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4}. ধৰা হ'ল

S অত $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ এটা বিন্যাস

ইয়াত f(2) = 3, f(3) = 2

$2 \to 3 \to 2$

আৰু f(1) = 1, f(4) = 4

গতিকে $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = (2 \quad 3)$

f হ'ল 2 দৈর্ঘ্যৰ এটা চক্রীয় বিন্যাস, অর্থাৎ, f এটা পৰিৱর্ত।

টোকা ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=(1\quad 2\quad 3) \qquad (1)$$

এটা চক্রীয় বিন্যাস।

আকৌ, S = {1, 2, 3}.

সংহতিটো লোৱা হ'ল

S = {1, 2, 3, 4, 5} সংহতিত

$$\phi=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5\end{pmatrix}=(1\quad 2\quad 3) \qquad (2)$$

এটা চক্রীয় বিন্যাস।

মন কৰিব লগীয়া যে (1) আৰু (2) দুটা পৃথক বিন্যাস। (1) অৰ ক্ষেত্রত (1 2 3) এ $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$ বিন্যাস বুজায়।

আনহাতেদি (2) ৰ ক্ষেত্রত (1, 2, 3) এ $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5\end{pmatrix}$ বিন্যাস বুজায়।

বিন্যাসৰ চর্ত ঃ

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3} সংহতিত $f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=(1\quad 2\quad 3)$

এটা বিন্যাস।

এতিয়া $(1\quad 3)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $(1\quad 2)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$

$$(1\quad 3)(1\quad 2)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=(1\quad 2\quad 3)$$

গতিকে আমি দেখিলোঁ যে

$$f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}=(1\quad 2\quad 3)=(1\quad 3)(1\quad 2)$$

আকৌ, S = {1, 2, 3, 4, 5} সংহতিটো লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5} সংহতিত

$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5)$ এটা বিন্যাস।

দেখুৱাব পাৰি যে

$g = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5)$

$= (1 \quad 5)(1 \quad 4)(1 \quad 3)(1 \quad 2)$

আকৌ, S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} সংহতিটো লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} সংহতিত $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

এটা বিন্যাস।

h অক এনেদৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি

$h = (1 \quad 2 \quad 3)(4 \quad 5 \quad 6)$

$(1 \quad 2 \quad 3), (4 \quad 5 \quad 6)$ অক h বিন্যাসৰ চক্ৰ বুলি কোৱা হয়। এই ক্ষেত্ৰত $(1 \quad 2 \quad 3)$ আৰু $(4 \quad 5 \quad 6)$ অৰ কোনো উমৈহতীয়া মৌল নাই। ইহঁতক অসংযুক্ত চক্ৰ (disjoint cycles) বুলি কোৱা হয়।

অসংযুক্ত বিন্যাস

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} সংহতিত $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

$= (1 \quad 2 \quad 3)$

আৰু $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

$= (4 \quad 5 \quad 6)$

দুটা বিন্যাস।

মন কৰিব লগীয়া যে $(1 \quad 2 \quad 3)$, আৰু $(4 \quad 5 \quad 6)$ অৰ কোনো উমৈহতীয়া মৌল নাই। এই ক্ষেত্ৰত f আৰু g বিন্যাস দুটাক অসংযুক্ত বিন্যাস (disjoint permutations) বুলি কোৱা হয়।

আকৌ, S = {1, 2, 3, 4, 5, 6} সংহতিত

$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 4)$

$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (3 \quad 4 \quad 5 \quad 6)$

বিন্যাস দুটা লোৱা হ'ল।

এই ক্ষেত্রত $(1\ \ 2\ \ 3\ \ 4)$ আৰু $(3\ \ 4\ \ 5\ \ 6)$ অৰ উমৈহতীয়া মৌল আছে। গতিকে, ϕ আৰু ψ বিন্যাস দুটা অসংযুক্ত নহয়।

গতিকে অসংযুক্ত বিন্যাসৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

এটা সসীম সংহতি S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ f আৰু g বিন্যাস দুটাক অসংযুক্ত বুলি কোৱা হয় যদি

(i) $f(a) \neq a \ \Rightarrow g(a) = a$, যিকোনো $a \in S$ অৰ বাবে

আৰু (ii) $g(a) \neq a \ \Rightarrow f(a) = a$, যিকোনো $a \in S$ অৰ বাবে

প্রমাণ কৰিব পাৰি যে দুটা অসংযুক্ত চক্র তথা অসংযুক্ত বিন্যাসৰ পূৰণে ক্রমবিনিময় বিধি মানি চলে।

যুগ্ম আৰু অযুগ্ম বিন্যাস

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3} সংহতিত

$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ এটা বিন্যাস।

আকৌ, $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 3) = (1\ \ 3) = (1\ \ 2)$

আকৌ, S = {1, 2, 3, 4} সংহতিটো লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4} সংহতিত $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ এটা বিন্যাস।

এতিয়া $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 3\ \ 4) = (1\ \ 4)(1\ \ 3)(1\ \ 2)$

আমি দেখিলোঁ যে f অক যুগ্ম সংখ্যক (দুটা) পৰিৱর্তৰ পূৰণফল হিচাপে প্রকাশ কৰা হৈছে। আনহাতেদি g ক অযুগ্ম সংখ্যক (তিনিটা) পৰিৱর্তৰ পূৰণফল হিচাপে প্রকাশ কৰা হৈছে।

যদি এটা বিন্যাসক যুগ্ম সংখ্যক পৰিৱর্তৰ পূৰণফল হিচাপে প্রকাশ কৰিব পাৰি, তেনে বিন্যাসক যুগ্ম বিন্যাস (even permutation) বুলি কোৱা হয়। আনহাতেদি, যদি এটা বিন্যাসক অযুগ্ম সংখ্যক পৰিৱর্তৰ পূৰণফল হিচাপে প্রকাশ কৰিব পাৰি, তেনে বিন্যাসক অযুগ্ম বিন্যাস (odd permutation) বোলে।

ওপৰৰ f বিন্যাসটো যুগ্ম, আনহাতেদি g বিন্যাসটো অযুগ্ম।

এতিয়া প্রমাণ ব্যতিৰেকে তলৰ ফলকেইটা উল্লেখ কৰা হ'ল।

1. দুটা যুগ্ম বিন্যাসৰ পূৰণফল এটা যুগ্ম বিন্যাস।
2. দুটা অযুগ্ম বিন্যাসৰ পূৰণফল এটা অযুগ্ম বিন্যাস।
3. এটা যুগ্ম বিন্যাস আৰু এটা অযুগ্ম বিন্যাসৰ পূৰণফল এটা অযুগ্ম বিন্যাস।
4. একক বিন্যাস এটা যুগ্ম বিন্যাস।

5. এটা যুগ্ম বিন্যাসৰ বিপৰীত যুগ্ম।

6. এটা অযুগ্ম বিন্যাসৰ বিপৰীত অযুগ্ম।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৫ঃ S = {1, 2, 3}, সংহতিত সংজ্ঞাৱদ্ধ আটাইকেইটা বিন্যাস লিখক, আৰু তাৰ পৰা যুগ্ম বিন্যাস আৰু অযুগ্ম বিন্যাসকেইটা বাছি উলিয়াওক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. S সংহতিত সংজ্ঞাৱদ্ধ তলৰ বিন্যাসবোৰ যুগ্ম নে অযুগ্ম নির্ণয় কৰক।

(i) $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

(iii) $f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(iv) $f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

(v) $f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

S = {1, 2, 3, . . . , n} সংহতিত যুগ্ম বিন্যাস আৰু অযুগ্ম বিন্যাসৰ সংখ্যা, $n \geq 2$

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, ..., n}

ধৰা হ'ল S সংহতিত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংহতিটো S_n। গতিকে S_n অৰ মৌলৰ সংখ্যা n!. এই n! টা বিন্যাসৰ কিছুমান যুগ্ম বিন্যাস, আৰু কিছুমান অযুগ্ম বিন্যাস।

ধৰা হ'ল যুগ্ম বিন্যাসৰ সংখ্যা m আৰু অযুগ্ম বিন্যাসৰ সংখ্যা k.

স্পষ্টত ঃ m+k = n!

ধৰা হ'ল যুগ্ম বিন্যাসকেইটা $e_1, e_2, \ldots, e_m$; য'ত সকলোবোৰ e_i বিভিন্ন।

ধৰা হ'ল f এটা পৰিৱর্ত।

গতিকে $fe_1, fe_2, \ldots, fe_m$ অযুগ্ম বিন্যাস, আৰু বিভিন্ন, কিয়নো যদি $fe_i = fe_j$, তেনেহ'লে $e_i = e_j$, এইটো পৰস্পৰ বিৰোধী কথা।

যিহেতু অযুগ্ম বিন্যাসৰ সংখ্যা k,

$\therefore\ m \leq k$

m আৰু k সালসলনি কৰি আমি পাওঁ

$k \le m$

$\therefore\ m = k$

$\because\ m + k = n!, \quad \therefore\ m = k = \frac{n!}{2}$

$\therefore$ S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ যুগ্ম বিন্যাস $\frac{n!}{2}$ আৰু S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ অযুগ্ম বিন্যাস $\frac{n!}{2}$, য'ত S = {1, 2, 3, ..., n}, $r \ge 2$.

৫.৬ বিন্যাস সংঘ (PERMUTATION GROUP)

ধৰ হ'ল S = 1, 2, 3, 4, ... , n}, ধৰা হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংহতিটো S_n.

(i) ধৰা হ'ল $f, g \in S_n$.

আমি জানো যে fg পূৰণফলটো fog সংযুক্ত ফলনৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ।

আমি জানোযে দুটা একৈকী আৰু আচ্ছাদক ফলনৰ যংযুক্ত ফলনো একৈকী আৰু আচ্ছাদক। গতিকে দুটা বিন্যাসৰ পূৰণফলো এটা বিন্যাস।

$\therefore\ fg \in S_n$

(ii) আমি জানো যে ফলনৰ সংযোগে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে। গতিকে বিন্যাসৰ পূৰণে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) একক বিন্যাস

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ..... & n \\ 1 & 2 & 3 & ..... & n \end{pmatrix} \in S_n$$

আকৌ if = f = fi, $\forall f \in S_n$

S_n অৰ একক মৌল i.

(iv) ধৰা হ'ল $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & ..... & n \\ f(1) & f(2) & f(3) & ..... & f(n) \end{pmatrix} \in S_n$

এতিয়া $g = \begin{pmatrix} f(1) & f(2) & f(3) & ..... & f(n) \\ 1 & 2 & 3 & ..... & n \end{pmatrix} \in S_n$

আৰু fg = i = gf

$\therefore$ f অৰ বিপৰীত g.

g ক f^{-1} অৰ দ্বাৰা বুজোৱা হয়।

অর্থাৎ, $ff^{-1} = i = f^{-1} f$.

গতিকে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_n এটা সংঘ। ইয়াক n মাত্রাৰ (degree) বিন্যাস

সংঘ (বা সমমিত সংঘ) বুলি কোৱা হয়।

টোকা ঃ 1) S_n সংঘটো আবেলীয় নহয়, কিয়নো ফলনৰ সংযোগে সাধাৰণতে ক্রমবিনিময়ে বিধি মানি নচলে।

2) S_n অৰ মৌলৰ সংখ্যা n!, অর্থাৎ S_n অৰ ক্রম n!.

উদাহৰণ 10 ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}. ধৰা হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংহতিটো S_3. প্রমাণ কৰক যে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_3 এটা সংঘ। সংঘটো আবেলীয় হয়নে?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $S_n = \{i, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$, য'ত

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 2\ \ 3)$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ \ 3\ \ 2),\ f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2\ \ 3)$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ \ 3),\ f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\ \ 2)$$

তলত প্রক্রিয়া সাৰণীখন দিয়া হ'ল।

	i	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
i	i	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_2	i	f_5	f_3	f_4
f_2	f_2	i	f_1	f_4	f_5	f_3
f_3	f_3	f_4	f_5	i	f_1	f_2
f_4	f_4	f_5	f_3	f_2	i	f_1
f_5	f_5	f_3	f_4	f_1	f_2	i

(i) সাৰণীখনৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_3 আৱদ্ধ।

(ii) আমি জানো যে বিন্যাসৰ পূৰণে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) একক বিন্যাস $i \in S_3$, আৰু if = f = fi, $\forall f \in S_3$

(iv) S_3 ৰ প্রতিটো মৌলৰ বিপৰীত S_3 ত আছে।

i ৰ বিপৰীত i.

f_1 অৰ বিপৰীত f_2.

f_2 ৰ বিপৰীত f_1.

f_3 ৰ বিপৰীত f_3.

f_4 ৰ বিপৰীত f_4.

f_5 ৰ বিপৰীত f_5.

গতিকে, বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_3 এটা সংঘ।

দ্বিতীয় অংশ ঃ S_3 সংঘটো আবেলীয় নহয়।

$$f_2 f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = f_4$$

$$f_3 f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = f_5$$

$\therefore \ f_2 f_3 \neq f_3 f_2$

পৰিৱৰ্তী সংঘ

ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, ..., n}.

ধৰা হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো যুগ্ম বিন্যাসৰ সংহতিটো A_n. বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত A_n এটা সংঘ। ইয়াক n মাত্রাৰ পৰিৱৰ্তী সংঘ (alternating group) বুলি কোৱা হয়।

A_n অৰ মৌলৰ সংখ্যা $\frac{n!}{2}$, অৰ্থাৎ A_n ৰ ক্রম $\frac{n!}{2}$.

স্পষ্টতঃ S_n অৰ A_n এটা উপসংঘ।

উদাহৰণ 11 ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}. ধৰা হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো যুগ্ম বিন্যাসৰ সংহতিটো A_3. প্রমাণ কৰক যে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত A_3 এটা সংঘ। সংঘটো আবেলীয় হয়নে?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}.

ধৰা হ'ল সকলো যুগ্ম বিন্যাসৰ সংহতিটো A_3.

ধৰা হ'ল A_3 = {i, f_1, f_2}, য'ত

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 3 \quad 2) = (1 \quad 3)(1 \quad 2)$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \quad 3 \quad 2) = (1 \quad 2)(1 \quad 3)$$

i, f_1, f_2 যুগ্ম বিন্যাস।

তলত প্রক্রিয়া সাৰণীখন গঠন কৰা হ'ল।

(i) সাৰণীখনৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত A_3 আৱদ্ধ।

(ii) আমি জানো যে বিন্যাসৰ পূৰণে সাহচর্য বিধি মানি চলে।

(iii) একক বিন্যাস $i \in A_3$, আৰু if = f = fi, $\forall f \in A_3$

(iv) A_3 ৰ প্রতিটো মৌলৰ A_3 ত বিপৰীত আছে।

i ৰ বিপৰীত i.

f_1 অৰ বিপৰীত f_2.

f_2 ৰ বিপৰীত f_1.

গতিকে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত A_3 এটা সংঘ।

দ্বিতীয় অংশ ঃ সাৰণীখনৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে পূৰণে ক্ৰমবিনিময়ে বিধি মানি চলে।

$\therefore$ A_3 এটা আবেলীয় সংঘ।

টোকা ঃ দেখা গ'ল যে S_3 সংঘটো আবেলীয় নহয়, কিন্তু A_3 এটা আবেলীয় সংঘ।

তদুপৰি S_3 ৰ A_3 এটা উপসংঘ।

গতিকে, দেখা গ'ল যে এটা অনা-আবেলীয় সংঘৰ এটা আবেলীয় উপসংঘ থাকিব পাৰে।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ৭ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, ..., n}, S অত সংজ্ঞাৰদ্ধ সকলো অযুগ্ম ফলনৰ সংহতিটো সংঘ হয়নে? যুক্তি দিয়ক।

প্ৰশ্ন নং ৮ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4}

ধৰা হ'ল V = {1, f_1, f_2, f_3}, য'ত

$$i=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\quad f_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$$

$$f_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix},\quad f_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$$

প্ৰমাণ কৰক যে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত V এটা সংঘ। সংঘটো আবেলীয় হয়নে?

প্ৰশ্ন নং ৯ঃ এটা সসীম অনা-আবেলীয় সংঘৰ উদাহৰণ দিয়ক।



৫.৭ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- এটা অৰিক্ত সংহতিৰ পৰা নিজলৈকে এটা একৈকী আৰু আচ্ছাদক ফলনক সংহতিটোত এটা বিন্যাস বুলি কোৱা হয়।
- n টা মৌলবিশিষ্ট এটা সসীম সংহতি S অত বিন্যাসৰ সংখ্যা n!.
- ধৰা হ'ল S এটা সসীম সংহতি। ধৰা হ'ল S অত f এটা বিন্যাস। f অক n দৈর্ঘ্যৰ চক্ৰীয়

বিন্যাস বুলি কোৱা হয় যদি S অত $a_1, a_2, a_3, \ldots . a_{n-1}, a_n$ মৌল থাকে যাতে $f(a_1) = a_2, f(a_2) = a_3, \ldots ., f(a_{n-1}) = a_n, f(a_n) = a_1$, আৰু বাকী সকলোবোৰ মৌল, যদিহে থাকে, f অৰ অধীনত স্থিৰ হৈ থাকে, অর্থাৎ f(a) = s, সকলোবোৰ $a \in s$ অৰ বাবে। এই ক্ষেত্ৰত f অক $(a_1\ a_2\ a_3 \ldots . a_n)$ এৰে বুজোৱা হয়।

- 2 দৈর্ঘ্যৰ এটা চক্ৰীয় বিন্যাসক পৰিৱর্ত বুলি কোৱা হয়।
- যদি এটা বিন্যাসক যুগ্ম সংখ্যক পৰিৱর্তৰ পূৰণফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি, তেনে বিন্যাসক যুগ্ম বিন্যাস বুলি কোৱা হয়।
- যদি এটা বিন্যাসক অযুগ্ম সংখ্যক পৰিৱর্তৰ পূৰণফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি, তেনে বিন্যাসক অযুগ্ম বিন্যাস বুলি কোৱা হয়।
- ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, ..., n}. ধৰা হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংহতিটো S_n. বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_n এটা সংঘ। ইয়াক n মাত্ৰাৰ আৰু n! ক্ৰমৰ বিন্যাস সংঘ (বা সমমিত সংঘ) বুলি কোৱা হয়।

  যদি S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো যুগ্ম বিন্যাসৰ সংহতিটো A_n হয়, তেনেহ'লে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত A_n এটা সংঘ। ইয়াক n মাত্ৰাৰ আৰু $\frac{n!}{2}$ ক্ৰমৰ পৰিৱর্তী সংঘ বুলি কোৱা হয়।

৫.৮ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত $S = (a_1, a_2, a_3\}$, য'ত সকলোবোৰ a_i বিভিন্ন।

$\therefore$ S অত 3! অর্থাৎ $3 \times 2 \times 1$, অর্থাৎ 6 টা বিন্যাস আছে। এইবোৰ হ'ল

$$i = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{pmatrix}$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{pmatrix}, f_5 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ S = {1, 2, 3, 4}

S অত মুঠ বিন্যাসৰ সংখ্যা 4! অর্থাৎ $4 \times 3 \times 2 \times 1$, অর্থাৎ 24.

S অত যিকোনো 5 টা বিন্যাস হ'ল

$$i=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\ f_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\end{pmatrix},\ f_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}$$

$$f_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&2&4&1\end{pmatrix},\ f_4=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&3&1\end{pmatrix}$$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) $fg=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&1&5\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&5&4&2&1\end{pmatrix}$$

$$f\phi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&1&5&4\end{pmatrix}$$

$$f\psi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&3&4&5&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&4&2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&4&5&3&2\end{pmatrix}$$

$$g\psi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&4&2&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&1&4&2\end{pmatrix}$$

(ii) $g\phi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&1&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{pmatrix}$$

$$\phi g=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&3&1&5\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&4&5&1&3\end{pmatrix}$$

স্পষ্টত ঃ $g\phi=\phi g$

(iii) $\phi\psi=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&5&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&3&4&2&1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi\phi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

স্পষ্টত ঃ $\phi\psi \neq \psi\phi$

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

(ii) $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(iii) $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\therefore h^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত S = {1, 2, 3}

S অত সংজ্ঞাৰদ্ধ বিন্যাসবোৰ হ'ল

$$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 2 \quad 3) = (1 \quad 3)(1 \quad 2)$$

$$f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1 \quad 3 \quad 2) = (1 \quad 2)(1 \quad 3)$$

$$f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (2 \quad 3)$$

$$f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1 \quad 3)$$

$$f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} 3 = (1 \quad 2)$$

যুগ্ম বিন্যাস : i, f_1, f_2

অযুগ্ম বিন্যাস : f_3, f_4, f_5.

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(i) $f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

$= (1 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6) = (1 \quad 6)(1 \quad 5)(1 \quad 4)(1 \quad 3)$

$\therefore f_1$ এটা যুগ্ম বিন্যাস।

(ii) $f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

$= (1 \quad 2 \quad 3 \quad 5)(4 \quad 6)$

$= (1 \quad 5)(1 \quad 3)(1 \quad 2)(4 \quad 6)$

$\therefore f_2$ এটা যুগ্ম বিন্যাস।

(iii) $f_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

$= (1 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2)$

$= (1 \quad 2)(1 \quad 3)(1 \quad 4)(1 \quad 5)(1 \quad 6)$

$\therefore f_3$ এটা অযুগ্ম বিন্যাস।

(iv) $f_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$

$= (3 \quad 4 \quad 5 \quad 6) = (3 \quad 6)(3 \quad 5)(3 \quad 4)$

$\therefore f_4$ এটা অযুগ্ম বিন্যাস।

(v) $f_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

$= (2 \quad 5 \quad 3 \quad 4) = (2 \quad 4)(2 \quad 3)(2 \quad 5)$

$\therefore f_5$ এটা অযুগ্ম বিন্যাস।

৭ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত $S = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$

ধৰা হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো অযুগ্ম বিন্যাসৰ সংগতিটো O_n.

ধৰা হ'ল $f, g \in O_n$

আমি জানো যে দুটা অযুগ্ম বিন্যাসৰ পূ�ৰণফল এটা যুগ্ম বিন্যাস।

$\therefore fg \notin O_n$

$\therefore O_n$ সংঘ হ'ব নোৱাৰে।

৮ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত $S = \{1, 2, 3, 4\}$

$V = \{i, f_1, f_2, f_3\}$, য'ত

$$i=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix},\ f_1=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&3&4\end{pmatrix}$$

$$f_2=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&3\end{pmatrix},\ f_3=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$$

(i) সাৰণীৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত V আৱদ্ধ।

(ii) আমি জানো যে বিন্যাসৰ পূৰণে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) $i=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\in v$

আৰু if = f = f_1, $\forall f \in V$.

$\therefore$ i একক মৌল।

(iv) V ৰ প্রতিটো মৌলৰ বিপৰীত V ত আছে।

i ৰ বিপৰীত i.

f_1 অৰ বিপৰীত f_1.

f_2 ৰ বিপৰীত f_2.

f_3 ৰ বিপৰীত f_3.

[এই ক্ষেত্রত প্রত্যেক মৌলই নিজে নিজৰ বিপৰীত।]

$\therefore$ বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত V এটা সংঘ।

দ্বিতীয় অংশ ঃ সাৰণীৰ পৰা দেখা গ'ল যে পূৰণে ক্রমবিনিময়ে বিধি মানি চলে।

$\therefore$ V এটা আবেলীয় সংঘ।

৯ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}

ধৰা হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংহতিটো S_3 বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_3 এটা সংঘ।

স্পষ্টত ঃ S_3 এটা সসীম সংঘ আৰু ইয়াৰ ক্রম 3! অর্থাৎ 6.

S_3 আবেলীয় সংঘ নহয়।



৫.৯ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.

2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).

3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).

4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.

5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



৫.১০ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2}. S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংহতিটো S_2। প্ৰমাণ কৰক যে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_2 এটা আবেলীয় সংঘ।

প্ৰশ্ন ২ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}.

S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ তলৰ বিন্যাসবোৰক পৰিৱৰ্তৰ পূৰণফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰক।

(i) $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

(ii) $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

প্ৰশ্ন ৩ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4}

ধৰা হ'ল V = {1, f_1, f_2, f_3}, য'ত i, f_1, f_2, f_3 হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ বিন্যাস, আৰু

$i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $f_1 = (1 \quad 2)(3 \quad 4)$

$f_2 = (1 \quad 3)(2 \quad 4)$, $f_3 = (1 \quad 4)(2 \quad 3)$

বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত V আবেলীয় সংঘ হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3, 4, ..., n}. S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংহতিটো S_n। প্ৰমাণ কৰক যে বিন্যাসৰ পূৰণৰ অধীনত S_n এটা সংঘ।

*** ***** ***

অধ্যায় ৬ ঃ সহ সংহতি (COSETS)

অধ্যায় গাঁথনি

৬.১ উদ্দেশ্য
৬.২ পৰিচয়
৬.৩ সহ সংহতি
৬.৪ লাগ্ৰাঞ্জৰ উপসংঘৰ ক্ৰম সম্পৰ্কীয় উপপাদ্য
৬.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
৬.৬ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান
৬.৭ অধিক জানিবলৈ
৬.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

৬.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি অধোলিখিত বিষয়বোৰৰ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব—

- উপসংঘৰ সহ সংহতি
- লাগ্ৰাঞ্জৰ উপসংঘৰ ক্ৰম সম্পৰ্কীয় উপপাদ্য।

৬.২ পৰিচয়

সংঘ, উপসংঘ আৰু ইয়াৰ ধৰ্মসমূহৰ বিষয়ে আমি ইতিমধ্যে তৃতীয় আৰু চতুৰ্থ অধ্যায়ত আলোচনা কৰিলো। এই অধ্যায়টিত আমি উপসংঘৰ সহ সংহতি বিষয়ে আলোচনা কৰিম। লাগ্ৰাঞ্জৰ উপসংঘৰ ক্ৰম সম্পৰ্কীয় উপপাদ্যৰ বিষয়ে এই অধ্যায়টিত আলোচ্য বিষয়।

৬.৩ সহ সংহতি

ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু $H \leq G$

ধৰা হ'ল $a \in G$

$Ha = \{ha : h \in H\}$ সংহতিটোক G ত H অৰ সোঁ সহসংহতি (right coset) বুলি কোৱা হয়।

সেইদৰে, $aH = \{ah : h \in H\}$ H সংহতিটোক G ত H অৰ বাওঁ সহসংহতি (left coset) বুলি কোৱা হয়।

টোকা ঃ (1) সোঁ (বা বাওঁ) সহসংহতি ৰিক্ত হ'ব নোৱাৰে। আমি জানো $e \in H$

$\therefore ea = a \in Ha$ $\quad \therefore Ha \neq \phi$

সেইদৰে $ae = a \in aH$ $\quad \therefore aH \neq \phi$

(2) $H \leq G$, কিন্তু Ha বা aH, G ৰ উপসংঘ নহ'বও পাৰে।

(3) যদি G এটা যোগাধীনত সংঘ আৰু H, G ৰ উপসংঘ, G ত H ৰ সোঁ সহসংহতি হ'ব

এনেধৰণৰ $H+a = \{h+a : h \in H\}$

সেইদৰে G ত H ৰ বাওঁ সহসংহতি হ'ল এনেধৰণৰ $a+H=\{a+h : h \in H\}$

(4) যদি G আবেলীয় হয়, তেন্তে প্ৰত্যেকটো বাওঁ সহ সংহতিয়ে সোঁ সহ সংহতি হয়।

উদাহৰণ ঃ আমি জানো অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Z যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ।

আকৌ আমি জানো যে $2Z = \{0, \pm2, \pm4, \pm6,...\} \leq Z$

এতিয়া

$0+2Z = \{0, \pm2, \pm4, \pm6,...\} = 2Z$

$1+2Z = \{\pm1, \pm3, \pm5, \pm7, ...\}$

$2+2Z = \{0, \pm2, \pm4, \pm6, ...\}$

$3+2Z = \{\pm1, \pm3, \pm5, \pm7, ...\}$ এইদৰে উলিয়াই থাকিব পৰা যাব।

আমি দেখিলোঁ যে $2Z = 2+2Z = 4+2Z = ...$

$1+2Z = 3+2Z = 5+2Z = ...$

$\therefore$ 2Z অৰ দুটা পৃথক বাওঁ সহসংহতি আছে, যথা 2Z আৰু 1+2Z যাতে

$2Z \cup (1+2Z) = Z$

$2Z \cap (1+2Z) = \phi$

সেইদৰে 2Z অৰ দুটা পৃথক সোঁ সহসংহতি আছে, যথা 2Z আৰু 2Z + 1 যাতে

$2Z \cup (2Z+1) = Z$

$2Z \cap (2Z+1) = \phi$

উপপাদ্য ১ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু $H \leq G$.

(i) $aH = H \Leftrightarrow a \in H$; $Ha = H \Leftrightarrow a \in H$

(ii) $aH = bH \Leftrightarrow a^{-1}b \in H$; $Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$.

প্ৰমাণ ঃ (i) ধৰা হ'ল $aH = H$

আমি জানো $ae \in aH$, e হ'ল G ৰ একক মৌল

$\Rightarrow ae \in H$ [$\because aH = H$]

$\Rightarrow a \in H$

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল $a \in H$

ধৰা হ'ল $x \in aH$

$\Rightarrow x = ah$, কোনো $h \in H$ অৰ বাবে

এতিয়া $a \in H, h \in H$ $\therefore ah \in H \Rightarrow x \in H$

গতিকে, $x \in aH \Rightarrow x \in H$

$\therefore aH \subseteq H$ ... (1)

আকৌ, ধৰা হ'ল $y \in H$

$\therefore a \in H, \therefore a^{-1} \in H$

$\therefore a^{-1}y \in H$

$\Rightarrow a^{-1}y = h_1$, কোনো $h_1 \in H$ অৰ বাবে

$\Rightarrow a(a^{-1}y) = ah_1$

$\Rightarrow (aa^{-1})y = ah_1$

$\Rightarrow ey = ah_1$

$\Rightarrow y = ah_1 \in aH$

গতিকে $y \in H \Rightarrow y \in aH$

$\therefore H \subseteq aH$ ... (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা $aH = H$

সেইদৰে $Ha = H \Leftrightarrow a \in H$.

(ii) $aH = bH$

$\Leftrightarrow a^{-1}(aH) = a^{-1}(bH)$

$\Leftrightarrow (a^{-1}a)H = (a^{-1}b)H$

$\Leftrightarrow eH = (a^{-1}b)H$

$\Leftrightarrow H = (a^{-1}b)H$

$\Leftrightarrow a^{-1}b \in H$ ((1)ৰ পৰা)

সেইদৰে, $Ha = Hb \Leftrightarrow ab^{-1} \in H$.

উপপাদ্য ২ ঃ (i) এটা উপসংঘৰ যিকোনো দুটা বাওঁ (বা সোঁ) সহসংহতি অসংযুক্ত বা সমান।

(ii) এটা সংঘ G ইয়াৰ উপসংঘ H ৰ প্ৰত্যেকটো সোঁ (বাওঁ) সহসংহতিবোৰ মিলন হয়।

[দুটা সংহতি A, B অসংযুক্ত (disjoint) যদি $A \cap B = \phi$]

প্ৰমাণ ঃ (i) ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু $H \leq G$.

ধৰা হ'ল $a, b \in G$

গতিকে, aH আৰু bH^- হ'ল G ত H অৰ দুটা বাওঁ সহসংহতি।

স্পষ্টত ঃ aH, bH অসংযুক্ত বা অসংযুক্ত নহয়।

ধৰা হ'ল aH, bH অসংযুক্ত নহয়, অৰ্থাৎ $aH \cap bH \neq \phi$.

ধৰা হ'ল $x \in aH \cap bH$

$\Rightarrow x \in aH$ আৰু $x \in bH$

এতিয়া $x \in aH \Rightarrow x = ah_1$ কোনো $h_1 \in H$ অৰ বাবে

$x \in bH \Rightarrow x = bh_2$ কোনো $h_2 \in H$ অৰ বাবে

$\therefore ah_1 = bh_2$

$\Rightarrow (ah_1)h_1^{-1} = (bh_2)h_1^{-1}$

$\Rightarrow a\, h_1 h_1^{-1} = b\, h_2 h_1^{-1}$

$\Rightarrow ae = bh_2 h_1^{-1}$, e হ'ল G ৰ একক মৌল

$\Rightarrow a = bh_2 h_1^{-1}$

সেইদৰে $b = ah_1 h_2^{-1}$

ধৰা হ'ল $p \in aH$

$\therefore p = ah_3$ কোনো $h_3 \in H$ অৰ বাবে

$= bh_2 h_1^{-1} h_3$

$\in bH$, $\because h_2 h_1^{-1} h_3 \in H$

এইদৰে, $p \in aH \Rightarrow p \in bH$ $\therefore aH \subseteq bH$ (1)

আকৌ, ধৰা হ'ল $q \in bH$

$\Rightarrow q = bh_4$ কোনো $h_4 \in H$ অৰ বাবে

$\Rightarrow q = ah_1 h_2^{-1} h_4$

$\in aH$, $\because h_1 h_2^{-1} h_4 \in H$

গতিকে $q \in bH \Rightarrow q \in aH$ $\therefore bH \subseteq aH$ (2)

(1) আৰু (2), aH = bH

গতিকে aH, bH অসংযুক্ত বা সমান।

৬.৪ লাগ্ৰাঞ্জৰ উপ সংঘৰ ক্ৰম সম্পৰ্কীয় উপপাদ্য

উপপাদ্য ঃ (লাগ্ৰাঞ্জৰ উপসংঘৰ ক্ৰম সম্পৰ্কীয় উপপাদ্য) এটা সসীম সংঘৰ উপসংঘৰ ক্ৰমৰ দ্বাৰা সংঘটোৰ ক্ৰম বিভাজ্য।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সসীম সংঘ আৰু $0(G) = n$.

ধৰা হ'ল $H \leq G$

ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e.

প্ৰথম ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল $H = \{e\}$,

এই ক্ষেত্ৰত প্ৰমাণ কৰিবলৈকে একোৱেই নাই, কিয়নো $O(H)=1$ আৰু 1 অৰ দ্বাৰা n বিভাজ্য।

দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল $H = G$.

এই ক্ষেত্ৰতো প্ৰমাণ কৰিবলৈকে একোৱেই নাই, $O(H) = n = O(G)$

তৃতীয় ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল $H \neq \{e\}$, $H \neq G$.

ধৰা হ'ল $0(H) = m$, $m < n$.

ধৰা হ'ল $H = \{h_1, h_2, h_3, \ldots h_m\}$, য'ত h_i বোৰ পৃথক।

ধৰা হ'ল $a \in G$, $a \notin H$

তলৰ বাওঁ সহসংহতিটো লোৱা হ'ল

$aH = \{ah_1, ah_2, ah_3, ..., ah_m\}$

aH অৰ সকলোবোৰ মৌলই পৃথক, কিয়নো যদি $ah_i = ah_j$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq m$, $i \neq j$ তেনেহ'লে $h_i = h_j$, (বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা)। এইটো স্ববিৰোধী কথা, যিহেতু H অৰ আটাইবোৰ মৌলই পৃথক।

আকৌ H অৰ কোনো মৌল aH অৰ কোনো মৌলৰ সমান নহয়, কিয়নো যদি $h_i = ah_j$, তেনেহ'লে $h_i h_j^{-1} = ah_j h_j^{-1}$ অর্থাৎ $h_i h_j^{-1} = a$ অর্থাৎ $a = h_i h_j^{-1} \in H$
অর্থাৎ $a \in H$, এইটোৱো স্ববিৰোধী কথা, যিহেতু $a \notin H$

এইদৰে আমি G ৰ m+m = 2m টা মৌল তালিকাভুক্ত কৰিলোঁ। ইয়ে যদি G ৰ সকলোবোৰ মৌল সামৰি লয়, তেনেহ'লে 2m = n অর্থাৎ m অৰ দ্বাৰা n বিভাজ্য।
যদি নহয়, ধৰা হ'ল $b \in G$, $b \notin H$, $b \notin aH$
তলৰ বাওঁ সহসংহতিটো লোৱা হ'ল $bH = \{bh_1, bh_2, ..., bh_m\}$
স্পষ্টত ঃ bH অৰ সকলোবোৰ মৌল পৃথক। আকৌ H অৰ কোনো মৌল bH অৰ কোনো মৌলৰ সমান নহয়।

আকৌ aH অৰ কোনো মৌল bH অৰ কোনো মৌলৰ সমান নহয়, কিয়নো যদি $ah_i = bh_j$, তেনেহ'লে $ah_i h_j^{-1} = bh_j h_j^{-1}$ অর্থাৎ $ah_i h_j^{-1} = b$ অর্থাৎ $b = ah_i h_j^{-1} \notin aH$, ($\because h_i h_j^{-1} \in H$) অর্থাৎ $b \in aH$, এইটো স্ববিৰোধী কথা, যিহেতু $b \notin aH$.

এইদৰে আমি G ৰ m+m+m = 3m টা মৌল তালিকাভুক্ত কৰিলোঁ। ইয়ে যদি G ৰ সকলোবোৰ মৌল সামৰি লয়, তেনেহ'লে 3m = n অর্থাৎ m অৰ দ্বাৰা n বিভাজ্য।

যদি নহয়, আকৌ আমি একেদৰে আগবাঢ়িম। যিহেতু G সসীম, আমি এটা সময়ত ৰব লাগিব। ধৰা হ'ল k বাৰৰ পাছত আমি ৰবলগীয়া হ'ল।
$\therefore mk = n$ অর্থাৎ m অৰ দ্বাৰা n বিভাজ্য।

টোকা ঃ জোছেফ লুই লাগ্রাঞ্জ (Joseph Louis Lagrange, 1736 – 1813) আছিল এজন বিশিষ্ট গণিতজ্ঞ।

মন্তব্য ঃ লাগ্রাঞ্জৰ উপপাদ্যৰ বিপৰীতটো সত্য নহয়



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ 2Z ৰ উপসংঘ 4Z ৰ সহ সংহতিবোৰ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ঃ 2Z ৰ উপসংঘ 6Z ৰ সংসংহতিবোৰ নির্ণয় কৰক।



৬.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- যদি H, G ৰ এটা উপসংঘ হয়, Ha = {ha : h ∈ H}, a∈ G, সংহতিটোক G ত H অৰ সোঁ সহসংহতি বুলি কোৱা হয়। সেইদৰে বাওঁ সহসংহতিৰ সংজ্ঞা দিয়া হয়।
- এটা উপসংঘৰ যিকোনো দুটা বাওঁ (বা সোঁ) সহসংহতি অসংযুক্ত বা সমান।
- লাগ্ৰাজৰ উপসংঘৰ ক্ৰম সম্পৰ্কীয় উপপাদ্য মতে এটা সসীম সংঘৰৰুপসংঘৰ ক্ৰমৰ দ্বাৰা সংঘটোৰ ক্ৰম বিভাজ্য।



৬.৬ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ যিহেতু 2Z আবেলীয়। গতিকে ইয়াৰ সোঁ সহ সংহতি আৰু বাওঁ সহ সংহতিবোৰ সমান। অখণ্ড সংখ্যা 0 থকা বাওঁ সহসংহতি হ'ল 0+4z = { . . . -8, -4, 0, 4, 8 . . .} আৰু অখণ্ড সংখ্যা Z থকা বাওঁ সহ সংহতিবোৰ হ'ল 2+4z = { . . ., -2, 2, 6, 10, . . .}.

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে কৰিবলৈ চেষ্টা কৰক।



৬.৭ অধিক জানিবলৈ

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.
2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).
3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).
4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.

5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



৬.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ঃ G এটা সংঘ আৰু H, G ৰ এটা উপসংঘ। ধৰা হ'ল a, b $\in$ G. দেখুৱাওক যে Ha, Hb সোঁ সহসংহতি দুটা সমান যদি আৰু যদিহে $a^{-1}H$, $b^{-1}H$ বাওঁ সহসংহতি দুটা সমান।

প্ৰশ্ন ২ঃ Z ৰ উপসংঘ 4Z ৰ সহ সংহতিবোৰ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ঃ **উপসংঘৰ সূচক** (Index of a subgroup) ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু H, G ৰ এটা উপসংঘ। G ত H অৰ বাওঁ বা (সোঁ) পৃথক সহ সংহতিৰ সংখ্যাক G ত H অৰ সূচক বুলি কোৱা হয়। সাধাৰণতে ইয়াক [G : H] প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হয়।

G এটা সসীম সংহতি হ'লে প্ৰমাণ কৰক যে $[G : H] = \frac{o(G)}{o(H)}$

*** ***** ***

অধ্যায় ৭ ঃ নিশ্চৰ উপসংঘ আৰু ভাগফল সংঘ (NORMAL SUBGROUP & QUOTIENT GROUP)

অধ্যায় গাঁথনি

৭.১ উদ্দেশ্য

৬.২ পৰিচয়

৭.৩ নিশ্চৰ উপসংঘ

৭.৪ ভাগফল সংঘ

৭.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৭.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৭.৭ অধিক জানিবলৈ

৭.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

৭.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি অধোলিখিত বিষয়বোৰৰ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব—

- নিশ্চৰ উপসংঘ
- ভাগফল সংঘ

৭.২ পৰিচয়

এই অধ্যায়টিত আমি সংঘৰ নিশ্চৰ উপসংঘৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। আকৌ এই অধ্যায়টিত ভাগফল সংঘৰ বিষয়েও আলোচনা কৰা হ'ব।

৭.৩ নিশ্চৰ উপসংঘ

সংজ্ঞা ঃ সংঘ G ৰ কোনো উপসংঘ H অক নিশ্চৰ উপসংঘ (normal subgroup) বুলি কোৱা হয় যদি $aH = Ha$, $\forall a \in G$, অর্থাৎ যদি H অৰ বাওঁ আৰু সোঁ সহসংহতি একে হয়।

প্রতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে প্রকাশ কৰা হয় $H \Delta G$.

টোকা ঃ এটা সংঘ G ৰ অন্ততঃ দুটা নিশ্চৰ উপসংঘ আছে, যথা, G আৰু {e}. G আৰু {e} ৰ বাহিৰে অন্য নিশ্চৰ উপসংঘ নথকা সংঘক **সৰল সংঘ** (simple group) বোলে।

উদাহৰণ ঃ ধৰা হ'ল $G = \{-1, 1, -i, i\}$

আমি জানো যে পূৰণ প্রক্রিয়ৰ অধীনত G এটা সংঘ।

ধৰা হ'ল $H = \{-1, 1\}$, আৰু $H \leq G$

এতিয়া $1H = \{-1, 1\} = H1 = H$

$(-1)H = \{1, -1\} = H(-1)$

$iH = \{-i, i\} = Hi$

$(-i)H = \{i, -i\} = H(-i)$

এইদৰে $aH = Ha, \ \forall \ a \in G$

$\therefore H \ \Delta \ G.$

টোকা ঃ ওপৰৰ উদাহৰণটোত H অৰ দুটা পৃথক বাওঁ (বা সোঁ) সহসংহতি আছে, যথা H, iH.[H = (–1)H, iH = (–i)H] মন কৰিব লগীয়া যে iH, H অৰ উপসংঘ নহয়।

উপপাদ্য ১ ঃ প্ৰত্যেক আবেলীয় সংঘৰ উপসংঘ নিশ্চৰ।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা আবেলীয় সংঘ।

ধৰা হ'ল $H \leq G.$

ধৰা হ'ল $a \in G$

এতিয়া $aH = \{ah : h \in H\}$

$= \{ha : h \in H\}$ [$\because$ G আবেলীয়]

$= Ha$

$\therefore H \Delta G.$

উপপাদ্য ২ ঃ সংঘ G ৰ এটা উপসংঘ H নিশ্চৰ হ'ব যদি আৰু যদিহে $ghg^{-1} \in H, \ \forall \ g \in G, h \in H$

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল $H \ \Delta \ G$

$\therefore aH = Ha, \ \forall a \in G$

ধৰা হ'ল $g \in G, h \in H$

$\therefore gh \in gH$

$\Rightarrow gh \in Hg$ [$\because H \ \Delta \ G, gH = Hg$]

$\Rightarrow gh = hg,$ কোনো $h_1 \in H$ অৰ বাবে

$\Rightarrow ghg^{-1} = h_1 gg^{-1},$ e হ'ল Gৰ একক মৌল

$\Rightarrow ghg^{-1} = h_1 \in H$

অৰ্থাৎ $ghg^{-1} \in H$

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল $H \leq G$ যাতে $ghg^{-1} \in H, \ \forall g \in G, h \in H.$

ধৰা হ'ল $a \in G \ \ \therefore ah \in aH$

প্ৰদত্ত চৰ্তমতে $aha^{-1} \in H$

$\Rightarrow (aha^{-1})a \in Ha$

$\Rightarrow ah(a^{-1}a) \in Ha$

$\Rightarrow ah \in Ha$

অর্থাৎ $ah \in aH \Rightarrow ah \in Ha$

$\therefore aH \subseteq Ha$ (1)

এতিয়া $ha \in Ha$

ধৰা হ'ল $a^{-1} = b \in G$

$\therefore bhb^{-1} \in H$

$\Rightarrow a^{-1}h(a^{-1})^{-1} \in H$

$\Rightarrow a^{-1}ha \in H$

$\Rightarrow a(a^{-1}ha) \in aH$

$\Rightarrow (aa^{-1})ha \in aH$

$\Rightarrow ha \in aH$

অর্থাৎ $ha \in Ha \Rightarrow ha \in aH$

$\therefore Ha \subseteq aH$ (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা $aH = Ha$

$\therefore H \Delta G$.

উপপাদ্য ৩ ঃ এটা সংঘৰ দুটা নিশ্চৰ উপসংঘৰ ছেদনো এটা নিশ্চৰ উপসংঘ।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু $H \Delta G$, $K \Delta G$.

$\therefore H \leq G, K \leq G$ আৰু $H \cap K \leq G$.

ধৰা হ'ল $g \in G, h \in H \cap K$

এতিয়া $h \in H \cap K \Rightarrow h \in H$ আৰু $h \in K$

এতিয়া $g \in G, h \in H$ আৰু $H \Delta G$

$\therefore ghg^{-1} \in H$

আকৌ $g \in G, h \in K$ আৰু $K \Delta G$

$\therefore ghg^{-1} \in K$

অর্থাৎ $ghg^{-1} \in H$ আৰু $ghg^{-1} \in K$

$\therefore ghg^{-1} \in H \cap K$

$\therefore H \cap K \Delta G$.

টোকা ঃ দুটা নিশ্চৰ উপসংঘৰ মিলন এটা নিশ্চৰ উপসংঘ নহ'বও পাৰে। উদাহৰণস্বৰূপে, $2z \Delta z, 3z \Delta z$ কিন্তু $2z \Delta z, 3z \Delta z$ আৰু সেই কাৰণে ই $2z \cup 3z \not< z$ ৰ নিশ্চৰ উপসংঘ নহয়।

৭.৪ ভাগফল সংঘ

ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু H, G ৰ এটা নিশ্চৰ উপসংঘ।

যিহেতু H এটা নিশ্চৰ উপসংঘ, এটা বাওঁ সহসংহতি আৰু অনুৰূপ সোঁ সহসংহতিৰ মাজত

পার্থক্য নাই। গতিকে সহসংহতি বুলি ক'লে আমি বাওঁ সহসংহতি (বা সোঁ সহসংহতিক) বুজিম।

ধৰা হ'ল G ত H অৰ সকলো সহসংহতিৰ সংহতিটো G/H .

ধৰা হ'ল $a, b \in G$ $\therefore aH, bH \in G/H$

G/H অত এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল

$(aH)(bH) = abH, ab \in G$

আমি দেখুৱাম যে দ্বৈত প্রক্রিয়াটো সুসংজ্ঞাৱদ্ধ।

ধৰা হ'ল $aH = cH, bH = dH; a, b, c, d \in H$

এতিয়া $aH = cH \Rightarrow a^{-1}(aH) = a^{-1}(cH)$

$\Rightarrow (a^{-1}a)H = a^{-1}cH$

$\Rightarrow H = a^{-1}cH$

$\Rightarrow a^{-1}c \in H$ [উপপাদ্য ৬ (i)]

$\Rightarrow a^{-1}c = h_1$, কোনো $h_1 \in H$ অৰ বাবে

সেইদৰে $bH = dH \Rightarrow b^{-1}d \in H \Rightarrow b^{-1}d = h_2$, কোনো $h_2 \in H$ অৰ বাবে

এতিয়া $(ab)^{-1}(cb) = (b^{-1}a^{-1})(cd)$

$= b^{-1}(a^{-1}c)d$

$= b^{-1}h_1d$

$= b^{-1}dh_1$ [$\because dH = Hd$]

$= h_2h_1 \in H$

অর্থাৎ $(ab)^{-1}(cd) \in H$

$\therefore (ab)^{-1}(cd)H = H$

$\Rightarrow abH = cdH$

অর্থাৎ $\left.\begin{matrix} aH = cH \\ bH = dH \end{matrix}\right\} \Rightarrow abH = cdH$

$\therefore$ উপৰিউক্ত দ্বৈত প্রক্রিয়াটো সুসংজ্ঞাৱদ্ধ।

উপপাদ্য ৪ ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু H, G ৰ এটা নিশ্চৰ উপসংঘ। G ত H অৰ সকলো সহসংহতিৰ সংহতিটোক G/H এৰে বুজোৱা হ'ল। তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞাৱদ্ধ দ্বৈত প্রক্রিয়াৰ অধীনত G/H এটা সংঘ।

$(aH)(bH) = abH ; a, b \in G$

প্রমাণ ঃ (i) $(aH)(bH) = abH \in G/H; a, b \in G$

আকৌ আমি জানো যে দ্বৈত প্রক্রিয়াটো সুসংজ্ঞাৱদ্ধ।

(ii) ধৰা হ'ল $a, b, c \in G$

$\therefore aH, bH, cH \in G/H$

এতিয়া $\{(aH)(bH)\}(cH) = (abH)(cH)$

$= (ab)c\ H$

$= a(bc)H$ [$\because$G এটা সংঘ, $(ab)c = a(bc)$]

$= (aH)\{(bc)H\}$

$= (aH)\{(bH)(cH)\}$

$\therefore$ দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াটোৰে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e.

$\therefore eH = H \in G/H$

এতিয়া $(aH)H = (aH)(eH) = aeH = aH$

$H(aH) = (eH)(aH) = eaH = aH.$

$\therefore$ H একক মৌল।

(iv) $a \in G \Rightarrow a^{-1} \in G$

$(aH)(a^{-1}H) = (aa^{-1})H = eH = H$

$(a^{-1}H)(aH) = (a^{-1}a)H = eH = H$

$\therefore$ aH অৰ বিপৰীত মৌল $a^{-1}H$.

$\therefore$ উপৰিউক্ত দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G/H এটা সংঘ।

টোকা ঃ এই সংঘটোক H অৰ দ্বাৰা G ৰ ভাগফল সংঘ বা উৎপাদক সংঘ (quotient group or factor group) বোলা হয়।

উপপাদ্য ৫ ঃ আবেলীয় সংঘৰ প্ৰতিটো ভাগফল সংঘই আবেলীয়।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল G এটা আবেলীয় সংঘ আৰু $H \leq G$

$\therefore$ G আবেলীয়, $\therefore$ H এটা নিশ্চৰ উপসংঘ।

গতিকে আমি G/H ভাগফল সংঘটো গঠন কৰিব পাৰোঁ।

ধৰা হ'ল $a, b \in G$. $\therefore aH, bH \in G/H$.

এতিয়া $(aH)(bH) = abH$

$= baH$ [$\because$ G আবেলীয়, $ab = ba$]

$= (bH)(aH)$

$\therefore G/H$ আবেলীয়।

উপপাদ্য ৬ ঃ চক্ৰীয় সংঘৰ প্ৰতিটো ভাগফল সংঘই চক্ৰীয়।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল $G = \langle a \rangle$ এটা চক্ৰীয় সংঘ।

ধৰা হ'ল $H \leq G$

$\because$ G চক্ৰীয়, $\therefore$G আবেলীয় আৰু সেয়ে H, G ৰ নিশ্চৰ উপসংঘ।

গতিকে আমি G/H ভাগফল সংঘটো গঠন কৰিব পাৰোঁ।

ধৰা হ'ল $x \in G$, $\therefore xH \in G/H$.

এতিয়া $x = a^m$, m এটা অখণ্ড সংখ্যা

ধৰা হ'ল $m > 0$

এতিয়া $xH = a^mH$

$= (a\ a\ a \ldots\ a)H$

m বাৰ

$= (aH)(aH)(aH) \ldots (aH)$

$= (aH)^m$

$\therefore$ aH অৰ দ্বাৰা জনিত G/H এটা চক্রীয় সংঘ।

$m = 0$ বা $m < 0$ ৰ বাবেও আমি ফলটো অনায়াসে প্রমাণ কৰিব পাৰোঁ।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ এটা অনা-আবেলীয় সংঘ চক্রীয় হ'ব পাৰে নে? যুক্তি দিয়ক।

প্রশ্ন নং ২ঃ দেখুৱাওক যে এটা অনা-আবেলীয় সংঘত অন্ততঃ 6 টা মৌল থাকিবই লাগিব।

প্রশ্ন নং ৩ঃ ধৰা হ'ল $G = \{1, \omega, \omega^2\}$, ω একৰ জটিল ঘনমূল। G সংহতিটো পূৰণ প্রক্রিয়াৰ অধীনত সংঘ। এই সংঘটো সৰল হয়নে?

প্রশ্ন নং ৪ঃ এটা সংঘৰ ক্রম 7 হ'লে সংঘটো অনা-আবেলীয় হ'ব পাৰেনে?

প্রশ্ন নং ৫ঃ অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Z যোগ প্রক্রিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ।

$3Z = \{0, \pm 3, \pm 6, \ldots.\}$ Z অৰ এটা উপসংঘ। ভাগফল উপসংঘ $Z/3Z$ অৰ মৌলৰ সংখ্যা কিমান?



৭.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- সংঘ G ৰ কোনো উপসংঘ H অক নিশ্চৰ উপসংঘ বুলি কোৱা হয় যদি $aH = Ha$, $\forall$ $a \in G$.
- সংঘ G ৰ H এটা নিশ্চৰ উপসংঘ হ'লে G ত H অৰ সকলো সহসংহতিৰ সংহতি G/H ও এটা সংঘ। ইয়াক ভাগফল সংঘ (বা উৎপাদক সংঘ) বুলি কোৱা হয়।



৭.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ প্রত্যেক চক্রীয় সংঘ আবেলীয়। গতিকে অনা-আবেলীয় সংঘ অনা-চক্রীয়।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ হয়। G, {1} ত বাহিৰে ইয়াৰ আন কোনো নিশ্চৰ উপসংঘ নাই।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নহয়। মৌলিক ক্রমৰ প্রত্যেক সংঘই চক্রীয় আৰু প্রত্যেক চক্রীয় সংঘ আবেলীয়।

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ তিনিটা।



৭.৭ অধিক জানিবলৈ

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.
2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).
3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).
4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.
5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



৭.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

প্রশ্ন ১ঃ যদি $N_1, N_2, \ldots N_r$ এটা সংঘ G ৰ নিশ্চৰ উপসংঘ হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰক যে $(N_1 \cap N_2 \cap \ldots N_n)$ এটা G ৰ নিশ্চৰ উপসংঘ।

প্ৰশ্ন ২ঃ ধৰা হ'ল G = $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ o & d \end{pmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \text{ আৰু } ad \neq 0 \right\}$

দেখুৱাওক যে মৌলকক্ষৰ পূৰণৰ অধীনত G এটা অনা-আবেলীয় সংঘ।

ধৰা হ'ল H = $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ o & 1 \end{pmatrix} : b \in IR \right\}$

দেখুৱাওক যে G ৰ H এটা নিশ্চৰ উপসংঘ।

প্ৰশ্ন ৩ঃ দেখুৱাওক যে এটা সংঘৰ মৌলৰ সংখ্যা মৌলিক সংখ্যা হ'লে সংঘটো সৰল।

*** ***** ***

অধ্যায় ৮ ঃ সংঘৰ অনুৰূপতা (HOMOMORPHISM OF GROUPS)

অধ্যায় গাঁথনি

৮.১ উদ্দেশ্য
৮.২ পৰিচয়
৮.৩ সংঘৰ অনুৰূপতা ঃ সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ
৮.৪ অনুৰূপতাৰ বিভিন্ন প্ৰকাৰ
৮.৫ অনুৰূপতাৰ ধৰ্ম
৮.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
৮.৭ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান
৮.৮ অধিক জানিবলৈ
৮.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন

৮.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- সংঘৰ অনুৰূপতাৰ ধাৰণা সম্পৰ্কে অৱগত হ'ব
- বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ অনুৰূপতা সম্পৰ্কে জানিব পাৰিব
- অনুৰূপতাৰ ধৰ্ম আৰু আনুষংগিক উপপাদ্য সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

৮.২ পৰিচয়

অনুৰূপতাক ইংৰাজীত homomorphism বুলি কোৱা হয়। homomorphism শব্দটো গ্ৰীক ভাষাৰ homos (অৰ্থ একে) আৰু morphe (অৰ্থ ৰূপ বা আকৃতি) শব্দযুগলৰ পৰা আহিছে। গতিকে homomorphism শব্দটোৰ অৰ্থ 'একে ৰূপৰ বা অনুৰূপৰ'।

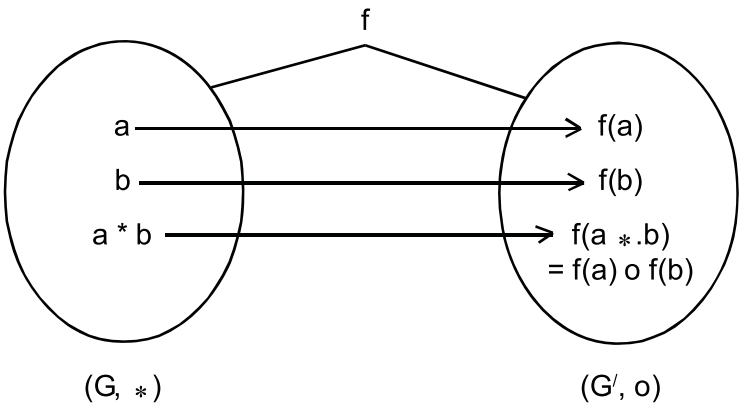
অনুৰূপতা হ'ল দুটা বীজগণিতীয় গাঁথনিৰ মাজৰ গাঁথনি-সংৰক্ষিত মানচিত্ৰণ। গতিকে, সংঘৰ অনুৰূপতা হ'ল এনে অনুৰূপতা যিয়ে সংঘৰ গাঁথনি সংৰক্ষণ কৰে।

৮.৩ সংঘৰ অনুৰূপতা (HOMOMORPHISM OF GROUPS)

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল ' * ' দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G এটা সংঘ আৰু ' o ' দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G' এটা সংঘ।

ধৰা হ'ল $f : G \to G'$ এটা মানচিত্ৰণ। f অক এটা অনুৰূপতা (homomorphism) বুলি কোৱা হয় যদি

$f(a * b) = f(a) \text{ of } (b),\ \forall\ a, b \in G$



টোকা ঃ 1. এই ক্ষেত্ৰত a ৰ লগত f(a) যুক্ত, b ৰ লগত f(b) যুক্ত। আকৌ $a * b$ ৰ লগত f(a) o f(b) যুক্ত। গতিকে f মানচিত্ৰণে অকল G ৰ দুটা মৌলক G/ অৰ দুটা অদ্বিতীয় মৌলৰ লগত সংযুক্ত নকৰে, ই $a * b$ ক G/ অৰ f(a) o f(b)ৰ লগতো সংযুক্ত কৰে। গতিকে দেখা গ'ল যে f মানচিত্ৰণে প্ৰণালীটোৰ বীজগণিতীয় গাঁথনি সংৰক্ষণ কৰে।

2. ইয়াৰ পিছৰ আলোচনাবোৰত আমি দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ বাবে প্ৰতীক ব্যৱহাৰ নকৰোঁ। আমি এনেদৰে লিখিম f(ab) = f(a) f(b).

কিন্তু এইটো কথা মনত ৰাখিব লাগিব যে দুয়োটা সংঘৰ দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া একে নহ'ব পাৰে।

উদাহৰণ ১ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণ এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল

$$f : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{Z}},\ \ f(x) = -x, \forall x \in \underline{\underline{Z}}$$

ধৰা হ'ল $a,\ b \in \underline{\underline{Z}}$

এতিয়া f(a+b) = –(a+b), f অৰ সংজ্ঞামতে

= – a – b

= (–a) + (–b)

= f(a) + f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

টোকা ঃ ওপৰৰ উদাহৰণটোত দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া হ'ল "+" । তদুপৰি, একে দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত দুয়োটা সংঘই একে।

উদাহৰণ ২ঃ ধৰা হ'ল R বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ আৰু R_+ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ গুণাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণ এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল

$f : R \to R_+,\ f(x) = e^x$

f অনুৰূপতা হয়নে নহয়, সেয়া পৰীক্ষা কৰিব লাগে। R অত দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া হ'ল " + ", আৰু R_+ অত দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া হ'ল " . ". গতিকে f(a+b) = f(a) f(b), $\forall\ a, b \in R$ হয়নে নহয়, সেয়া পৰীক্ষা কৰিব লাগে।

এতিয়া $f(a+b) = e^{a+b}$, f অৰ সংজ্ঞামতে

$= e^a e^b$

$= f(a)\ f(b)$

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

উদাহৰণ ৩ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণ এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল

$f : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{Z}},\ \ f(x) = x + 5$

ধৰা হ'ল $a,\ b \in \underline{\underline{Z}}$

এতিয়া f(a+b) = (a+b) + 5

f(a) + f(b) = (a+5) + (b+5)

= (a+b) +10

$\therefore$ f(a+b) $\neq$ f(a) + f(b)

$\therefore$ f অনুৰূপতা নহয়।

উদাহৰণ ৪ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। ধৰা হ'ল G = {–1, 1} গুণাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হ'ল

$$f(x)\begin{cases} = 1, & \text{যদি } x \text{ যুগ্ম} \\ = -1, & \text{যদি } x \text{ অযুগ্ম} \end{cases}$$

ধৰা হ'ল $a,\ b \in \underline{\underline{Z}}$

প্ৰথম ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল a যুগ্ম, b যুগ্ম।

$\therefore$ f(a) = 1, f(b) = 1

আকৌ, a + b যুগ্ম

$\therefore$ f (a + b) = 1

= 1 x 1

= f(a) f(b)

দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল a অযুগ্ম, b অযুগ্ম

$\therefore$ f(a) = –1, f(b) = –1

$\therefore$ a, b অযুগ্ম, $\therefore$ a + b যুগ্ম

$\therefore$ f (a + b) = 1

= (–1) x (–1)

= f(a) f(b)

তৃতীয় ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল a যুগ্ম, b অযুগ্ম

$\therefore$ f(a) = 1, f(b) = –1

$\because$ a যুগ্ম আৰু b অযুগ্ম, $\therefore$ a + b অযুগ্ম

$\therefore$ f(a + b) = –1

= 1 x (–1)

= f(a) f(b)

সেইদৰে, যদি a অযুগ্ম আৰু b যুগ্ম, তেনেহ'লে f(a + b) = f(a) f(b)

দেখা গ'ল যে তিনিওটা ক্ষেত্ৰতে f(a + b) = f(a) f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

উদাহৰণ ৫ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু G ৰ একক মৌল e. এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে।

f(x) = e, $\forall\ x \in G$

ধৰা হ'ল $a, b \in G$

$\therefore\ ab \in G$

এতিয়া f(a) = e, f(b) = e

আকৌ f(ab) = e

= e e ($\because$ e একক মৌল)

= f(a) f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ১

প্ৰশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$f : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{Z}},\ f(x) = 5x$

f অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে।

$f : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{Z}},\ f(x) = x + 3$

f অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{R}}_+$ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ গুণাধীনত সংঘ আৰু $\underline{\underline{R}}$ হ'ল বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$f : \underline{\underline{R}}_+ \to \underline{\underline{R}}_+,\ f(x) = \frac{1}{x}$

f অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{R}}_+$ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ গুণাধীনত সংঘ আৰু $\underline{\underline{R}}$ হ'ল বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্রণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে।

$$f : \underline{\underline{R}}_+ \to \underline{\underline{R}}, \quad f(x) = \log_e x$$

f অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ ধৰা হ'ল S = {1, 2, 3}, S_3 হ'ল S অত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ দ্বাৰা গঠিত সংঘ। ধৰা হ'ল G = {–1, 1} গুণাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্রণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$$f(\alpha)\begin{cases} = 1, & \text{যদি } \alpha \text{ এটা যুগ্ম বিন্যাস} \\ = -1, & \text{যদি } \alpha \text{ এটা অযুগ্ম বিন্যাস} \end{cases}$$

f অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

৮.৪ অনুৰূপতাৰ বিভিন্ন প্রকাৰ (TYPES OF HOMOMORPHISM)

ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G′ সংঘলৈ $f : G \to G'$ এটা অনুৰূপতা।

1. অনুৰূপতা f অক এটা একৈকী অনুৰূপতা (monomorphism) বুলি কোৱা হয় যদি f একৈকী হয়।
2. অনুৰূপতা f অৰ এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা (epimorphism) বুলি কোৱা হয় যদি f আচ্ছাদক হয়।
3. এটা সংঘৰ পৰা নিজলৈকে অনুৰূপতাক স্বানুৰূপতা (endomorphism) বুলি কোৱা হয়।
4. অনুৰূপতা f অক সম অনুৰূপতা (isomorphism) বুলি কোৱা হয় যদি f একৈকী আৰু আচ্ছাদক অর্থাৎ দ্বিমুখী।

   ইংৰাজী 'isomorphism' শব্দটোৱো গ্রীক ভাষাৰ "isos" অর্থ সমান আৰু "morphe" (অর্থ ৰূপ বা আকৃতি) শব্দদ্বয়ৰ পৰা আহিছে। দুটা সংঘৰ মাজত এটা সম অনুৰূপতা থাকিলে, সিহঁতক 'বিমূর্তভাৱে সর্বাংগসম' বুলি ক'ব পাৰি। সিহঁতক দুটা পৃথক সংঘ হিচাপে বিবেচনা নকৰি এটা সংঘ হিচাপে ল'ব পাৰি।
5. এটা সংঘৰ পৰা নিজলৈকে এটা সম অনুৰূপতাক সম স্বানুৰূপতা (automorphism) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ ৬ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্রণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$$f : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{Z}}, \; f(x) = -x, \; \forall \; x \in \underline{\underline{Z}}$$

(i) ইতিমধ্যে আমি দেখুৱাইছোঁ যে f এটা অনুৰূপতা (উদাহৰণ ১)।

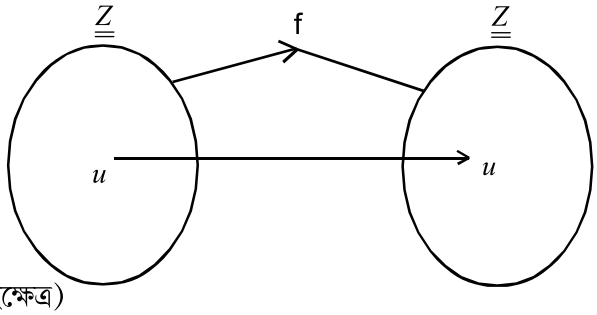
(ii) ধৰা হ'ল $a,b\in \underline{\underline{Z}}$

f(a) = f(b)

$\Rightarrow$ –a = – b

$\Rightarrow$ a = b

$\therefore$ f একৈকী।



(iii) ধৰা হ'ল $u\in \underline{\underline{Z}}$ (সহক্ষেত্ৰ)

গতিকে $\underline{\underline{Z}}$ অত (আদিক্ষেত্ৰ) এটা মৌল $-u$ আছে যাতে

$f(-u)=-(-u)=u$

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

গতিকে দেখা গ'ল যে f আচ্ছাদক, f একৈকী আৰু f আচ্ছাদক।

$\therefore$ f এটা সম অনুৰূপতা।

যিহেতু $\underline{\underline{Z}}$ অৰ পৰা $\underline{\underline{Z}}$ অলৈ f এটা সম অনুৰূপতা,

$\therefore$ f এটা সম স্বানুৰূপতা।

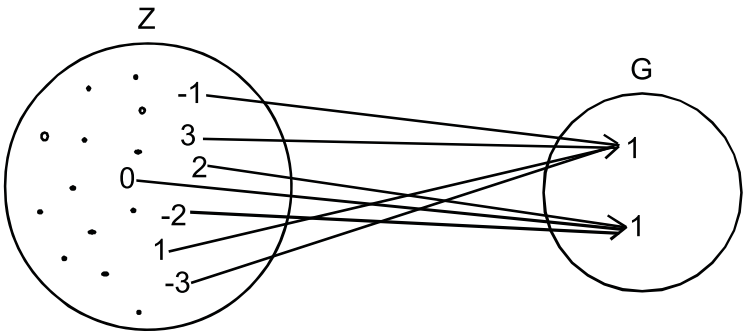
উদাহৰণ ৭ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। ধৰা হ'ল G = {–1, 1} গুণাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$$f(x)\begin{cases}=1, & \text{যদি } x \text{ যুগ্ম}\\ =-1, & \text{যদি } x \text{ অযুগ্ম}\end{cases}$$

(i) ইতিমধ্যে আমি দেখুৱাইছোঁ যে f এটা অনুৰূপতা (উদাহৰণ ৪)।

(ii) স্পষ্টতঃ f একৈকী নহয়।

(iii) স্পষ্টতঃ f আচ্ছাদক।



সকলো যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ প্ৰতিচ্ছায়া 1, আৰু সকলো অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ প্ৰতিচ্ছায়া –1।

গতিকে, f এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা, কিন্তু সম অনুৰূপতা নহয়।

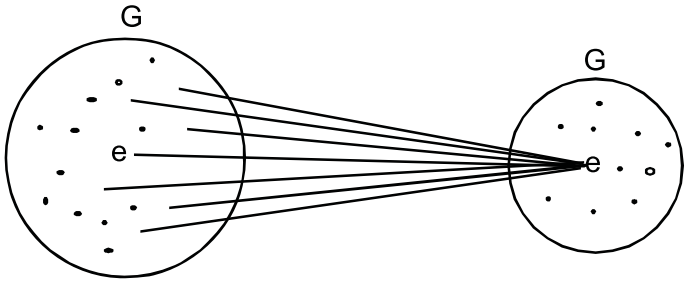
উদাহৰণ ৮ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ আৰু ধৰা হ'ল e ৰ G একক মৌল। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা

এনেদৰে দিয়া আছে।

$$f(x) = e,\ \forall x \in G$$

(i) ইতিমধ্যে আমি দেখুৱাইছোঁ যে f এটা অনুৰূপতা (উদাহৰণ ৫)।

(ii) স্পষ্টতঃ f একৈকী নহয়। সকলোবোৰ মৌল e ৰ লগত যুক্ত।



(iii) f আচ্ছাদক নহয়। e য়েই একমাত্ৰ প্ৰতিচ্ছায়া।

∴ f সম অনুৰূপতা নহয়। f একৈকী অনুৰূপতা নহয়, f আচ্ছাদক অনুৰূপতাও নহয়।

যিহেতু f, G অৰ পৰা G লৈ এটা অনুৰূপতা, গতিকে ই স্বানুৰূপতা।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ ধৰা হ'ল C জটিল সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণ f অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে।

$$f : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{C}},\ f(z) = \bar{z},\ \forall z \in \underline{\underline{C}}$$

f সম স্বানুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৭ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{R}}$ বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ আৰু $\underline{\underline{R}}_+$ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ গুণাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণ f অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে,

$$f : \underline{\underline{R}} \to \underline{\underline{R}}_+,\ f(x) = e^x$$

f সম অনুৰূপণতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৮ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{Z}}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ আৰু $\underline{\underline{2Z}}$ যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ গুণাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$$f : \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{2Z}},\ f(x) = 2x,\ \forall x \in \underline{\underline{Z}}$$

f সম অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৯ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{2Z}} = \{\ldots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 9, \ldots\}$

$\underline{\underline{3Z}} = \{\ldots, -9, -6, -3, 0, 3, 6, 9, \ldots\}$

$\underline{\underline{2Z}}$ আৰু $\underline{\underline{3Z}}$ যোগাধীনত সংঘ।

এটা মানচিত্ৰণ f অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে f : $\underline{\underline{2Z}} \to \underline{\underline{3Z}}$, f(2x)=3x য'ত x এটা অখণ্ড সংখ্যা।

f সম অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন নং ১০ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{R}}_+$ ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যাৰ গুণাধীনত সংঘ, আৰু $\underline{\underline{R}}$ বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্রণ f অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$f : \underline{\underline{R}}_+ \to \underline{\underline{R}},\ f(x) = \log_{10} x$

f সম অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

৮.৫ অনুৰূপতাৰ ধর্ম (PROPERTIES OF HOMOMORPHISM)

উপপাদ্য ঃ ধৰা হ'ল G, G′ দুটা সংঘ। ধৰা হ'ল e, e′ ক্রমে G, G′ অৰ একক মৌল। ধৰা হ'ল f : G $\to$ G′ এটা অনুৰূপতা, তেনেহ'লে

(i) f(e) = e′

(ii) f(x^{-1}) = (f(x))$^{-1}$, $x \in G$

(iii) f(x^n) = (f(x))^n, $x \in G$, n এটা অখণ্ড সংখ্যা।

প্রমাণ ঃ (i) আমি জানো

e e = e

$\Rightarrow$ f(e e) = f(e)

$\Rightarrow$ f(e) f(e) = f(e), $\because$ f এটা অনুৰূপতা

$\Rightarrow$ f(e) f(e) = f(e)e′, f(e) $\in$ G′ আৰু e′ হ'ল G′ অৰ একক মৌল।

$\Rightarrow$ f(e) = e′, বাওঁ বিলোপন বিধিৰ সহায়ত

(ii) আমি জানো

$x x^{-1} = e = x^{-1} x$

$\Rightarrow f(x x^{-1}) = f(e) = f(x^{-1} x)$

$\Rightarrow f(x) f(x^{-1}) = e' = f(x^{-1}) f(x)$

$\Rightarrow f(x^{-1})$ অৰ বিপৰীত হ'ল f

অর্থাৎ $(f(x)^{-1}) = f(x^{-1})$

(iii) ধৰা হ'ল n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা ঃ

তেনেহ'লে $f(x^n) = f(x x x \ldots . x)$

= $f(x) f(x) f(x) f(x) \ldots . f(x)$, $\because$ f এটা অনুৰূপতা

= $(f(x))^n$

ধৰা হ'ল n = 0 :

তেনেহ'লে x^0 = e

$\therefore$ f (x^0) = f(e)

$= e'$

$= (f(x))^0$

ধৰা হ'ল n এটা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা ঃ

ধৰা হ'ল n = –m, য'ত m এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

এতিয়া $f(x^n) = f(x^{-m})$

$= f(x^{-1})^m)$

$= ((f(x))^{-1})^m$

$= (f(x))^{-m}$

$= (f(x))^n$

গতিকে, $f(x^n) = (f(x))^n$, যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা n অৰ বাবে

উপপাদ্য ঃ ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G′ সংঘলৈ $f : G \to G'$ এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা। যদি G আবেলীয়, তেনেহ'লে G′ ও আবেলীয়।

প্ৰমাণ ঃ এই ক্ষেত্ৰত $f : G \to G'$ এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা। ধৰা হ'ল $u, v \in G'$

∵ f আচ্ছাদক, G ত মৌল a, b আছে, যাতে f(a) = u, f(b) = v

এতিয়া $uv = f(a)\, f(b)$

$= f(ab),$ ∵ f এটা অনুৰূপতা

$= f(ba),$ ∵ G আবেলীয়

$= f(b)\, f(a),$ ∵ f এটা অনুৰূপতা

$= vu$

গতিকে, $uv = vu, \ \forall u, v \in G'$

∴ G আবেলীয়।

টোকা ঃ ওপৰৰ উপপাদ্যটোৰ বিপৰীতটো সত্য নহয়।

S = {1, 2, 3} সংহতিত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বিন্যাসৰ সংঘ S_3 বোলা হ'ল।

ধৰা হ'ল G = {–1, 1} গুণাধীনত সংঘ। এটা মানচিত্ৰণ এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল।

$$f(\alpha)\begin{cases} = 1, & \text{যদি } \alpha \text{ এটা যুগ্ম বিন্যাস} \\ = -1, & \text{যদি } \alpha \text{ এটা অযুগ্ম বিন্যাস} \end{cases}$$

f এটা অনুৰূপতা। তদুপৰি f আচ্ছাদক, অৰ্থাৎ, f এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা।

G আবেলীয়, কিন্তু S_3 আবেলীয় নহয়।

উপপাদ্য ঃ ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G′ সংঘলৈ $f : G \to G'$ এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা। যদি G চক্ৰীয়, তেনেহ'লে G′ ও চক্ৰীয়।

প্ৰমাণ ঃ এই ক্ষেত্ৰত $f : G \to G'$ এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা।

ধৰা হ'ল চক্রীয় সংঘ G ৰ $a \in G$ এটা জনক।

ধৰা হ'ল $u \in G$

গতিকে G ত এটা মৌল ρ আছে যাতে

u = f(ρ)

= f(a^m), ∵ p = a^m, যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা m অৰ বাবে

= $(f(a))^m$

$\Rightarrow$ G/ এটা চক্রীয় সংঘ আৰু f(a) ইয়াৰ এটা জনক।

টোকা ঃ ওপৰৰ উপপাদ্যটোৰ বিপৰীতটো সত্য নহয়।

আগৰ উপপাদ্যটোৰ উদাহৰণটো লোৱা হ'ল।

ইয়াত G = {–1, 1} চক্রীয়, কিন্তু S_3 চক্রীয় নহয়।

উপপাদ্য ঃ ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G/ সংঘলৈ f : G $\rightarrow$ G/ এটা অনুৰূপতা।

(i) যদি G ৰ H এটা উপসংঘ, তেনেহ'লে G/ অৰ f(H) এটা উপসংঘ।

(ii) যদি G/ অৰ K এটা উপসংঘ, তেনেহ'লে G ৰ f^{-1}(K) এটা উপসংঘ।

[f(H) = {f(h) : h ∈ H}, ইয়াক f অৰ অধীনত H অৰ প্রতিচ্ছায়া বুলি কোৱা হয়।

f^{-1}(K) = {a ∈ G : f(a) ∈ K}, ইয়াক f অৰ অধীনত K ৰ বিপৰীত প্রতিচ্ছায়া বুলি কোৱা হয়।

মন কৰিব লগীয়া যে যদিও f এটা অনুৰূপতা, f^{-1} অনুৰূপতা নহ'বও পাৰে।]

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল G ৰ একক মৌল e আৰু G/ অৰ একক মৌল e/.

$\therefore$ f(e) = e/

(i) আমি জানো e/ = f(e) ∈ f(H)

$\therefore f(H) \neq \phi$

ধৰা হ'ল $u, v \in f(H)$

$\therefore$ H অত মৌল a, b আছে যাতে f(a) = u, f(b)= v

এতিয়া uv^{-1} = f(a) $(f(b))^{-1}$

= f(a) $f(b^{-1})$

= $f(ab^{-1})$

∵ G ৰ H এটা উপসংঘ, $\therefore$ $ab^{-1} \in H$

$\therefore$ $f(ab^{-1}) \in f(H)$

$\therefore$ $uv^{-1} \in f(H)$

দেখা গ'ল যে $u, v \in f(H) \Rightarrow uv^{-1} \in f(H)$

$\therefore$ G/ অৰ f(H) এটা উপসংঘ।

(ii) আমি জানো $e^{/} \in K$

$\Rightarrow f(e) \in K$

$\Rightarrow e \in f^{-1}(K)$

$\therefore f^{-1}(K) \neq \phi$

ধৰা হ'ল a, $b \in f^{-1}(K)$

$\therefore f(a) \in K, f(b) \in K$

$\Rightarrow f(a)\,(f(b))^{-1} \in K,$ $\because$ G/ অৰ K এটা উপসংঘ

$\Rightarrow f(a)\,f(b^{-1}) \in K$

$\Rightarrow f(ab^{-1}) \in K$

$\Rightarrow ab^{-1} \in f^{-1}(K)$

দেখা গ'ল যে a, $b \in f^{-1}(K)$ $\Rightarrow ab^{-1} \in f^{-1}(K)$

$\therefore$ G/ অৰ $f^{-1}(K)$ এটা উপসংঘ।

উদাহৰণ ৯ঃ ধৰা হ'ল G এটা সংঘ। ধৰা হ'ল মানচিত্ৰণ $f : G \to G$, $f(x) = x^{-1}$ এটা অনুৰূপতা। দেখুওৱা যে G আবেলীয়।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল a, $b \in G$.

এতিয়া $f(ab) = f(a)\,f(b)$, $\because$ f এটা অনুৰূপতা f অৰ সংজ্ঞাৰ পৰা

$\Rightarrow ((ab)^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1}\,(a^{-1})^{-1}$

$\Rightarrow ab = (b^{-1})^{-1}(a^{-1})^{-1}$

$\Rightarrow ab = ba$

$\therefore$ G আবেলীয়।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৩

প্ৰশ্ন নং ১১ঃ ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা Gলৈকে $f : G \to G$, $f(x) = x$ এটা মানচিত্ৰণ। প্ৰমাণ কৰক যে f এটা সম স্বানুৰূপতা।

প্ৰশ্ন নং ১২ঃ ধৰা হ'ল G এটা আবেলীয় সংঘ। প্ৰমাণ কৰক যে $f : G \to G$, $f(x) = x^{-1}$ এটা সম স্বানুৰূপতা।



৮.৬ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

ধৰা হ'ল $*$ দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G এটা সংঘ আৰু o দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত G/ এটা সংঘ। ধৰা হ'ল $f : G \to G'$ এটা মানচিত্ৰণ। f অক এটা অনুৰূপতা বুলি কোৱা হয় যদি $f(a * b) = f(a)\,(b)$ $\forall a, b \in G$

- এটা অনুৰূপতাক একৈকী অনুৰূপতা বুলি কোৱা হয় যদি ই একৈকী হয়।
- এটা অনুৰূপতাক আচ্ছাদক অনুৰূপতা বুলি কোৱা হয় যদি ই আচ্ছাদক হয়।
- এটা অনুৰূপতাক সম অনুৰূপতা বুলি কোৱা হয় যদি ই একৈকী আৰু আচ্ছাদক হয়।
- এটা সংঘৰ পৰা নিজলৈকে অনুৰূপতাক স্বানুৰূপতা বুলি কোৱা হয়।
- এটা সংঘৰ পৰা নিজলৈকে এটা সম অনুৰূপতাক সম স্বানুৰূপতা বুলি কোৱা হয়।
- ধৰা হ'ল G, G′ দুটা সংঘ। ধৰা হ'ল e, e′ ক্ৰমে G, G′ অৰ একক মৌল।
  (i) f(e) = e′
  (ii) $f(x^{-1}) = (f(x))^{-1}$, $x \in G$
  (iii) $f(x^n) = (f(x))^n$, n এটা অখণ্ড সংখ্যা।
- ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G′ সংঘলৈ $f: G \to G'$ এটা আচ্ছাদক অনুৰূপতা।
  (i) যদি G আবেলীয়, তেনেহ'লে G′ ও আবেলীয়।
  (ii) যদি G চক্ৰীয়, তেনেহ'লে G′ ও চক্ৰীয়।
  ওপৰৰ (i) আৰু (ii) ৰ প্ৰত্যেকৰে বিপৰীতটো সত্য নহয়।
- ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G′ সংঘলৈ $f: G \to G'$ এটা অনুৰূপতা।
  (i) যদি G ৰ H এটা উপসংঘ, তেনেহ'লে G′ অৰ f(H) এটা উপসংঘ।
  (ii) যদি G′ অৰ K এটা উপসংঘ, তেনেহ'লে G ৰ $f^{-1}(K)$ এটা উপসংঘ।



৮.৭ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f: \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{Z}}$, $f(x) = 5x$

ধৰা হ'ল $a, b \in \underline{\underline{Z}}$

এতিয়া f(a+b) = 5(a+b)

=5a+ 5b

= f(a) + f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f: \underline{\underline{Z}} \to \underline{\underline{Z}}$, $f(x) = x + 3$

ধৰা হ'ল $a, b \in \underline{\underline{Z}}$

f(a+b) = (a+b) + 3 = a+b+3

f(a) +f(b) = (a+3) + (b+3)

= a + b + 6

$\therefore$ f(a+b) $\neq$ f(a) + f(b)

$\therefore$ f অনুৰূপতা নহয়।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ অ $f : \underline{\underline{R}}_+ \to \underline{\underline{R}}_+,\ f(x) = \frac{1}{x}$

ধৰা হ'ল $a, b \in \underline{\underline{R}}_+$

এতিয়া $f(ab) = \frac{1}{ab}$

$= \frac{1}{a}\frac{1}{b}$

= f(a)f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : \underline{\underline{R}}_+ \to \underline{\underline{R}},\ f(x) = \log_e x$

ধৰা হ'ল $a, b \in \underline{\underline{R}}_+$

এতিয়া $f(ab) = \log_e ab$

$= \log_e a + \log_e b$

$= f(a) + f(b)$

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : S_3 \to G = \{-1, 1\}$, য'ত

$$f(\alpha)\begin{cases} = 1, & \text{যদি } \alpha \text{ এটা যুগ্ম বিন্যাস} \\ = -1, & \text{যদি } \alpha \text{ এটা অযুগ্ম বিন্যাস} \end{cases}$$

প্ৰথম ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল α, β যুগ্ম বিন্যাস।

$\therefore\ f(\alpha) = 1,\ f(\beta) = 1$

আমি জানো যে দুটা যুগ্ম বিন্যাসৰ পূৰণফল এটা যুগ্ম বিন্যাস

$\therefore\ f(\alpha\beta) = 1$

$= 1 \times 1$

$= f(\alpha) f(\beta)$

দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল α, β অযুগ্ম বিন্যাস।

$\therefore\ f(\alpha) = -1,\ f(\beta) = -1$

আমি জানো যে দুটা অযুগ্ম বিন্যাসৰ পূৰণফল এটা অযুগ্ম বিন্যাস।

$\therefore\ f(\alpha\beta) = 1$

$= (-1) \times (-1)$

$= f(\alpha) f(\beta)$

তৃতীয় ক্ষেত্ৰ ঃ ধৰা হ'ল α এটা যুগ্ম বিন্যাস আৰু β এটা অযুগ্ম বিন্যাস।

$\therefore\ f(\alpha) = 1,\ f(\beta) = -1$

আমি জানো যে এটা যুগ্ম বিন্যাস আৰু এটা অযুগ্ম বিন্যাসৰ পূৰণফল এটা অযুগ্ম বিন্যাস।

$\therefore f(\alpha\beta) = -1$

$= 1 \times (-1)$

$= f(\alpha) f(\beta)$

সেইদৰে, যদি α এটা অযুগ্ম বিন্যাস আৰু β এটা যুগ্ম বিন্যাস, তেতিয়াও

$f(\alpha\beta) = f(\alpha) f(\beta)$

গতিকে, সকলো ক্ষেত্ৰতে দেখা গ'ল যে

$f(\alpha\beta) = f(\alpha) f(\beta)$

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : \underline{\underline{C}} \to \underline{\underline{C}},\ f(x) = \bar{z}$

ধৰা হ'ল $z, w \in \underline{\underline{C}}$

এতিয়া $f(z+w) = \overline{z+w}$

$= \bar{z} + \bar{w}$

$= f(z) + f(w)$

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

ধৰা হ'ল f(z) = f(w)

$\Rightarrow \bar{z} = \bar{w}$

$\Rightarrow z = w$

$\therefore$ f এটা একৈকী।

ধৰা হ'ল $z \in \underline{\underline{C}}$ (সহক্ষেত্ৰ)

গতিকে আদিক্ষেত্ৰ $\bar{z} \in \underline{\underline{C}}$ মৌল আছে যাতে

$f(\bar{z}) = (\bar{\bar{z}}) = z$

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

$\therefore$ f এটা সম অনুৰূপতা।

$\because \underline{\underline{C}}$ ৰ পৰা নিজলৈকে f এটা সম অনুৰূপতা,

$\therefore$ f এটা সম স্বানুৰূপতা।

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : \underline{\underline{R}} \to \underline{\underline{R}}_+,\ f(x) = e^x$

ধৰা হ'ল $a, b \in \underline{\underline{R}}$

এতিয়া $f(a+b) = e^{a+b}$

$= e^a e^b$

$= f(a)\, f(b)$

ধৰা হ'ল f(a) = f(b)

$\Rightarrow e^a = e^b$

$\Rightarrow a = b$

$\therefore$ f একৈকী।

ধৰা হ'ল $u \in \underline{\underline{R}}_+$ যাতে f(c) = u

$\therefore e^c = u$

$\therefore e = \log_e u \in \underline{\underline{R}}$

দেখা গ'ল যে প্ৰত্যেক $u \in \underline{\underline{R}}_+$, অৰ বাবে, $\log_e u \in \underline{\underline{R}}$ আছে যাতে $f(\log_e u) = u$

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

$\therefore$ f এটা সম অনুৰূপতা।

৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : \underline{\underline{Z}} \to 2\underline{\underline{Z}},\ f(x) = 2x$

ধৰা হ'ল $a, b \in \underline{\underline{Z}}$

এতিয়া f(a+b) = z(a+b)

= 2a + 2b

= f(a) + f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

ধৰা হ'ল f(a) = f(b)

$\Rightarrow$ 2a = 2b

$\Rightarrow$ a = b

$\therefore$ f একৈকী।

ধৰা হ'ল $u \in 2\underline{\underline{Z}}$

গতিকে $\frac{u}{2} \in \underline{\underline{Z}}$ যাতে $f\left(\frac{u}{2}\right) = 2\frac{u}{2} = u$

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

$\therefore$ f এটা সম অনুৰূপতা।

৯ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : \underline{\underline{2Z}} \to \underline{\underline{3Z}},\ f(2x) = 3x$, য'ত x এটা অখণ্ড সংখ্যা।

ধৰা a, b অখণ্ড সংখ্যা।

$\therefore 2a, 2b \in 2Z$

এতিয়া f (2a+2b) = f(2(a+b))

= 3(a+b)

= 3a + 3b

= f(2a)+ f(2b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

ধৰা হ'ল f(2a) = f(2b)

$\Rightarrow$ 3a = 3b

$\Rightarrow$ a = b

$\Rightarrow$ 2a = 2b

$\therefore$ f এটা একৈকী।

ধৰা হ'ল $3u \in 3\underline{\underline{Z}}$, য'ত u এটা অখণ্ড সংখ্যা।

গতিকে $2u \in 2Z$ আছে যাতে f (2u) = 3u

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

$\therefore$ f এটা সম অনুৰূপতা।

১০ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : \underline{\underline{R}}_+ \to \underline{\underline{R}}_+ \quad f(x) = \log_{10} x$

ধৰা হ'ল $a, b \in \underline{\underline{R}}_+$

এতিয়া f(ab) = $\log_{10}$ ab

= $\log_{10}$a = $\log_{10}$b

= f(a) + f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

ধৰা হ'ল f(a) = f(b)

$\Rightarrow$ $\log_{10}$a = $\log_{10}$b

$\Rightarrow$ a = b

$\therefore$ f একৈকী।

ধৰা হ'ল $u \in \underline{\underline{R}}$

গতিকে $10^u \in \underline{\underline{R}}_+$ যাতে

$$f(10^u) = \log_{10}{}^{10^u}$$

$$= u \log_{10}{}^{10}$$

$$= u$$

$\therefore$ f আচ্ছাদক।

$\therefore$ f এটা সম অনুৰূপতা।

১১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : G \to G, \quad f(x) = x$

ধৰা হ'ল $a, b \in G$

এতিয়া f(ab) = ab

= f(a) f(b)

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

f(a) = f(b)

$\Rightarrow$ a = b

$\therefore$ f এঁকেকী।

প্ৰত্যেক $a \in G$ ৰ বাবে, f(a) = a

$\therefore$ f আচ্ছাদক

$\therefore$ G ৰ পৰা নিজলৈকে f এটা সম অনুৰূপতা।

$\therefore$ f এটা সম স্বানুৰূপতা।

১২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $f : G \to G, \quad f(x) = x^{-1}$

ধৰা হ'ল $a, b \in G$

এতিয়া $f(ab) = (ab)^{-1}$

$= b^{-1} a^{-1}$

$= a^{-1}b^{-1}$, $\because$ G আবেলীয়

$= f(a) f(b)$

$\therefore$ f এটা অনুৰূপতা।

ধৰা হ'ল f(a) = f(b)

$\Rightarrow$ a = b

$\therefore$ f এঁকেকী।

ধৰা হ'ল $u \in G$.

গতিকে $u^{-1} \in G$ যাতে

$f(u^{-1}) = (u^{-1})^{-1}$

$= u$

$\therefore$ f আচ্ছাদক

$\therefore$ G ৰ পৰা নিজলৈকে f এটা সম অনুৰূপতা।

$\therefore$ f এটা সম স্বানুৰূপতা।



৮.৮ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

১) Fraleigh, Johu B : *A First Course in Abetract Algebra* (2003), Pearson Education (Singapure) Pvt. Ltd, Indian Branch, Delhi 110092.

২) Mapa, S.K. : *Higher Algebra* (Abstract and Linear) (1994), Asoke Prakasan, Calcutta 700007.

৩) Khanna, V. K. and Bhambri, S. K. : *A Course in Abstract Algebra* (2006), Vikas Publishing House Pvt. Ltd. New Delhi 110014.



৮.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{R}}$ বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগাধীনত সংঘ।

$f : \underline{\underline{R}} \to \underline{\underline{R}}, f(x) = 5x$

এটা মানচিত্ৰণ।

f অনুৰূপতা হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ২ঃ ধৰা হ'ল $\underline{\underline{3Z}}$ ={. . . ., –9, –6, –3, 0, 3, 6, 9, ...}

$\underline{\underline{5Z}}$ ={. . . ., –20, –15, –10, –5, 0, 5, 10, 15, 20, ...}

$\underline{\underline{3Z}}$ আৰু $\underline{\underline{5Z}}$ যোগাধীনত সংঘ।

ধৰা হ'ল $f : \underline{\underline{3Z}} \to \underline{\underline{5Z}}, \ f(3x) = 5x$, য'ত x এটা অখণ্ড সংখ্যা।

f অনুৰূপতা হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ঃ এটা অসীম সংঘৰ পৰা এটা সসীম সংঘলৈ এটা অনুৰূপতাৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্ৰশ্ন ৪ঃ ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G/ সংঘলৈ $f : G \to G'$ এটা সম অনুৰূপতা। যদি G/ আবেলীয়, প্ৰমাণ কৰক যে G আবেলীয়।

প্ৰশ্ন ৫ঃ ধৰা হ'ল G সংঘৰ পৰা G/সংঘলৈ $f : G \to G'$ এটা সম অনুৰূপতা। যদি G/ চক্ৰীয়, প্ৰমাণ কৰক যে G চক্ৰীয়।

*** ***** ***