অধ্যায় ১৪ ঃ বুলীয় বীজগণিত (BOOLEAN ALGEBRA)

অধ্যায় গাঁথনি

১৪.১ উদ্দেশ্য
১৪.২ পৰিচয়
১৪.৩ সংজ্ঞা, ধর্ম আৰু উদাহৰণ
১৪.৪ বুলীয় বীজগণিতৰ মূল বিধি
১৪.৫ বুলীয় ৰাশি
১৪.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১৪.৭ অধিক জানিবলৈ
১৪.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
১৪.৯ আৰ্হি প্রশ্ন

১৪.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- বুলীয় বীজগণিত, ইয়াৰ ধর্ম, উদাহৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- বুলীয় বীজগণিতৰ মূল বিধিসমূহ জানিব পাৰিব
- বুলীয় ৰাশি সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

১৪.২ পৰিচয়

ব্রিটিছ ন্যায়তত্ত্বজ্ঞ জর্জ বলৰ (George Boole 1813-1864) নাম অনুসৰি জনাজাত বুলীয় বীজগণিত (Boolean Algebra) এটা বীজগণিতীয় গাঁথনি (algebraic structure)। এটা বা ততোধিক প্রক্রিয়াযুক্ত আৰু নির্দিষ্ট স্বীকার্য সিদ্ধ কৰা এটা অৰিক্ত সংহতিক বীজগণিতীয় গাঁথনি বুলি কোৱা হয়। যদিও ই এটা বিমূর্ত বীজগণিতীয় গাঁথনি, বৈদ্যুতিক বর্তনী বিশ্লেষণ কৰিবলৈ ইয়াক ব্যৱহাৰ কৰা হয়। ইলেকট্রনিক কম্পিউটাৰৰ বিশ্লেষণ আৰু অভিযোজনৰ বাবে সম্প্রতি ইয়াক বিপুলভাৱে ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

১৪.৩ সংজ্ঞা, ধর্ম আৰু উদাহৰণ (DEFINITION, PROPERTIES AND EXAMPLES)

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল দুটা দ্বৈত প্রক্রিয়া + আৰু, . , আৰু এটা একক (unary) প্রক্রিয়া $'$ যুক্ত, আৰু দুটা পৃথক মৌল 0 আৰু 1 থকা B এটা অৰিক্ত সংহতি। তেনেহ'লে B এটা বুলীয় বীজগণিত (Boolean Algebra) বুলি কোৱা হয় যদি তলৰ চর্তসমূহ সিদ্ধ হয়।

1. ক্রমবিনিময়ে বিধি (Commutative laws)
   (i) a + b = b + a, (ii) a.b = b.a, $\forall a, b \in B$
2. বিতৰণ বিধি (Distributive laws)
   (i) a + (b.c) = (a + b).(a + c)
   (ii) a. (b + c) = (a.b) + (a.c), $\forall a, b, c \in B$
3. একক বিধি (Identity laws)
   (i) a + 0 = a, (ii) a.1 = a
4. পূৰক বিধি (Complement laws)
   (i) a + a' = 1, (ii) a.a' = 0

টোকা ঃ 1. সংজ্ঞাৰ পৰা এইটো স্পষ্ট যে এটা মৌলবিশিষ্ট বুলীয় বীজগণিত থাকিব নোৱাৰে।

2. 1 অক একক মৌল (unit element) আৰু 0 ক শূন্য মৌল (zero element) বুলি কোৱা হয়।
3. a' অক a ৰ পূৰক (complement) বুলি কোৱা হয়।
4. এটা বুলীয় বীজগণিতক সাধাৰণতে (B, + , . , $'$, 0, 1) বা (B, +, . ,$'$) বা B ৰে বুজোৱা হয়।
5. 0 আৰু 1 প্রতীক দুটা সদায়ে বাস্তৱ সংখ্যা 0 আৰু 1 নহয়।

উদাহৰণ 1 ঃ তলৰ সাৰণীৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ +, . , $'$ প্রক্রিয়াৰ অধীনত B = {0, 1} এটা বুলীয় বীজগণিত।

+	1	0
1	1	1
0	1	0

.	1	0
1	1	0
0	0	0

	/
1	0
0	1

সমাধান ঃ +, . , $'$, প্রক্রিয়াৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে

1. (i) a + b = b + a
   (ii) a.b = b.a, $\forall a, b \in B$
2. (i) a + (b.c) = (a+b).(a + c)
   (ii) a.(b+c) = (a.b) + (a.c), $\forall a, b, c \in B$
3. (i) a + 0 = a, (ii) a.1 = a, $\forall a \in B$
4. (i) a + a' = 1 (1 + $1'$ = 1 + 0 = 1),
   0 + $0'$ = 0 + 1 = 1)
   (ii) a. a' = 0 (1. $1'$ = 1.0 = 0,
   0.$0'$ = 0.1 = 0)
   $\therefore$ (B, + , . , $'$) এটা বুলীয় বীজগণিত।

ধর্ম

1. এটা বুলীয় বীজগণিত B ত শূন্য মৌল অদ্বিতীয়।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল (B, + , . , $'$) এটা বুলীয় বীজগণিত।

যদি সম্ভৱ, দুটা শূন্য মৌল 0 আৰু 0_1 আছে।

$\therefore$ a + 0 = a, $\forall a \in B$

a + 0_1 = a, $\forall a \in B$

$\therefore$ 0_1 + 0 = 0 ($\because$ 0 শূন্য মৌল)

আকৌ 0_1+0 = 0 + 0_1 (ক্ৰমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা)

= 0 ($\because$ 0_1 শূন্য মৌল)

$\therefore$ 0_1 = 0

অর্থাৎ শূন্য মৌল অদ্বিতীয়।

2. এটা বুলীয় বীজগণিত B ত একক মৌল অদ্বিতীয়।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল (B, +, . , $'$) এটা বুলীয় বীজগণিত।

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল দুটা একক মৌল 1 আৰু 1_u আছে।

$\therefore$ $a.1 = a, \forall a \in B$

$a.1_u = a, \forall a \in B$

$\therefore$ 1_u.1 = 1_u ($\because$ 1 একক মৌল)

$\therefore$ 1_u = 1

অর্থাৎ, একক মৌল অদ্বিতীয়।

3. এটা বুলীয় বীজগণিত B ত, প্ৰত্যেক মৌলৰ পূৰক অদ্বিতীয়।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল (B, + , . , $'$) এটা বুলীয় বীজগণিত।

ধৰা হ'ল শূন্য মৌলটো 0, আৰু একক মৌলটো 1.

ধৰা হ'ল $a \in B$

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল a ৰ দুটা পূৰক a$'$ আৰু a_1 .

$\therefore$ a + a$'$ = 1, a . a$'$ = 0 ($\because$ a ৰ পূৰক a$'$)

a + a_1 = 1,a . a_1 = 0 ($\because$ a ৰ পূৰক a_1)

এতিয়া a$'$ = a$'$.1

= a$'$. (a + a_1)

= (a$'$.a) + (a$'$.a_1)

= (a.a$'$) + (a$'$.a_1)

= 0 + (a$'$.a_1)

= (a$'$.a_1) + 0

= a$'$.a_1 (1)

আকৌ $a_1 = a_1.1$

$= a_1.(a + a')$

$= (a_1.a) + (a_1.a')$

$= (a.a_1) + (a_1.a')$

$= 0 + (a_1.a^1)$

$= (a'.a_1) + 0$

$= a'.a_1$ (2)

(1) আৰু (2) ৰ পৰা আমি পালোঁ যে

$a' = a_1$

4. এটা বুলীয় বীজগণিত B ত

(i) $1' = 0$, (ii) $0' = 1$, য'ত 0 হ'ল শূন্য মৌল, 1 হ'ল একক মৌল।

প্ৰমাণ ঃ (i) ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত।

এতিয়া একক বিধিৰ পৰা আমি পালোঁ $a + 0 = 1$ আৰু $a.1 = a$, $\forall a \in B$

$a + 0 = a$ ত a ৰ ঠাইত 1 বহুৱাই আমি পাওঁ $1 + 0 = 1$.

$a.1 = 1$ ত a ৰ ঠাইত 0 বহুৱাই আমি পাওঁ $0.1 = 0$

অর্থাৎ $1.0 = 0$ ($0.1 = 1.0$, ক্ৰমবিনিময় বিধিৰ পৰা)

গতিকে, $1 + 0 = 1$ (1)

$1.0 = 0$ (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে $0 = 1'$ অর্থাৎ $1' = 0$

(ii) ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত।

এতিয়া একক বিধিৰ পৰা আমি পালোঁ $a.1 = 1$ আৰু $a + 0 = a$, $\forall a \in B$

$a.1 = a$ ত a ৰ ঠাইত 0 বহুৱাই আমি পাওঁ $0.1 = 0$.

$a + 0 = a$ ত a ৰ ঠাইত 1 বহুৱাই আমি পাওঁ $1 + 0 = 1$.

অর্থাৎ $0 + 1 = 1$, ($1+ 0 = 0 + 1$, ক্ৰমবিনিময় বিধিৰ পৰা)

গতিকে, $0.1 = 0$ (1)

$0 + 1 = 1$ (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে $0' = 1$

টোকা ঃ (i) নম্বৰ ধর্ম অর্থাৎ $1' = 0$ ত দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া + আৰু . সালসলনি কৰি, আৰু 0 আৰু 1 সালসলনি কৰি (ii) নম্বৰ ধর্ম অর্থাৎ $0' = 1$ পাব পাৰি। (ii) ক (i) অৰ দ্বৈধ (dual) বুলি কোৱা হয়। বিপৰীতক্ৰমে (i) অক (ii)ৰ দ্বৈধ বুলি কোৱা হয়। এই বিধিটোক দ্বৈধতা বিধি (principle of duality) বুলি কোৱা হয়। বুলীয় বীজগণিতৰ প্ৰতিটো উক্তি আৰু প্ৰতিটো উপপাদ্যৰ ক্ষেত্ৰত এই বিধি প্ৰযোজ্য।

উদাহৰণ 2 ঃ ধৰা হ'ল X এটা অৰিক্ত সংহতি। ধৰা হ'ল

ধৰা হ'ল X অৰ ঘাত সংহতি P(x), অর্থাৎ P(x) হ'ল X অৰ উপসংহতিবোৰৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল $A,B\in P(X)$, অর্থাৎ $A\subseteq X,\ B\subseteq X$

তলৰ সংজ্ঞাবোৰ দিয়া হ'ল

$A+B=A\cup B,$

$A.B=A\cap B$

$A^{/}$ = A ৰ পূৰক সংহতি

স্পষ্টতঃ, P(x)অত মিলন এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া,

P(x) অত ছেদন এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া,

P(x) অত পূৰক এটা একক প্রক্রিয়া।

এতিয়া 1. (i) $A+B=A\cup B=B\cup A=B+A$

(ii) $A.B=A\cap B=B\cap A=B.A,\ \forall A,B\in P(x)$

2. (i) $A+(B.C)=A\cup(B\cap C)$

$=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$=(A+B).(A+C),\ \forall A,B,C\in P(x)$

(ii) $A.(B+C)=A\cap(B\cup C)$

$=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$=(A.B)+(A.C)$

3. (i) $A+\phi=A\cup\phi=A,\ \ \phi\in P(x)$

(ii) $A.X=A\cap X=A$

4. (i) $A+A^{/}=A\cup A^{/}=x$

(ii) $A.A^{/}=A\cap A^{/}=\phi$

$\therefore (P(X),\cup,\cap,^{/})$ এটা বুলীয় বীজগণিত। ইয়াত ϕ হ'ল শূন্য মৌল আৰু X হ'ল একক মৌল।

উদাহৰণ 3 ঃ ধৰা হ'ল 110 অৰ ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতিটো B = {1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110} তলৰ সংজ্ঞাবোৰ দিয়া হ'ল।

a + b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ

a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$a^{/}=\frac{110}{a},\ \ a,b\in B$

+, . , $^{/}$ প্রক্রিয়াৰ বাবে প্রক্রিয়া সাৰণীকেইখন গঠন কৰা হ'ল—

+	1	2	5	10	11	22	55	110
1	1	2	5	10	11	22	55	110
2	2	2	10	10	22	22	110	110
5	5	10	5	10	55	110	55	110
10	10	10	110	10	110	110	110	110
11	11	22	110	110	11	22	55	110
22	22	22	110	110	22	22	110	110
55	55	55	110	110	55	110	55	110
110	110	110	110	110	110	110	110	110

.	1	2	5	10	11	22	55	110
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2
5	1	1	5	5	1	1	5	5
10	1	2	5	10	1	2	5	10
11	1	1	1	1	11	11	11	11
22	1	2	1	2	11	22	11	22
55	1	1	5	5	11	11	55	55
110	1	2	5	10	11	22	55	110

/	1	2	5	10	11	22	55	110
	110	55	22	11	10	5	2	1

ওপৰৰ সাৰণীকেইখনৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে B ত + এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, B ত এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া আৰু B ত $'$ এটা একক প্ৰক্ৰিয়া।

আকৌ, 1 (i) a+b = a, b লঃ সাঃ গুঃ

= b, a ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= b+a, $\forall a, b \in B$

(ii) a . b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= b, a ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= b.a, $\forall a, b \in B$

2. সাৰণীৰ পৰা আমি পালোঁ যে

(i) a + (b.c) = (a+b).(a+c)

(ii) a.(b+c) = (a.b) + (a.c), $\forall a, b, c \in B$

3. (i) a+1 = a, 1ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= a, $\forall a \in B$

(ii) a.110 = 110 ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= a, $\forall a \in B$

4. (i) $a+a^{/}$ = a, $a^{/}$ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= $a, \frac{110}{a}$ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= 110, $\forall a \in B$

(ii) $a.a^{/}$ = a, $a^{/}$ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= $a, \frac{110}{a}$ ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= 1, $\forall a \in B$

∴ (B, + , . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত। ইয়াক 1 হ'ল শূন্য মৌল আৰু 110 হ'ল একক মৌল।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল X ={1}. প্রমাণ কৰক যে মিলন, ছেদন আৰু পূৰক প্রক্রিয়াৰ অধীনত P(x) = {{1}, ϕ} এটা বুলীয় বীজগণিত।

প্রশ্ন নং ২ঃ ধৰা হ'ল X = {1, 2, 3}, ধৰা হ'ল X অৰ ঘাত সংহতিটো হ'ল P(X)। প্রমাণ কৰক যে মিলন, ছেদন আৰু পূৰক প্রক্রিয়াৰ অধীনত P(X) এটা বুলীয় বীজগণিত।

প্রশ্ন নং ৩ঃ ধৰা হ'ল 30 ৰ সকলো ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতিটো B = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 30} তলৰ সংজ্ঞাবোৰ দিয়া হ'ল।

a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ, $a, b \in B$

a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$a^{/} = \frac{30}{a}$

প্রমাণ কৰক যে (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত।

প্রশ্ন নং ৪ঃ ধৰা হ'ল 70 ৰ সকলো ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতিটো B = {1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70}। তলৰ সংজ্ঞাবোৰ দিয়া হ'ল।

a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ, $a, b \in B$

a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$a^{/} = \frac{70}{a}$

প্রমাণ কৰক যে (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত।

প্রশ্ন নং ৫ঃ এটা 16 টা মৌলবিশিষ্ট বুলীয় বীজগণিতৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ ধৰা হ'ল B = {0, a, b, 1}. B ত +, . , / প্রক্রিয়াৰ সংজ্ঞা তলত দেখুওৱাৰ দৰে দিয়া হ'ল।

+	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

.	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

/	0	a	b	1
	1	b	a	0

প্রমাণ কৰক যে (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত।

প্রশ্ন নং ৭ঃ ধৰা হ'ল 20 ৰ সকলো ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতিটো B = { 1, 2, 4, 5, 10, 20}। তলৰ সংজ্ঞাবোৰ দিয়া হ'ল।

a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ

a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$a^{/} = \frac{20}{a}, \ \forall a \in B$

(B, +, . , /) বুলীয় বীজগণিত হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

১৪.৪ বুলীয় বীজগণিতৰ মূল বিধি (BASIC LAWS OF BOOLEAN ALGEBRA)

ধৰা হ'ল (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত। ধৰা হ'ল B ৰ শূন্য মৌলটো 0, একক মৌলটো 1.

1. বৰ্গসম বিধি (Idempotent Laws)

(i) a+a = a, (ii) a.a = a, $\forall a \in B$

প্রমাণ ঃ (i) a = a+0

= a + (a.a$^{/}$)

= (a+a).(a+a$^{/}$), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= (a+a).1

= a+a

অৰ্থাৎ a+a = a

(ii) a = a.1

= a.(a + a$^{/}$)

= (a.a) + (a.a$^{/}$), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= (a.a) + 0

= a.a

টোকা ঃ (ii) নম্বৰ উক্তিটো (i) নম্বৰ উক্তিৰ দ্বৈধ। বিপৰীতক্ৰমে (i) নম্বৰ উক্তিটো (ii) নম্বৰ উক্তিৰ দ্বৈধ। (i) নম্বৰত + অৰ ঠাইত • বহুৱাই, • ঠাইত + বহুৱাই, 0 ৰ ঠাইত 1 বহুৱাই, 1 অৰ ঠাইত 0 বহুৱাই (ii) পাব পাৰি।

2. পৰিৱদ্ধতা বিধি (Boundedness Laws)

(i) a+1 = 1, (ii) a.0 = 0, $\forall\ a \in B$

প্ৰমাণ ঃ (i) a+1 = (a+1) . 1

= (a+1).(a+a′)

= a+(1.a′), (বিতৰণ বিধিৰ পৰা)

= a+a′, (1.a′ = a′.1 = 1)

= 1

(ii) a.0 = (a.0) + 0

= (a.0) + (a.a′)

= a.(0+a′), (বিতৰণ বিধিৰ পৰা)

= a.a′, (0+a′ = a′+0 = a′)

= 0

3. বিশোষণ বিধি (Absorption Laws)

(i) a+(a.b) = a, (ii) a.(a+b) = a, $\forall a,b \in B$

প্ৰমাণ ঃ (i) a+(a.b) = (a.1) + (a.b)

= a.(1 + b)

= a.1, (1+b = b+1 = 1, পৰিৱদ্ধতা বিধিৰ পৰা)

= a

(ii) a.(a+b) = (a+0).(a+b)

= a+(0.b)

= a+0, (0.b = b.0 = 0, পৰিৱদ্ধতা বিধিৰ পৰা)

= a

4. সাহচর্য্য বিধি (Associative Laws)

(i) (a+b)+c = a + (b+c)

(ii) (a.b).c = a.(b.c)

প্ৰমাণ ঃ (i) ধৰা হ'ল L = (a+b) + c

R = a + (b+c)

এতিয়া a.L = a.((a+b)+c)

= a.(a+b) + a.c, বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= a + (a.c), বিশোষণ বিধিৰ পৰা

= a, বিশোষণ বিধিৰ পৰা

a . R = a.(a+(b+c))

= (a.a)+(a.(b+c)), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= a+(a.(b+c)), বৰ্গসম বিধিৰ পৰা

= a, বিশোষণ বিধিৰ পৰা

$\therefore$ a.L = a.R

আকৌ a'.L a'.((a+b) + c)

= a'.(a+b) + (a'.c), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= (a'.a) + (a'.b) + (a'.c), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= 0 + (a'.b) + (a'.c)

= (a'.b) + (a'.c)

= a'.(b+c)

a'.R = a'.(a + (b+c))

= (a'.a) + a'.(b+c), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= 0 + a'.(b+c)

= a'.(b+c)

$\therefore$ a'.L = a'.R

এতিয়া L = 1.L

= (a+a').L

= (a.L) + (a'.L)

= (a.R) + (a'.R)

= (a+a').R

= 1.R

= R

$\therefore$ L = R

অৰ্থাৎ (a+b) + c = a+(b+c)

(ii) ধৰা হ'ল L = (a.b).c

R = a. (b.c)

এতিয়া a + L = a + ((a.b).c)

= (a + (a.b)).(a+c), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= a.(a+c), বিশোষণ বিধিৰ পৰা

= a, বিশোষণ বিধিৰ পৰা

$a + R = a + (a.(b.c))$

= (a+a).(a+(b.c)), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= a.(a+(b.c)), বৰ্গসম বিধিৰ পৰা

= a, বিশোষণ বিধিৰ পৰা

$\therefore a + L = a + R$

আকৌ $a' + L = a' + (a.b).c$

$= (a' + (a.b)).(a'+c)$, বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= ((a'+a).(a'+b)).(a'+c)$, বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= 1.(a'+b).(a'+c)$

$= (a'+b).(a'+c)$

$= a' + (b.c)$

$a' + R = a' + (a.(b.c))$

$= (a'+a).(a' + (b.c))$, বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= 1.(a' + (b.c))$

$= a' + (b.c)$

$\therefore a' + L = a' + R$

এতিয়া $L = 0 + L$

$= (a.a') + L$

$= (a+L).(a'+L)$

$= (a+R).(a'+R)$

$= (a.a') + R$

$= 0 + R$

$= R$

$\therefore L = R$

অৰ্থাৎ $(a.b).c = a.(b.c)$

5. ঘাতক্রিয়া বিধি (Involution Law) : $\left(a'\right)' = a$

প্ৰমাণ ঃ পূৰকৰ সংজ্ঞাৰ পৰা আমি পালোঁ

$a+a' = 1$, আৰু $a.a' = 0$

অৰ্থাৎ $a'+a = 1$, আৰু $a'.a = 0$, ক্রমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা

$\therefore$ পূৰক অদ্বিতীয়, a' অৰ পূৰক হ'ল a, অৰ্থাৎ $(a')' = a$.

6. দ্য মৰ্গানৰ বিধি (De Morgan's Laws)

(i) $(a+b)' = a'.b'$, (ii) $(a.b)' = a'+b'$

প্ৰমাণ ঃ (i) $(a+b) + (a'.b') = b+a + (a'.b')$, ক্ৰমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা

$= b +(a+a').(a+b')$, বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= b+1.(a+b')$

$= b + (a+b')$

$= b + (b'+a)$, ক্ৰমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা

$= (b+b') +a$, সাহচৰ্য্য বিধিৰ পৰা

$= 1+a$

$= 1$, পৰিৱৰ্দ্ধতা বিধিৰ পৰা

$(a + b).(a'.b') = ((a+b).a').b'$, সাহচৰ্য্য বিধিৰ পৰা

$= ((a.a') + (b.a')).b'$, বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= (0 + (b.a')).b'$

$= (0 + (b.a')).b'$

$= (b.a').b'$

$= b.(a'.b')$, সাহচৰ্য্য বিধিৰ পৰা

$= b.(b'.a')$, ক্ৰমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা

$= (b.b').a'$, সাহাচৰ্য্য বিধিৰ পৰা

$= 0.a'$

$= 0$

গতিকে আমি দেখিলোঁ যে a+b ৰ পূৰক $a'.b'$

অৰ্থাৎ $(a+b)' = a'.b'$

[আগষ্টাছ দ্য মৰ্গান (Augustus De Morgan 1806 – 1871) এজন বিখ্যাত গণিতজ্ঞ আছিল। ভাৰতবৰ্ষৰ মাদুৰাই চহৰত তেওঁৰ জন্ম হয়।]

অনুসিদ্ধান্ত (i) $a+b = (a'.b')'$, (ii) $a.b = (a'+b')'$

প্ৰমাণ ঃ (i) $(a'.b')' = (a')'+(b')'$, দ্য মৰ্গানৰ বিধিৰ পৰা

$= a+b$, ঘাতক্ৰিয়া বিধিৰ পৰা

(ii) $(a'+b') = (a')'.(b')'$, দ্য মৰ্গানৰ বিধিৰ পৰা

$= a.b$, ঘাতক্ৰিয়া বিধিৰ পৰা

7. (i) যদি b+a = c+a, আৰু $b+a' = c+a'$, তেনেহ'লে b = c.

(ii) যদি b.a = c.a, আৰু $b.a' = c.a'$, তেনেহ'লে b = c.

প্ৰমাণ ঃ (i) $b = b+0$

$= b + (a.a')$

= (b+a).(b+a′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= (c+a).(c+a′), (দিয়া আছে)

= c+(a.a′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= c+0

= c.

(ii) b = b.1

= b.(a+a′)

= (b.a) + (b.a′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= (c.a) + (c.a′), দিয়া আছে

= c.1

= c

8. (i) a+b′ = 1 যদি আৰু যদিহে a+b = a

(ii) a.b′ = 0 যদি আৰু যদিহে a.b = a

প্ৰমাণ ঃ (i) ধৰা হ'ল a+b′ = 1

এতিয়া a + b = (a+b) . 1

= (a+b).(a+b′), দিয়া আছে

= (a+(b.b′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= a+0

= a

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল a+b = a

এতিয়া a+b′ = 1.(a+b′)

= (a+a′).(a+b′)

= a+(a′.b′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= a+a+b)′, দ্য মৰ্গানৰ বিধিৰ পৰা

= a+a′, দিয়া আছে

= 1.

(ii) ধৰা হ'ল a.b′ = 0

এতিয়া a.b = a.b + 0

= a.b+a.b′, দিয়া আছে

= a.(b+b′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= a . 1

= a

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল a.b = a

এতিয়া a.b′ = 0 + a.b′

$= (a.a') + (a.b')$

$= a.(a'+b')$, বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= a.(a.b)'$, দ্য মৰ্গানৰ বিধিৰ পৰা

$= a.a'$, দিয়া আছে

$= 0$.

9. (i) $a+(a'.b) = a+b$

(ii) $a.(a'+b) = a.b$

প্ৰমাণ ঃ (i) $a+(a'.b) = (a+a').(a+b)$, বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= 1.(a+b)$

$= a+b$

(ii) $a.(a'+b) = (a.a') + (a.b)$

$= 0 + (a.b)$

$= a.b$

উদাহৰণ 4ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত।

ধৰা হ'ল $a, b \in B$. প্ৰমাণ কৰক যে

$a.(a.b)' = a.b'$

সমাধান ঃ $a.(a.b)'$

$= a.(a'+b')$, দ্য মৰ্গানৰ বিধিৰ পৰা

$= (a.a') + (a.b')$

$= 0 + (a.b')$

$= a.b'$

উদাহৰণ 5ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত, আৰু $a, b, c \in B$. প্ৰমাণ কৰক যে

$(a+b).(b+c).(c+a) = a.b + b.c + c.a$

সমাধান ঃ $(a+b).(b+c).(c+a)$

$= (a+b).(b.c + b.a + c.c + c.a)$

$= (a+b).(b.c + b.a + c + c.a)$

$= a.(b.c) + a.(b.a) + a.c + a.(c.a) + b.(b.c) + b.(b.a) + b.c + b.(c.a)$

$= (a.b.c + a.(a.b) + a.c + a.(a.c) + (b.b).c + (b.b).a + b.c + a.b.c$

$= (a.b.c + a.b.c) + (a.a).b + a.c + (a.a).c + b.c + b.a + b.c)$

$= a.b.c + a.b + a.c + a.c + b.c + b.a + b.c$

$= a.b.c + (a.b + a.b) + (a.c + a.c) + (b.c + b.c)$

$= a.b.c + a.b + a.c + b.c$

$= a.b.(c+1) + a.c + b.c$

= a.b.1 + c.a + b.c

= a.b + b.c + c.a

উদাহৰণ 6ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত আৰু a, b ∈ B। প্ৰমাণ কৰক যে a+b = 0, a = 0, আৰু b = 0 । এই ফলটোৰ লিখক আৰু প্ৰমাণ কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল a = 0, আৰু b = 0

∴ a+b = 0+0

= 0

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল a+b = 0

এতিয়া a = a+0

= a+(b.b′)

= (a+b).(a+b′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= 0.(a+b′), দিয়া আছে

b = b+0

= b + (a.a′)

= (b+a).(b+a′)

= (a+b).(b+a′)

= 0.(b+a′)

= 0

দ্বিতীয় অংশ

ওপৰৰ ফলটোৰ দ্বৈধটো হ'ল a.b = 1 ⇔ a = 1 আৰু b = 1.

যদি a = 1, b = 1,

a.b = 1.1 = 1

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল a.b = 1

এতিয়া a = a.1

= a.(b+b′)

= (a.b) + (a.b′)

= 1 + (a.b′)

= 1

b = b.1

= b.(a+a′)

= (b.a) + (b.a′)

= (a.b) + (b.a′)

= a + (b.a′)

= 1

উদাহৰণ 7ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত আৰু a, b, c∈B. প্ৰমাণ কৰক যে তলৰ ৰাশিবোৰ সমান।

(i) $(a+b).(a'+c).(b+c)$

(ii) $a.c + a'.b + b.c$

(iii) $(a+b).(a'+c)$

(iv) $a.c + a'.b$

সমাধান ঃ $(a+b).(a'+c).(b+c)$

$= (a+b).(a'.b + a'.c + c.b + c.c)$

$= (a+b).(a'.b + a'.c + c.b + c)$

$= a.a'.b + a.a'.c + a.c.b + a.c + b.a'.b + b.a'.c + b.c.b + b.c$

$= 0.b + 0.c + a.c.b + a.c + b.a' + b.a'.c + b.c + b.c$

$= b.c.(a + a') + a.c + b.c + b.a'$

$= b.c.1 + a.c + b.c + a'.b$

$= b.c + a.c + b.c + a'.b$

$= a.c + a'.b + b.c$ (1)

আকৌ, $(a+b).(a'+c)$

$= a.a' + a.c + b.a' + b.c$

$= 0 + a.c + a'.b + b.c$

$= a.c + a'.b + b.c$ (2)

আকৌ, $a.c + a'.b + b.c$

$= a.c + a'.b + 1.b.c$

$= a.c + a'.b + (a+a').b.c$

$= a.c + a'.b + a.b.c + a'.b.c$

$= (a.c) + (a.c).b) + ((a'.b) + (a'.b).c)$

$= a.c + a'.b$, বিধিৰ পৰা (3)

(1), (2) আৰু (3)ৰ পৰা আমি পালোঁ যে

$(a+b).((a'+c).(b+c)$

$= a.c + a'.b + b.c$

$= (a+b).(a'+c)$

$= a.c + a'.b$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৮ঃ প্রমাণ কৰক যে তিনিটা মৌলবিশিষ্ট বুলীয় বীজগণিত নাই।

প্রশ্ন নং ৯ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত আৰু ধৰা হ'ল a, b, c∈B. যদি a+c=a, b+c=b, প্রমাণ কৰক যে (a.b) + c = a.b

প্রশ্ন নং ১০ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত। ধৰা হ'ল a, b ∈ B. প্রমাণ কৰক যে $a+(a+b)' = a+b'$.

প্রশ্ন নং ১১ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত, আৰু ধৰা হ'ল a, b∈B. প্রমাণ কৰক যে তলৰ ধর্মবোৰ সমতুল্য।

(i) a+b=a, (ii) $a+b'=1$, (iii) a.b=b

ওপৰৰ ফলটোৰ দ্বৈধটো লিখক আৰু প্রমাণ কৰক।

প্রশ্ন নং ১২ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত, আৰু ধৰা হ'ল a, b, c∈B. প্রমাণ কৰক যে

$[(abc+a'b')' + bc]' = a'b'$

[ইয়াত abc ৰ অর্থ a.b.c]

১৪.৫ বুলীয় ৰাশি (BOOLEAN EXPRESSION)

B={0, 1} বুলীয় বীজগণিতটো লোৱা হ'ল। ইয়াত +, . , আৰু $'$ প্রক্রিয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে।

+	0	1
0	0	1
1	1	1

•	0	1
0	0	0
1	0	1

/	0	0
	1	0

B ৰ কোনো মৌল বুজাবলৈ যি আঞ্চলিক প্রতীক ব্যৱহাৰ কৰা হয়, তাক বুলীয় চলক (Boolean variable) বোলে। গতিকে যদি x এ এটা বুলীয় চলক বুজায়, তেনেহ'লে x অৰ মান 0 বা 1 হ'ব। যদি x এটা বুলীয় চলক, x' ও এটা বুলীয় চলক।

ধৰা হ'ল x, y দুটা বুলীয় চলক। তলৰ সাৰণীখনত x, y ৰ মান দিয়া আছে।

x	y
1	1
1	0
0	1
0	0

ধৰা হ'ল x, y, z তিনিটা বুলীয় চলক। x, y, z অৰ মান তলৰ সাৰণীখনত দিয়া আছে।

x	y	z
1	1	1
1	1	0
1	0	1
0	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1
0	0	0

সসীম সংখ্যক বুলীয় চলকত দ্বৈত প্রক্রিয়া + আৰু . , আৰু একক প্রক্রিয়া $^{/}$ প্রয়োগ কৰি যি ৰাশি পোৱা যায় তাক **বুলীয় ৰাশি** (Boolean expression) বোলে। উদাহৰণস্বৰূপে $x.y + x^{/}$ এটা দুটা চলকৰ বুলীয় ৰাশি। সেইদৰে $x.y+y.z+z.x$ এটা তিনিটা চলকৰ বুলীয় ৰাশি।

মন কৰিব লগীয়া যে 0, আৰু 1 দুটা বুলীয় ৰাশি। যিকোনো চলকেই এটা বুলীয় ৰাশি।

প্রতিটো বুলীয় ৰাশিৰ অনুৰূপে আমি এখন সাৰণী গঠন কৰিব পাৰোঁ। ইয়াক সত্যতা সাৰণী বা সাৰণী বা মান সাৰণী (truth table or the assignment table or the value table) বোলে।

$xy+x^{/}$ বুলীয় ৰাশিটোৰ বাবে আমি এখন সত্যতা সাৰণী গঠন কৰোঁ। (ইয়াত xy এ x.y বুজাইছে।)।

x	y	xy	$x^{/}$	$xy+x^{/}$
1	1	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ চলকৰ দুটা বুলীয় ৰাশিক **সমান** বুলি কোৱা হয় যদি $x_1, x_2, \ldots, x_n$ চলকৰ প্রত্যেক মান 0, 1 অৰ বাবে একে মান পোৱা যায়।

দুটা বুলীয় ৰাশিৰ সমতাক " = " প্রতীকেৰে বুজোৱা হয়।

উদাহৰণ 8 ঃ x, y, z চলকৰ বুলীয় ৰাশি xy + xz অৰ বাবে সত্যতা সাৰণী গঠন কৰক।

সমাধান ঃ

x	y	z	xy	xz	xy+xz
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

উদাহৰণ 9 ঃ x, y চলকৰ বুলীয় ৰাশি $xy+x'y+xy'+x'y'$ অৰ বাবে সত্যতা সাৰণী গঠন কৰক।

সমাধান ঃ

x	y	x'	y'	xy	$x'y$	xy'	$x'y'$	$xy+x'y+xy'+x'y'$
1	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1

উদাহৰণ 10 ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $(xy+x)'$ আৰু $(x'+y')x'$ বুলীয় ৰাশি দুটা সমান।

সমাধান ঃ

x	y	xy	xy+x	$(xy+x)'$
1	1	1	1	0
1	0	0	1	0
0	1	0	0	1
0	0	0	0	1

আকৌ,

x	y	x'	y'	$x'+y'$	$(x'+y')x'$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

ওপৰৰ সাৰণী দুখনৰ শেষৰ স্তম্ভ দুটা নিৰীক্ষণ কৰি আমি দেখিলোঁ যে $(xy+x)' = (x'+y')x'$.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১৩ঃ ধৰা হ'ল x, y, z চলকৰ f(x, y, z) = xy + z$^{/}$ এটা বুলীয় ৰাশি। f(1, 1, 0), f(0, 1, 1), f(0, 1, 0), f(1, 1, 1), f(0, 0, 0) ৰ মান নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ১৪ঃ তলৰ বুলীয় ৰাশিবোৰৰ বাবে সত্যতা সাৰণী গঠন কৰক।

(i) x + yx$^{/}$ (ii) x(x+y$^{/}$)

(iii) xy + yz + zx (iv) xy$^{/}$ + x(y$^{/}$+z)

প্রশ্ন নং ১৫ঃ তলৰ বুলীয় ৰাশিবোৰ সমান হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

(i) (x+y)$^{/}$, x$^{/}$y$^{/}$

(ii) (xy)$^{/}$, x$^{/}$ + y$^{/}$

(iii) x(y+z), xy+xz

(iv) xz + (x$^{/}$+y$^{/}$)$^{/}$, x(y+z)



১৪.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- ধৰা হ'ল দুটা দ্বৈত প্রক্রিয়া + আৰু . , আৰু এটা একক প্রক্রিয়া $^{/}$ যুক্ত, আৰু দুটা পৃথক মৌল 0 আৰু 1 থকা B এটা অৰিক্ত সংহতি। তেনেহ'লে B ক এটা বুলীয় বীজগণিত বুলি কোৱা হয় যদি তলৰ চর্তসমূহ সিদ্ধ হয়।

  1. (i) a+b = b+a, (ii) a.b = b.a, $\forall\ a,b \in B$

  2. (i) a+ (b.c) = (a+b).(a+c)

     (ii) a.(b+c) = (a.b)+(a.c), $\forall\ a, b, c \in B$

  3. (i) a+0 = a, (ii) a.1 = 1, $\forall\ a \in B$

     (ii) a+a$^{/}$ = 1, (ii) a.a$^{/}$ = 0, $\forall\ a \in B$

     0 ক শূন্য মৌল বুলি কোৱা হয়।

     1 অক একক মৌল বুলি কোৱা হয়।

  a$^{/}$ অক প্রত্যেক মৌলৰ a বুলি কোৱা হয়।

- এটা বুলীয় বীজগণিতত শূন্য মৌল অদ্বিতীয়।
- এটা বুলীয় বীজগণিতত একক মৌল অদ্বিতীয়।
- এটা বুলীয় বীজগণিতত প্রত্যেক মৌলৰ পূৰক অদ্বিতীয়।
- এটা বুলীয় বীজগণিত B ত 1$^{/}$ = 0, 0$^{/}$ = 1.

- বুলীয় বীজগণিতৰ প্ৰতিটো উক্তি আৰু প্ৰতিটো উপপাদ্য বৈধ হয় যদি দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া + আৰু . , আৰু শূন্য মৌল 0 আৰু একক মৌল। সালসলনি কৰা হয়। এই বিধিটোক দ্বৈধতা বিধি বুলি কোৱা হয়।
- এটা বুলীয় বীজগণিত B ত
  1. (i) a+a = a, (ii) a.a = a, $\forall\ a \in B$
  2. (i) a+1 = 1, (ii) a.0 = 0
  3. (i) a+(a.b) = a, (ii) a, (a+b) = a
  4. (i) (a+b)+c = a+(b+c)
     (ii) (a.b).c = a.(b.c), ()
  5. $(a')' = a$
  6. (i) $(a+b)' = a'.b'$, (ii) $(a.b)' = a'+b'$
  7. (i) যদি b+a=c+a, আৰু $b+a' = c+a'$, তেনেহ'লে b=c
     (ii) যদি b.a. = c.a, আৰু $b.a' = c.a'$, তেনেহ'লে b=c
  8. (i) $a+b'=1$ যদি আৰু যদিহে a+b = a
     (ii) $a.b' = 0$ যদি আৰু যদিহে a.b = a
  9. (i) $a+(a'.b) = a+b$
     (ii) $a.(a'+b) = a.b$
- B = {0, 1} বুলীয় বীজগণিতৰ কোনো মৌল বুজাবলৈ যি আক্ষৰিক প্ৰতীক ব্যৱহাৰ কৰা হয়, তাক বুলীয় চলক বোলা হয়। B ত +, . , / প্ৰক্ৰিয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

+	0	1
0	0	1
1	1	1

1	0	1
0	0	0
1	0	1

/	0	
	1	0

- সসীম সংখ্যক বুলীয় চলকত দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া + আৰু . , আৰু একক প্ৰক্ৰিয়া / প্ৰয়োগ কৰি যি ৰাশ পোৱা যায় তাক বুলীয় ৰাশি বোলে।
- 0 আৰু 1 দুটা বুলীয় ৰাশি।
- যিকোনো চলকেই এটা বুলীয় ৰাশি।
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ চলকৰ দুটা বুলীয় ৰাশিক **সমান** বুলি কোৱা হয় যদি $x_1, x_2, \ldots,$ x_n চলকৰ প্ৰত্যেক মান 0, 1 অৰ বাবে একে মান পোৱা যায়।
  দুটা বুলীয় ৰাশিৰ সমতাক " = " প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হয়।



১৪.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত x = {1}

P(x) = {{1}, (ϕ)}

$\cup$	{1}	ϕ
{1}	{1}	{1}
ϕ	{1}	ϕ

$\cap$	{1}	ϕ
{1}	{1}	ϕ
ϕ	ϕ	ϕ

$\cap$	/	
{1}	ϕ	
ϕ	{1}	

সাৰণীৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে P(x) সংহতিত $\cup$ এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া, $\cap$ এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া, $'$ এটা একক প্রক্রিয়া।

এতিয়া 1. (i) $A \cup B = B \cup A$

(ii) $A \cap B = B \cap A,\ \forall\ A, B \in P(x)$

2. (i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),\ \forall\ A, B, C \in P(x)$

3. (i) $A \cup \phi = A$

(ii) $A \cap \{1\} = \{1\},\ \forall\ A \in P(x)$

4. (i) $A \cup A' = \{1\}$

(ii) $A \cap A' = \phi,\ \forall\ A \in P(x)$

$\therefore (P(X), \cup, \cap, /)$ এটা বুলীয় বীজগণিত। ইয়াত ϕ হ'ল শূন্য মৌল আৰু {1} হ'ল একক মৌল।

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ +, . , / প্রক্রিয়াৰ বাবে প্রক্রিয়া সাৰণী গঠন কৰা হ'ল।

+	1	2	3	5	6	10	15	30
1	1	2	3	5	6	10	15	30
2	2	2	6	10	6	10	30	30
3	3	6	3	15	6	30	15	30
5	5	10	15	5	30	10	15	30
6	6	6	6	30	6	30	30	30
10	10	10	30	10	30	10	30	30
15	15	30	15	15	30	30	15	30
30	30	30	30	30	30	30	30	30

.	1	2	3	5	6	10	15	30
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	1	2	2	1	2
3	1	1	3	1	3	1	3	3
5	1	1	1	5	1	5	5	5
6	1	2	3	1	6	2	3	6
10	1	2	1	5	3	5	15	15
15	1	1	3	5	3	5	15	15
30	1	2	3	5	3	10	15	30

/	1	2	3	5	6	10	15	30
	30	15	10	6	5	3	2	1

ওপৰৰ সাৰণীৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে B ত + এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, আৰু / এটা একক প্ৰক্ৰিয়া।

আকৌ, 1. (i) a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= b, a ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= b+a, $\forall\ a, b \in B$

(ii) a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= b, a ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= b.a, $\forall\ a, b \in B$

2. সাৰণীৰ পৰা আমি পালোঁ

(i) a+(b.c) = (a+b).(a+c)

(ii) a.(b+c) = (a.b)+(a.c), $\forall\ a, b, c \in B$

3. (i) a+1 = a, 1 অৰ লঃ সাঃ গুঃ = a, $\forall\ a \in B$

(ii) a. 30 = a, 30 ৰ গঃ সাঃ গুঃ = a, $\forall\ a \in B$

4. (i) $a+a^{/} = a$, $a^{/}$ ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= a, $\frac{30}{a}$ ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= 30

(ii) $a.a^{/} = a$, $a^{/}$ ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= a, $\frac{30}{a}$ ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$\therefore$ (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত। ইয়াত 1 হ'ল শূন্য মৌল আৰু 30 একক মৌল।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল X = {1, 2, 3, 4}

গতিকে x অৰ ঘাত সংহতি P(x) অত 2^4 টা অর্থাৎ 16 টা মৌল আছে।

মিলন, ছেদন আৰু পূৰক প্রক্রিয়াৰ অধীনত P(x) এটা বুলীয় বীজগণিত।

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত B = {0, a, b, 1}

B ত +, . , / প্রক্রিয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

+	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

.	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

/	0	a	b	1
	1	b	a	0

সাৰণীৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে B ত + এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া, . এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া আৰু $^{/}$ এটা একক প্রক্রিয়া।

এতিয়া

1. (i) B ত + প্রক্রিয়া ক্রমবিনিময়ে।

   (ii) B ত **.** প্রক্রিয়া ক্রমবিনিময়

2. (i) B ত **.** প্রক্রিয়াৰ ওপৰত + প্রক্রিয়াই বিতৰণ বিধি মানি চলে।

   (ii) B ত + প্রক্রিয়াৰ ওপৰত **.** প্রক্রিয়াই বিতৰণ বিধি মানি চলে।

3. (i) a+0 = a

   (ii) a.1 = 1, $\forall\ a \in B$

4. (i) $a+a^{/} = 1$

   (ii) $a.a^{/} = 0,\ \forall\ a \in B$

$\therefore$ (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত। ইয়াত 0 হ'ল শূন্য মৌল আৰু 1 হ'ল একক মৌল।

৭ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ 20 ৰ সকলো ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতি B = {1, 2, 4, 5, 10, 20}

প্রক্রিয়া সাৰণী কেইখন গঠন কৰা হ'ল।

+	1	2	4	5	10	20
1	1	2	4	5	10	20
2	2	2	4	10	10	20
4	4	4	4	20	20	20
5	5	10	20	5	10	20
10	10	10	20	10	10	20
20	20	20	20	20	20	20

.	1	2	4	5	10	20
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	1	2	2
4	1	2	4	1	2	4
5	1	1	1	5	5	5
10	1	2	2	5	10	10
20	1	2	4	5	10	20

/	1	2	4	5	10	20
	20	10	5	4	2	1

সাৰণীৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে B ত + এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, . এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, / এটা একক প্ৰক্ৰিয়া।

এতিয়া 1 (i) a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= b, a ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= b+a

(ii) a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= b, a ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= b.a

2. সাৰণীৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে

(i) a+(b.c) = (a+b), (a+c)

(ii) a.(b+c) = (a.b) + (a.c), $\forall\ a, b, c \in B$

3. (i) a+1 = a, 1 ৰ লঃ সাঃ গুঃ

(ii) a.20 = a, 20 ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= a, $\forall\ a \in B$

4 (i) আৰু 4 (ii) চৰ্ত দুটা সিদ্ধ নহয়। কিয়নো

$10+10^{/} = 10, 10^{/}$ ৰ লঃ সাঃ গুঃ

$= 10, \frac{20}{10}$ ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= 10, 2 ৰ লঃ সাঃ গুঃ

$= 10 \neq 20$

∴ B এটা বুলীয় বীজগণিত নহয়।

টোকা ঃ প্ৰমাণ ব্যতিৰেকে তলৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি দিয়া হ'ল।

ধৰা হ'ল n > 1 এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা। ধৰা হ'ল n অৰ সকলো যোগাত্মক ভাজকৰ সংহতিটো B. B ত +, . , / প্ৰক্ৰিয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হ'ল

a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ

a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$a^{/} = \frac{n}{a}$

তেনেহ'লে B এটা বুলীয় বীজগণিত হ'ব যদি আৰু যদিহে কোনো বৰ্গ অখণ্ড সংখ্যাৰে n বিভাজ্য নহয়।

ওপৰৰ উদাহৰণটোত, n = 20 আৰু 4 অৰ দ্বাৰা 20 বিভাজ্য। 4 এটা বর্গ সংখ্যা।

৮ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল B এটা তিনিটা মৌলবিশিষ্ট বুলীয় বীজগণিত।

ধৰা হ'ল B ={0, 1, a}, য'ত $a \neq 0,\ a \neq 1$

আমি জানো যে $0' = 1,\ 1' = 0$

$\therefore a' = a$

এতিয়া $a = a.a$

$= a.a'$

= 0, এইটো স্ববিৰোধী কথা।

$\therefore$ তিনিটা মৌলবিশিষ্ট বুলীয় বীজগণিত থাকিব নোৱাৰে।

৯ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $(a.b) + c = c+(a.b)$, ক্রমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা

$= (c+a).(c+b)$, বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= (a+c).\ (b+c)$, ক্রমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা

$= a.b$, (দিয়া আছে)

১০ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $a+(a+b)' = a+(a'.b')$

$= (a+a').(a+b')$

$= 1.\ (a+b')$

$= a+b'$

১১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ প্রথমতে আমি প্রমাণ কৰোঁ যে (i) $\Rightarrow$ (ii)

আমি জানো $a+b = a$

$\therefore a+b' = 1.\ (a+b')$

$= (a+a').(a+b')$

$= a+(a'.b')$

$= a+(a+b)'$

$= a+a'$

= 1

দ্বিতীয়তে আমি প্রমাণ কৰোঁ যে (ii) $\Rightarrow$ (iii)

আমি জানো যে $a+b' = 1$

$\therefore a+b = (a+b).1$

$= (a+b).(a+b')$

$= a+(b.b')$

$= a+0$

$= a$

এতিয়া $a.b = (a+b).b$

= b.(a+b)

= b. (b+a)

= b, বিশোষণ বিধিৰ পৰা

তৃতীয়তে আমি প্ৰমাণ কৰোঁ যে (iii) $\Rightarrow$ (i)

আমি জানো a.b = b

এতিয়া a+b = a+ (a.b)

= a, বিশোষণ বিধিৰ পৰা

গতিকে আমি দেখিলোঁ যে (i), (ii), আৰু (iii) ধৰ্মকেইটা সমতুল্য।

দ্বিতীয় অংশ ঃ ওপৰৰ উপপাদ্যটোৰ দ্বৈধটো হ'ল

(i) a.b = a, (ii) a.b′ = 0, (iii) a+b = b

প্ৰথম অংশত • প্ৰক্ৰিয়াৰ ঠাইত + , + প্ৰক্ৰিয়াৰ ঠাইত • , 0 ৰ ঠাইত 1, 1 অৰ ঠাইত 0

বহুৰাই এইটো প্ৰমাণ কৰিব পাৰি।

১২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $[(abc+a'b')' + bc]'$

= (abc+a′b′) (b′+c′), দ্য মৰ্গানৰ বিধিৰ পৰা

= abc b′ + abc c′ + a′b′b′+a′b′c′

= ac 0 + ab 0 + a′b′ + a′b′c′, [bb′=0, cc′ = 0, b′b′=b′]

= a′b′ + a′b′c′

= a′b′ I + a′b′c′

= a′b′ (1+c′)

= a′b′, 1+c′=1

১৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ f(x, y, z) = xy+z′

∴ f(1, 1, 0) = 1.1 + 0′

= 1+1 = 1

f(0, 1, 1) = 0.1 + 1′

= 0 + 0

= 0

f(0, 1, 0) = 0.1 + 0′

= 0+1

= 1

f(1, 1, 1) = 1.1.+1′

= 1+0

= 1

f(0, 0, 0) = 0.0 + 0′

= 0+1

= 1

১৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ

(i)

x	y	x'	yx'	$x+yx'$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

(ii)

x	y	y'	$x+y'$	$x(x+y')'$
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0

(iii)

x	y	z	xy	yz	zx	xy+yz+zx
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

(iv) নিজে চেষ্টা কৰক।

১৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ

(i)

x	y	x+y	$(x+y)'$	x'	y'	$x'y'$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

স্তম্ভ 4 আৰু স্তম্ভ 7 অৰ পৰা আমি পালো যে $(x+y)' = x'y'$

(ii) নিজে চেষ্টা কৰক।

(iii) নিজে চেষ্টা কৰক।

(iv)

x	y	z	xz	$x^{/}$	$y^{/}$	$x^{/}+y^{/}$	$(x^{/}+y^{/})^{/}$	$xz+(x^{/}+y^{/})$	y+z	x(y+z)
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0

স্তম্ভ 9 আৰু স্তম্ভ 11 অৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে

$xz + (x^{/}+y^{/})^{/} = x(y+z)$



১৪.৮ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

১) Sen, M. K, Chakraborty B. C. : *Introduction to Discrete Mathematies* (2010), Books and Allied (P) Ltd, Kolkata 700010.

২) Dasgupta Asok : *Abstract and Linean Algebra* (2014), Asoke Prakasan, Kolkata 700007.



১৪.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্রশ্ন ১ঃ ধৰা হ'ল X = {1, 2}. ধৰা হ'ল X অৰ ঘাত সংহতি P (x)। প্ৰমাণ কৰক যে মিলন, ছেদন আৰু পূৰক প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত P(x) এটা বুলীয় বীজগণিত।

প্রশ্ন ২ঃ ধৰা হ'ল 170 ৰ সকলো ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতিটো B = {1, 2, 5, 10, 17, 34, 85, 170}। B ত +, . , / প্ৰক্ৰিয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ

a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$a^{/} = \frac{170}{a}$

(B, +, . , /) বুলীয় বীজগণিত হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন ৩ঃ ধৰা হ'ল 24 অৰ সকলো ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতিটো B = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}। B ত +, . , / প্রক্রিয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ

a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$a' = \frac{24}{a}$

(B, +, . , /) বুলীয় বীজগণিত হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন ৪ঃ ধৰা হ'ল (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত আৰু ধৰা হ'ল a, b $\in$ B তলৰ ৰাশিকেইটা সংক্ষিপ্ত ৰূপত প্রকাশ কৰক।

(i) $(a+b).(a'+b').(a'+b).(a+b')$
(ii) $(a.b)+(a'.b)+(a.b')+(a'.b')$

প্রশ্ন ৫ঃ ধৰা হ'ল (b, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত, আৰু a, b, c, d $\in$ B. প্রমাণ কৰক যে $a.c + b.d = (a+b).(b+c).(c+d).(d+a)$

প্রশ্ন ৬ঃ অসীম মৌলবিশিষ্ট বুলীয় বীজগণিত এটাৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন ৭ঃ ধৰা হ'ল (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত, আৰু a, b, c $\in$ B. প্রমাণ কৰক যে $(a+b').(b+c').(c+a')=(a'+b).(b'+c).(c'+a)$

প্রশ্ন ৮ঃ ধৰা হ'ল x, y, z চলক তিনিটাৰ $f(x, y, z) = x.y.z + x.y'.z + x'.y.x + x'.y'.z'$ এটা বুলীয় ৰাশি। f(1, 1, 1), f(1, 1, 0), f(1, 0, 1), f(0, 1, 1), f(0, 0, 0) ৰ মান নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৯ঃ তলৰ বুলীয় ৰাশিৰ বাবে প্রক্রিয়া সাৰণী গঠন কৰক।

(i) $xy+x(x+y)$ (ii) $x'y+xy'+x(x+y')$ (iii) $xyz+xy'z+x'yz+xyz'$

প্রশ্ন ১০ঃ তলৰ বুলীয় ৰাশিকেইটা সমান হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

(i) $(x+y+z)'$, $x'y'z'$
(ii) $(xyz)'$, $x'+y'+z'$
(iii) $x.(x+y)$, x
(iv) $(x+y)z'$, $xz'+yz'$

*** ***** ***



প্রসঙ্গ পুথি

- Fraleigh, John B : A First in Abstract Algebra (First Indian Reprit, 2003, Person Education (Singapore) Pvt. Ltd., Indian Delhi 110, 092.
- Mapa, S. K. : Higher Algebra (Abstract and Linear) (1994), Ashok Prakashan, Calcutta 700 007.
- Khanna, V. K. and Bhambri, S. K. : A Course in Abstract Algebra (2006), Vikas Publishing House Pvt. Ltd, New Delhi 110 014.
- Singh, Surajeet and Zameeruddin, Qazi Modern Algebra (2006, Vikas Publishing House Pvt. Ltd, New Delhi 110 014.
- Tamuli B. K. : Contemporary Algebra (1977), New Book Stall, Guwahati- 781 001.
- Pundir S . K. : Advance Abstract Algebra, Krishna Prakashan Media (P) Ltd, Meerut 250 001
- Sharma, J. K. : Discrete Mathematics, Macmillian Publishing India Ltd., New Delhi- 110002