অধ্যায় ৯ ঃ বলয় (RING)

অধ্যায় গাঁথনি

৯.১ উদ্দেশ্য

৯.২ পৰিচয়

৯.৩ বলয়

৯.৪ বলয়ৰ ধর্ম

৯.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৯.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৯.৭ অধিক জানিবলৈ

৯.৮ আর্হি প্রশ্ন

৯.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰাৰ পাছত আপুনি অধোলিখিত বিষয়বোৰ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

- বলয়
- বলয়ৰ ধর্ম

৯.২ পৰিচয়

আমি সংঘ আৰু ইয়াৰ বিভিন্ন ধর্ম, উপসংঘ, সহসংহতি, চক্রীয় সংঘ, নিশ্চৰ উপসংঘ আৰু ভাগফল সংঘ সম্বন্ধে আলোচনা কৰিছোঁ। এই অধ্যায়ত আমি বলয় সম্বন্ধে অধ্যয়ন কৰিম। সংঘ এটা বীজগণিতীয় গাঁথনি অর্থাৎ কেইটামান নির্দিষ্ট স্বীকার্য সিদ্ধ কৰা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়াযুক্ত অৰিক্ত সংহতি। বলয়ো এটা বীজগণিতীয় গাঁথনি অর্থাৎ কেইটামান নির্দিষ্ট স্বীকার্য সিদ্ধ কৰা দুটা দ্বৈত প্রক্রিয়াযুক্ত এটা অৰিক্ত সংহতি।

৯.৩ বলয়

যোগ (+) আৰু পূৰণ (.) এই দুটা দ্বৈত প্রক্রিয়াযুক্ত এটা অৰিক্ত সংহতি R অক বলয় (ring) বুলি কোৱা হয় যদি অধোলিখিত স্বীকার্যকেইটা সিদ্ধ হয়।

(1) যোগৰ অধীনত R এটা আবেলীয় সংঘ,

(2) পূৰণৰ অধীনত R এটা অর্ধসংঘ,

(3) বিতৰণ বিধি দুটা প্রযোজ্য হয়, যথা,

a. (b + c) = a.b + a.c, (বাওঁ বিতৰণ বিধি)

$(a + b).\ c = a.c + b.c$, (সোঁ বিতৰণ বিধি) $\forall\ a, b, c \in R$

টোকা 1. বলয় হ'বলৈ হ'লে উপৰিউক্ত স্বীকার্যকেইটা সিদ্ধ কৰা + আৰু . দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াযুক্ত এটা অৰিক্ত সংহতি থাকিব লাগিব। পাছত আমি মাত্ৰ 'ধৰা হ'ল R এটা বলয়' বুলিহে লিখিম। কিন্তু এইটো কথা মনত ৰাখিব লাগিব যে R অত দুটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া আছে, যথা + আৰু .।

2. এইটো কথাও মনত ৰাখিব লাগিব যে + আৰু . দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া দুটা আমাৰ সচৰাচৰ যোগ আৰু পূৰণ নহ'ব পাৰে।

3. যিহেতু যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত R এটা আবেলীয় সংঘ, গতিকে যোগাত্মক একক মৌল 0, R অত আছে। ইয়াক R অৰ **শূন্য** মৌল (zero element) বুলি কোৱা হয়। ইয়াত O এটা প্ৰতীক। ইয়াক বাস্তৱ সংখ্যা **শূন্য** বুলি ভাবিব নালাগে।

4. যদি $a, b \in R$, তেনেহ'লে $-b \in R$ ($\because$ R যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ)। $a + (-b)$ ক সাধাৰণতে $a - b$ ৰে বুজোৱা হয়।

5. a.b ক সাধাৰণতে ab ৰে বুজোৱা হয়।

ক্ৰমবিনিময় বলয়

এটা বলয় R অক ক্ৰমবিনিময় (commutative) বুলি কোৱা হয় যদি $ab = ba$, $\forall\ a, b \in R$.

এককসহ বলয়

এটা বলয় R অক এককসহ বলয় (ring with unity or identity) বোলা হয় যদি R অত এনে এটা মৌল e থাকে যাতে $ae = a = ea$, $\forall\ a \in R$

টোকা 1. এটা বলয়ৰ একক থাকিবও পাৰে, নাথাকিবও পাৰে।

2. যদি R এটা এককসহ বলয় হয়, একক আৰু **শূন্য** মৌল একে হ'বও পাৰে। উদাহৰণস্বৰূপে {0} এটা এককসহ ক্ৰমবিনিময় বলয়। ইয়াত 0 হ'ল যোগাত্মক তথা গুণাত্মক একক। এই বলয়টোক **শূন্য বলয়** (zero ring) বুলি কোৱা হয়।

উপপাদ্য 3.1 যদি R এটা এককসহ বলয়, একক অদ্বিতীয়।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল R এটা এককসহ বলয়। যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল e আৰু f, R অৰ দুটা একক।

$\therefore\ ef = e = fe$ [$\because$ f একক]

$ef = f = fe$ [$\because$ e একক]

$\therefore e = f$

উদাহৰণ 1. ধৰা হ'ল $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \text{ অখণ্ড সংখ্যা} \right\}$

I (i) ধৰা হ'ল $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$, $\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$,

$a, b, c, d \in Z$

এতিয়া $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in R$

$\therefore$ R অত মৌলকক্ষৰ যোগ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

(ii) আমি জানো যে মৌলকক্ষৰ যোগে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) 0 = $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in$R,

আৰু $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(iv) প্ৰত্যেক $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in$R, অৰ বাবে, $\begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in$R যাতে

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ৰ যোগাত্মক বিপৰীত হ'ল $\begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(v) আমি জানো যে মৌলকক্ষৰ যোগ ক্ৰমবিনিময়।

$\therefore$ মৌলকক্ষৰ যোগৰ অধীনত R এটা আবেলীয় সংঘ।

II. (i) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac & ad \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in R$

$\therefore$ R অত মৌলকক্ষৰ পূৰণ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

(ii) আমি জানো যে মৌলকক্ষৰ পূৰণে সাহচর্য বিধি মানি চলে।

III. আমি জানো যে মৌলকক্ষৰ যোগৰ ওপৰত মৌলকক্ষৰ পূৰণে বিতৰণ বিধি (distributive law) মানি চলে। দুয়োটা বিতৰণ বিধি (বাওঁ আৰু সোঁ) সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ মৌলকক্ষৰ যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত R এটা বলয়।

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in$ R, $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in$ R

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$ R বলয়টো ক্ৰমবিনিময় নহয়। আকৌ G ত এনে কোনো X নাই যাৰ বাবে

$$X\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X, \ \forall \ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$$

$\therefore$ R এটা একক বিহীন বলয়।

উদাহৰণ 2 ঃ ধৰা হ'ল R হ'ল অখণ্ড সংখ্যাৰ ওপৰত সকলো 2 x 2 মৌলকক্ষৰ সংহতি।

I. স্পষ্টতঃ মৌলকক্ষৰ যোগৰ অধীনত R এটা আবেলীয় সংঘ।

II. মৌলকক্ষৰ পূৰণৰ অধীনত R এটা অর্ধসংঘ।

III. দুয়োটা বিতৰণ বিধি সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ মৌলকক্ষৰ যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত R এটা বলয়।

আমি জানো যে মৌলকক্ষৰ পূৰণে সাধাৰণতে ক্রমবিনিময়ে বিধি মানি নচলে।

$\therefore$ R বলয়টো ক্রমবিনিময়ে নহয়।

আকৌ I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$, আৰু AI = A = IA, $\forall$ $A \in R$

$\therefore$ R এটা এককসহ বলয়।

উদাহৰণ 3 ঃ ধৰা হ'ল যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিটো 2 Z.

I. যোগৰ অধীনত 2Z এটা আবেলীয় সংঘ।

II. পূৰণৰ অধীনত 2Z এটা অর্ধসংঘ।

III. দুয়োটা বিতৰণ বিধি সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত 2Z এটা বলয়।

তদুপৰি, 2Z এটা ক্রমবিনিময়ে বলয়।

2Z এটা এককবিহীন বলয়, কিয়নো $1 \notin 2Z$

উদাহৰণ 4 ঃ ধৰা হ'ল Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

I. যোগৰ অধীনত Z এটা আবেলীয় সংঘ।

II. পূৰণৰ অধীনত Z এটা অর্ধসংঘ।

III. দুয়োটা বিতৰণ বিধি সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত Z এটা বলয়।

তদুপৰি Z এটা ক্রমবিনিময়ে বলয়। ই এটা এককসহ বলয়, $1 \in Z$.

আন কেইটামান এককসহ ক্রমবিনিময়ে বলয়ৰ উদাহৰণ হ'ল -

- পৰিমেয় সংখ্যাৰ বলয় Q
- বাস্তৱ সংখ্যাৰ বলয় IR
- জটিল সংখ্যাৰ বলয় C

উদাহৰণ 5 ঃ [a, b] ত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বাস্তৱ মানবিশিষ্ট অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ সংহতিটো C [a, b]ৰে বুজোৱা হ'ল, $a, b \in R$

ধৰা হ'ল $f, g \in C [a, b]$

সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল যে $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$(fg)(x) = f(x)\,g(x), \quad x \in [a, b]$

I. (i) $(f + g)(x) = (x) + g(x) \in R$

আকৌ, দুটা অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ যোগফল অবিচ্ছিন্ন।

$\therefore f + g$ অবিচ্ছিন্ন আৰু সেয়ে $f + g \in C[a, b]$

$\therefore C[a, b]$ ত ফলনৰ যোগ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

(ii) ধৰা হ'ল $f, g, h \in c[a, b], x \in [a, b]$

$$\begin{aligned}((f+g)+h)(x) &= (f+g)(x)+h(x)\\ &= \big(f(x)+g(x)\big)+h(x)\\ &= f(x)+\big(g(x)+h(x)\big)\\ &= f(x)+(g+h)(x)\\ &= \big(f+(g+h)\big)(x), \forall x \in [a,b]\end{aligned}$$

$\therefore (f + g) + h = f + (g + h)$

(iii) $0 : [a, b] \to R, \; 0(x) = 0, \; \forall x \in [a, b]$

স্পষ্টতঃ $0 \in C[a, b]$, আৰু

$0 + f = f = f + 0$

(iv) প্ৰত্যেক $f \in C[a, b]$, ৰ বাবে

$-f : [a, b] \to R, \; (-f)(x) = -f(x)$

সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল

$$(f+(-f))(x) = f(x)+(-f)(x) = f(x)-f(x) = 0 = 0(x)$$

$\therefore f + (-f) = 0$

সেইদৰে $(-f) + f = 0$

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= g(x) + f(x)\\ &= (g + f)(x), \; \forall x \in [a, b]\end{aligned}$$

$\therefore f + g = g + f$

$\therefore$ ফলনৰ যোগৰ অধীনত $C[a, b]$ এটা আবেলীয় সংঘ।

II. (i) $(fg)(x) = f(x)\,g(x) \in R$

আকৌ, দু টা অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ পূ�ৰণফল অবিচ্ছিন্ন।

$\therefore fg$ অবিচ্ছিন্ন আৰু সেয়ে $fg \in C[a, b]$.

$\therefore C[a, b]$ ত ফলনৰ পূৰণ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

$$\begin{aligned}((fg)\,h)(x) &= (fg)(x)\,h(x)\\ &= (f(x)\,g(x))\,h(x)\end{aligned}$$

$= f(x)(g(x)h(x))$

$= f(x)(gh)(x)$

$= (f(gh))(x), x \in [a, b]$

$\therefore (fg)h = f(gh)$

$\therefore$ ফলনৰ পূৰণৰ অধীনত C [a, b] এটা অর্ধসংঘ।

III. $((f+g)h)(x) = (f+g)(x)h(x)$

$= (f(x) + g(x))h(x)$

$= f(x)h(x) + g(x)h(x)$

$= (fh)(x) + (gh)(x)$

$= (fh + gh)(x)$

$\therefore (f + g)h = fh + gh$

সেইদৰে $f(g + h) = fg + fh$

$\therefore$ ফলনৰ যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত C [a, b] এটা বলয়।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

প্রশ্ন নং ১ঃ এটা মৌলবিশিষ্ট এটা এককসহ ক্রমবিনিময় বলয়ৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা এককবিহীন অক্রমবিনিময় বলয়ৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ এটা এককবিহীন ক্রমবিনিময় বলয়ৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ এটা এককসহ অক্রমবিনিময় বলয়ৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ এটা এককসহ অসীম ক্রমবিনিময় বলয়ৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ ধৰা হ'ল $IR^2 = \{(a, b) : a, b$ বাস্তৱ সংখ্যা$\}$

সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$,

$(a, b)(c, d) = (ac, bd)$;

a, b, c, d বাস্তৱ।

দেখুৱাওক যে IR^2 এটা এককসহ ক্রমবিনিময় বলয়।

৯.৪ বলয়ৰ ধর্ম

ধৰা হ'ল R এটা বলয়। তেনেহ'লে

(i) $a0 = 0a = 0$; $\forall\ a \in R$

(ii) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$; $\forall\ a, b \in R$

(iii) $(-a)(-b) = ab$; $\forall\ a, b \in R$

(iv) $a(b - c) = ab - ac$; $\forall\ a, b, c \in R$

প্রমাণ (i) $a0 = a(0 + 0)$

$= a0 + a0$, বাওঁ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$\therefore a0 + 0 = a0 + a0$

$\Rightarrow 0 = a0$, যোগাত্মক সংঘ R অত বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা অর্থাৎ $a0 = 0$

সেইদৰে $0a = 0$

(ii) $a0 = 0$

$\Rightarrow a((-b) + b) = 0$, $[\because (-b) + b = 0]$

$\Rightarrow a(-b) + ab = 0$, বাওঁ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$\Rightarrow ab$ ৰ যোগাত্মক বিপৰীত $a(-b)$

$\therefore$ অর্থাৎ $a(-b) = -(ab)$

সেইদৰে $(-a)b = -(ab)$

(iii) $(-a)(-b) = l(-b)$, $l = -a$ লৈ

$= -(lb)$, (ii) ৰ সহায়ত

$= -((-a)b)$

$= -(-(ab))$, (ii) ৰ সহায়ত

$= ab$

(iv) $a(b - c) = a(b + (-c))$

$= ab + a(-c)$, বাওঁ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= ab - ac$, (ii) ৰ সহায়ত

বুলীয় বলয়

ধৰা হ'ল R এটা বলয় আৰু $a \in R$, a ক R অৰ **বর্গসম মৌল** (idempotent element) বুলি কোৱা হয় যদি $a^2 = a$.

এটা বলয় R অক **বুলীয় বলয়** (Boolean ring) বুলি কোৱা হয় যদি ইয়াৰ প্রতিটো মৌল বর্গসম।

টোকা ঃ ঊনবিংশ শতিকাৰ জর্জ বুল (George Boole, 1815-1864) এজন স্ব শিকাৰু ব্রিটিছ। আলোক সন্ধানী গ্রন্থ The Laws of Thought. অৰ বাবে তেওঁ বিখ্যাত।

উপপাদ্য 3 ঃ ধৰা হ'ল R এটা বুলীয় বলয়। তেনেহ'লে

(i) $a + a = o$, $\forall\ a \in R$

অর্থাৎ R অৰ প্রতিটো মৌলই নিজেই নিজৰ যোগাত্মক বিপৰীত।

(ii) $a + b = o \Rightarrow a = b$, $\forall\ a, b \in R$

(iii) R এটা ক্রমবিনিময়ে বলয়।

প্রমাণ (i) ধৰা হ'ল $a \in R$. $\therefore a^2 = a$

আকৌ $a + a \in R$

$\therefore (a + a)^2 = a + a$ [$\therefore$ R এটা বুলীয় বলয়]

$\Rightarrow (a + a)(a + a) = a + a$

$\Rightarrow (a + a)a + (a + a)a = a + a$, বাওঁ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$\Rightarrow (a^2 + a^2) + (a^2 + a^2) - a + a$, সোঁ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$\Rightarrow (a + a) + (a + a) = (a + a) + o$

$\Rightarrow a + a = o$, যোগাত্ম সংঘ R অত বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা

(ii) $a + a = o$

$\therefore a + b = a + a$, (i) অৰ পৰা

$\Rightarrow b = a$, যোগাত্ম সংঘ R অত বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা

অর্থাৎ $a = b$

(iii) ধৰা হ'ল $a, b \in R$ $\therefore a^2 = a, b^2 = b$

আকৌ $a + b \in R$

$\therefore (a + b)^2 = a + b$

$\Rightarrow (a + b)(a + b) = a + b$

$\Rightarrow (a + b)a + (a + b)b = a + b$, বাওঁ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$\Rightarrow (a^2 + ba) + (ab + b^2) = a + b$

$\Rightarrow (a + ba) + (ab + b) = a + b$

$\Rightarrow (a + b) + ba + ab = (a + b) + o$, যোগৰ সাহচর্য্যতা আৰু ক্রমবিনিময়তাৰ পৰা।

$\Rightarrow ba + ab = o$, যোগাত্মক সংঘ R অত বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা

$\Rightarrow ab = ba$, (ii) ৰ পৰা

$\therefore$ R এটা ক্রমবিনিময় বলয়।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল $R = \{a + b\sqrt{2}.a, b. \in Z\}$ দেখুওৱাক যে R এটা যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত এককসহ ক্রমবিনিময় বলয়।

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা বলয় R অত $a^2 = a \; \forall a \in R$, দেখুৱাওক যে $2a = 0$ আৰু $a + b = 0 \Rightarrow a = b$

প্রশ্ন নং ৩ঃ Z ত * আৰু (.) এনেদৰে ধৰা হ'ল যাতে $a(.)b = a+b+1$, $a(.)b = a+b+ab$. দেখুওৱাক যে (+) আৰু (.) প্রক্রিয়াৰ অধীনত Z এটা ক্রম বিনিময় বলয়। বলয়টোত একক মৌল আছেনে?



৯.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- যোগ (+) আৰু পূৰণ (.) – এই দুটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াযুক্ত এটা অৰিক্ত সংহতি R অক বলয় বুলি কোৱা হয়। যদি অধোলিখিত স্বীকার্যকেইটা সিদ্ধ হয়।
  (i) যোগৰ অধীনত R এটা আবেলীয় সংঘ,
  (ii) পূৰণৰ অধীনত R এটা অর্ধসংঘ,
  (iii) বিতৰণ বিধি দুটা প্ৰযোজ্য হয়, যথা,
  $a, (b + c) = a.b + a.c$, (বাওঁ বিতৰণ বিধি)
  $(a + b).c = a.c + b.c$, (সোঁ বিতৰণ বিধি)
  $\forall a, b, c \in R$
- এটা বলয় R অক ক্ৰমবিনিময়ে বুলি কোৱা হয় যদি $ab = ba, \forall a, b \in R$
- এটা বলয় R অক এককসহ বলয় বোলা হয় যদি R অত এনে এটা মৌল e থাকে যাতে $ae = a = ea, \forall a \in R$



৯.৬ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ {o} এটা এককসহ ক্ৰমবিনিময়ে বলয়। মনত ৰাখিব লাগিব যে এই বলয়টোত শূন্য যোগাত্মক একক তথা গুণাত্মক একক।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ R = {(a b) : a, b অখণ্ড সংখ্যা} বলয়টো এককবিহীন অক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় 2Z এটা এককবিহীন ক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ অখণ্ড সংখ্যাৰ ওপৰত সকলো 2 x 2 মৌলকক্ষৰ বলয় R এটা এককসহ অক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় Z এটা এককসহ অসীম ক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $IR^2 = \{(a, b) : a, b$ বাস্তৱ সংখ্যা$\}$

I. (i) ধৰা হ'ল $(a, b), (c, d) \in IR^2$, a, b, c, d বাস্তৱ সংখ্যা।

এতিয়া $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in IR^2$

(ii) ধৰা হ'ল (a, b), (c, d), (e, f) $\in IR^2$

$((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, f)$

$= ((a + c) + e, (b + d) + f)$

$= (a + (c + e), b + (d + f))$

$= (a, b) + (c + e, d + f)$

$= (a, b) + ((c, d) + (a, f))$

$\therefore$ যোগে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) $(0, 0) \in IR^2$ আৰু

$(0, 0) + (a, b) = (a, b) = (a, b) + (0, 0)$

$\therefore$ $(0, 0)$ হ'ল যোগাত্মক একক মৌল।

(iv) প্ৰত্যেক $(a, b) \in IR^2$, অৰ বাবে, $(-a, -b) \in IR^2$ আৰু $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$

$= (-a, -b) + (a, b)$

$\therefore$ (a, b) ৰ যোগাত্মক বিপৰীত $(-a, -b)$.

(v) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

$= (c + a, d + b)$

$= (c, d) + (a, b)$

$\therefore$ যোগে ক্ৰমবিনিময়ে বিধি মানি চলে।

$\therefore$ যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত IR^2 এটা আবেলীয় সংঘ।

II. (i) $(a, b)(c, d) = (ac, bd) \in IR^2$

(ii) $((a, b)(c, d))(e, f) = (ac, bd)(e, f)$

$= ((ac)e, (bd)f)$

$= (a(ce), b(df))$

$= (a, b)(ce, df)$

$= (a, b)((c, d)(e, f))$

$\therefore$ পূৰণে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

$\therefore$ পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত IR^2 এটা অর্ধসংঘ।

III. $(a, b)((c, d) + (e, f)) = (a, b)(c + e, d + f)$

$= (a(c + e), b(d + f))$

$= (ac + ae, bd + bf)$

$= (ac, bd) + (ae, bf)$

$= (a, b)(c, d) + (a, b)(e, f)$

সেইদৰে $((a, b) + (c, d))(e, f) = (a, b)(e, f) + (c, d)(e, f)$

$\therefore$ IR^2 এটা বলয়।

আকৌ (a, b) (c, d) = (ac, bd)

= (ca, db)

= (c, d) (a, b)

∴ IR^2 এটা ক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

আকৌ (1, 1) $\in IR^2$, আৰু

(a, b) (1, 1) = (a1, b1) = (a, b) = (1, 1) (a, b)

∴ (1, 1) হ'ল একক মৌল।

গতিকে IR^2 এটা এককসহ ক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ এইটো সহজে প্ৰতিস্থাপন কৰিব পাৰি যে R এটা $0 = 0 + 0\sqrt{2}$ যোগাত্মক একক আৰু $1 = 1 + 0\sqrt{2}$ গুণাত্মক এককসহ এটা ক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ উপপাদ্য 3 (i), (ii) ৰ পৰা।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ এইটো সহজে প্ৰতিস্থাপন কৰিব পাৰি যে Z এটা ক্ৰমবিনিময়ে বলয়। আকৌ $a\,(.)0 = 0 = 0(.)a,\ \forall a \in z$ গতিকে Z = 0 এককসহ এটা বলয়।



৯.৭ অধিক জানিবলৈ

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.
2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).
3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).
4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.
5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



৩.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ঃ Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি। Z অত (+) আৰু (.) অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হৈছে।

$a (+) b = a + b - 1$,

$a (.) b = a + b - ab$, $\forall a, b \in Z$

(+), (.) অৰ অধীনত Z এটা এককসহ ক্ৰমবিনিময়ে বলয় হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ২ঃ প্ৰমাণ কৰক যে বলয় R ক্ৰমবিনিময়ে হ'ব যদি আৰু যদিহে

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $\forall$ $a, b \in R$

[ইয়াত a^2 অৰ অৰ্থ হ'ল aa]

প্ৰশ্ন ৩ঃ ধৰা হ'ল P(S) S ৰ ঘাত সংহতি। A, B P(S) ৰ বাবে, ধৰা হ'ল (+) আৰু (.) একেদৰে দিয়া আছে যে $A(+)B = A \cup B$, $A(.)B = A \cap B$

দেখুওৱাক যে P(S) এটা এককসহ ক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

*** ***** ***