GMA S2 01

বিমুর্ত বীজগণিত আৰু বিচ্ছিন্ন গণিত

দ্বিতীয় ষাণ্মাসিক

গণিত

খণ্ড ঃ ২

কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

বিষয় বিশেষজ্ঞ

অধ্যাপক নন্দৰাম দাস, গণিত বিভাগ, গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়
ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা, প্রাক্তন মুৰব্বী, গণিত বিভাগ, কটন কলেজ, গুৱাহাটী

সমন্বয়ৰক্ষীঃ হৰেকৃষ্ণ ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

প্রস্তুতি গোটৰ সদস্য

অধ্যায়	*অৰিহণা যোগাইছে*	*ভাষান্তৰকাৰী*
৯, ১০, ১১, ১২, ১৪	ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা কটন মহাবিদ্যালয়, গুৱাহাটী	অধ্যায় ৯, ১০, ১১, ১২, ১৪ ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা
১৩	হৰেকৃষ্ণ ডেকা কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়	অধ্যায় ১৩ গীতাঞ্জলি মেধি

সম্পাদনাঃ

বিষয়বস্তু সম্পাদনা ঃ অধ্যাপক বিশ্বজিৎ ভাগৱতী, প্রাক্তন মুৰব্বী অধ্যাপক গণিত বিভাগ, কটন কলেজ

গাঁথনিক সম্পাদনা ঃ হৰেকৃষ্ণ ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

প্রথম প্রকাশঃ জানুৱাৰী, ২০১৮

Copyright © Krishna Kanta Handiqui State Open University

This Self Learning Material (SLM) of the Krishna Kanta Handiqui State Open University is made available under a Creative Commons Attribution-Non Commercial-Share Alike 4.0 License (international): http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/
For the avoidance of doubt, by applying this license KKHSOU does not waive any privileges or immunities from claims that it may be entitled to assert, nor does KKHSOU submit to the jurisdiction, courts, legal processes or laws of any jurisdiction.

কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ৰ হৈ পঞ্জীয়কৰ দ্বাৰা মুদ্রিত আৰু প্রকাশিত।

মুখ্য কার্যালয় ঃ পাটগাওঁ, ৰাণী গেট, গুৱাহাটী- ৭৮১০১৭
উপমুখ্য কার্যালয় ঃ হাউচফেড কমপ্লেক্স, দিচপুৰ, গুৱাহাটী - ৭৮১০০৬ ;
Web : www.kkhsou.in

খণ্ড পৰিচয়

এই খণ্ডটি ‘বিমুর্ত বীজগণিত আৰু বিচ্ছিন্ন গণিত’ পাঠ্যবিষয়টিৰ দ্বিতীয় খণ্ড। এই খণ্ডটি সর্বমুঠ ছটা অধ্যায়েৰে গঠিত।

নৱম অধ্যায়টিত বলয় আৰু ইয়াৰ ধর্মসমূহৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ’ব।

সেইদৰে, দশম অধ্যায়টিত সমাকল প্রান্ত আৰু ক্ষেত্রৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব। ভেক্টৰ স্থান, ভেক্টৰ স্থানৰ উপস্থান, ৰৈখিক পৰতন্ত্রতা আৰু স্বতন্ত্রতা বিষয়ে একাদশ অধ্যায়টিত আলোচনা কৰা হ’ব। আকৌ, ভেক্টৰ স্থানৰ আধাৰ আৰু মাত্রাৰ বিষয়েও এই অধ্যায়টিত জানিব পাৰিব।

মিশ্রিত গণিতৰ বিষয়ে দ্বাদশ অধ্যায়ত আলোচনা কৰা হ’ব। এই অধ্যায়টিত বিন্যাস আৰু দলৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।

ত্রয়োদশ অধ্যায়ত গাণিতিক যুক্তি বিষয়ে আলোচনা কৰা হ’ব। এই অধ্যায়টিত কিছুমান বৌদ্ধিক সংযোজক বিষয়েও জানিব পাৰিব। বুলীয় বীজগণিতৰ বিষয়ে চতুদর্শ অধ্যায়ত আলোচনা কৰা হ’ব। এই অধ্যায়টিত বুলীয় বীজগণিতৰ মূল বিধি আৰু বুলীয় ৰাশি বিষয়ে জানিব পাৰিব।

এই পাঠ্যবিষয়টি অধ্যয়ন কৰোতে মূল পাঠত ‘জানি থোৱা ভাল’ বাকচবোৰৰ মূল পাঠৰ সৈতে জড়িত কিছু গুৰুত্বপূর্ণ তথ্যৰ সম্ভেদ আছে। প্রতিটো অধ্যায়ত থকা ‘অগ্রগতি নিৰীক্ষণ’ যোগে আগবঢ়োৱা প্রশ্নাৱলীয়ে অধ্যয়নৰ অগ্রগতি সম্পর্কে স্ব-পৰীক্ষণৰ সুবিধা দিব। অধ্যয়নৰ লগে লগে উক্ত প্রশ্নাৱলীৰ উত্তৰসমূহ লিখি শেষত দিয়া ‘অগ্রগতিৰ খতিয়ানে’ৰ সৈতে ৰিজাই চোৱাটো অধিক লাভদায়ক হ’ব। অধ্যায়বোৰৰ শেষত ‘আৰ্হি প্রশ্ন’ হিচাপে কেইটিমান প্রশ্নৰ আৰ্হিও তুলি দিয়া হৈছে।

বিষয় সূচী

পৃষ্ঠা নং

অধ্যায় ৯ঃ **বলয়** ১২১-১৩২

বলয়, বলয়ৰ ধর্ম।

অধ্যায় ১০ঃ **সমাকল প্ৰান্ত আৰু ক্ষেত্ৰ** ১৩৩-১৪০

সমাকল প্ৰান্ত, ক্ষেত্ৰ।

অধ্যায় ১১ঃ **ভেক্টৰ স্থান** ১৪১-১৬৭

ভেক্টৰ স্থানৰ সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ, প্ৰাথমিক ধর্ম, ভেক্টৰ স্থানৰ উপস্থান, ৰৈখিক পৰতন্ত্ৰতা আৰু স্বতন্ত্ৰতা, আধাৰ আৰু মাত্ৰা।

অধ্যায় ১২ঃ **মিশ্ৰিত গণিত** ১৬৮-১৮৪

যোগৰ নিয়ম, পূৰণৰ নিয়ম, বিন্যাস, দল।

অধ্যায় ১৩ঃ **গাণিতিক যুক্তি** ১৮৫-২০২

উক্তিৰ সংজ্ঞা, উক্তিৰ উদাহৰণ, যৌক্তিক সংযোজক ঃ নেতিপদ, সংযোজক পদ, বিমুক্তি পদ, সপ্ৰতিবন্ধ পদ, দ্বি প্ৰতিবন্ধ পদ।

অধ্যায় ১৪ঃ **বুলীয় বীজগণিত** ২০৩-২৩২

সংজ্ঞা, ধর্ম আৰু উদাহৰণ, বুলীয় বীজগণিতৰ মূল বিধি, বুলীয় ৰাশি।

অধ্যায় ৯ ঃ বলয় (RING)

অধ্যায় গাঁথনি

৯.১ উদ্দেশ্য

৯.২ পৰিচয়

৯.৩ বলয়

৯.৪ বলয়ৰ ধর্ম

৯.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৯.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৯.৭ অধিক জানিবলৈ

৯.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

৯.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰাৰ পাছত আপুনি অধোলিখিত বিষয়বোৰ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

- বলয়
- বলয়ৰ ধর্ম

৯.২ পৰিচয়

আমি সংঘ আৰু ইয়াৰ বিভিন্ন ধর্ম, উপসংঘ, সহসংহতি, চক্রীয় সংঘ, নিশ্চৰ উপসংঘ আৰু ভাগফল সংঘ সম্বন্ধে আলোচনা কৰিছোঁ। এই অধ্যায়ত আমি বলয় সম্বন্ধে অধ্যয়ন কৰিম। সংঘ এটা বীজগণিতীয় গাঁথনি অর্থাৎ কেইটামান নির্দিষ্ট স্বীকার্য সিদ্ধ কৰা এটা দ্বৈত প্রক্রিয়াযুক্ত অৰিক্ত সংহতি। বলয়ো এটা বীজগণিতীয় গাঁথনি অর্থাৎ কেইটামান নির্দিষ্ট স্বীকার্য সিদ্ধ কৰা দুটা দ্বৈত প্রক্রিয়াযুক্ত এটা অৰিক্ত সংহতি।

৯.৩ বলয়

যোগ (+) আৰু পূৰণ (.) এই দুটা দ্বৈত প্রক্রিয়াযুক্ত এটা অৰিক্ত সংহতি R অক বলয় (ring) বুলি কোৱা হয় যদি অধোলিখিত স্বীকার্যকেইটা সিদ্ধ হয়।

(1) যোগৰ অধীনত R এটা আবেলীয় সংঘ,

(2) পূৰণৰ অধীনত R এটা অর্ধসংঘ,

(3) বিতৰণ বিধি দুটা প্রযোজ্য হয়, যথা,

a. (b + c) = a.b + a.c, (বাওঁ বিতৰণ বিধি)

$(a + b).\ c = a.c + b.c$, (সোঁ বিতৰণ বিধি) $\forall\ a, b, c \in R$

টোকা 1. বলয় হ'বলৈ হ'লে উপৰিউক্ত স্বীকার্যকেইটা সিদ্ধ কৰা + আৰু . দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াযুক্ত এটা অৰিক্ত সংহতি থাকিব লাগিব। পাছত আমি মাত্ৰ 'ধৰা হ'ল R এটা বলয়' বুলিহে লিখিম। কিন্তু এইটো কথা মনত ৰাখিব লাগিব যে R অত দুটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া আছে, যথা + আৰু .।

2. এইটো কথাও মনত ৰাখিব লাগিব যে + আৰু . দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া দুটা আমাৰ সচৰাচৰ যোগ আৰু পূৰণ নহ'ব পাৰে।

3. যিহেতু যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত R এটা আবেলীয় সংঘ, গতিকে যোগাত্মক একক মৌল 0, R অত আছে। ইয়াক R অৰ **শূন্য** মৌল (zero element) বুলি কোৱা হয়। ইয়াত O এটা প্ৰতীক। ইয়াক বাস্তৱ সংখ্যা **শূন্য** বুলি ভাবিব নালাগে।

4. যদি $a, b \in R$, তেনেহ'লে $-b \in R$ ($\because$ R যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত এটা সংঘ)। $a + (-b)$ ক সাধাৰণতে $a - b$ ৰে বুজোৱা হয়।

5. a.b ক সাধাৰণতে ab ৰে বুজোৱা হয়।

ক্ৰমবিনিময় বলয়

এটা বলয় R অক ক্ৰমবিনিময় (commutative) বুলি কোৱা হয় যদি $ab = ba$, $\forall\ a, b \in R$.

এককসহ বলয়

এটা বলয় R অক এককসহ বলয় (ring with unity or identity) বোলা হয় যদি R অত এনে এটা মৌল e থাকে যাতে $ae = a = ea$, $\forall\ a \in R$

টোকা 1. এটা বলয়ৰ একক থাকিবও পাৰে, নাথাকিবও পাৰে।

2. যদি R এটা এককসহ বলয় হয়, একক আৰু **শূন্য** মৌল একে হ'বও পাৰে। উদাহৰণস্বৰূপে {0} এটা এককসহ ক্ৰমবিনিময় বলয়। ইয়াত 0 হ'ল যোগাত্মক তথা গুণাত্মক একক। এই বলয়টোক **শূন্য বলয়** (zero ring) বুলি কোৱা হয়।

উপপাদ্য 3.1 যদি R এটা এককসহ বলয়, একক অদ্বিতীয়।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল R এটা এককসহ বলয়। যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল e আৰু f, R অৰ দুটা একক।

$\therefore\ ef = e = fe$ [$\because$ f একক]

$ef = f = fe$ [$\because$ e একক]

$\therefore e = f$

উদাহৰণ 1. ধৰা হ'ল $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \text{ অখণ্ড সংখ্যা} \right\}$

I (i) ধৰা হ'ল $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$, $\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$,

$a, b, c, d \in Z$

এতিয়া $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in R$

$\therefore$ R অত মৌলকক্ষৰ যোগ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

(ii) আমি জানো যে মৌলকক্ষৰ যোগে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) $0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in R,$

আৰু $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(iv) প্ৰত্যেক $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in R,$ অৰ বাবে, $\begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in R$ যাতে

$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ৰ যোগাত্মক বিপৰীত হ'ল $\begin{pmatrix} -a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$

(v) আমি জানো যে মৌলকক্ষৰ যোগ ক্ৰমবিনিময়।

$\therefore$ মৌলকক্ষৰ যোগৰ অধীনত R এটা আবেলীয় সংঘ।

II. (i) $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ac & ad \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in R$

$\therefore$ R অত মৌলকক্ষৰ পূৰণ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

(ii) আমি জানো যে মৌলকক্ষৰ পূৰণে সাহচর্য বিধি মানি চলে।

III. আমি জানো যে মৌলকক্ষৰ যোগৰ ওপৰত মৌলকক্ষৰ পূৰণে বিতৰণ বিধি (distributive law) মানি চলে। দুয়োটা বিতৰণ বিধি (বাওঁ আৰু সোঁ) সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ মৌলকক্ষৰ যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত R এটা বলয়।

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in R,\ \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\in R$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\therefore$ R বলয়টো ক্ৰমবিনিময় নহয়। আকৌ G ত এনে কোনো X নাই যাৰ বাবে

$$X\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} X, \ \forall \ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$$

$\therefore$ R এটা একক বিহীন বলয়।

উদাহৰণ 2 ঃ ধৰা হ'ল R হ'ল অখণ্ড সংখ্যাৰ ওপৰত সকলো 2 x 2 মৌলকক্ষৰ সংহতি।

I. স্পষ্টতঃ মৌলকক্ষৰ যোগৰ অধীনত R এটা আবেলীয় সংঘ।

II. মৌলকক্ষৰ পূৰণৰ অধীনত R এটা অর্ধসংঘ।

III. দুয়োটা বিতৰণ বিধি সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ মৌলকক্ষৰ যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত R এটা বলয়।

আমি জানো যে মৌলকক্ষৰ পূৰণে সাধাৰণতে ক্রমবিনিময়ে বিধি মানি নচলে।

$\therefore$ R বলয়টো ক্রমবিনিময়ে নহয়।

আকৌ I = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in R$, আৰু AI = A = IA, $\forall$ $A \in R$

$\therefore$ R এটা এককসহ বলয়।

উদাহৰণ 3 ঃ ধৰা হ'ল যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিটো 2 Z.

I. যোগৰ অধীনত 2Z এটা আবেলীয় সংঘ।

II. পূৰণৰ অধীনত 2Z এটা অর্ধসংঘ।

III. দুয়োটা বিতৰণ বিধি সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত 2Z এটা বলয়।

তদুপৰি, 2Z এটা ক্রমবিনিময়ে বলয়।

2Z এটা এককবিহীন বলয়, কিয়নো $1 \notin 2Z$

উদাহৰণ 4 ঃ ধৰা হ'ল Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি।

I. যোগৰ অধীনত Z এটা আবেলীয় সংঘ।

II. পূৰণৰ অধীনত Z এটা অর্ধসংঘ।

III. দুয়োটা বিতৰণ বিধি সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত Z এটা বলয়।

তদুপৰি Z এটা ক্রমবিনিময়ে বলয়। ই এটা এককসহ বলয়, $1 \in Z$.

আন কেইটামান এককসহ ক্রমবিনিময়ে বলয়ৰ উদাহৰণ হ'ল -

- পৰিমেয় সংখ্যাৰ বলয় Q
- বাস্তৱ সংখ্যাৰ বলয় IR
- জটিল সংখ্যাৰ বলয় C

উদাহৰণ 5 ঃ [a, b] ত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বাস্তৱ মানবিশিষ্ট অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ সংহতিটো C [a, b]ৰে বুজোৱা হ'ল, a, $b \in R$

ধৰা হ'ল $f, g \in C$ [a, b]

সংজ্ঞাৰদ্ধ কৰা হ'ল যে $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

$(fg)(x) = f(x)\, g(x), \quad x \in [a, b]$

I. (i) $(f + g)(x) = (x) + g(x) \in R$

আকৌ, দুটা অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ যোগফল অবিচ্ছিন্ন।

$\therefore f + g$ অবিচ্ছিন্ন আৰু সেয়ে $f + g \in C[a, b]$

$\therefore C[a, b]$ ত ফলনৰ যোগ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

(ii) ধৰা হ'ল $f, g, h \in c[a, b], x \in [a, b]$

$$\begin{aligned}((f+g)+h)(x) &= (f+g)(x)+h(x)\\ &= \big(f(x)+g(x)\big)+h(x)\\ &= f(x)+\big(g(x)+h(x)\big)\\ &= f(x)+(g+h)(x)\\ &= \big(f+(g+h)\big)(x), \forall x \in [a,b]\end{aligned}$$

$\therefore (f + g) + h = f + (g + h)$

(iii) $0 : [a, b] \to R, 0(x) = 0, \forall x \in [a, b]$

স্পষ্টতঃ $0 \in C[a, b]$, আৰু

$0 + f = f = f + 0$

(iv) প্ৰত্যেক $f \in C[a, b]$, ৰ বাবে

$-f : [a, b] \to R, (-f)(x) = -f(x)$

সংজ্ঞাৰদ্ধ কৰা হ'ল

$$(f+(-f))(x) = f(x)+(-f)(x) = f(x)-f(x) = 0 = 0(x)$$

$\therefore f + (-f) = 0$

সেইদৰে $(-f) + f = 0$

$$\begin{aligned}(f + g)(x) &= f(x) + g(x)\\ &= g(x) + f(x)\\ &= (g + f)(x), \ \forall x \in [a, b]\end{aligned}$$

$\therefore f + g = g + f$

$\therefore$ ফলনৰ যোগৰ অধীনত $C[a, b]$ এটা আবেলীয় সংঘ।

II. (i) $(fg)(x) = f(x)\, g(x) \in R$

আকৌ, দু টা অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ পূৰণফল অবিচ্ছিন্ন।

$\therefore$ fg অবিচ্ছিন্ন আৰু সেয়ে $fg \in C[a, b]$.

$\therefore$ $C[a, b]$ ত ফলনৰ পূৰণ এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

$$\begin{aligned}((fg)\, h)(x) &= (fg)(x)\, h(x)\\ &= (f(x)\, g(x))\, h(x)\end{aligned}$$

$= f(x)(g(x)h(x))$

$= f(x)(gh)(x)$

$= (f(gh))(x), x \in [a, b]$

$\therefore (fg)h = f(gh)$

$\therefore$ ফলনৰ পূৰণৰ অধীনত C [a, b] এটা অর্ধসংঘ।

III. $((f+g)h)(x) = (f+g)(x)h(x)$

$= (f(x) + g(x))h(x)$

$= f(x)h(x) + g(x)h(x)$

$= (fh)(x) + (gh)(x)$

$= (fh + gh)(x)$

$\therefore (f+g)h = fh + gh$

সেইদৰে $f(g+h) = fg + fh$

$\therefore$ ফলনৰ যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত C [a, b] এটা বলয়।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

প্রশ্ন নং ১ঃ এটা মৌলবিশিষ্ট এটা এককসহ ক্রমবিনিময় বলয়ৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা এককবিহীন অক্রমবিনিময় বলয়ৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ এটা এককবিহীন ক্রমবিনিময় বলয়ৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ এটা এককসহ অক্রমবিনিময় বলয়ৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ এটা এককসহ অসীম ক্রমবিনিময় বলয়ৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ ধৰা হ'ল $\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b$ বাস্তৱ সংখ্যা$\}$

সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হ'ল

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$,

$(a, b)(c, d) = (ac, bd)$;

a, b, c, d বাস্তৱ।

দেখুৱাওক যে $\mathbb{R}^2$ এটা এককসহ ক্রমবিনিময় বলয়।

৯.৪ বলয়ৰ ধর্ম

ধৰা হ'ল R এটা বলয়। তেনেহ'লে

(i) $a0 = 0a = 0$; $\forall\ a \in R$

(ii) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$; $\forall\ a, b \in R$

(iii) $(-a)(-b) = ab$; $\forall\ a, b \in R$

(iv) $a(b - c) = ab - ac$; $\forall\ a, b, c \in R$

প্রমাণ (i) $a0 = a(0 + 0)$

$= a0 + a0$, বাওঁ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$\therefore a0 + 0 = a0 + a0$

$\Rightarrow 0 = a0$, যোগাত্মক সংঘ R অত বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা অর্থাৎ $a0 = 0$

সেইদৰে $0a = 0$

(ii) $a0 = 0$

$\Rightarrow a((-b) + b) = 0$, $[\because (-b) + b = 0]$

$\Rightarrow a(-b) + ab = 0$, বাওঁ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$\Rightarrow ab$ ৰ যোগাত্মক বিপৰীত $a(-b)$

$\therefore$ অর্থাৎ $a(-b) = -(ab)$

সেইদৰে $(-a)b = -(ab)$

(iii) $(-a)(-b) = l(-b)$, $l = -a$ লৈ

$= -(lb)$, (ii) ৰ সহায়ত

$= -((-a)b)$

$= -(-(ab))$, (ii) ৰ সহায়ত

$= ab$

(iv) $a(b - c) = a(b + (-c))$

$= ab + a(-c)$, বাওঁ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= ab - ac$, (ii) ৰ সহায়ত

বুলীয় বলয়

ধৰা হ'ল R এটা বলয় আৰু $a \in R$, a ক R অৰ **বর্গসম মৌল** (idempotent element) বুলি কোৱা হয় যদি $a^2 = a$.

এটা বলয় R অক **বুলীয় বলয়** (Boolean ring) বুলি কোৱা হয় যদি ইয়াৰ প্রতিটো মৌল বর্গসম।

টোকা ঃ ঊনবিংশ শতিকাৰ জর্জ বুল (George Boole, 1815-1864) এজন স্ব শিকাৰু ব্রিটিছ। আলোক সন্ধানী গ্রন্থ The Laws of Thought. অৰ বাবে তেওঁ বিখ্যাত।

উপপাদ্য 3 ঃ ধৰা হ'ল R এটা বুলীয় বলয়। তেনেহ'লে

(i) $a + a = o$, $\forall\ a \in R$

অর্থাৎ R অৰ প্রতিটো মৌলই নিজেই নিজৰ যোগাত্মক বিপৰীত।

(ii) $a + b = o \Rightarrow a = b$, $\forall\ a, b \in R$

(iii) R এটা ক্রমবিনিময়ে বলয়।

প্রমাণ (i) ধৰা হ'ল $a \in R$. $\therefore a^2 = a$

আকৌ $a + a \in R$

$\therefore (a + a)^2 = a + a$ [$\therefore$ R এটা বুলীয় বলয়]

$\Rightarrow (a + a)(a + a) = a + a$

$\Rightarrow (a + a)a + (a + a)a = a + a$, বাওঁ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$\Rightarrow (a^2 + a^2) + (a^2 + a^2) - a + a$, সোঁ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$\Rightarrow (a + a) + (a + a) = (a + a) + o$

$\Rightarrow a + a = o$, যোগাত্ম সংঘ R অত বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা

(ii) $a + a = o$

$\therefore a + b = a + a$, (i) অৰ পৰা

$\Rightarrow b = a$, যোগাত্ম সংঘ R অত বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা

অর্থাৎ $a = b$

(iii) ধৰা হ'ল $a, b \in R$ $\therefore a^2 = a, b^2 = b$

আকৌ $a + b \in R$

$\therefore (a + b)^2 = a + b$

$\Rightarrow (a + b)(a + b) = a + b$

$\Rightarrow (a + b)a + (a + b)b = a + b$, বাওঁ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$\Rightarrow (a^2 + ba) + (ab + b^2) = a + b$

$\Rightarrow (a + ba) + (ab + b) = a + b$

$\Rightarrow (a + b) + ba + ab = (a + b) + o$, যোগৰ সাহচর্য্যতা আৰু ক্রমবিনিময়তাৰ পৰা।

$\Rightarrow ba + ab = o$, যোগাত্মক সংঘ R অত বাওঁ বিলোপন বিধিৰ পৰা

$\Rightarrow ab = ba$, (ii) ৰ পৰা

$\therefore$ R এটা ক্রমবিনিময় বলয়।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল $R = \{a + b\sqrt{2}.a, b. \in Z\}$ দেখুওৱাক যে R এটা যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত এককসহ ক্রমবিনিময় বলয়।

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা বলয় R অত $a^2 = a \; \forall a \in R$, দেখুৱাওক যে $2a = 0$ আৰু $a + b = 0 \Rightarrow a = b$

প্রশ্ন নং ৩ঃ Z ত * আৰু (.) এনেদৰে ধৰা হ'ল যাতে $a(.)b = a+b+1$, $a(.)b = a+b+ab$. দেখুওৱাক যে (+) আৰু (.) প্রক্রিয়াৰ অধীনত Z এটা ক্রম বিনিময় বলয়। বলয়টোত একক মৌল আছেনে?



৯.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- যোগ (+) আৰু পূৰণ (.) – এই দুটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াযুক্ত এটা অৰিক্ত সংহতি R অক বলয় বুলি কোৱা হয়। যদি অধোলিখিত স্বীকার্যকেইটা সিদ্ধ হয়।

  (i) যোগৰ অধীনত R এটা আবেলীয় সংঘ,

  (ii) পূৰণৰ অধীনত R এটা অর্ধসংঘ,

  (iii) বিতৰণ বিধি দুটা প্ৰযোজ্য হয়, যথা,

  $a, (b + c) = a.b + a.c$, (বাওঁ বিতৰণ বিধি)

  $(a + b).c = a.c + b.c$, (সোঁ বিতৰণ বিধি)

  $\forall a, b, c \in R$

- এটা বলয় R অক ক্ৰমবিনিময় বুলি কোৱা হয় যদি $ab = ba, \forall a, b \in R$
- এটা বলয় R অক এককসহ বলয় বোলা হয় যদি R অত এনে এটা মৌল e থাকে যাতে $ae = a = ea, \forall a \in R$



৯.৬ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ {o} এটা এককসহ ক্ৰমবিনিময় বলয়। মনত ৰাখিব লাগিব যে এই বলয়টোত শূন্য যোগাত্মক একক তথা গুণাত্মক একক।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ R = {(a b) : a, b অখণ্ড সংখ্যা} বলয়টো এককবিহীন অক্ৰমবিনিময় বলয়।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় 2Z এটা এককবিহীন ক্ৰমবিনিময় বলয়।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ অখণ্ড সংখ্যাৰ ওপৰত সকলো 2 x 2 মৌলকক্ষৰ বলয় R এটা এককসহ অক্ৰমবিনিময় বলয়।

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় Z এটা এককসহ অসীম ক্ৰমবিনিময় বলয়।

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $IR^2 = \{(a, b) : a, b$ বাস্তৱ সংখ্যা$\}$

I. (i) ধৰা হ'ল $(a, b), (c, d) \in IR^2$, a, b, c, d বাস্তৱ সংখ্যা।

এতিয়া $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \in IR^2$

(ii) ধৰা হ'ল (a, b), (c, d), (e, f) $\in IR^2$

$((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a + c, b + d) + (e, f)$

$= ((a + c) + e, (b + d) + f)$

$= (a + (c + e), b + (d + f))$

$= (a, b) + (c + e, d + f)$

$= (a, b) + ((c, d) + (a, f))$

∴ যোগে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) $(0, 0) \in IR^2$ আৰু

$(0, 0) + (a, b) = (a, b) = (a, b) + (0, 0)$

∴ (0, 0) হ'ল যোগাত্মক একক মৌল।

(iv) প্ৰত্যেক $(a, b) \in IR^2$, অৰ বাবে, $(-a, -b) \in IR^2$ আৰু $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$

$= (-a, -b) + (a, b)$

∴ (a, b) ৰ যোগাত্মক বিপৰীত (–a, – b).

(v) $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

$= (c + a, d + b)$

$= (c, d) + (a, b)$

∴ যোগে ক্ৰমবিনিময়ে বিধি মানি চলে।

∴ যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত IR^2 এটা আবেলীয় সংঘ।

II. (i) $(a, b) (c, d) = (ac, bd) \in IR^2$

(ii) $((a, b) (c, d)) (e, f) = (ac, bd) (e, f)$

$= ((ac) e, (bd) f)$

$= (a (ce), b (df))$

$= (a, b) (ce, df)$

$= (a, b) ((c, d) (e, f))$

∴ পূৰণে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

∴ পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত IR^2 এটা অৰ্ধসংঘ।

III. $(a, b) ((c, d) + (e, f)) = (a, b) (c + e, d + f)$

$= (a (c + e), b (d + f))$

$= (ac + ae, bd + bf)$

$= (ac, bd) + (ae, bf)$

$= (a, b) (c, d) + (a, b) (e, f)$

সেইদৰে $((a, b) + (c, d)) (e, f) = (a, b) (e, f) + (c, d) (e, f)$

∴ IR^2 এটা বলয়।

আকৌ (a, b) (c, d) = (ac, bd)

= (ca, db)

= (c, d) (a, b)

∴ IR^2 এটা ক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

আকৌ (1, 1) $\in IR^2$, আৰু

(a, b) (1, 1) = (a1, b1) = (a, b) = (1, 1) (a, b)

∴ (1, 1) হ'ল একক মৌল।

গতিকে IR^2 এটা এককসহ ক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ এইটো সহজে প্ৰতিস্থাপন কৰিব পাৰি যে R এটা $0 = 0 + 0\sqrt{2}$ যোগাত্মক একক আৰু $1 = 1 + 0\sqrt{2}$ গুণাত্মক এককসহ এটা ক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ উপপাদ্য 3 (i), (ii) ৰ পৰা।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ এইটো সহজে প্ৰতিস্থাপন কৰিব পাৰি যে Z এটা ক্ৰমবিনিময়ে বলয়। আকৌ $a\,(.)0 = 0 = 0(.)a,\ \forall a \in z$ গতিকে Z = 0 এককসহ এটা বলয়।



৯.৭ অধিক জানিবলৈ

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.
2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).
3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).
4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.
5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



৩.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ঃ Z অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি। Z অত (+) আৰু (.) অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হৈছে।

$a (+) b = a + b - 1$,

$a (.) b = a + b - ab$, $\forall a, b \in Z$

(+), (.) অৰ অধীনত Z এটা এককসহ ক্ৰমবিনিময় বলয় হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ২ঃ প্ৰমাণ কৰক যে বলয় R ক্ৰমবিনিময় হ'ব যদি আৰু যদিহে

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $\forall$ $a, b \in R$

[ইয়াত a^2 অৰ অৰ্থ হ'ল aa]

প্ৰশ্ন ৩ঃ ধৰা হ'ল P(S) S ৰ ঘাত সংহতি। A, B P(S) ৰ বাবে, ধৰা হ'ল (+) আৰু (.) একেদৰে দিয়া আছে যে $A(+)B = A \cup B$, $A(.)B = A \cap B$

দেখুওৱাক যে P(S) এটা এককসহ ক্ৰমবিনিময় বলয়।

*** ***** ***

অধ্যায় ১০ ঃ সমাকল প্রান্ত আৰু ক্ষেত্র (INTEGRAL DOMAIN AND FIELD)

অধ্যায় গাঁথনি

১০.১ উদ্দেশ্য

১০.২ পৰিচয়

১০.৩ সমাকল প্রান্ত

১০.৪ ক্ষেত্র

১০.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১০.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১০.৭ অধিক জানিবলৈ

১০.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

১০.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰাৰ পাছত আপুনি অধোলিখিত বিষয়বোৰ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

- সমাকল প্রান্ত আৰু সিহঁতৰ ধর্ম
- সমাকল প্রান্ত, ক্ষেত্র আৰু সিহঁতৰ ধর্ম।

১০.২ পৰিচয়

নৱম অধ্যায়ত আমি বলয় আৰু সিহঁতৰ বিভিন্ন ধর্মসমূহৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিছো। এই অধ্যায়টিত আমি সমাকল প্রান্ত আৰু ক্ষেত্রৰ সম্বন্ধে অধ্যয়ন কৰিম। সমাকল প্রান্ত আৰু ক্ষেত্রত নির্দিষ্ট কিছুমান স্বীকার্য সিদ্ধ কৰা হয়।

১০.৩ সমাকল প্রান্ত

অখণ্ড সংখ্যাৰ ওপৰত সকলো 2 x 2 মৌলকক্ষৰ বলয় R লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in R$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in R$

ইয়াত A আৰু B কোনোটোৱেই শূন্য মৌলকক্ষ নহয়।

কিন্তু $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

অর্থাৎ, AB এটা শূন্য মৌলকক্ষ।

গতিকে আমি দেখিলোঁ যে $A \neq 0$, $B \neq 0$; কিন্তু $AB = 0$

আকৌ, অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় Z লোৱা হ'ল। যদি $a, b \in Z$ আৰু $a \neq 0$, $b \neq 0$, তেনেহ'লে $ab \neq 0$

সংজ্ঞা ঃ এটা বলয় R অৰ এটা মৌল a ক ($\neq 0$) শূন্য ভাজক (zero divisor) বুলি কোৱা হয় যদি R অত এটা মৌল b ($\neq 0$) থাকে যাতে $ab = 0$ বা $ba = 0$.

আমি দেখিলোঁ যে অখণ্ড সংখ্যাৰ ওপৰত সকলো 2 x 2 মৌলকক্ষৰ বলয় R অত শূন্য ভাজক আছে। আনহাতেদি অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় Z অত শূন্য ভাজক নাই, কিয়নো যদি $a \in Z$, $b \in Z$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, তেনেহ'লে $ab \neq 0$, $ba \neq 0$.

বিলোপন বিধি ঃ ধৰা হ'ল R এটা বলয়। যিহেতু R এটা যোগাত্মক আবেলীয় সংঘ, গতিকে যোগাত্মক বিলোপন বিধি R অত প্রযোজ্য।

গতিকে বলয়ত বিলোপন বিধি বুলি ক'লে আমি গুণাত্মক বিলোপন বিধিকহে বুজিম (অশূন্য মৌলৰ বিলোপন)

R অত বিলোপন বিধি প্রযোজ্য হয়— যদি $ab = ac \Rightarrow b = c$, $ba = ca \Rightarrow b = c$; য'ত $a, b, c \in R$, $a \neq 0$.

উপপাদ্য 4 ঃ এটা বলয় R অত বিলোপন বিধি প্রযোজ্য যদি আৰু যদিহে R অৰ শূন্য ভাজক নাই।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল বিলোপন বিধি প্রযোজ্য।

ধৰা হ'ল $a, b \in R$ যাতে $ab = 0$

যদি $a \neq 0$, $ab = 0 \Rightarrow ab = a0 \Rightarrow b = 0$, বিলোপন বিধিৰ পৰা

সেইদৰে, যদি $b \neq 0$, $ab = 0 \Rightarrow ab = 0b \Rightarrow a = 0$

$\therefore$ R অৰ শূন্য ভাজক নাই।

বিপৰীত ক্রমে, ধৰা হ'ল R অত শূন্য ভাজক নাই।

ধৰা হ'ল $a, b, c \in R$ আৰু $ab = ac$, $a \neq 0$

$\therefore ab - ac = 0$

$\Rightarrow a(b - c) = 0$

$\therefore a \neq 0$ আৰু R অত শূন্য ভাজক নাই,

$\therefore b - c = 0 \Rightarrow b = c$

গতিকে, যদি $a \neq 0$, $ab = ac \Rightarrow b = c$

সেইদৰে, যদি $a \neq 0$, $ba = ca \Rightarrow b = c$

গতিকে, R অত বিলোপন বিধি প্রযোজ্য।

সংজ্ঞা ঃ এটা একক $e \neq 0$ সহ, শূন্য ভাজকবিহীন ক্ৰমবিনিময়ে বলয় R অক সমাকল প্ৰান্ত (integral domain) বুলি কোৱা হয়।

সমাকল প্ৰান্তৰ সবাতোকৈ সহজ উদাহৰণটো হ'ল অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় Z. এইটো এটা ক্ৰমবিনিময়ে বলয়, একক আছে, শূন্য ভাজক নাই।

টোকা ঃ সমাকল প্ৰান্তক Z অৰ সাধাৰণীকৰণ বুলিব পাৰি।

উদাহৰণ 6 ঃ গাউছীয় অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি R = {a + bi : a, b অখণ্ড সংখ্যা; i = $\sqrt{-1}$} লোৱা হ'ল। [ছি এফ গাউছ (C. F. Gauss (1777-1855) এজন বিখ্যাত গণিতজ্ঞ]

I. (i) ধৰা হ'ল a + bi, c + di $\in$ R,

a, b, c, d অখণ্ড সংখ্যা, i= $\sqrt{-1}$

(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i $\in$ R

(ii) জটিল সংখ্যাৰ যোগে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

(iii) 0 = 0 + 0i $\in$ R

আৰু 0 + (a + bi) = a + bi = (a + bi) + o

(iv) প্ৰত্যেক a + bi $\in$ R, অৰ বাবে, (–a) + (–b)i $\in$ R যাতে

(a + bi) + ((–a) + (–b)i) = o= ((–a) + (–b)i) + (a + bi)

(v) জটিল সংখ্যাৰ যোগে ক্ৰমবিনিময়ে বাধি মানি চলে।

$\therefore$ জটিল সংখ্যাৰ যোগৰ অধীনত R এটা আবেলীয় সংঘ।

II. (i) (a + bi) (c + di) = (ac – bd) + (ad + bc)i $\in$ R

(ii) জটিল সংখ্যাৰ পূৰণে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

III. স্পষ্টতঃ দুয়োটা বিতৰণ বিধি প্ৰযোজ্য হয়।

$\therefore$ R এটা বলয়।

তদুপৰি, জটিল সংখ্যাৰ পূৰণে ক্ৰমবিনিময়ে বিধি মানি চলে।

$\therefore$ R এটা ক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

আকৌ 1 $\in$ R (1=1 + oi)

$\therefore$ R এটা এককসহ বলয়।

আকৌ আমি জানো যে দুটা অশূন্য জটিল সংখ্যাৰ পূৰণফল শূন্য হ'ব নোৱাৰে।

$\therefore$ R অত শূন্য ভাজক নাই।

গতিকে, R এটা সমাকল প্ৰান্ত।

১০.৪ ক্ষেত্ৰ

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল R এটা একক e সহ বলয় ($e \neq 0$)।

যদি R অৰ প্ৰত্যেক অশূন্য মৌলৰ R অত গুণাত্মক বিপৰীত থাকে, তেনেহ'লে R

অক হৰণ বলয় বা বিষম ক্ষেত্ৰ (division ring or a skew field) বুলি কোৱা হয়।

এটা ক্ৰমবিনিময়ে হৰণ বলয়ক ক্ষেত্ৰ (field) বুলি কোৱা হয়।

ক্ষেত্ৰৰ সবাতোকৈ সহজ উদাহৰণ হ'ল বাস্তৱ সংখ্যাৰ বলয় IR.

ই ক্ৰমবিনিময়ে, একক আছে আৰু প্ৰতিটো অশূন্য মৌলৰ গুণাত্মক বিপৰীত IR অত আছে।

সেইদৰে, জটিল সংখ্যাৰ বলয় C এটা ক্ষেত্ৰ।

টোকা ঃ অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় Z ক্ষেত্ৰ নহয়। (কিয়?)

উদাহৰণ 7 ঃ গাউছীয় অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয়

$R = \{a + bi : a, b, \text{অখণ্ড সংখ্যা}, i = \sqrt{-1}\}$

ক্ষেত্ৰ হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে R এটা এককসহ ক্ৰমবিনিময়ে বলয় (উদাহৰণ 6 দ্ৰষ্টব্য)।

ধৰা হ'ল $a + bi \in R$ যাতে $a + bi \neq o$

এতিয়া $a + bi$ ৰ গুণাত্মক বিপৰীত হ'ল $\frac{a}{a^2+b^2} + \left(-\frac{b}{a^2+b^2}\right)i$ ই R অৰ মৌল নহয়।

$\therefore$ R ক্ষেত্ৰ নহয়।

উপপাদ্য 5 ঃ প্ৰত্যেক ক্ষেত্ৰই এটা সমাকল প্ৰান্ত।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল F এটা ক্ষেত্ৰ।

ধৰা হ'ল $a, b \in F$ যাতে $a \neq o$ আৰু $ab = o$

$\therefore a \neq o, a^{-1} \in F$ ($\because$ F এটা ক্ষেত্ৰ)

এতিয়া $ab = o$

$\Rightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1} o$

$\Rightarrow (a^{-1} a) b = o$

$\Rightarrow b = o$

সেইদৰে, যদি $b \neq o$ আৰু $ab = o$, তেনেহ'লে $a = o$

$\therefore$ F অৰ শূন্য ভাজক নাই।

গতিকে F এটা শূন্য ভাজকবিহীন এককসহ ক্ৰমবিনিময়ে বলয়।

$\therefore$ F এটা সমাকল প্ৰান্ত।

টোকা ঃ উপৰিউক্ত উপপাদ্যটোৰ বিপৰীতটো সত্য নহয়, অৰ্থাৎ প্ৰত্যেক সমাকল প্ৰান্তই ক্ষেত্ৰ নহয়।

অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতি Z লোৱা হ'ল। আমি জানো যে Z এটা সমাকল প্ৰান্ত। কিন্তু Z অৰ মাত্ৰ দুটা মৌল –1 আৰু 1 অৰহে Z অত গুণাত্মক বিপৰীত আছে। গতিকে, Z ক্ষেত্ৰ নহয়।

অৱশ্যে এটা অশূন্য সসীম সমাকল প্ৰান্ত ক্ষেত্ৰ হয়।

উপপাদ্য 6 ঃ এটা অশূন্য সসীম সমাকল প্ৰান্ত ক্ষেত্ৰ।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল R = {a_1, a_2, a_3, ... a_n} এটা সসীম অশূন্য সমাকল প্ৰান্ত, য'ত a_i বোৰ ভিন্ন ভিন্ন।

ধৰা হ'ল R অৰ শূন্য মৌল a_1.

a_2, a_3, ...,a_n অশূন্য মৌলবোৰ বিবেচনা কৰা হ'ল।

ধৰা হ'ল a_p, R অৰ একক নহয় ($p \neq 1$) অর্থাৎ $a_p \neq e$, R ৰ একক।

$a_p a_2$, $a_p a_3$, ..., $a_p a_n$ পূৰণফল কেইটা লোৱা হ'ল।

এই সকলোবোৰ R অৰ মৌল। আকৌ, সকলোবোৰ মৌল ভিন্ন ভিন্ন, কিয়নো যদি

$a_p a_i = a_p a_j$, $2 \leq i \leq n$, $2 \leq j \leq n$, $i \neq j$

তেনেহ'লে $a_p a_i - a_p a_j = 0$

$\Rightarrow a_p (a_i - a_j) = 0$

$\Rightarrow a_i - a_j = 0$, [$\because a_p \neq 0$ আৰু R শূন্য ভাজকবিহীন]

$\Rightarrow a_i = a_j$, এইটো স্ববিৰোধী কথা।

এতিয়া $a_p a_2$, $a_p a_3$, ..., $a_p a_n$ বোৰৰ এটা একক হ'ব লাগিব। ধৰা হ'ল $a_p a_q$ = e, য'ত e হ'ল R অৰ একক।

$\therefore a_p a_q = e = a_q a_p$.

$\therefore$ R অত a_p ৰ গুণাত্মক বিপৰীত আছে।

যদি a_p, R অৰ একক, তেনেহ'লে R অত a_pৰ গুণাত্মক বিপৰীত আছে।

গতিকে, R অৰ প্ৰত্যেক অশূন্য মৌলৰ R ত গুণাত্মক বিপৰীত আছে।

$\therefore$ R এটা ক্ষেত্ৰ।

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১ঃ পৰিমেয় সংখ্যাৰ বলয় Q ত শূন্য ভাজক আছেনে?

প্ৰশ্ন নং ২ঃ অখণ্ড সংখ্যাৰ ওপৰত সকলো 2 x 2 মৌলকক্ষৰ



বলয় R লোৱা হ'ল। R অত বিলোপন বিধি প্ৰযোজ্য হয়নে?

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় 2Z সমাকল প্ৰান্ত হয়নে?

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ এনে এটা সমাকল প্ৰান্তৰ উদাহৰণ দিয়ক যিটো ক্ষেত্ৰ নহয়।

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ $IR^2 = \{(a, b) : a, b \in IR\}$ বলয়টোত শূন্য ভাজক আছেনে?



১০.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- এটা বলয় R অৰ এটা মৌল a ক $a(\neq 0)$ শূন্য ভাজক বুলি কোৱা হয় যদি R অত এটা মৌল b $(\neq 0)$ থাকে যাতে ab = 0 বা ba = 0
- এটা একক $e \neq 0$ সহ, শূন্য ভাজকবিহীন ক্রমবিনিময়ে বলয় R অক সমাকল প্রান্ত বুলি কোৱা হয়।
- ধৰা হ'ল R এটা একক e সহ বলয় $(e \neq 0)$।
  যদি R অৰ প্রত্যেক অশূন্য মৌলৰ R অত গুণাত্মক বিপৰীত থাকে, তেনেহ'লে R অক হৰণ বলয় বা বিষম ক্ষেত্র বুলি কোৱা হয়।
  এটা ক্রমবিনিময়ে হৰণ বলয়ক ক্ষেত্র বুলি কোৱা হয়।
- প্রত্যেক ক্ষেত্রই এটা সমাকল প্রান্ত, কিন্তু প্রত্যেক সমাকল প্রান্তই ক্ষেত্র নহয়।
- এটা অশূন্য সসীম সমাকল প্রান্ত ক্ষেত্র।



১০.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নহয়। যদি $a, b \in Q$ আৰু $a \neq 0, b \neq 0$, তেনেহ'লে $ab \neq 0$.

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নহয়। এটা বলয়ত বিলোপন বিধি প্রযোজ্য যদি আৰু যদিহে বলয়টোত শূন্য ভাজক নাই। অখণ্ড সংখ্যাৰ ওপৰত 2 x 2 মৌলকক্ষৰ বলয়টোত শূন্য ভাজক আছে। গতিকে অখণ্ড সংখ্যাৰ ওপৰত 2 x 2 মৌলকক্ষৰ বলয়টোত বিলোপন বিধি প্রযোজ্য নহয়।

উদাহৰণ স্বৰূপে

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 3\\5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 54\\54 & 72\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 9\\4 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18 & 54\\54 & 72\end{pmatrix}$$

অর্থাৎ $\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 3\\5 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\3 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 9\\4 & 5\end{pmatrix}$,

অর্থাৎ AB = AC, কিন্তু $B \neq C$,

য'ত $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় 2Z সমাকল প্ৰান্ত নহয়, কিয়নো ইয়াত গুণাত্মক একক মৌল নাই।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ অখণ্ড সংখ্যাৰ বলয় Z এটা সমাকল প্ৰান্ত কিন্তু ক্ষেত্ৰ নহয়। মাত্ৰ -1 আৰু 1 অৱহে Z অত গুণাত্মক বিপৰীত আছে।

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ হয়।

$(7, 0) \in IR^2, (0, 13) \in IR^2, (7, 0) \neq (0, 0), (0, 13) \neq (0, 0)$ কিন্তু $(7, 0)(0, 13) = (0, 0)$



১০.৭ অধিক জানিবলৈ

1) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.
2) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).
3) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).
4) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.
5) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd., Hyderabad, 500029.



১০.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ঃ ধৰা হ'ল $R = \{(a, b) : a, b$ বাস্তৱ সংখ্যা$\}$ .R অত যোগ আৰু পূৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$

$(a, b)\ (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$

প্ৰমাণ কৰক যে $\mathbb{R}^2$ এটা ক্ষেত্ৰ।

প্ৰশ্ন ২ঃ ধৰা হ'ল $R = \{a + b\sqrt{-2} : a, b$ পৰিমেয় সংখ্যা$\}$ দেখুৱাওক যে যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত R এটা ক্ষেত্ৰ।

প্ৰশ্ন ৩ঃ ধৰা হ'ল R এটা শূন্য ভাজক বিহীন এককসহ ক্ৰমবিনিময়ে বলয়। দেখুৱাওক যে শূন্য মৌল আৰু একক মৌলই একমাত্ৰ বৰ্গসম মৌল।

*** ***** ***

অধ্যায় ১১ ঃ ভেক্টৰ স্থান (VECTOR SPACE)

অধ্যায় গাঁথনি

১১.১ উদ্দেশ্য

১১.২ পৰিচয়

১১.৩ ভেক্টৰ স্থানৰ সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ

১১.৪ প্ৰাথমিক ধৰ্ম

১১.৫ ভেক্টৰ স্থানৰ উপস্থান

১১.৬ ৰৈখিক পৰতন্ত্ৰতা আৰু স্বতন্ত্ৰতা

১১.৭ আধাৰ আৰু মাত্ৰা

১১.৮ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১১.৯ অধিক জানিবলৈ

১১.১০ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১১.১১ আৰ্হি প্ৰশ্ন

১১.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- ভেক্টৰ স্থানৰ সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ জানিব পাৰিব
- ভেক্টৰ স্থানৰ প্ৰাথমিক ধৰ্ম জানিব পাৰিব
- ভেক্টৰ স্থানৰ উপস্থান সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- ভেক্টৰৰ ৰৈখিক পৰতন্ত্ৰতা আৰু স্বতন্ত্ৰতা সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- ভেক্টৰৰ আধাৰ আৰু মাত্ৰা সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

১১.২ পৰিচয়

আমি ভেক্টৰ (vector) সম্বন্ধে জানো। ভেক্টৰৰ ধাৰণাৰ পৰা ভেক্টৰ স্থানৰ (vector space) ধাৰণা আহিছে। ভেক্টৰত আমি ভেক্টৰৰ যোগ, ভেক্টৰক স্কেলাৰেৰে পূৰণ আৰু ভেক্টৰৰ স্কেলাৰ পূৰণ পাইছোঁ। ভেক্টৰ স্থানতো আমি ভেক্টৰৰ যোগ, ভেক্টৰক স্কেলাৰেৰে পূৰণ আৰু ভেক্টৰৰ স্কেলাৰ পূৰণ পাওঁ। গতিকে ভেক্টৰ স্থানক আমি বলবিজ্ঞান বা বিশ্লেষণাত্মক জ্যামিতিত পোৱা ভেক্টৰৰ সাধাৰণীকৰণ বুলি ক'ব পাৰোঁ।

১১.৩ ভেক্টৰ স্থানৰ সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ (DEFINITION AND EXAMPLES OF VECTOR SPACE)

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল "+" প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীত V এটা আবেলীয় সংঘ। ধৰা হ'ল "+, $\bullet$ " প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীত F এটা ক্ষেত্ৰ।

F অৰ প্ৰত্যেক মৌল α আৰু V ৰ x অৰ বাবে, $\alpha x \in V$. ইয়াক স্কেলাৰ পূৰণ বুলি কোৱা হয়।

তেতিয়া ক্ষেত্ৰ F অৰ ওপৰত V ক ভেক্টৰ স্থান (Vector space over the field F) বুলি কোৱা হয় যদি তলৰ চৰ্তকেইটা সিদ্ধ হয়।

1. $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$
2. $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$
3. $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$
4. $1x=x$

য'ত $\alpha,\beta\in F$, $x,y\in V$ আৰু 1 হ'ল F অৰ একক মৌল।

আমি এনেদৰে লিখিম, $V(F)$ এটা ভেক্টৰ স্থান।

টোকা

1. V ৰ মৌলবোৰক ভেক্টৰ (vector) আৰু F অৰ মৌলবোৰক স্কেলাৰ (scalar) বুলি কোৱা হয়।
2. $x+y$ এ V ৰ দুটা ভেক্টৰ x আৰু y ৰ 'যোগ' (+) বুজায়, $x,y\in V$. আনহাতেদি $\alpha+\beta$ ই F অৰ দুটা স্কেলাৰ α আৰু β ৰ 'যোগ' (+) বুজায়, $\alpha,\beta\in F$. এই কথাটো মনত ৰাখিব লাগিব যে এই 'যোগ' দুটা পৃথক, যদিও দুয়োটাকে একে প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হৈছে।
3. αx এ V ৰ ভেক্টৰ x আৰু F অৰ স্কেলাৰ α ৰ 'পূৰণ' বুজায়। আনহাতেদি $\alpha\beta$ ই F অৰ দুটা স্কেলাৰ α,β ৰ 'পূৰণ' বুজায়। এই কথাটোৱো মনত ৰাখিব লাগিব যে এই 'পূৰণ' দুটাও পৃথক, যদিও দুয়োটাকে একে প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হৈছে।
4. " + " প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত V আবেলীয় সংঘ। " + " প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত F এটা ক্ষেত্ৰ। আকৌ ভেক্টৰক স্কেলাৰেৰে পূৰণ প্ৰক্ৰিয়াটোৱো আছে। গতিকে দেখা গ'ল যে এটা ভেক্টৰ স্থানত মুঠতে চাৰিটা প্ৰক্ৰিয়া আছে।
5. " + " প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত V আবেলীয় সংঘ। গতিকে " + " প্ৰক্ৰিয়া সাপেক্ষে একক মৌল 0 আছে। ইয়াক শূন্য মৌল (zero element) বুলি কোৱা হয়। আকৌ F এটা ক্ষেত্ৰ। গতিকে F অত শূন্য মৌল 0 আছে। এই শূন্য দুটা পৃথক, যদিও দুয়োটাকে একে প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হৈছে। আকৌ F অত একক মৌল 1 আছে। মনত ৰাখিব লাগিব যে এই 1 টো বাস্তৱ সংখ্যা 1 নহ'বও পাৰে।

6. যদি $F = R$, অর্থাৎ, যদি F বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্র হয়, তেনেহ'লে $V(R)$ অক বাস্তৱ ভেক্টৰ স্থান (real vector space) বুলি কোৱা হয়।
   যদি $F = C$, অর্থাৎ, যদি F জটিল সংখ্যাৰ ক্ষেত্র হয়, তেনেহ'লে $V(C)$ ক জটিল ভেক্টৰ স্থান (complex vector space) বুলি কোৱা হয়।
7. V ত 'বিয়োগ'ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়, $x - y = x + (-y)$, য'ত $-y$ হ'ল y ৰ যোগাত্মক বিপৰীত (additive inverse), y ; $x, y \in V$.

উদাহৰণ 1 ঃ ধৰা হ'ল R^2 = {(x_1, x_2) | x_1, x_2 বাস্তৱ}, আৰু R বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্র। R^2 অত যোগ আৰু স্কেলাৰ পূৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad \text{... (1)}$$

$$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2) \quad \text{... (2)}$$

য'ত $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in R^2$, $\alpha \in R$.

তেনেহ'লে R অৰ ওপৰত R^2 এটা ভেক্টৰ স্থান, অর্থাৎ R^2 এটা বাস্তৱ ভেক্টৰ স্থান।

সমাধান ঃ I. প্রথমতে আমি (1) অৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ + প্রক্রিয়াৰ অধীনত R^2 এটা আবেলীয় সংঘ বুলি প্রমাণ কৰোঁ।

(i) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \in R^2$

(ii) ধৰা হ'ল $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2), z = (z_1, z_2) \in R^2$

এতিয়া $(x + y) + z = (x_1 + y_1, x_2 + y_2) + (z_1, z_2)$

$$= ((x_1 + y_1) + z_1, (x_2 + y_2) + z_2)$$
$$= (x_1 + (y_1 + z_1), x_2 + (y_2 + z_2))$$
$$= (x_1, x_2) + (y_1 + z_1, y_2 + z_2)$$
$$= x + (y + z)$$

$\therefore$ "+" প্রক্রিয়াই সাহচর্য বিধি মানি চলে।

(iii) আমি জানো $0 = (0,0) \in R^2$

আৰু $x + 0 = (x_1, x_2) + (0,0) = (x_1 + 0, x_2 + 0) = (x_1, x_2) = x$

সেইদৰে, $0 + x = x$

অর্থাৎ, $x + 0 = x = 0 + x$

[মন কৰিব লগীয়া যে $0 = (0,0)$, ত, বাওঁহাতৰ 0 টো এটা প্রতীক, বাস্তৱ সংখ্যা 0 নহয়।]

(iv) প্রত্যেক $x = (x_1, x_2) \in R^2$ অৰ বাবে,

$-x = (-x_1, -x_2) \in R^2$ আছে যাতে $x + (-x) = (x_1, x_2) + (-x_1, -x_2)$

$$= (x_1 - x_1, x_2 - x_2)$$
$$= (0,0) \quad = 0$$

সেইদৰে $(-x)+x=0$

অর্থাৎ, $x+(-x)=0=(-x)+x$

(v) $x+y=(x_1,x_2)+(y_1,y_2)$

$=(x_1+y_1,x_2+y_2)$

$=(y_1+x_1,y_2+x_2)$

$\therefore$ "+" প্রক্রিয়াৰ অধীনত R^2 এটা আবেলীয় সংঘ।

II. আমি জানো $\alpha\in R, x=(x_1,x_2)\in R^2$

$\alpha x=\alpha(x_1,x_2)$

$=(\alpha x_1,\alpha x_2)\in R^2$

III. (i) $\alpha(x+y)=\alpha(x_1+y_1,x_2+y_2)$

$=(\alpha x_1+\alpha y_1,\alpha x_2+\alpha y_2)$

$=(\alpha x_1,\alpha x_2)+(\alpha y_1,\alpha y_2)$

$=\alpha(x_1,x_2)+\alpha(y_1,y_2)$

$=\alpha x+\alpha y$

(ii) $(\alpha+\beta)x=(\alpha+\beta)(x_1,x_2)$

$=((\alpha+\beta)x_1,(\alpha+\beta)x_2)$

$=(\alpha x_1+\beta x_1,\alpha x_2+\beta x_2)$

$=(\alpha x_1,\alpha x_2)+(\beta x_1,\beta x_2)$

$=\alpha(x_1,x_2)+\beta(x_1,x_2)$

$=\alpha x+\beta x\ ,\alpha,\beta\in R, x=(x_1,x_2)\in R^2$

(iii) $(\alpha\beta)x=\alpha\beta(x_1,x_2)$

$=((\alpha\beta)x_1,(\alpha\beta)x_2)$

$=(\alpha(\beta x_1),\alpha(\beta x_2))$

$=\alpha(\beta x_1,\beta x_2)$

$=\alpha(\beta(x_1,x_2))$

$=\alpha(\beta x)$

(iv) আমি জানো $1\in R$

$1x=1(x_1,x_2)=(1x_1,1x_2)=(x_1,x_2)=x$

$\therefore$ R অৰ ওপৰত R^2 এটা ভেক্টৰ স্থান, অর্থাৎ R^2 এটা বাস্তৱ ভেক্টৰ স্থান।

উদাহৰণ 2 ঃ ধৰা হ'ল $R^n=\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, x_2$ বাস্তৱ সংখ্যা$\}$, আৰু R বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰ। R^n বাস্তৱ ভেক্টৰ স্থান হ'ব যোগ আৰু স্কেলাৰ পূৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়—

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$$

য'ত $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in R^n$ আৰু $\alpha \in R^n$.

আগৰ অংকটোৰ দৰে এইটো প্ৰমাণ কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 3 ঃ ধৰা হ'ল $[a,b]$ত সংজ্ঞাৱদ্ধ সকলো বাস্তৱ মান বিশিষ্ট অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ সংহতিটো V। তেনেহ'লে V এটা বাস্তৱ ভেক্টৰ স্থান হ'ব যদি যোগ আৰু স্কেলাৰ পুৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x),$$

য'ত $f, g \in V$, আৰু $\alpha \in R$.

I. প্ৰথমতে আমি প্ৰমাণ কৰোঁ যে যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত V এটা আবেলীয় সংঘ।

(i) ধৰা হ'ল $f, g \in V$

$\therefore [a,b]$ ত সংজ্ঞাৱদ্ধ f আৰু g দুটা বাস্তৱ মানবিশিষ্ট ফলন।

$\therefore f+g$ ও $[a,b]$ ত সংজ্ঞাৱদ্ধ বাস্তৱ মানবিশিষ্ট ফলন।

$\therefore \quad f+g \in V$.

(ii) ধৰা হ'ল $f, g, h \in V$ আৰু $x \in [a,b]$

এতিয়া, $((f+g)+h)(x) = (f+g)(x) + h(x)$

$$= (f(x) + g(x)) + h(x)$$
$$= f(x) + (g(x) + h(x))$$
$$= f(x) + (g+h)(x)$$
$$= (f + (g+h))(x), \forall x \in [a,b]$$

$\therefore (f+g)+h = f+(g+h), \ \forall f, g, h \in V$

(iii) ধৰা হ'ল $\theta : [a,b] \to R$, $\theta(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$.

স্পষ্টত ঃ $\theta \in V$

এতিয়া $(\theta + f)(x) = \theta(x) + f(x)$

$$= 0 + f(x)$$
$$= f(x), \ \forall x \in [a,b]$$

$\therefore \theta + f = f$

সেইদৰে $f + \theta = f$

$\therefore f + \theta = f = \theta + f$

(iv) V ৰ প্ৰত্যেক f অৰ বাবে, $-f$ অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$$(-f)(x) = -f(x), \forall x \in [a,b]$$

স্পষ্টতঃ $-f \in v$

এতিয়া $(f+(-f))(x) = f(x)+(-f)(x)$

$$= f(x) - f(x)$$
$$= 0$$
$$= \theta(x), \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\therefore f+(-f) = \theta$$

সেইদৰে, $(-f)+f = \theta$

$$\therefore f+(-f) = \theta = (-f)+f$$

(v) $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

$$= g(x)+f(x)$$
$$= (g+f)(x), \forall x \in [a,b]$$

$$\therefore f+g = g+f$$

$\therefore$ যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত V এটা আবেলীয় সংঘ।

II. ধৰা হ'ল $\alpha \in R, f \in V, x \in [a,b]$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \in R$$

যিহেতু f অবিচ্ছিন্ন, $\therefore \alpha f$ ও অবিচ্ছিন্ন।

$$\therefore \alpha f \in V$$

III. (i) $(\alpha(f+g))(x) = \alpha(f+g)(x), \alpha \in R, f, g \in V$

$$= \alpha(f(x)+g(x)), x \in [a,b]$$
$$= \alpha f(x)+\alpha g(x)$$
$$= (\alpha f+\alpha g)(x), \quad \forall x \in [a,b]$$

$$\therefore \alpha(f+g) = \alpha f+\alpha g$$

(ii) $((\alpha+\beta)f)(x) = (\alpha+\beta)f(x)$

$$= \alpha f(x)+\beta f(x)$$
$$= (\alpha f)(x)+(\beta f)(x)$$
$$= (\alpha f+\beta f)(x) \quad , \forall x \in [a,b]$$

$$\therefore (\alpha+\beta)f = \alpha f+\beta f$$

(iii) $((\alpha\beta)f)(x) = (\alpha\beta)f(x)$

$$= \alpha(\beta f(x))$$

$$= \alpha((\beta f)(x)),\ \forall x \in [a,b]$$

$$\therefore (\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$$

(iv) $(1f)(x) = 1f(x)$

$$= f(x), \forall x \in [a,b]$$

$$\therefore 1f = f$$

$\therefore$ R অৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান,

অর্থাৎ V এটা বাস্তৱ ভেক্টৰ স্থান।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

প্রশ্ন নং ১ঃ প্রমাণ কৰক যে R অৰ ওপৰত বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্র R এটা ভেক্টৰ স্থান।

প্রশ্ন নং ২ঃ প্রমাণ কৰক যে C ৰ ওপৰত জটিল সংখ্যাৰ ক্ষেত্র C এটা ভেক্টৰ স্থান।

প্রশ্ন নং ৩ঃ প্রমাণ কৰক যে R অৰ ওপৰত জটিল সংখ্যাৰ ক্ষেত্র C এটা ভেক্টৰ স্থান। Cৰ ওপৰত R ভেক্টৰ স্থান হয়নে?

প্রশ্ন নং ৪ঃ ধৰা হ'ল বাস্তৱ সংখ্যাৰ ওপৰত সকলো $m \times n$ মৌলকক্ষৰ সংহতিটো V. প্রমাণ কৰক যে R অৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান।

প্রশ্ন নং ৫ঃ ধৰা হ'ল V ={(x_1, x_2) | x_1, x_2 বাস্তৱ}, আৰু $\alpha \in R$. V ত যোগ আৰু স্কেলাৰ পূৰণৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে—

$$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$\alpha x = \alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, x_2)$$

য'ত $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in V, \alpha \in R$

প্রমাণ কৰক যে R অৰ ওপৰত V ভেক্টৰ স্থান নহয়।

১১.৪ প্রাথমিক ধর্ম (ELEMENTARY PROPERTIES)

ধৰা হ'ল এটা ক্ষেত্র F অৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। ধৰা হ'ল $\alpha, \beta \in F, x, y \in V$. তেনেহ'লে

(i) $\alpha 0 = 0$ (এই "0" টো আবেলীয় সংঘ V ৰ শূন্য মৌল)

(ii) $0x = 0$ (বাওহাতৰ "0" টো ক্ষেত্র F অৰ শূন্য মৌল আৰু সোঁহাতৰ "0" টো V ৰ শূন্য মৌল)

(iii) যদি $\alpha x = 0$, তেনেহ'লে $\alpha = 0$ or $x = 0$

(iv) $(-\alpha)x = \alpha(-x) = -\alpha x$

(v) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$

(vi) $(\alpha-\beta)x=\alpha x-\beta x$

প্ৰমাণ ঃ (i) আমি জানো $0+0=0$

ইয়াত $0\in V$

এতিয়া $\alpha 0=\alpha(0+0)$

$=\alpha 0+\alpha 0$

$\therefore \alpha 0+(-\alpha 0)=\alpha 0+\alpha 0+(-\alpha 0)$

$\Rightarrow 0=\alpha 0$

অৰ্থাৎ $\alpha 0=0$

(ii) আমি জানো $0+0=0$

এইটো $0\in F$

এতিয়া $0x=(0+0)x$

$=0x+0x$

$\therefore 0x+(-0x)=0x+0x+(-0x)$

$\Rightarrow 0=0x$

অৰ্থাৎ $0x=0$

(iii) দিয়া আছে $\alpha x=0$

যদি $\alpha=0$, প্ৰমাণ কৰিবলৈ একোৱেই নাই।

ধৰা হ'ল $\alpha\neq 0$, $\therefore \alpha^{-1}$ আছে।

এতিয়া $x=1x$

$=(\alpha\alpha^{-1})x$

$=\alpha^{-1}(\alpha x)$

$=\alpha^{-1}0$

$=0$

(iv) আমি জানো $x+(-x)=0$, এই 0 টো V ৰ শূন্য মৌল

$\alpha+(-\alpha)=0$, এই 0 টো F ৰ শূন্য মৌল

এতিয়া, $\alpha 0=\alpha(x+(-x))$

$\Rightarrow 0=\alpha x+\alpha(-x)$

$\therefore (-\alpha x)+0=(-\alpha x)+\alpha x+\alpha(-x)$

$\Rightarrow -\alpha x=\alpha(-x)$

আকৌ, $0x=(\alpha+(-\alpha))x$

$\Rightarrow 0=\alpha x+(-\alpha)x$

$\therefore (-\alpha x)+0=(-\alpha x)+\alpha x+(-\alpha)x$

$\Rightarrow -\alpha x = (-\alpha)x$

দেখা গ'ল যে, $(-\alpha)x = \alpha(-x) = -\alpha x$.

(v) আমি জানো $x - y = x + (-y)$

আকৌ আমি জানো $\alpha(-y) = -\alpha y$

এতিয়া $\alpha(x-y) = \alpha(x+(-y))$

$= \alpha x + \alpha(-y)$

$= \alpha x - \alpha y$

(vi) ওপৰৰটোৰ দৰেই কৰিব পৰা যাব।

উদাহৰণ 4 ঃ ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। প্ৰমাণ কৰক যে

$$x + x = 2x, \forall x \in V$$

সমাধান ঃ দিয়া আছে

$x + x = 1x + 1x$

$= (1+1)x$

$= 2x$.



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

প্ৰশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। ধৰা হ'ল $x, y \in V$ আৰু $\alpha, \beta \in F$. প্ৰমাণ কৰক যে

(i) যদি $\alpha x = \beta x$, তেনেহ'লে $\alpha = \beta, x \neq 0$

(ii) যদি $\alpha x = \alpha y$, তেনেহ'লে $x = y, \alpha \neq 0$

(iii) যদি $\alpha x = 0$, আৰু $x \neq 0$, তেনেহ'লে $\alpha = 0$

(iv) যদি $\alpha x = 0$, আৰু $\alpha \neq 0$, তেনেহ'লে $x = 0$

(v) যদি $\alpha x = x$, তেনেহ'লে $\alpha = 1$ বা $x = 0$.

১১.৫ ভেক্টৰ স্থানৰ উপস্থান (SUBSPACE OF A VECTOR SPACE)

ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। ধৰা হ'ল W, V ৰ এটা অৰিক্ত উপসংহতি।

W ক V ৰ উপস্থান (subspace) বুলি কোৱা হয় যদি V ৰ যোগ আৰু স্কেলৰ পূৰণৰ অধীনত W-ও F-অৰ ওপৰত এটা ভেক্টৰ স্থান হয়।

টোকা ঃ 1. V নিজেই V ৰ উপস্থান।

2. যোগাধীনত সংঘ V ৰ শূন্য মৌলৰ দ্বাৰা গঠিত $\{0\}$ সংহতিটোৱো এটা ভেক্টৰ স্থান। ইয়াক ৰিক্ত স্থান (empty space) বুলি কোৱা হয়। $\{0\}$ ও V ৰ এটা উপস্থান।

উপপাদ্য ঃ V(F) ভেক্টৰ স্থানৰ এট অৰিক্ত উপসংহতি W, V ৰ উপস্থান হ'ব যদি আৰু যদিহে যোগ আৰু স্কেলাৰ পূৰণৰ সহায়ত W আৱদ্ধ হয়।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল, W, V(F) অৰ এটা উপস্থান। গতিকে, সংজ্ঞামতে, যোগ আৰু স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত W আৱদ্ধ।

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল যোগ আৰু স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত W আৱদ্ধ।

ধৰা হ'ল $a,b \in W$

এতিয়া $1 \in F$

$\therefore -1 \in F$

এতিয়া $-1 \in F, b \in W$

$\therefore (-1)b \in W$ অৰ্থাৎ $-b \in W$

গতিকে, $a \in W, -b \in W$

$\therefore a-b \in W$

$\therefore$ গতিকে যোগাত্মক আবেলীয় সংঘ V ৰ W এটা উপসংঘ।

ভেক্টৰ স্থানৰ বাবে বাকী আটাইকেইটা চর্ত W ত সিদ্ধ হয়, কিয়নো সেই চর্তবোৰ V ত সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ F অৰ ওপৰত W এটা ভেক্টৰ স্থান।

উপপাদ্য ঃ V(F) ভেক্টৰ স্থানৰ এটা অৰিক্ত উপসংহতি W, V ৰ উপস্থান হ'ব যদি আৰু যদিহে $\alpha x + \beta y \in W \ \forall \ \alpha, \beta \in F; x, y \in W$.

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল, W, V ৰ এটা উপস্থান।

ধৰা হ'ল $x, y \in W$, $\alpha, \beta \in F$

$\therefore \alpha x \in W$, $\beta y \in W$

$\therefore \alpha x + \beta y \in W$

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল W, V ৰ এটা অৰিক্ত উপসংহতি যাতে সকলো $\alpha, \beta \in F$; $x, y \in W$, ৰ বাবে $\alpha x + \beta y \in W$.

এতিয়া $1 \in F$

$\therefore 1x + 1y \in W$

অৰ্থাৎ $x + y \in W$

$\therefore$ যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত W আৱদ্ধ।

আকৌ $\alpha \in F$, $0 \in F$

$\therefore \alpha x + 0y \in W$

অৰ্থাৎ, $\alpha x \in W$

$\therefore$ স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত W আৱদ্ধ।

$\therefore$ W, V ৰ এটা উপস্থান (আগৰ উপপাদ্যটোৰ সহায়ত)।

উদাহৰণ 5 ঃ $R^2(R)$ ভেক্টৰ স্থানটো লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $W = \{(a,0) : a \in R\}$

স্পষ্টত ঃ $W \subseteq R^2$ আৰু $W \neq \phi$

ধৰা হ'ল $\alpha,\beta \in R$; $(a,0),(b,0) \in W$

$$\alpha(a,0)+\beta(b,0)=(\alpha a,0)+(\beta a,0)$$
$$=(\alpha a+\beta a,0+0)$$
$$=(\alpha a+\beta a,0)\in W$$

$\therefore$ R^2 অৰ W এটা উপস্থান।

উদাহৰণ 6 ঃ $R^3(R)$ ভেক্টৰ স্থানটো লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $W=\{(x_1,x_2,x_3): x_1+x_2+x_3=0, x_1,x_2,x_3 \in R\}$

স্পষ্টত ঃ $W \subseteq R^3, W \neq \phi$

ধৰা হ'ল $\alpha,\beta \in R; x=(x_1,x_2,x_3)\in W, y=(y_1,y_2,y_3)\in W$

$$\therefore x_1+x_2+x_3=0$$
$$y_1+y_2+y_3=0$$

এতিয়া, $\alpha x+\beta y=\alpha(x_1,x_2,x_3)+\beta(y_1,y_2,y_3)$

$$=(\alpha x_1,\alpha x_2,\alpha x_3)+(\beta y_1,\beta y_2,\beta y_3)$$
$$=(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\beta y_3+\alpha x_3)$$

এতিয়া, $(\alpha x_1+\beta y_1)+(\alpha x_2+\beta y_2)+(\beta y_3+\alpha x_3)$

$$=\alpha(x_1+x_2+x_3)+\beta(y_1+y_2+y_3)$$
$$=\alpha 0+\beta 0$$
$$=0$$

$\therefore \alpha x+\beta y \in W$

$\therefore$ V ৰ W এটা উপস্থান।

উপপাদ্য ঃ এটা ভেক্টৰ স্থানৰ দুটা উপস্থানৰ ছেদনো এটা উপস্থান।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল ক্ষেত্ৰ F অৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান।

ধৰা হ'ল W_1 আৰু W_2, V ৰ দুটা উপস্থান।

$$\therefore W_1 \neq \phi, W_2 \neq \phi$$

$\therefore W_1 \cap W_2 \neq \phi$, কিয়নো অন্ততঃ W ৰ শূন্য মৌল 0 $\in$ $W_1 \cap W$.

ধৰা হ'ল $\alpha,\beta \in F; x,y \in W_1 \cap W_2$

$x \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow x \in W$ আৰু $x \in W_2$

$y \in W_1 \cap W_2 \Rightarrow y \in W_1$ আৰু $y \in W_2$.

এতিয়া $\alpha,\beta \in F$; $x,y \in W_1$ আৰু V ৰ W_1 এটা উপস্থান।

$$\therefore \alpha x+\beta y \in W_1$$

আকৌ $\alpha,\beta \in F$; $x,y \in W_2$ আৰু V ৰ W_2 উপস্থান।

$$\therefore \alpha x + \beta y \in W_2$$

গতিকে, $\alpha x + \beta y \in W_1$ আৰু $\alpha x + \beta y \in W_2$

$$\therefore \alpha x + \beta y \in W_1 \cap W_2$$

$\therefore$ V ৰ $W_1 \cap W_2$ এটা উপস্থান।

টোকা ঃ দুটা উপস্থানৰ মিলন এটা উপস্থান নহ'বও পাৰে।

আমি জানো যে মৌলক্রমিক যোগ আৰু মৌলক্রমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত R অৰ ওপৰত R^3 এটা ভেক্টৰ স্থান।

ধৰা হ'ল $W_1 = \{(x,0,0) : x \in R\}$

$$W_2 = \{(0, y,0) : x \in R\}$$

স্পষ্টত ঃ R^3 অৰ W_1 এটা উপস্থান, R^3 অৰ W_2 এটা উপস্থান।

এতিয়া $(5,0,0) \in W_1$, $(0,5,0) \in W_2$

কিন্তু $(5,0,0)+(0,0,5) = (5,5,0) \notin W_1 \cup W_2$

অর্থাৎ, $(5,0,0) \in W_1 \cup W_2$, $(0,5,0) \in W_1 \cup W_2$

কিন্তু $(5,0,0)+(0,0,5) \notin W_1 \cup W_2$

$\therefore$ R^3 অৰ $W_1 \cup W_2$ এটা উপস্থান নহয়।

উপপাদ্য ঃ দুটা উপস্থানৰ মিলন এটা উপস্থান যদি আৰু যদিহে এটা আনটোৰ উপসংহতি হয়।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল ক্ষেত্ৰ F অৰ ওপৰত V ৰ এটা ভেক্টৰ স্থান।

ধৰা হ'ল W_1, W_2 , V ৰ দুটা উপস্থান।

ধৰা হ'ল $W_1 \subseteq W_2$. গতিকে $W_1 \cup W_2 = W_2$

$\because$ V ৰ W_2 এটা উপস্থান,

$\therefore$ V ৰ $W_1 \cup W_2$ এটা উপস্থান।

বিপৰীতক্রমে, ধৰা হ'ল W_1 আৰু W_2 , V ৰ দুটা উপস্থান যাতে $W_1 \cup W_2$ ও V ৰ এটা উপস্থান।

প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে $W_1 \subseteq W_2$ বা $W_2 \subseteq W_1$

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল এইটো সত্য নহয়।

$$\therefore W_1 \not\subseteq W_2 \text{ আৰু } W_2 \not\subseteq W_1$$

$\therefore$ W_1 অত এনে এটা x আছে যাতে $x \notin W_2$.

আকৌ, W_2 ত এনে এটা y আছে যাতে $y \notin W_1$.

এতিয়া $x \in W_1 \Rightarrow x \in W_1 \cup W_2$

$$y \in W_2 \Rightarrow y \in W_1 \cup W_2$$

$\because$ V ৰ $W_1 \cup W_2$ এটা উপস্থান,

$$\therefore x + y \in W_1 \cup W_2$$

$\Rightarrow x+y\in W_1$ বা $x+y\in W_2$

ধৰা হ'ল $x+y\in W_i$

এতিয়া $-x\in W_1\ (\because x\in W_1), x+y\in W_1$

$\therefore (-x)+x+y\in W_1$

$\Rightarrow (-x+x)+y\in W_1$

$\Rightarrow 0+y\in W_1$

$\Rightarrow y\in W_1$

এইটো স্ববিৰোধী কথা।

সেইদৰে, ধৰা হ'ল $x+y\in W_2$

এতিয়া $x+y\in W_2, -y\in W_2\ (\because y\in W_2)$

$\therefore (x+y)+(-y)\in W_2$

$\Rightarrow x+(y+(-y))\in W_2$

$\Rightarrow x+0\in W_2$

$\Rightarrow x\in W_2,$

এইটো স্ববিৰোধী কথা।

গতিকে, আমি ধৰি লোৱা কথাটো ভুল।

$\therefore W_1\subseteq W_2$ বা $W_2\subseteq W_1$.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৩

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল মৌলক্রমিক যোগ আৰু মৌলক্রমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত $R^3(R)$ এটা ভেক্টৰ স্থান।

(i) ধৰা হ'ল $W=\{(a,2b,3c): a,b,c\in R\}$. প্রমাণ কৰক যে R^3 ৰ W এটা উপস্থান।

(ii) ধৰা হ'ল $W=\{(x,y,z): x-3y+4z=0, x,y,z\in R\}$. প্রমাণ কৰক যে R^3 ৰ W এটা উপস্থান।

(iii) ধৰা হ'ল $W=\{(x,y,z): x^2+y^2=z^2, x,y,z\in R\}$. প্রমাণ কৰক যে R^3 ৰ W উপস্থান নহয়।

প্রশ্ন নং ২ঃ ধৰা হ'ল মৌলক্রমিক যোগ আৰু মৌলক্রমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত $R^n(R)$ এটা ভেক্টৰ স্থান।

ধৰা হ'ল $W=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n): x_1+x_2+\cdots+x_n=1\}$. প্রমাণ কৰক যে R^n অৰ W উপস্থান নহয়।

১১.৮ ৰৈখিক পৰতন্ত্ৰতা আৰু স্বতন্ত্ৰতা (LINEAR DEPENDENCE AND INDEPENDENCE)

ধৰা হ'ল ক্ষেত্ৰ F অৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। V ৰ ভেক্টৰ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in V$ অক ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ (linearly dependent) বুলি কোৱা হয় যদি F অত স্কেলাৰ $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in F$ (সকলোবোৰ শূন্য নহয়) থাকে যাতে

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 .$$

গতিকে V ভেক্টৰ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in V$ ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ হ'ব যদি

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$$

$\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ অৰ অন্ততঃ এটা শূন্য নহয়।

যদি $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$

$\Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \cdots, \alpha_n = 0$;

তেনেহ'লে $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ভেক্টৰক ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ (linearly dependent) বুলি কোৱা হয়।

এটা সসীম সংহতি $\{x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n\}$ অক ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ বুলি কোৱা হয় যদিহে ইয়াৰ n টা মৌল ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ হয়। আনহাতেদি ইয়াক ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ বুলি কোৱা হয় যদি ইয়াৰ n টা মৌল ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ হয়।

V ৰ কোনো উপসংহতি W ক ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ বুলি কোৱা হয় যদি W ৰ প্ৰতিটো সসীম অৰিক্ত উপসংহতি ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ হয়। অন্যথাই ইয়াক ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ বুলি কোৱা হয়।

টোকা ঃ

1. ধৰা হ'ল $x \in V$, আৰু $x \neq 0$

ধৰা হ'ল $\alpha \in F$

এতিয়া $\alpha x = 0$

$\Rightarrow \alpha x = 0x$

$\Rightarrow \alpha = 0$, $[\alpha x = \beta x \Rightarrow \alpha = \beta$, যদি $x \neq 0]$

$\therefore x$ ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ, অৰ্থাৎ, এটা অশূন্য ভেক্টৰ সদায় ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

2. আমি জানো $1.0 = 0$, কিন্তু $1 \neq 0$, য'ত 1 হ'ল F অৰ একক মৌল।

$\therefore$ শূন্য ভেক্টৰ সদায় ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

3. এটা ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ ভেক্টৰৰ সংহতিৰ অধিসংহতি (superset) ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

4. এটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ ভেক্টৰৰ সংহতিৰ উপসংহতি (subset) ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

উদাহৰণ 7 ঃ মৌলক্ৰমিক যোগ আৰু মৌলক্ৰমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত R^2 (R) ভেক্টৰ

স্থানটো লোৱা হ'ল।

R^2 ৰ $e_1=(1,0), e_2=(0,1)$ ভেক্টৰ দুটা লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $\alpha_1, \alpha_2 \in R$

এতিয়া $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0$

$\Rightarrow \alpha_1(1,0)+\alpha_2(0,1)=(0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1,0)+(0,\alpha_2)=(0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1,\alpha_2)=(0,0)$

$\Rightarrow \alpha_1=0, \alpha_2=0$

$\therefore e_1=(1,0), e_2=(0,1)$ ভেক্টৰ দুটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

উদাহৰণ 8 ঃ মৌলক্ৰমিক যোগ আৰু মৌলক্ৰমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত R^3 (R) ভেক্টৰ স্থানটো লোৱা হ'ল।

R^3 ৰ $x=(1,2,-1), y=(2,2,1), z=(1,-2,3)$ ভেক্টৰ তিনিটা লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$

এতিয়া $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0$

$\Rightarrow \alpha_1(1,2,-1)+\alpha_2(2,2,1)+\alpha_3(1,-2,3)=(0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1,2\alpha_1,-\alpha_1)+(2\alpha_2,2\alpha_2,\alpha_2)+(\alpha_3,-2\alpha_3,3\alpha_3)=(0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3, 2\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3, -\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3)=(0,0,0)$

$\Rightarrow \alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3=0 \ldots$ (1)

$2\alpha_1+2\alpha_2-2\alpha_3=0$

অৰ্থাৎ, $\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3=0$ ... (2)

$-\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_3=0$ ... (3)

এতিয়া $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

$=1(1+1)-2(1-1)+1(1+1)$

$=4\neq 0$

$\therefore$ (1),(2),(3) সমীকৰণৰ একমাত্ৰ সমাধান হ'ল $\alpha_1=0, \alpha_2=0, \alpha_3=0$.

$\therefore (1,2,-1),(2,2,1),(1,-2,3)$ ভেক্টৰ তিনিটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

উদাহৰণ 9 ঃ $R^3(R)$ ভেক্টৰ স্থানটো লোৱা হ'ল।

R^3 ৰ $x=(1,1,2), y=(1,2,5), z=(5,3,4)$ ভেক্টৰ তিনিটা লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$

এতিয়া $\alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = 0$

$\Rightarrow \alpha_1(1,1,2) + \alpha_2(1,2,5) + \alpha_3(5,3,4) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_1, 2\alpha_1) + (\alpha_2, 2\alpha_2, 5\alpha_2) + (5\alpha_3, 3\alpha_3, 4\alpha_3) = (0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3) = (0,0,0)$

$\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3 = 0 \ldots$ (1)

$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \ldots$ (2)

$2\alpha_1 + 5\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \ldots$ (3)

এতিয়া $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$

$= 1 \times (8-15) - 1 \times (4-6) + 5 \times (5-4)$

$= -7 + 2 + 5 = 0$

$\therefore$ সমীকৰণ প্ৰণালীৰ অশূন্য সমাধান আছে।

(1) আৰু (2)ৰ পৰা

$$\frac{\alpha_1}{3-10} = \frac{\alpha_2}{-(3-5)} = \frac{\alpha_3}{2-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_1}{-7} = \frac{\alpha_2}{2} = \frac{\alpha_3}{1}$$

$\Rightarrow \alpha_1 = -7k, \alpha_2 = 2k, \alpha_3 = k, k \in R$

(3) ৰ পৰা $2 \times (-7k) + 5 \times 2k + 4k = 0$

$\therefore \ (-7k, 2k, k)$ এ (3) সিদ্ধ কৰে।

গতিকে, $(-7,2,1)$ এটা সমাধান।

$\therefore \ -7x + 2y + z = 0$

$\therefore \ (1,1,2), (1,2,5), (5,3,4)$ ভেক্টৰ তিনিটা ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ

উদাহৰণ 10 ঃ Q ৰ ওপৰত R ভেক্টৰ স্থানটো লোৱা হ'ল।

আমি জানো $1, \sqrt{3} \in R$

ধৰা হ'ল $\alpha, \beta \in Q$ যাতে $1\alpha + \sqrt{3}\beta = 0$

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল $\beta \neq 0$

$$\therefore \sqrt{3} = -\frac{\alpha}{\beta}$$

এতিয়া $\alpha \in Q, \beta \in Q \quad \therefore -\frac{\alpha}{\beta} \in Q$

$\therefore \sqrt{3} \in Q$, এইটো স্ববিৰোধী কথা।

$\therefore \quad \beta = 0$

ইয়াৰ পৰা $\alpha = 0$

$\therefore$ Q ৰ ওপৰত R অত $\{1, \sqrt{3}\}$ ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

প্ৰমেয় ঃ যদি এটা ভেক্টৰ স্থানৰ দুটা ভেক্টৰ ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ হয়, তেনেহ'লে এটা আনটোৰ স্কেলাৰ গুণিতক হ'ব।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান।

ধৰা হ'ল $x, y \in V$ যাতে x, y ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

গতিকে স্কেলাৰ α, β আছে (দুয়োটা শূন্য নহয়) যাতে,

$$\alpha x + \beta y = 0$$

ধৰা হ'ল $\alpha \neq 0 \quad \therefore \alpha^{-1} \in F$

এতিয়া $\alpha x = -\beta y$

$\Rightarrow \alpha^{-1}(\alpha x) = \alpha^{-1}(-\beta y)$

$\Rightarrow (\alpha^{-1}\alpha)x = (-\alpha^{-1}\beta)y$

$\Rightarrow x = \delta y$, $-\alpha^{-1}\beta = \delta$ বুলি ধৰা হ'ল

গতিকে, y ৰ স্কেলাৰ গুণিতক হ'ল x.

সেইদৰে, যদি $\beta \neq 0$, x অৰ স্কেলাৰ গুণিতক হ'ব y.



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৪

প্ৰশ্ন নং ১ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $R^3(R)$ অত $(1,1,2),(1,2,5),(5,3,4)$ ভেক্টৰ তিনিটা ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

প্ৰশ্ন নং ২ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $R^3(R)$ অত $(2,3,1),(2,1,3),(1,1,1)$ ভেক্টৰ তিনিটা ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $R^3(R)$ অত $(0,1,1),(1,0,1),(1,1,0)$ ভেক্টৰ তিনিটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $R^3(R)$ অত $(1,2,-1),(2,2,1),(1,-2,3)$ ভেক্টৰ তিনিটা ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

১১.৭ আধাৰ আৰু মাত্ৰা (BASIS AND DIMENSION)

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। ধৰা হ'ল $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in V$ যিকোনো ভেক্টৰ।

$x = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$; য'ত $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in F$ অক $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ভেক্টৰৰ ৰৈখিক সংযোজন (linear combination) বুলি কোৱা হয়।

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। V ৰ এটা উপসংহতি S অক V ৰ আধাৰ (basis) বুলি কোৱা হয় যদি

(i) S অৰ সসীম সংখ্যক মৌল ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ,

(ii) V ৰ প্ৰতিটো ভেক্টৰ S অৰ সসীম সংখ্যক মৌলৰ ৰৈখিক সংযোজন।

উদাহৰণ 11 ঃ $R^2(R)$ ভেক্টৰ স্থানটো লোৱা হ'ল। R^2 ৰ উপসংহতি $S = \{e_1, e_2\}$ লোৱা হ'ল। য'ত $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)$

ধৰা হ'ল $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ যাতে

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0$$
$$\Rightarrow \alpha_1(1,0) + \alpha_2(0,1) = (0,0)$$
$$\Rightarrow (\alpha_1, 0) + (0, \alpha_2) = (0,0)$$
$$\Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$$
$$\Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0$$

$\therefore$ S ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

ধৰা হ'ল $x = (x_1, x_2) \in R^2$

এতিয়া, $x = (x_1, x_2)$

$$= x_1(1,0) + x_2(0,1)$$
$$= x_1 e_1 + x_2 e_2$$

গতিকে R^2 ৰ প্ৰতিটো ভেক্টৰক S অৰ মৌলৰ ৰৈখিক সংযোজন হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

$\therefore$ R^2 ৰ S এটা আধাৰ। ইয়াক প্ৰামাণিক আধাৰ (standard basis) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ 12 ঃ $R^3(R)$ অৰ প্ৰামাণিক আধাৰ হ'ল $S = \{e_1, e_2, e_3\}$ য'ত $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$, $e_3 = (0,0,1)$.

উদাহৰণ 13 ঃ $R^n(R)$ অৰ প্ৰামাণিক আধাৰ হ'ল $S = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ য'ত $e_1 = (1,0,0,\cdots,0)$, $e_2 = (0,1,0,\cdots,0)$, $\cdots, e_n = (0,0,0,\cdots,1)$.

উদাহৰণ 14 ঃ $R^3(R)$ ভেক্টৰ স্থানটো লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল R^3 ৰ $T = \{u_1, u_2, u_3\}$ এটা উপসংহতি য'ত

$u_1=(1,1,0), u_2=(1,0,0), u_3=(0,1,1).$

ধৰা হ'ল $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3 \in R$ যাতে

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3=0$$
$$\Rightarrow \alpha_1(1,1,0)+\alpha_2(1,0,0)+\alpha_3(0,1,1)=(0,0,0)$$
$$\Rightarrow (\alpha_1,\alpha_1,0)+(\alpha_2,0,0)+(0,\alpha_3,\alpha_3)=(0,0,0)$$
$$\Rightarrow (\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_3,\alpha_3)=0$$
$$\therefore \alpha_1+\alpha_2=0$$
$$\alpha_1+\alpha_3=0$$
$$\alpha_3=0$$
$$\therefore \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$$

$\therefore$ T ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

ধৰা হ'ল $x=(x_1,x_2,x_3)\in R^3$ যাতে

$x=\beta_1u_1+\beta_2u_2+\beta_3u_3$, য'ত $\beta_1,\beta_2,\beta_3\in R$

$$\Rightarrow (x_1,x_2,x_3)=\beta_1(1,1,0)+\beta_2(1,0,0)+\beta_3(0,1,1)$$
$$\Rightarrow (x_1,x_2,x_3)=(\beta_1,\beta_1,0)+(\beta_2,0,0)+(0,\beta_3,\beta_3)$$
$$\Rightarrow (x_1,x_2,x_3)=(\beta_1+\beta_2,\beta_1+\beta_3,\beta_3)$$
$$\therefore \beta_1+\beta_2=x_1$$
$$\beta_1+\beta_3=x_2$$
$$\beta_3=x_3$$
$$\therefore \beta_1=x_2-\beta_3=x_2-x_3$$
$$\beta_2=x_1-\beta_1=x_1-x_2+x_3$$
$$\therefore (x_1,x_2,x_3)=(x_2-x_3)(1,1,0)+(x_1-x_2+x_3)(1,0,0)+x_3(0,1,1)$$

গতিকে, R^3 ৰ প্ৰতিটো ভেক্টৰক T ৰ মৌলৰ ৰৈখিক সংযোজন হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

$\therefore$ R^3 ৰ T এটা আধাৰ।

টোকা ঃ উদাহৰণ 12 আৰু উদাহৰণ 14 অৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে এটা ভেক্টৰ স্থানৰ একাধিক আধাৰ থাকিব পাৰে।

উদাহৰণ 15 ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $R^3(R)$ ভেক্টৰ স্থানৰ $\{(1,1,2),(1,2,5),(5,3,4)\}$ সংহতিটো আধাৰ নহয়।

সমাধান ঃ আমি ইতিমধ্যে প্ৰমাণ কৰিছোঁ যে $\{(1,1,2),(1,2,5),(5,3,4)\}$ সংহতিটো ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

$\therefore$ প্রদত্ত সংহতিটো R^3 ৰ আধাৰ নহয়।

উপপাদ্য ঃ ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। যদি V ৰ $S=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ এটা আধাৰ, তেনেহ'লে V ৰ প্রতিটো মৌলক $u_1,u_2,\cdots,u_n$ অৰ ৰৈখিক সংযোজন হিচাপে অদ্বিতীয়ভাৱে (uniquely) প্রকাশ কৰিব পাৰি।

প্রমাণ ঃ আধাৰৰ সংজ্ঞাৰ পৰা আমি জানো যে V ৰ প্রতিটো মৌলক $u_1,u_2,\cdots,u_n$ অৰ ৰৈখিক সংযোজন হিচাপে প্রকাশ কৰিব পাৰি। আমি দেখুৱাম যে এই প্রকাশটো অদ্বিতীয় (unique)

ধৰা হ'ল $x\in V$

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল

$$x=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n$$

$$x=\beta_1u_1+\beta_2u_2+\cdots+\beta_nu_n$$

য'ত $\alpha_i\in F$, $\beta_i\in F$, $i=1,2,\cdots,n.$

$$\therefore\ \alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\cdots+\alpha_nu_n=\beta_1u_1+\beta_2u_2+\cdots+\beta_nu_n$$

$$\Rightarrow(\alpha_1-\beta_1)u_1+(\alpha_2-\beta_2)u_2+\cdots+(\alpha_n-\beta_n)u_n=0$$

$\because$ $\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্র,

$$\therefore\ \alpha_1-\beta_1=0,\alpha_2-\beta_2=0,...,\alpha_n-\beta_n=0$$

$$\Rightarrow\alpha_1=\beta_1,\alpha_2=\beta_2,...,\alpha_n=\beta_n$$

গতিকে, প্রকাশটো অদ্বিতীয়।

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল ক্ষেত্র F অৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান।

যদি V ৰ কোনো আধাৰৰ মৌলৰ সংখ্যা সসীম হয়, তেনেহ'লে V ক সসীম মাত্রাৰ ভেক্টৰ স্থান (finite dimensional vector space) বুলি কোৱা হয়। ৰিক্ত স্থানৰ কোনো আধাৰ নাই। ইয়াক সসীম মাত্রাৰ বুলি কোৱা হয়। অন্য ভেক্টৰ স্থানক অসীম মাত্রাৰ (infinite dimensional) বুলি কোৱা হয়। মন কৰিব লগীয়া যে এটা সসীম মাত্রাৰ ভেক্টৰ স্থানৰ যিকোনো দুটা আধাৰৰ মৌলৰ সংখ্যা সমান।

এটা ভেক্টৰ স্থান V ৰ কোনো আধাৰৰ মৌলৰ সংখ্যাক V ৰ মাত্রা (dimension) বুলি কোৱা হয়। সাধাৰণতে ইয়াক dimV ৰে বুজোৱা হয়। ৰিক্ত স্থানৰ মাত্রা 0 বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ 16 ঃ আমি জানো যে $R^2(R)$ ভেক্টৰ স্থানৰ প্রামাণিক আধাৰ $\{(1,0),(0,1)\}$ ৰ মৌলৰ সংখ্যা দুই।

$$\therefore \dim R^2=2$$

উদাহৰণ 17 ঃ $R^3(R)$ অৰ মাত্রা 3.

উদাহৰণ 18 ঃ $R^n(R)$ অৰ মাত্রা n .

উদাহৰণ 19 ঃ প্রমাণ কৰক যে $C(R)$ ভেক্টৰ স্থানৰ $\{1,i\}$ এটা আধাৰ। $C(R)$ অৰ মাত্রা

কিমান ?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $\alpha, \beta \in R$ যাতে

$$1\alpha + i\beta = 0$$
$$\Rightarrow \alpha + i\beta = 0 + i0$$
$$\Rightarrow \alpha = 0, \beta = 0$$

$\therefore \{1, i\}$ সংহতি ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।

এতিয়া $\alpha + i\beta \in C$

$$\alpha + i\beta = 1\alpha + i\beta$$

গতিকে, C ৰ প্ৰত্যেক ভেক্টৰক $\{1, i\}$ সংহতিৰ মৌলৰ ৰৈখিক সংযোজন হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

$\therefore \{1, i\}$ এটা আধাৰ।

$\{1, i\}$ সংহতিৰ মৌলৰ সংখ্যা 2.

$\therefore C(R)$ অৰ মাত্ৰা 2.

উদাহৰণ 20 ঃ $V(F)$ ভেক্টৰ স্থানৰ x, y দুটা মৌল আৰু $\alpha, \beta \in F$ হ'লে, প্ৰমাণ কৰক যে $\{x, y, \alpha x + \beta y\}$ ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

সমাধান ঃ আমি দেখিলোঁ

$$(-\alpha)x + (-\beta)y + 1(\alpha x + \beta y) = 0$$

ইয়াত $1 \neq 0$

$\therefore$ সংহতিটো ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।



১১.৮ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- ধৰা হ'ল "+" প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত V এটা আবেলীয় সংঘ। ধৰা হ'ল "+, $\bullet$" প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত F এটা ক্ষেত্ৰ।

  F অৰ প্ৰত্যেক মৌল α আৰু V ৰ x অৰ বাবে $\alpha x \in V$. ইয়াক স্কেলাৰ পূৰণ বুলি কোৱা হয়।

  তেতিয়া ক্ষেত্ৰ F অৰ ওপৰত V ক ভেক্টৰ স্থান বুলি কোৱা হয়, যদি তলৰ চৰ্তকেইটা সিদ্ধ হয়

  1. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
  2. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

3. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

4. $1x = x$

য'ত $\alpha, \beta \in F$, $x, y \in V$ আৰু 1 হ'ল F অৰ একক মৌল।

- যোগাধীনত সংঘ V ৰ শূন্য মৌলৰ দ্বাৰা গঠিত $\{0\}$ সংহতিটোৱে এটা ভেক্টৰ স্থান। ইয়াক ৰিক্ত স্থান বুলি কোৱা হয়।
- ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। ধৰা হ'ল W, V ৰ এটা অৰিক্ত উপসংহতি। W ক V ৰ উপস্থান বুলি কোৱা হয় যদি V ৰ যোগ আৰু স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত W ও F অৰ ওপৰত এটা ভেক্টৰ স্থান।

  V নিজেই V ৰ উপস্থান।

  $\{0\}$, V ৰ এটা উপস্থান।
- এটা ভেক্টৰ স্থানৰ দুটা উপস্থানৰ ছেদনো এটা উপস্থান। আনহাতেদি দুটা উপস্থানৰ মিলন এটা উপস্থান নহ'বও পাৰে।
- ক্ষেত্ৰ F অৰ ওপৰত ভেক্টৰ স্থান V ৰ ভেক্টৰ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ অক ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ বুলি কোৱা হয় যদি $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$.

  $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ অৰ অন্ততঃ এটা শূন্য নহয়।

  যদি $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$

  $\Rightarrow \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \cdots, \alpha_n = 0$;

  তেনেহ'লে $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ভেক্টৰক ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ বুলি কোৱা হয়।
- এটা অশূন্য ভেক্টৰ সদায় ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ।
- শূন্য ভেক্টৰ সদায় ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।
- ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। ধৰা হ'ল $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n \in V$.

  যিকোনো ভেক্টৰ $x = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$; য'ত $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in F$ অক $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ ভেক্টৰৰ ৰৈখিক সংযোজন (linear combination) বুলি কোৱা হয়।
- ধৰা হ'ল F ক্ষেত্ৰৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান। V ৰ এটা উপসংহতি S অক V ৰ আধাৰ বুলি কোৱা হয় যদি

  (i) S অৰ সসীম সংখ্যক মৌল ৰৈখিকভাৱে স্বতন্ত্ৰ,

  (ii) V ৰ প্ৰতিটো ভেক্টৰ S অৰ সসীম সংখ্যক মৌলৰ ৰৈখিক সংযোজন।
- এটা ভেক্টৰ স্থান V ৰ কোনো আধাৰৰ মৌলৰ সংখ্যাক V ৰ মাত্ৰা বুলি কোৱা হয়। ৰিক্ত স্থানৰ মাত্ৰা 0 বুলি কোৱা হয়।

১১.৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ I. আমি জানো যে যোগাধীনত R এটা আবেলীয় সংঘ।

II. যদি $\alpha \in R, x \in R$, তেনেহ'লে $\alpha x \in R$.

III.(i) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$

(ii) $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$

(iii) $(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x)$

(iv) $1x=x$

য'ত $\alpha, \beta \in R$, $x, y \in R$ আৰু 1 হ'ল R অৰ একক মৌল।

$\therefore$ R অৰ ওপৰত R এটা ভেক্টৰ স্থান।

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ওপৰৰ টোৰ দৰে। নিজে কৰিব।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ প্রথম অংশ ঃ নিজে কৰিব।

দ্বিতীয় অংশ ঃ C ৰ ওপৰত R ভেক্টৰ স্থান নহয়।

$2+3i \in C, 5 \in R$

কিন্তু $(2+3i)5 \notin R$, অর্থাৎ স্কেলাৰ পূৰণ সাপেক্ষে R আৱদ্ধ নহয়।

টোকা ঃ এটা উপক্ষেত্রৰ ওপৰত এটা ক্ষেত্র ভেক্টৰ স্থান হ'ব, কিন্তু এটা ক্ষেত্রৰ ওপৰত এটা উপক্ষেত্র ভেক্টৰ স্থান হ'ব নোৱাৰে।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ I. আমি জানো যে মৌলকক্ষৰ যোগৰ অধীনত V এটা আবেলীয় সংঘ।

II. যদি $\alpha \in R, A \in V$, তেতিয়া $\alpha A \in V$.

III. (i) $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$

(ii) $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

(iii) $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$

(iv) $1A=A$

য'ত $\alpha, \beta \in R$; $A, B \in V$, 1 হ'ল R অৰ একক মৌল।

$\therefore$ R অৰ ওপৰত V এটা ভেক্টৰ স্থান।

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $\alpha, \beta \in R$, $x=(x_1, x_2) \in V$

এতিয়া $(\alpha+\beta)x=(\alpha+\beta)(x_1, x_2)$

$=((\alpha+\beta)x_1, x_2)$

$=(\alpha x_1+\beta x_1, x_2)$

$$\alpha x+\beta x=\alpha(x_1,x_2)+\beta(x_1,x_2)$$
$$=(\alpha x_1,x_2)+(\beta x_1,x_2)$$
$$=(\alpha x_1+\beta x_1,x_2+x_2)$$
$$=(\alpha x_1+\beta x_1,2x_2)$$
$$\therefore(\alpha+\beta)x\neq\alpha x+\beta x$$

$\therefore$ R অৰ ওপৰত V ভেক্টৰ স্থান নহয়।

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) $\alpha x=\beta x$, $x\in V;\alpha,\beta\in F,x\neq 0$

$$\Rightarrow\alpha x+(-\beta x)=\beta x+(-\beta x)$$
$$\Rightarrow\alpha x-\beta x=0$$
$$\Rightarrow(\alpha-\beta)x=0$$
$$\Rightarrow\alpha-\beta=0\quad[\because x\neq 0,0x=0]$$
$$\Rightarrow\alpha=\beta$$

(ii) $\alpha x=\alpha y$, $x,y\in V;\alpha\in F,\alpha\neq 0$

$$\Rightarrow\alpha x-\alpha y=0$$
$$\Rightarrow\alpha(x-y)=0$$
$$\Rightarrow x-y=0\,[\because\alpha\neq 0,\alpha 0=0]$$
$$\Rightarrow x=y$$

(iii) $\alpha x=0,x\neq 0$

$$\Rightarrow\alpha x=0x$$
$$\Rightarrow\alpha=0$$

(iv) $\alpha x=0,\alpha\neq 0$

$$\Rightarrow\alpha x=\alpha 0$$
$$\Rightarrow x=0$$

(v) $\alpha x=x$

$$\Rightarrow\alpha x-x=0$$
$$\Rightarrow\alpha x-1x=0$$
$$\Rightarrow(\alpha-1)x=0$$
$$\Rightarrow\alpha-1=0\text{ বা }x=0$$
$$\Rightarrow\alpha\neq 1\text{ বা }x=0$$

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 3

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) ধৰা হ'ল $\alpha,\beta\in R$, আৰু $x=(a_1,2b_1,3c_1)\in W$,
$y=(a_2,2b_2,3c_2)\in W$

এতিয়া $\alpha x+\beta y=\alpha(a_1,2b_1,3c_1)+\beta(a_2,2b_2,3c_2)$

$=(\alpha a_1,2\alpha b_1,3\alpha c_1)+(\beta a_2,2\beta b_2,3\beta c_2)$

$=(\alpha a_1+\beta a_2,2\alpha b_1+2\beta b_2,3\alpha c_1+3\beta c_2)$

$=(\alpha a_1+\beta a_2,2(\alpha b_1+\beta b_2),3(\alpha c_1+\beta c_2))$

$\in W$

$\therefore R^3$ ৰ W এটা উপস্থান।

(ii) নিজে চেষ্টা কৰক।

(iii) নিজে চেষ্টা কৰক।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $\alpha,\beta\in R$

$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in W, y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in W$

$\therefore x_1+x_2+\cdots+x_n=1$

$y_1+y_2+\cdots+y_n=1$

এতিয়া $\alpha x+\beta y$

$=\alpha(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\beta(y_1,y_2,\cdots,y_n)$

$=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n)+(\beta y_1,\beta y_2,\cdots,\beta y_n)$

$=(\alpha x_1+\beta y_1,\alpha x_2+\beta y_2,\cdots,\alpha x_n+\beta y_n)$

এতিয়া, $(\alpha x_1+\beta y_1)+(\alpha x_2+\beta y_2)+\cdots+(\alpha x_n+\beta y_n)$

$=\alpha(x_1+x_2+\cdots+x_n)+\beta(y_1+y_2+\cdots+y_n)$

$=\alpha+\beta$

$\neq 0$, যদি $\alpha\neq 1-\beta$

$\therefore \alpha x+\beta y\notin W$, যদি $\alpha\neq 1-\beta$

$\therefore R^n$ অৰ W উপস্থান নহয়।

অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ 4

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।



১১.১০ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

১) Lanski, Charles : *Concepts in Abstract Algebra*, (First Indian edition, 2010) American Mathematical Society.

২) Vasistha, A. R. : *Modern Algebra (Abstract algebra),* Krishna Prakashan Media (p) Ltd. Meerut-250001 (U. P).

৩) Vinberg, E. B. : *A course in Algebra* (First Indian edition, 2009), American Mathematical Society).

৪) Vatsa, B. S. and Vatsa, Suchi : *Modern Algebra*, New Age International (p) Ltd., New Delhi-110002.

৫) Sen, M. K, Ghosh, Shamik and Mukhopadhyay, Parthasarthi : *Topics in Abstract Algebra,* Universities Press (India) Pvt. Ltd.Hyderaba500029.



১১.১১ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ প্ৰমাণ কৰক যে যিকোনো উপক্ষেত্ৰ K ৰ ওপৰত ক্ষেত্ৰ F এটা ভেক্টৰ স্থান।

প্ৰশ্ন ২ঃ ধৰা হ'ল মৌলক্ৰমিক যোগ আৰু মৌলিক্ৰমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত $R^3(R)$ এটা ভেক্টৰ স্থান।

ধৰা হ'ল R অৰ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ তিনিটা নিৰ্দিষ্ট মৌল।

$W = \{(x_1, x_2, x_3) : \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0, x_1, x_2, x_3 \in R\}$

প্ৰমাণ কৰক যে $R^3(R)$ অৰ W এটা উপস্থান।

প্ৰশ্ন ৩ঃ ধৰা হ'ল মৌলক্ৰমিক যোগ আৰু মৌলক্ৰমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত $R^3(R)$ এটা ভেক্টৰ স্থান।

ধৰা হ'ল $W = \{(x_1, x_2, x_3) : x_2 + 4x_3 = 0, x_1, x_2, x_3 \in R\}$

$R^3(R)$ অৰ W উপস্থান হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ঃ বাস্তৱ সংখ্যাৰ ভেক্টৰ স্থান R(R) লোৱা হ'ল। ধৰা হ'ল $x, y, z \in R$. যদি $\{x + ay + bz, y, z\}$ সংহতিটো ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ হয়, প্ৰমাণ কৰক যে $\{x, y, z\}$ সংহতিটোৱো ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

[**ইংগিত** $\{x + ay + bz, y, z\}$ সংহতিটো ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ, স্কেলাৰ α, β, γ (সকলো শূন্য নহয়) আছে যাতে $\alpha(x + ay + bz) + \beta y + \gamma z = 0$

ইয়াৰ পৰা, $\alpha x + (\alpha a + \beta) y + (\alpha b + \gamma) z = 0$

যদি $\alpha \neq 0$, তেনেহ'লে $\{x, y, z\}$ ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

যদি $\alpha = 0$, তেনেহ'লে β, γ ৰ অন্ততঃ এটা শূন্য নহয়।

যেতিয়া $\alpha = 0$; $\alpha a + \beta = \beta$, $\alpha b + \gamma = \gamma$.

$\therefore$ $\alpha a + \beta$, $\alpha b + \gamma$ ৰ অন্ততঃ এটা শূন্য নহয়।

$\therefore$ $\{x, y, z\}$ সংহতিটো ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ।

প্ৰশ্ন ৫ঃ ধৰা হ'ল মৌলক্ৰমিক যোগ আৰু মৌলক্ৰমিক স্কেলাৰ পূ�ৰণৰ অধীনত $R^3(R)$এটা ভেক্টৰ স্থান।

$\{(1,2,1),(2,1,0),(1,-1,2)\}$ সংহতিটো $R^3(R)$ অৰ আধাৰ হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ৬ঃ ধৰা হ'ল মৌলক্ৰমিক যোগ আৰু মৌলক্ৰমিক স্কেলাৰ পূৰণৰ অধীনত $R^4(R)$ এটা ভেক্টৰ স্থান। প্ৰমাণ কৰক যে $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ সংহতিটো $R^4(R)$ অৰ এটা আধাৰ, য'ত $e_1 = (1,0,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,0)$, $e_3 = (0,0,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$.

*** ***** ***

অধ্যায় ১২ ঃ মিশ্রিত গণিত (COMBINATORICS)

অধ্যায় গাঁথনি

১২.১ উদ্দেশ্য
১২.২ পৰিচয়
১২.৩ যোগৰ নিয়ম
১২.৪ পূৰণৰ নিয়ম
১২.৫ বিন্যাস
১২.৬ দল
১২.৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১২.৮ অধিক জানিবলৈ
১২.৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
১২.১০ আৰ্হি প্ৰশ্ন

১২.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- যোগৰ নিয়ম সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- পূৰণৰ নিয়ম সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- বিন্যাস সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- দল (বা জোঁট) সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

১২.২ পৰিচয়

মিশ্রিত গণিত (Combinatorics) বিচ্ছিন্ন গণিতৰ (discrete mathematics) এটা প্রয়োজনীয় শাখা। নির্দিষ্ট নিয়মৰ অধীনত এটা সসীম সংগ্রহৰ উপাদানবোৰ সজোৱা বা বাছি উলিওৱাৰ উপায় সম্বন্ধে ইয়াত আলোচনা কৰা হয়, অর্থাৎ বিন্যাস (permutation) আৰু দল বা জোঁটৰ (combination) প্রশ্ন সম্বন্ধে ইয়াত আলোচনা কৰা হয়। কম্পিউটাৰ বিজ্ঞানত মিশ্রিত গণিত বহুলভাৱে ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

১২.৩ যোগৰ নিয়ম (বা বিয়োজক নিয়ম) (THE RULE OF SUM OR DISJUNCTIVE RULE)

এটা কাম A কৰিবলৈ n_1 টা উপায় আছে আৰু এইবোৰতকৈ পৃথক, আন এটা কাম B কৰিবলৈ n_2 টা উপায় আছে, তেনেহ'লে A বা B কৰিবলৈ n_1+n_2 টা উপায় আছে। এই ক্ষেত্রত

দুয়োটা কাম একেলগে কৰিব পৰা নাযায়।

টোকা ঃ এই নিয়মটো সসীম সংখ্যক কামলৈ সম্প্রসাৰণ কৰিব পাৰি। যদি r টা কাম n_1, n_2, ..., n_r টা উপায়ে কৰিব পাৰি আৰু যদি কামকেইটা একেলগে কৰিব নোৱাৰি, তেনেহ'লে এই r টা কামৰ যিকোনো এটা $n_1+n_2+n_3 \ldots + n_r$ টা উপায়ে কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 1 ঃ এটা শ্ৰেণীত 26 জন ল'ৰা আৰু 28 জনী ছোৱালী আছে। শ্ৰেণী প্ৰতিনিধি হিচাপে এজন ছাত্ৰক বছাৰ উপায় নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ এজন ল'ৰা 26 টা উপায়ে বাছিব পাৰি (26 জন ল'ৰাৰ যিকোনো এজনক আমি বাছিব পাৰোঁ।)। এজনী ছোৱালী 28 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

$\therefore$ এজন ছাত্ৰ (ল'ৰা বা ছোৱালী, উভয়ে নহয়) 26+28 অৰ্থাৎ 54 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

উদাহৰণ 2 ঃ এটা পুথিভঁৰালত 30 খন গণিতৰ কিতাপ আৰু 25 খন বিজ্ঞানৰ কিতাপ আছে। এখন গণিতৰ কিতাপ বা এখন বিজ্ঞানৰ কিতাপ কিমানটা উপায়ে বাছিব পাৰি?

সমাধান ঃ আমি এখন কিতাপ বাছিব লাগে, এখন গণিতৰ কিতাপ বা এখন বিজ্ঞানৰ কিতাপ।

এখন গণিতৰ কিতাপ 30 টা উপায়ে বাছিব পাৰি। এখন বিজ্ঞানৰ কিতাপ 25 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

$\therefore$ এখন গণিতৰ কিতাপ বা এখন বিজ্ঞানৰ কিতাপ 30+25 অৰ্থাৎ 55 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

উদাহৰণ 3 ঃ এবাৰ তাচৰ পৰা এখন হৰতন (heart) বা এখন চিৰটন (club) কিমানটা উপায়ে বাছিব পাৰি?

সমাধান ঃ এবাৰ তাচত 52 খিলা তাচপাত থাকে। ইয়াৰে 13 খন হৰতন (hearts), 13 খন ৰোহিতন (diamonds), 13 খন চিৰটন (clubs) আৰু 13 খন ইস্কাপন (spades)।

$\therefore$ এখন হৰতন 13 টা উপায়ে বাছিব পাৰি। এখন চিৰটন 13 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

$\therefore$ এখন হৰতন বা এখন চিৰটন 13+13 অৰ্থাৎ 26 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

১২.৪ পূৰণৰ নিয়ম (বা আনুক্ৰমিক নিয়ম) (THE RULE OF PRODUCT OR SEQUENTIAL RULE)

যদি এটা কাম দুটা ক্ৰমিক ধাপত সম্পন্ন কৰিব পাৰি আৰু প্ৰথম ধাপটো n_1 টা উপায়ে কৰিব পাৰি, আৰু দ্বিতীয় ধাপটো n_2 টা উপায়ে কৰিব পাৰি, তেনেহ'লে কামটো $n_1 \times n_2$ টা উপায়ে কৰিব পাৰি।

টোকা ঃ এই নিয়মটো সসীম সংখ্যক কামলৈ সম্প্রসাৰণ কৰিব পাৰি। যদি এটা কাম r টা ক্ৰমিক ধাপত সম্পন্ন কৰিব পাৰি, আৰু প্ৰথম ধাপটো n_1 টা উপায়ে কৰিব পাৰি, দ্বিতীয় ধাপটো n_2 টা উপায়ে কৰিব পাৰি, আৰু এইদৰে r তম ধাপটো n_r টা উপায়ে কৰিব পাৰি, তেনেহ'লে কামটো $n_1 \times n_2 \times \ldots\ldots\ldots \times n_r$ টা উপায়ে কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 4 ঃ এটা শ্ৰেণীত 25 জন ল'ৰা আৰু 20 জনী ছোৱালী আছে। এজন শিক্ষকে এজন ল'ৰা আৰু এজনী ছোৱালী বাছিব বিচাৰিলে। তেওঁ কিমানটা উপায়ে কামটো কৰিব পাৰিব?

সমাধান ঃ এজন ল'ৰা 25 টা উপায়ে বাছিব পাৰি। এজনী ছোৱালী 20 টা উপায়ে বাছিব পাৰি। গতিকে, প্ৰথম ধাকটো (অৰ্থাৎ এজন ল'ৰা বাছি উলিওৱা কামটো) 25 টা উপায়ে কৰিব পাৰি, দ্বিতীয় ধাপটো (অৰ্থাৎ এজনী ছোৱালী বাছি উলিওৱা কামটো) 20 টা উপায়ে কৰিব পাৰি।

$\therefore$ এজন ল'ৰা আৰু এজনী ছোৱালী 25×20 অৰ্থাৎ 500 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

উদাহৰণ 5 ঃ দুটা অংকবিশিষ্ট অযুগ্ম ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংখ্যা কিমান?

সমাধান ঃ এককৰ স্থানটো 5 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (1, 3, 5, 7, 9 অংককেইটাৰ যিকোনো এটা)। দহকৰ স্থানটো 9 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অংককেইটাৰ যিকোনো এটা)। গতিকে, প্ৰথম ধাপটো 5 টা উপায়ে কৰিব পাৰি, দ্বিতীয় ধাপটো 9 টা উপায়ে কৰিব পাৰি।

$\therefore$ কামটো 5×9 অৰ্থাৎ 45 টা উপায়ে কৰিব পাৰি।

$\therefore$ দুটা অংকবিশিষ্ট অযুগ্ম ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংখ্যা 45.



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ১

প্ৰশ্ন নং ১ঃ 24 জন পুৰুষ আৰু 12 গৰাকী মহিলাৰ মাজৰ পৰা এজন পুৰুষ বা এগৰাকী মহিলা বাছি উলিয়াব লাগে। কিমানটা উপায়ে এইটো কৰিব পৰা যাব?

প্ৰশ্ন নং ২ঃ এটা শ্ৰেণীত 24 জন ল'ৰা আৰু 12 জনী ছোৱালী আছে। এজন শিক্ষকে এজন ল'ৰা আৰু এজনী ছোৱালী বাছি উলিয়াব বিচাৰিলে। কিমানটা উপায়ে কামটো কৰিব পৰা যাব?

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ দুটা অংকবিশিষ্ট যুগ্ম ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ তিনিটা অংকবিশিষ্ট অযুগ্ম ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ তিনিটা অংকবিশিষ্ট যুগ্ম ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ চাৰিটা অংকবিশিষ্ট অযুগ্ম ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৭ঃ চাৰিটা অংকবিশিষ্ট যুগ্ম ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৮ঃ এটা পুথিভঁৰালত 40 খন গণিতৰ কিতাপ আৰু 28 খন বিজ্ঞানৰ কিতাপ আছে। কিমানটা উপায়ে এখন গণিতৰ বা এখন বিজ্ঞানৰ কিতাপ বাছিব পৰা যাব?

প্ৰশ্ন নং ৯ঃ এটা পুথিভঁৰালত 40 খন গণিতৰ কিতাপ আৰু 28 খন বিজ্ঞানৰ কিতাপ আছে। কিমানটা উপায়ে এখন গণিতৰ আৰু এখন বিজ্ঞানৰ কিতাপ বাছিব

পৰা যাব?

প্ৰশ্ন নং ১০ঃ এটা ডাঙৰ হলত (hall) 12 খন দুৱাৰ আছে। এজন মানুহে কিমানটা উপায়ে এখন দুৱাৰেৰে সোমাই আন এখন বেলেগ দুৱাৰেৰে ওলাব পাৰে?

প্ৰশ্ন নং ১১ঃ গুৱাহাটী আৰু ডিব্ৰুগড়ৰ মাজত 15 খন বাছ চলাচল কৰে। এজন মানুহে কিমানটা উপায়ে গুৱাহাটীৰ পৰা ডিব্ৰুগড়লৈ গৈ বেলেগ এখন বাছেৰে ঘূৰি আহিব পাৰে?

প্ৰশ্ন নং ১২ঃ এটা শাৰীত (queue) 7 জন ছাত্ৰ কিমানটা উপায়ে থিয় হ'ব পাৰে?

প্ৰশ্ন নং ১৩ঃ এজন মানুহৰ হাতত 6 খন চিঠি আৰু চিঠি ডাকত দিবলৈ তিনিটা চিঠিৰ বাকছ আছে। মানুহজনে কিমানটা উপায়ে চিঠিকেইখন প'ষ্ট কৰিব পাৰে?

প্ৰশ্ন নং ১৪ঃ তিনিটা পুৰস্কাৰ 6 জন ছাত্ৰৰ মাজত কিমানটা উপায়ে বিতৰণ কৰিব পাৰি, যদি প্ৰতিটো পুৰস্কাৰৰ বাবে প্ৰতিজন ছাত্ৰই অৰ্হতাসম্পন্ন?

প্ৰশ্ন নং ১৫ঃ এজন অনুজ্ঞা ফলকত ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ দুটা পৃথক আখৰ আৰু তাৰ ঠিক পাছত চাৰিটা পৃথক অংক আছে। কিমানকেইখন অনুজ্ঞা ফলক প্ৰস্তুত কৰিব পৰা যাব?

প্ৰশ্ন নং ১৬ঃ এখন প্ৰশ্ন কাকতত দহটা সঁচা-মিছা (true-false) লিখিব লগা প্ৰশ্ন আছে। এজন পৰীক্ষাৰ্থীয়ে কিমানটা উপায়ে প্ৰশ্নকেইটাৰ উত্তৰ কৰিব পাৰে?

প্ৰশ্ন নং ১৭ঃ 5 টা মৌলবিশিষ্ট এটা সংহতিৰপৰা 7 টা মৌলবিশিষ্ট এটা সংহতি লৈ কিমানটা ফলন আছে?

প্ৰশ্ন নং ১৮ঃ 7 টা মৌলবিশিষ্ট এটা সংহতিৰ পৰা 5 টা মৌলবিশিষ্ট এটা সংহতি লৈ কিমানটা ফলন আছে?

প্ৰশ্ন নং ১৯ঃ 5 টা মৌলবিশিষ্ট এটা সংহতিৰ পৰা 7 টা মৌলবিশিষ্ট এটা সংহতিলৈ কিমানটা একৈকী ফলন আছে?

প্ৰশ্ন নং ২০ঃ m টা মৌলবিশিষ্ট এটা সংহতিৰ পৰা n টা মৌলবিশিষ্ট এটা সংহতিলৈ কিমানটা একৈকী ফলন আছে?

প্ৰশ্ন নং ২১ঃ ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ আখৰ ব্যৱহাৰ কৰি সাতটা বৰ্ণযুক্ত কিমানটা পেলিনড্ৰ'ম সাজিব পাৰি, যদিহে এটা বৰ্ণ দুবাৰতকৈ বেছি ব্যৱহাৰ কৰা নহয়?

১২.৫ বিন্যাস (PERMUTATION)

ধৰাহ'ল এটা সংহতিত n টা পৃথক মৌল আছে। সংহতিটোৰ r টা মৌলৰ এটা ক্ৰমিত সজ্জাক (ordered arrangement) বিন্যাস (বা n টা মৌলৰ r বিন্যাস) বোলা হয়, $r \leq n$.

প্ৰতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে বুজোৱা হয় ${}^nP_r$, বা P(n, r), বা $P\binom{n}{r}$.

উপপাদ্য ঃ (পুনৰুক্তি নোহোৱাকৈ r-বিন্যাসৰ সংখ্যা) n টা বিভিন্ন বস্তুৰ r-বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ল

$P(n, r) = n(n-1)\, n(-2) \ldots\ldots (n-r+1)$

$$= \frac{n!}{(n-r)!},\ r \le n$$

প্রমাণ ঃ প্রথমটো বস্তু n টা বিভিন্ন উপায়ে বাছিব পাৰি। গতিকে (n-1) টা বস্তু বাকী থাকিল। গতিকে, দ্বিতীয় বস্তুটো (n-1) টা উপায়ে বাছিব পাৰি। সেইদৰে, তৃতীয় বস্তুটো (n-2) টা উপায়ে বাছিব পাৰি। এনেদৰে শেষৰ বস্তুটো, অর্থাৎ r -তম বস্তুটো (n-r+1) টা উপায়ে বাছিব পাৰি। ফলস্বৰূপে, পূৰণৰ নিয়ম অনুসৰি, ক্রমিত সজ্জাৰ সংখ্যা হ'ল n(n-1)(n-2) . . . . (n-r+1) গতিকে

$P(n, r) = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-r+1)$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots..(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\ldots..3.2.1}{(n-r)(n-r-1)\ldots. 3.2.1}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

টোকা ঃ $P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!,\ 0!=1$

উদাহৰণ 6 ঃ P(n, 4) = 360 হ'লে, n অৰ মান নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ P (n, 4) = 360

বা, $\frac{n!}{(n-4)!} = 360$

বা, $\frac{n(n-1)(n-2)(4-3)(n-4)!}{(n-4)!} = 360$

বা, n(n-1)(n-2)(n-3) = 6 x 5 x 4 x 3

$\therefore$ n = 6

টোকা ঃ বাওঁপক্ষ চাৰিটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ পূৰণফল। সেইবাবে, সোঁপক্ষকো চাৰিটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ পূৰণফল হিচাবে প্রকাশ কৰা হৈছে।

উদাহৰণ 7 ঃ 1, 2, 3, 5, 7, 8 এই ছয়টা অংকৰপৰা কিমানটা চাৰিটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যা গঠন কৰিব পাৰি, যদি এটা অংক একাধিকবাৰ ব্যৱহাৰ কৰিব নোৱাৰি?

সমাধান ঃ চাৰিটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যাৰ সংখ্যা

= ছয়টা বস্তুৰ (অংকৰ) 4-বিন্যাসৰ সংখ্যা

= P (6, 4)

= $\frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!}$ = 6 x 5 x 4 x 3 = 360

উদাহৰণ 8 ঃ 10 খন পৰীক্ষাৰ উত্তৰৰ বহী কেনেদৰে সজাব পাৰি যদি আটাইতকৈ ভাল আৰু

আটাইতকৈ বেয়াখন সদায় একেলগে থাকে?

সমাধান ঃ আটাইতকৈ ভাল আৰু আটাইতকৈ বেয়াখন একেলগে আছে। গতিকে আমি দুয়োখনকে, এখন বুলি ধৰিব পাৰোঁ। তেনেস্থলত 10 টা বস্তুৰ ঠাইত 9 টা বস্তু হ'ব। এই ক্ষেত্ৰত মুঠ উপায় হ'ব ${}^{9}P_{9}$ অর্থাৎ 9!.

আকৌ, আটাইতকৈ ভাল আৰু আটাইতকৈ বেয়াখনক নিজৰ মাজত 2! টা উপায়ে সজাব পাৰি।

∴ উলিয়াব লগীয়া মুঠ উপায়।

$= 9! \times 2!$

$= 725760.$



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

প্ৰশ্ন নং ১ঃ তিনিজন মানুহ এখন ৰে'লগাড়ীত উঠিল। তাত ছয়খন আসন খালী আছে। মানুহকেইজন কিমান উপায়ে আসন কেইখনত বহিব পাৰিব?

প্ৰশ্ন নং ২ঃ এজন মানুহে 6 জন মানুহক নিমন্ত্ৰণ কৰিবলগীয়া হ'ল। নিমন্ত্ৰণী পত্ৰ পঠিয়াবলৈ তিনিজন পত্ৰবাহক আছে। মানুহজনে কিমানটা উপায়ে নিমন্ত্ৰণী পত্ৰ পঠিয়াব পাৰিব?

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ এটা পৰীক্ষাত 5 টা পুৰস্কাৰ 20 জন পৰীক্ষার্থীক দিব লাগে। যদি এজন পৰীক্ষার্থীয়ে মাত্ৰ এটা পুৰস্কাৰহে পাব পাৰে, কিমানটা উপায়ে পুৰস্কাৰবোৰ বিতৰণ কৰিব পৰা যাব?

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ এটা অংক একাধিকবাৰ ব্যৱহাৰ নকৰাকৈ 1, 2, 3, 4, 5 অংককেইটাৰ পৰা 100 আৰু 1000-অৰ মাজৰ কিমানটা সংখ্যা গঠন কৰিব পাৰি? 100 আৰু 10,000 অৰ মাজৰ সংখ্যাৰ সংখ্যা কিমান?

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ 1, 2, 3, 5, 7, 8 অংককেইটাৰ পৰা কিমানটা চাৰিটা অংকবিশিষ্ট যুগ্ম সংখ্যা গঠন কৰিব পাৰি, যদি এটা অংক একাধিকবাৰ ব্যৱহাৰ কৰা নহয়?

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ 1, 2, 3, 5, 7, 8 অংককেইটাৰ পৰা কিমানটা চাৰিটা অংকবিশিষ্ট অযুগ্ম সংখ্যা গঠন কৰিব পাৰি, যদি এটা অংক একাধিকবাৰ ব্যৱহাৰ কৰা নহয়?

প্ৰশ্ন নং ৭ঃ 1, 2, 3, 5, 7, 8 অংককেইটাৰ পৰা 5 এৰে বিভাজ্য কিমানটা চাৰিটা অংকবিশিষ্ট সংখ্যা গঠন কৰিব পাৰি, যদি এটা অংক একাধিকবাৰ ব্যৱহাৰ কৰা নহয়?

প্ৰশ্ন নং ৮ঃ 10 খন পৰীক্ষাৰ উত্তৰৰ বহী কেনেদৰে সজাব পাৰি যদি আটাইতকৈ ভাল আৰু আটাইতকৈ বেয়াখন কেতিয়াও একেলগে নাথাকে?

প্রশ্ন নং ৯ঃ মিষ্টাৰ X -অৰ 4 খন গণিতৰ কিতাপ, 3 খন পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানৰ কিতাপ আৰু 5 খন অর্থবিজ্ঞানৰ কিতাপ আছে। এটা বুক-শ্বেল্‌ফত তেওঁ কিতাপবোৰ কিমান প্রকাৰে সজাব পাৰে যদি প্রতিটো বিষয়ৰ কিতাপবোৰ একেলগে থাকে আৰু কিতাপবোৰ এই ক্রমত থাকে আৰু কিতাপবোৰ এই ক্রমত থাকে, গণিত, পৰিসংখ্যা বিজ্ঞান, অর্থবিজ্ঞান।

প্রশ্ন নং ১০ঃ TRIANGLE শব্দটোৰ আখৰবোৰ কিমানটা উপায়ে সজাব পাৰি যদি প্রতিটো সজ্জা T ৰে আৰম্ভ হয় আৰু E-ৰে শেষ হয়?

১২.৬ দল বা জোঁট (COMBINATION)

ধৰা হ'ল এটা সংহতিত n টা পৃথক মৌল আছে। সংহতিটোৰ r টা মৌলৰ এটা অক্রমিত বাছনিক (Unordered selection) দল (বা n টা মৌলৰ r-দল) বোলা হয়, $r \le n$.

প্রতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে বজোৱা হয় ${}^{n}C_{r}$ বা C(n, r) বা $C(n_r)$

উপপাদ্য ঃ (পুনৰুক্তি নোহোৱাকৈ r-দলৰ সংখ্যা) n টা বিভিন্ন বস্তুৰ r -দলৰ সংখ্যা হ'ল

$$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{n!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad r \le n$$

প্রমাণ ঃ r-দল বুলি ক'লে আমি বুজোঁ n টা বিভিন্ন বস্তুৰ পৰা r টা বস্তুৰ এটা অক্রমিত বাছনি।

প্রত্যেক r-দলত r টাকৈ বস্তু আছে। এই r টা বস্তুক সিহঁতৰ মাজত ${}^{r}P_{r}$ অর্থাৎ r! উপায়ে সজাব পাৰি। গতিকে, প্রতিটো r-দলৰ পৰা r! টা বিন্যাস পোৱা যাব।

$\therefore$ C(n, r) টা দলৰ পৰা C(n, r) r! টা বিন্যাস পোৱা যাব।

আমি জানো যে n টা বিভিন্ন বস্তুৰ r-বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ল P(n, r).

$\therefore$ C (n, r) r ! = P (n, r)

বা, $C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!}$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

টোকা ঃ $C(n, n) = \frac{n!}{n!(n-n)!} = 1, \ 0.! = 1$

উপপাদ্য ঃ $C(n, r) = C(n, n-r), \quad r \le n$

প্রমাণ ঃ যদি n টা বস্তুৰ পৰা r টা বস্তু বছা যায়, তেনেহ'লে (n-r) বস্তু বাকী থাকিব।

গতিকে, n টা বস্তুৰ পৰা r টা বস্তু বছাৰ অর্থ হ'ল (n-r) টা বস্তু বাদ দিয়া।

গতিকে, প্রত্যেক r-দলৰ অনুৰূপে এটা (n-r) দল আছে।

$\therefore$ C(n, r) = C(n, n-r)

উপপাদ্য ঃ (পাস্কেলৰ অভেদ)

$C(n+1, r) = C(n, r) + C(n, r-1), \quad r \le n$

প্রমাণ ঃ (n+1) টা মৌলবিশিষ্ট এটা সসীম সংহতি A লোৱা হ'ল।

ধৰা হ'ল B, A ৰ এটা উপসংহতি আৰু ধৰা হ'ল B ৰ মৌলৰ সংখ্যা n.

ধৰা হ'ল $p \in A$ যাতে $p \notin B$

স্পষ্টতঃ $A = B \cup \{p\}$

গতিকে A ৰ প্রতিটো r মৌলবিশিষ্ট উপসংহতি হয় B ৰ এটা r মৌলবিশিষ্ট উপসংহতি নতুবা B ৰ এটা (r-1) মৌলবিশিষ্ট উপসংহতি আৰু একমৌল সংহতি {p}ৰ মিলন।

প্রথম ক্ষেত্রত, উপসংহতিৰ সংখ্যা C(n, r); আনহাতেদি দ্বিতীয় ক্ষেত্রত উপসংহতিৰ সংখ্যা C(n, r-1).

$\therefore$ A ৰ r টা মৌলবিশিষ্ট উপসংহতিৰ সংখ্যা C(n, r) + C(n, r-1).

কিন্তু আমি জানো যে A ৰ r টা মৌলবিশিষ্ট উপসংহতিৰ সংখ্যা C(n+1, r).

$\therefore$ C(n+1, r) = C(n, r) + C(n, r-1).

টোকা ঃ ব্লেইজ পাস্কেল (Blaise pascal) আছিল সপ্তদশ শতিকাৰ এজন বিখ্যাত ফৰাচী গণিতজ্ঞ।

উদাহৰণ 9 ঃ 9 জন ভদ্রলোক আৰু 6 গৰাকী মহিলাৰ পৰা 6 জন ভদ্রলোক আৰু 3 গৰাকী মহিলাৰে কিমান কমিটী গঠন কৰিব পৰা যাব?

সমাধান ঃ 9 জন ভদ্রলোকৰ পৰা ${}^9C_6$ টা উপায়ে 6 জনীয়া ভদ্রলোকৰ দল গঠন কৰিব পাৰি। 6 জনীয়া ভদ্রলোকৰ দল গঠন কৰিব পাৰি। 6 গৰাকী মহিলাৰ পৰা ${}^6C_3$ টা উপায়ে 3 জনীয়া মহিলাৰ দল গঠন কৰিব পাৰি।

$\therefore$ পূৰণৰ নিয়ম অনুসৰি, মুঠ কমিটীৰ সংখ্যা = ${}^9C_6 \times {}^6C_3$

$$= \frac{9!}{6!\,3!} \times \frac{6!}{3!\,3!}$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1}$$

$= 3 \times 4 \times 7 \times 5 \times 4$

$= 1680$

উদাহৰণ 10 ঃ এখন প্রশ্নকাকতত A, B, C তিনিটা ভাগ আছে। A ভাগত 4 টা, B ভাগত 5 টা আৰু C ভাগত 6 টা প্রশ্ন আছে। এজন পৰীক্ষার্থীয়ে কিমানটা উপায়ে 7 টা প্রশ্ন বাছিব পাৰিব যদি তেওঁ প্রত্যেক বিভাগৰ পৰা অন্ততঃ দুটা প্রশ্ন বাছিব লাগে?

সমাধান ঃ ইয়াত সম্ভাৱনা তিনিটা

I A ৰ পৰা দুটা, B ৰ পৰা দুটা, C ৰ পৰা তিনিটা

বা II A ৰ পৰা দুটা, B ৰ পৰা তিনিটা, C ৰ পৰা দুটা

বা III A ৰ পৰা তিনিটা, B ৰ পৰা দুটা, C ৰ পৰা দুটা

I -অৰ ক্ষেত্রত মুঠ উপায়

$= {}^4C_2 \times {}^5C_2 \times {}^6C_3 = 6 \times 10 \times 20 = 1200$

II-ৰ ক্ষেত্রত মুঠ উপায়

$= {}^4C_2 \times {}^5C_3 \times {}^6C_2 = 6 \times 10 \times 15 = 900$

III-ৰ ক্ষেত্রত মুঠ উপায়

$= {}^4C_3 \times {}^5C_2 \times {}^6C_2 = 4 \times 10 \times 20 = 800$

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া মুঠ উপায়

$= 1200 + 900 + 800$

$= 2900$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ৩

প্রশ্ন নং ১ঃ এটা কার্যালয়ত 6 জন পুৰুষ আৰু 7 গৰাকী মহিলাই কাম কৰে। কিমানটা উপায়ে 3 জন পুৰুষ আৰু 4 গৰাকী মহিলাৰে গঠিত কমিটী গঠন কৰিব পাৰি?

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা কার্যালয়ত 6 জন পুৰুষ আৰু 7 গৰাকী মহিলাই কাম কৰে। কিমানটা উপায়ে এটা 4 জনীয়া কমিটী গঠন কৰিব পাৰি যদিহে অন্ততঃ এগৰাকী মহিলা অন্তর্ভুক্ত কৰা হয়?

প্রশ্ন নং ৩ঃ এটা কার্যালয়ত 6 জন পুৰুষ আৰু 7 গৰাকী মহিলাই কাম কৰে। কিমানটা উপায়ে এটা 4 জনীয়া কমিটী গঠন কৰিব পাৰি যদিহে অতি বেছি এজন পুৰুষ অন্তর্ভুক্ত কৰা হয়?

প্রশ্ন নং ৪ঃ 8 জন ভদ্রলোক আৰু 4 গৰাকী ভদ্র মহিলাৰ মাজৰ পৰা 5 জনীয়া দল এটা গঠন কৰিব লাগে। যদি অন্ততঃ এগৰাকী মহিলাক দলটোত অন্তর্ভুক্ত কৰিব লাগে, তেনেহ'লে কিমান উপায়ে দলটো গঠন কৰিব পাৰি?

প্রশ্ন নং ৫ঃ এজন মানুহৰ 7 গৰাকী বন্ধু আছে, ইয়াৰে 4 গৰাকী তিৰোতা আৰু 3 জন পুৰুষ। মানুহজনৰ ঘৈনীয়েকৰো 7 গৰাকী বন্ধু আছে, ইয়াৰে 3 গৰাকী তিৰোতা আৰু 4 জন পুৰুষ। এটা ভোজনলৈ ছয় গৰাকী বন্ধুক এনেদৰে নিমন্ত্রণ কৰা হ'ল যাতে 3 গৰাকী তিৰোতা বন্ধু আৰু 3 জন পুৰুষ-বন্ধু থাকে আৰু এওঁলোকৰ ভিতৰৰ তিনিগৰাকী মানুহজনৰ পক্ষৰ বন্ধু আৰু তিনিগৰাকী ঘৈনীয়েকৰ পক্ষৰ বন্ধু। কিমানটা উপায়ে এই ছয় গৰাকী বন্ধুক নিমন্ত্রণ কৰিব পৰা যাব?



১২.৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- এটা কাম A কৰিবলৈ n_1 টা উপায় আছে আৰু এইবোৰতকৈ পৃথক, আন এটা কাম B কৰিবলৈ n_2 টা উপায় আছে, তেনেহ'লে A বা B কৰিবলৈ n_1+n_2 টা উপায় আছে। এই ক্ষেত্ৰত দুয়োটা কাম একেলগে কৰিব পৰা নাযায়। এইটোক যোগৰ নিয়ম বোলে।
- যদি এটা কাম দুটা ক্ৰমিক ধাপত সম্পন্ন কৰিব পাৰি আৰু প্ৰথম ধাপটো n_1 টা উপায়ে কৰিব পাৰি, আৰু দ্বিতীয় ধাপটো n_2 টা উপায়ে কৰিব পাৰি, তেনেহ'লে কামটো $n_1 \times n_2$ টা উপায়ে কৰিব পাৰি। এইটোক পূৰণৰ নিয়ম বোলে।
- ধৰা হ'ল এটা সংহতিত n টা পৃথক মৌল আছে। সংহতিটোৰ r টা মৌলৰ এটা ক্ৰমিত সজ্জাক n টা মৌলৰ r-বিন্যাস বোলা হয়, $r \le n$ । সংহতিটোৰ r টা মৌলৰ এটা অক্ৰমিত বাছনিক n টা মৌলৰ r-দল বোলা হয়, $r \le n$.
- n টা পৃথক মৌলৰ r-বিন্যাসৰ সংখ্যা হ'ল

  $P(n, r) = n(n-1)(n-2) \ldots . (n-r+1)$

  $$= \frac{n!}{(n-r)!},\ r \le n$$

- n টা পৃথক মৌলৰ r-দলৰ সংখ্যা হ'ল

  $$C(n, r) = \frac{P(n, r)}{n!} = \frac{n!}{r!(n-r)!},\ r \le n$$

- $C(n, r) = C(n, n-r),\ r \le n$
- $C(n+1, r) = C(n, r) + C(n, r-1)$



১২.৮ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ এজন মানুহ 24 টা উপায়ে বাছিব পাৰি। এগৰাকী মহিলা 12 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

∴ এজন মানুহ বা এগৰাকী মহিলা 24+12 অৰ্থাৎ 36 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ এজন ল'ৰা 24 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

এজনী ছোৱালী 12 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

∴ এজন ল'ৰা আৰু এজনী ছোৱালী 24×12 অর্থাৎ 288 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এককৰ স্থানটো 5 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (0, 2, 4, 6, 8 অংককেইটাৰ যিকোনো এটা)।

দহকৰ স্থানটো 9 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অংককেইটাৰ যিকোনো এটা)।

∴ উলিয়াব লগীয়া সংখ্যাৰ সংখ্যা।

$= 5 \times 9 = 45$

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এককৰ স্থানটো 5 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (1, 3, 5, 7, 9 অংককেইটাৰ যিকোনো এটা)।

দহকৰ স্থানটো 10 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অংককেইটাৰ যিকোনো এটা)।

শতকৰ স্থানটো 9 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অংককেইটাৰ যিকোনো এটা)।

∴ উলিয়াবলগীয়া সংখ্যাৰ সংখ্যা $= 5 \times 10 \times 9 = 450$

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এককৰ স্থানটো 5 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (0, 2, 4, 6, 8 অংককেইটাৰ যিকোনো এটা)।

দহকৰ স্থানটো 10 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অংককেইটাৰ যিকোনো এটা)।

শতকৰ স্থানটো 9 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 অংককেইটাৰ যিকোনো এটা)।

∴ উলিয়াবলগীয়া সংখ্যাৰ সংখ্যা

$= 5 \times 10 \times 9 = 450$

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক। উত্তৰ 4500

৭ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক। উত্তৰ 4500

৮ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এখন গণিতৰ কিতাপ বা এখন বিজ্ঞানৰ কিতাপ 40+28 অর্থাৎ 68 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

৯ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এখন গণিতৰ কিতাপ আৰু এখন বিজ্ঞানৰ কিতাপ 40×28 অর্থাৎ 1120 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

১০ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এজন মানুহে হলটোত 12 টা উপায়ে সোমাব পাৰে, অর্থাৎ প্রথম ধাপটো 12 টা উপায়ে কৰিব পাৰি। মানুহজনে হলটোৰ পৰা 11 টা উপায়ে ওলাই আহিব পাৰে। অর্থাৎ দ্বিতীয় ধাপটো 11 টা উপায়ে কৰিব পাৰি।

∴ নির্ণেয় উপায়।

$= 12 \times 11 = 132$

১১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক। উত্তৰ 210

১২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক। উত্তৰ 5040

১৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক। উত্তৰ $3^6 = 729$

১৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক। উত্তৰ $6^3 = 216$

১৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ প্রথম আখৰটো 26 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি।

দ্বিতীয় আখৰটো 25 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি

প্রথম অংকটো 10 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি

দ্বিতীয় অংকটো 9 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি

তৃতীয় অংকটো 8 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি

চতুর্থ অংকটো 7 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি

$\therefore$ উলিয়াব লগীয়া মুঠ উপায়

$= 26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7$

১৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ প্রথম প্রশ্নটোৰ উত্তৰ দুটা উপায়ে কৰিব পাৰি (সঁচা বা মিছা)

সেইদৰে, প্রতিটো প্রশ্নৰ উত্তৰ দুটা উপায়ে কৰিব পাৰি।

$\therefore$ নির্ণেয় উপায়

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 2^{10} = 1024$

১৭ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ আদিক্ষেত্রৰ মৌলৰ সংখ্যা = 5

সহক্ষেত্রৰ মৌলৰ সংখ্যা = 7

প্রথমটো মৌল 7 টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

সেইদৰে আদিক্ষেত্রৰ প্রতিটো মৌলক 7 টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

$\therefore$ মুঠ ফলনৰ সংখ্যা

$= 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5$

১৮ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ আদিক্ষেত্রৰ মৌলৰ সংখ্যা = 7

সহক্ষেত্রৰ মৌলৰ সংখ্যা = 5

আদিক্ষেত্রৰ প্রতিটো মৌলক 5 টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

$\therefore$ মুঠ ফলনৰ সংখ্যা

$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^7$

১৯ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ আদিক্ষেত্রৰ মৌলৰ সংখ্যা = 5

সহক্ষেত্রৰ মৌলৰ সংখ্যা = 7

প্রথমটো মৌল 7 টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

দ্বিতীয়টো মৌল 6 টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

তৃতীয়টো মৌল 5 টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

চতুর্থটো মৌল 4 টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

পঞ্চমটো মৌল 3 টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

$\therefore$ নির্ণেয় একৈকী ফলনৰ সংখ্যা

$= 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520$

২০ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এই ক্ষেত্রত m > n, কিয়নো যদি m > n, তেনেহ'লে প্রথম সংহতিটোৰ পৰা দ্বিতীয়টো সংহতিলৈ একৈকী ফলন থাকিব নোৱাৰে।

$\therefore m \leq n$

এতিয়া প্রথম মৌলটো n টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

দ্বিতীয় মৌলটো (n-1) টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

তৃতীয় মৌলটো (n-2) টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

এনেদৰে, m তম মৌলটো (n-m+1) টা উপায়ে সংলগ্ন কৰিব পাৰি।

$\therefore$ নির্ণেয় একৈকী ফলনৰ সংজ্ঞা

$= n(n-1)(n-2) \ldots . (n-m+1)$

২১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ পেলিনড্র'ম (palindrome) শব্দটোৰ আভিধানিক অর্থ এনেধৰণৰ,— ই শব্দ বা শব্দৰ সমষ্টি বা বাক্য বা সংখ্যা,— আৰম্ভণিৰ পৰা পঢ়িলে যি হয়, শেহৰপৰা পঢ়িলেও একে হয়। যতি-চিহ্নৰ ব্যৱহাৰ মানি চলা নহয়। কেতিয়াবা শব্দবোৰ ভঙাও হয়।

উলিয়াবলগীয়া পেলিনড্র'মৰ সংখ্যা

$= 26 \times 25 \times 24 \times 23$

$= 358800$

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ উলিয়াবলগীয়া উপায় $= {}^{6}P_3 = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3!}$

$= 120$

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ উলিয়াবলগীয়া উপায় $= 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729$

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ উলিয়াবলগীয়া উপায় $= {}^{20}P_5 = \frac{20!}{(20-5)!}$

$= \frac{20!}{15!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16 \times 15!}{15!}$

$= 1860480$

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক। উত্তৰ 60,180

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এককৰ স্থানটো দুটা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (2, 8 অংক দুটাৰ যিকোনো এটা)। বাকী তিনিটা স্থান ${}^5P_3$ টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি।

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া সংখ্যাৰ সংখ্যা

$$=2\times {}^5P_3 = 2\times\frac{5!}{(5-3)!} = 2\times\frac{5!}{2!} = 2\times\frac{5\times4\times3\times2!}{2!}$$

$= 120$

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এককৰ স্থানটো 4 টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (1, 3, 5, 7 অংককেইটাৰ যিকোনো এটা)। বাকী তিনিটা স্থান ${}^5P_3$ টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি।

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া সংখ্যাৰ সংখ্যা

$= 4\times {}^5P_3 = 4\times5\times4\times3 = 240$

৭ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এককৰ স্থানটো এটা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি (5)। বাকী তিনিটা স্থান ${}^5P_3$ টা উপায়ে পূৰণ কৰিব পাৰি।

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া সংখ্যাৰ সংখ্যা

$= 1\times {}^5P_3 = 1\times5\times4\times3 = 60$

৮ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ যদি কোনো বাধা আৰোপ কৰা নহয়, তেনেহ'লে 10 খন বহীক ${}^{10}P_{10}$ অর্থাৎ 10! উপায়ে সজাব পাৰি।

আকৌ আমি জানো যে যদি আটাইতকৈ ভালখন আৰু আটাইতকৈ বেয়াখন একেলগে থাকে, তেনেহ'লে মুঠ উপায় $= 9!\times2! = 725760$ (উদাহৰণ8)

$\therefore$ আটাইতকৈ ভালখন আৰু আটাইতকৈ বেয়াখন কেতিয়াও একেলগে নাথাকিলে মুঠ উপায়

$= 10! - 2\times9!$

$= 3628809 - 725760$

$= 2903040$

৯ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ মুঠ উপায়

$= 4!\times3!\times5!$

$= 4\times3\times2\times1\times3\times2\times1\times5\times4\times3\times2\times1$

$= 17280$

১০ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ প্রতিটো সজ্জা T ৰে আৰম্ভ হ'ব লাগিব আৰু E ৰে শেষ হ'ব লাগিব। গতিকে, T আৰু E ৰ স্থান নির্দিষ্ট।

বাকী থাকিল ছয়টা আখৰ, R. I. A, N, G, L.

এই ছয়টা আখৰ ${}^6P_6$ টা উপায়ে অর্থাৎ 6! টা উপায়ে অর্থাৎ $6\times5\times4\times3\times2\times1$ টা উপায়ে অর্থাৎ 720 টা উপায়ে সজাব পাৰি।

$\therefore$ মুঠ উপায় = 720

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ ৩

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ 6 জন মানুহৰ পৰা 3 জন মানুহ ${}^6C_3$ টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

7 গৰাকী মহিলাৰ পৰা 4 গৰাকী মহিলা ${}^7C_4$ উপায়ে বাছিব পাৰি।

∴ মুঠ উপায়ৰ সংখ্যা

$$= {}^6C_3 \times {}^7C_4 = \frac{6!}{3!\,3!} \times \frac{7!}{4!\,3!} = \frac{6\times5\times4}{3\times2\times1} \times \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}$$

$= 20 \times 35 = 700$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ অন্ততঃ এগৰাকী মহিলা বাছিব লাগে। গতিকে মহিলাৰ সংখ্যা 1, বা 2 বা 3 বা 4 হ'ব পাৰে। গতিকে তলৰ সম্ভাৱনাকেইটা পোৱা যাব।

পুৰুষ (6)	মহিলা (7)
3	1
2	2
1	3
0	4

∴ উলিয়াবলগীয়া মুঠ উপায়

$= {}^6C_3 \times {}^7C_1 + {}^6C_2 \times {}^7C_2 + {}^6C_1 \times {}^7C_3 + {}^6C_0 \times {}^7C_4$

$= 20 \times 7 + 15 \times 21 + 6 \times 35 + 1 \times 35$

$= 140 + 315 + 210 + 35$

$= 700$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ অতি বেছি এজন মানুহ বাছিব লাগে। গতিকে পুৰুষৰ সংখ্যা 0, বা 1 হ'ব পাৰে। গতিকে তলৰ সম্ভাৱনাকেইটা পোৱা যাব।

পুৰুষ (6)	মহিলা (7)
0	4
1	3

∴ উলিয়াবলগীয়া মুঠ উপায়

$= {}^6C_0 \times {}^7C_4 + {}^6C_1 \times {}^7C_3 = 1 \times 35 + 6 \times 35 = 35 + 210 = 245$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক। উত্তৰ 736

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ তলৰ সম্ভাৱনাকেইটা পোৱা যাব।

মানুহজন		ঘৈনীয়েক	
পুৰুষ (3)	ভদ্ৰমহিলা (4)	পুৰুষ (4)	ভদ্ৰমহিলা (3)
3	0	0	3
2	1	1	2
1	2	2	1
0	3	3	0

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া মুঠ উপায়

$= ({}^3C_3 \times {}^4C_0 \times {}^4C_0 \times {}^3C_3) + ({}^3C_2 \times {}^4C_1 \times {}^4C_1 \times {}^3C_2) + ({}^3C_1 \times {}^4C_2 \times {}^4C_2 \times {}^3C_1)$

$+ ({}^3C_0 \times {}^4C_3 \times {}^4C_3 \times {}^3C_0)$

= 485, সৰল কৰাৰ পাছত।



১২.৯ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

1) Discrete Mathematical Structures with Application to Computer Science, J.P. Tremblay & R. Manohar.

2) Discrete Structures and Graph Theory, G.S.S. Bhishma Rao.



১২.১০ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ গণনাৰ যোগৰ নিয়মটো লিখক।

প্ৰশ্ন ২ঃ গণনাৰ পূৰণৰ নিয়মটো লিখক।

প্ৰশ্ন ৩ঃ মিশ্রিত যুক্তিৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰক যে

$C(2n, 2) = 2\ C\ (n, 2) + n^2$

প্ৰশ্ন ৪ঃ মিশ্রিত যুক্তিৰ সহায়ত প্ৰমাণ কৰক যে

$C(n+m,r) = \sum_{i=0}^{r} C(m,r-i)C(n,i)$ য'ত m, n, r অখণ্ড সংখ্যা আৰু

$n \geq r \geq 0$, আৰু $m \geq r \geq 0$.

প্ৰশ্ন ৫ঃ দুটা পৃথক লুডুগুটি দলিয়াই দিয়া হ'ল। কিমানটা উপায়ে 7 বা 9 যোগফল পাব পাৰি?

প্ৰশ্ন ৬ঃ এবাহ তাচৰ পৰা এপাত চাহেব বা এপাত বিবি কিমান উপায়ে পাব পাৰি?

প্ৰশ্ন ৭ঃ এখন অনুজ্ঞা ফলকত দুটা ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ আখৰ আছে, তাৰ পাছত দুটা অংক, তাৰ পাছত দুটা ইংৰাজী আখৰ, তাৰ পাছত চাৰিটা অংক আছে। যদি এটা আখৰ বা এটা অংক একাধিকবাৰ ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি, তেনেহ'লে কিমান অনুজ্ঞাফলক প্ৰস্তুত কৰিব পৰা যাব?

প্ৰশ্ন ৮ঃ 10 যোৰ পতি-পত্নী আছে। এগৰাকী মহিলা আৰু এজন পুৰুষ (মহিলাগৰাকীৰ স্বামী নহয়) কিমান উপায়ে বাছিব পৰা যাব?

প্রশ্ন ৯ঃ 8 জন ল'ৰা আৰু 6 জনী ছোৱালীৰ পৰা এটা 8 জনীয়া খেলুৰৈ দল গঠন কৰিব লাগে। কিমান প্রকাৰে দলটো গঠন কৰিব পৰা যাব যদিহে এজনী নির্দিষ্ট ছোৱালীক বাদ দি আৰু এটা নির্দিষ্ট ল'ৰাক অন্তর্ভুক্ত কৰি দলটোত 3 জনী ছোৱালী থাকিবই লাগে?

প্রশ্ন ১০ঃ n টা মৌলবিশিষ্ট এটা সংহতিৰ পৰা সেই একেটা সংহতি লৈ এৰেকী ফলনৰ সংখ্যা নির্ণয় কৰা।

*** ***** ***

অধ্যায় ১৩ ঃ গাণিতিক যুক্তি (MATHEMATICAL LOGIC)

অধ্যায় গাঁথনি

১৩.১ উদ্দেশ্য

১৩.২ পৰিচয়

১৩.৩ উক্তিৰ সংজ্ঞা (Definition of Statements)

১৩.৩.১ উক্তিৰ উদাহৰণ (Examples of Statements)

১৩.৪ যৌক্তিক সংযোজক (Logical Connectives)

১৩.৪.১ নেতি পদ (Negation)

১৩.৪.২ সংযোজক পদ (Conjunction)

১৩.৪.৩ বিযুক্তি পদ (Disjunction)

১৩.৪.৪ সপ্রতিবন্ধ পদ (Conditional)

১৩.৪.৫ দ্বি-সপ্রতিবন্ধ পদ (Biconditional)

১৩.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১৩.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১৩.৭ অধিক জানিবলৈ

১৩.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

১৩.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- উক্তিৰ সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ দিব পাৰিব
- বিভিন্ন উক্তিৰ বিষয়ে থকা ‘স্বীকৃত সত্য নীতি’ তালিকাৰ (Truth Tables) সংজ্ঞা দিব পাৰিব
- উক্তিৰ নেতিপদৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- দুটা উক্তিৰ সংযোজক পদ, বিযুক্তি পদ, সপ্রতিবন্ধ পদ আৰু দ্বি-সপ্রতিবন্ধ পদৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।

১৩.৩ পৰিচয়

গাণিতিক যুক্তি হ’ল গণিত শাস্ত্ৰৰ এনে এক শাখা যিটো অধ্যয়ন কৰি গাণিতিক যুক্তি প্ৰদৰ্শনৰ বিভিন্ন পদ্ধতি জানিব পাৰি। এই কথা আমি সকলোরে জানো যে যুক্তিৰে কথাবোৰ ফঁহিয়াই চোৱাৰ সামৰ্থ থকা বাবেই মানুহ অন্য জীৱতকৈ শ্ৰেষ্ঠতৰ। যিকোনো বিজ্ঞানসন্মত তত্বৰ প্ৰদত্ত তৰ্কবোৰ অথবা গাণিতিক প্ৰমাণবোৰ অথবা সমাধানবোৰ বৈধ হয়নে নহয় সেয়া

নির্ধাৰণ কৰাৰ নীতি আৰু কৌশল যুক্তিয়ে আগবঢ়ায়। তর্ক আৰু সমাধানৰ অধ্যয়নৰ সৈতে যুক্তি জড়িত। গণিতত সূত্রবোৰ প্রমাণ কৰিবলৈ যুক্তি ব্যৱহাৰ কৰা হয়। আমাৰ দৈনন্দিন জীৱনৰ নানা ধৰণৰ সমস্যাৰ বাবে ভৌতিক বিজ্ঞানৰ বিভিন্ন পৰীক্ষা-নিৰীক্ষাৰ পৰা সমাধান বাহিৰ কৰিবলৈকো যুক্তিৰ ব্যৱহাৰ কৰা হয়। কম্পিউটাৰ বিজ্ঞানত প্র'গ্রেমবোৰৰ নির্ভুলতা প্রমাণ কৰিবলৈ যুক্তি প্রয়োগ কৰা হয়। যুক্তিৰ নীতি অথবা কৌশলবোৰক 'অনুমিতিৰ নিয়ম' (rules of inference) বোলা হয়। কাৰণ, যুক্তিৰ প্রধান লক্ষ্য হ'ল প্রদত্ত অপ্রমাণিত যুক্তিসংগত ধাৰণাৰ (hypothesis) ৰাশি (set) এটাৰ পৰা অনুমিতি সমাধান (conclusions inferences) বাহিৰ কৰা। এই অধ্যায়টিত আপোনালোকক উক্তিৰ সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ আৰু বিভিন্ন উক্তিৰ স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকাৰ সৈতে পৰিচয় কৰাই দিয়া হ'ব। অধ্যায়টিৰ অন্য আলোচ্য বিষয়বোৰ হ'ল যৌক্তিক সংযোজক তথা উক্তিৰ বিলোম (converse), প্রতিলোম (opposite) আৰু প্রতি-অনুলোম (contrapositive)।



উক্তবোৰৰ চিহ্নিত কৰিবলৈ আমি ইংৰাজীৰ বৰফলা আখৰবোৰ P, Q, R, . . . ব্যৱহাৰ কৰো।

১৩.৩ উক্তিৰ সংজ্ঞা (DEFINITION OF STATEMENTS)

যুক্তি প্রদর্শনৰ সময়ত আমি এক বিশেষ শৈলীত গঠিত বাক্যৰ সহায়ত আমাৰ ধাৰণা অথবা চিন্তাবোৰ প্রকাশ কৰোঁ। দৈনন্দিন সংযোগ স্থাপনৰ সময়ত আমি সাধাৰণতে তলত উল্লেখ কৰা ধৰণৰ বাক্য প্রয়োগ কৰোঁ।

দৃঢ়তাসূচক/ঘোষণামূলক বাক্য (Assertive sentence) ঃ কোনো বস্তুত নাইবা কথা দৃঢ়তাৰে কোৱা বাক্যবোৰকে দৃঢ়তাসূচক/ঘোষণামূলক বাক্য বোলে। যেনে— 'মংগল গ্রহ জীৱৰ বাবে অনুকুল।'

আদেশ/অনুৰোধ ইত্যাদি বুজোৱা বাক্য (Imperative sentence) ঃ যিবোৰ বাক্যই কোনো আদেশ নাইবা অনুৰোধ বুজায় সেইবোৰক বাক্যৰ এইটো ভাগত ধৰা হয়। যেনে— 'অনুগ্রহ কৰি মোক একাপ চাহ দিয়কচোন।'

ভাৱবোধক বাক্য (Exclamatory sentence) ঃ মনৰ কোনো তীব্র অনুভৱ/অনুভূতি প্রকাশ কৰা বাক্যবোৰকে ভাৱবোধক বাক্য বোলে। যেনে— 'তিমি মাছটো ইমান ডাঙৰ !'

প্রশ্নবোধক বাক্য (Interrogative sentence) ঃ প্রশ্ন সুধিবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা বাক্যবোৰকে প্রশ্নবোধক বাক্য বোলে। যেনে— 'আপোনাৰ বয়স কিমান?'

উক্তি *(STATEMENT)* ঃ উক্তি হ'ল দৃঢ়তাসূচক/ঘোষণামূলক বাক্য অথবা বাক্যাংশ। এনে বাক্য অথবা বাক্যাংশ সঁচা অথবা মিছা হ'ব পাৰে। কিন্তু একে সময়তে সঁচা আৰু মিছা দুয়োটা হ'ব নোৱাৰে।

১৩.৩.১ উক্তিৰ উদাহৰণ (Examples of Statements)

উদাহৰণ ১ ঃ তলৰ বাক্যবোৰলৈ মন কৰক—

i) ৱাশ্বিংটন ডি চি আমেৰিকাত নাই।

ii) প্ৰতিটো বৰ্গক্ষেত্ৰই একোটা আয়তক্ষেত্ৰ।

iii) পৃথিৱী এটা গ্ৰহ।

iv) তিনি আৰু ছয় যোগ কৰিলে যোগফল ন হয়।

v) সূৰ্যটো এটা নক্ষত্ৰ।

ওপৰৰ (iii), (iv) আৰু (v) নম্বৰ বাক্য তিনিটাৰ প্ৰত্যেকটোৱেই একোটা সঁচা দৃঢ়তাসূচক/ঘোষণামূলক বাক্য। গতিকে ইয়াৰে প্ৰতিটো বাক্যই একোটা উক্তি। ওপৰৰ (i) আৰু (ii) নম্বৰ বাক্য দুটাৰ প্ৰত্যেকটোৱেই একোটা মিছা দৃঢ়তাসূচক/ঘোষণামূলক বাক্য। গতিকে এই দুয়োটা বাক্যই একোটা উক্তি।

উদাহৰণ ২ ঃ তলৰ বাক্যবোৰলৈ মন কৰক—

i) গৃহকাৰ্য কৰা।

ii) মোক এগিলাচ পানী দিয়া।

iii) কেনে আছা?

iv) তুমি কেতিয়াবা তাজমহল দেখিছানে?

v) ঈশ্বৰে তোমাৰ মংগল কৰক ? !

vi) দীৰ্ঘায়ূ হোৱা !

ওপৰৰ (i) আৰু (ii) হ'ল আদেশ/অনুৰোধ বুজোৱা বাক্য। গতিকে এই বাক্য দুটা উক্তি নহয়। (iii) আৰু (iv) হ'ল প্ৰশ্নবোধক বাক্য। সেয়েহে এই দুটা বাক্যক সঁচা অথবা মিছা বুলি ক'ব নোৱাৰি। অৰ্থাৎ এই দুয়োটা বাক্যই উক্তি হ'ব নোৱাৰে। (v) আৰু (vi) হ'ল ইচ্ছা বুজোৱা বাক্য। এই বাক্য দুটাক সঁচাও বুলিব নোৱাৰি মিছাও বুলিব নোৱাৰে। সেয়েহে এই দুটা বাক্যও উক্তি হ'ব নোৱাৰে।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১ঃ তলৰ বাক্যবোৰৰ কোনটো উক্তি আৰু কোনটো উক্তি নহয় বাছি উলিয়াওক। আপোনাৰ উত্তৰৰ সপক্ষে যুক্তি দৰ্শাওক।

i) পেৰিছ চহৰ ইংলেণ্ডত।

ii) ঈশ্বৰে তোমাৰ মংগল কৰক !

iii) ৬ ৰ তিনিটা মৌলিক উৎপাদক আছে।

iv) ১৮ সংখ্যাটো ১৬ তকৈ সৰু।

v) চেন্নাই ইয়াৰ পৰা কিমান দূৰত?

vi) প্ৰতিটো ৰম্বাচেই একোটা বৰ্গ।

vii) এটা মাহত ৩৫ দিন থাকে।

viii) দুই যোগ তিনি পাঁচৰ সমান।

ix) $x + 2 = 9$

x) চন্দ্রটো সেউজীয়া ছানাৰে গঠিত।

১৩.৪ যৌক্তিক সংযোজক (LOGICAL CONNECTIVES)

ওপৰৰ শিতানত আমি প্রাথমিক উক্তিৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিলোঁ। আমি প্রায়েই সৰল (প্রাথমিক) উক্তি লগ লগাই যৌগিক উক্তি গঠন কৰো। দুটা উক্তিৰ মাজত বহুওৰা সংযোজক শব্দবোৰকে যৌক্তিক সংযোজক বোলে। প্রাথমিক উক্তি লগ লগোৱা সংযোজক দুটামান হ'ল ঃ আৰু (And), অথবা (Or), যদি— তেন্তে (If – then), যদি আৰু যদিহে (If and Qnly if), নহয় (Not)

তলত যৌক্তিক সংযোজক আৰু সেইবোৰৰ স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকাবোৰৰ বিষয়ে বহলাই আলোচনা কৰা হ'ল।

১৩.৪.১ নেতিপদ (Negation)

কোনো এটা যুক্তি 'P' ক অস্বীকাৰ কৰাকে যুক্তিটোৰ/বিবৃতিটোৰ নেতিপদ বোলে। ইয়াক ~ চিহ্নৰে বুজোৱা হয় আৰু 'P নহয়' বুলি পঢ়া হয়। যিকোনো P উক্তিৰ নেতিপদটো P ৰ আগত '~' চিহ্ন দি অথবা '~P' ৰ পিছত 'It is not the case that .....' (কথাটো এনে নহয় যে....) অথবা 'It is false that .....' (এয়া মিছা যে ....) ইত্যাদি বুলি লিখা বাক্যাংশ যোগ দি গঠন কৰা হয়।

তলৰ উদাহৰণটোলৈ মন কৰক ঃ

P : সকলোবোৰ পূর্ণ/অখণ্ড সংখ্যাই পৰিমেয় সংখ্যা।

এই উক্তিৰ/বিবৃতিৰ নেতিপদ হ'ব ঃ

~ P : কথাটো এনে নহয় যে সকলোবোৰ পূর্ণ সংখ্যাই পৰিমেয় সংখ্যা।

অথবা

~ P : এয়া মিছা যে সকলোবোৰ পূর্ণ সংখ্যাই পৰিমেয় সংখ্যা।

অথবা

~ P : অতি কমেও এটা পূর্ণ সংখ্যা পৰিমেয় সংখ্যা নহয়।

অথবা

~ P : এতিয়া তলৰ উক্তিটোলৈ চাওক—

P : 7 > 9

এই উক্তিৰ নেতিপদ হ'ল—

~ P : 7 < 9

অথবা

~ P : 7 = 9

নেতি পদৰ স্বীকৃতি সত্য নীতি তালিকা (Truth Table of Negation)

যদি "P" ৰ সত্য নাম (truth value) 'T' বুলি ধৰা হয়, তেন্তে '~P' is 'F'। যদি "P" ৰ সত্য মান 'F', হয়, তেন্তে '~P' ৰ সত্য মান হ'ব F ।

নেতি পদৰ এই সংজ্ঞাটোক তলৰ তালিকাখনত দিয়াৰ দৰে দেখুওৱাব পাৰি।

'~P' ৰ স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকা হ'ল ঃ

P	~ P
T	F
F	T

চিত্ৰ ২.১

উদাহৰণ ঃ

তলৰ উক্তি/বিবৃতিবোৰৰ নেতিপদ লিখক—

(i) $\sqrt{7}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা।

(ii) $\sqrt{2}$ এটা যৌগিক সংখ্যা নহয়।

(iii) প্ৰতিটো স্বাভাৰিক সংখ্যা শূন্যতকৈ ডাঙৰ।

(iv) সকলো মৌলিক সংখ্যাই অযুগ্ম।

(v) সকলো গণিতজ্ঞই মানুহ।

সমাধান ঃ (i) ধৰা হ'ল, প্ৰদত্ত উক্তিটো r ।

অৰ্থাৎ r : $\sqrt{7}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা।

এই উক্তিটোৰ নেতিপদ ~ r হ'ব।

~ r : কথাটো এনে নহয় যে $\sqrt{7}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা।

অথবা

~ r : $\sqrt{7}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা নহয়।

অথবা

~ r : এয়া মিছা যে $\sqrt{7}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা।

(ii) ধৰা হ'ল প্ৰদত্ত উক্তিটো u

অৰ্থাৎ, u : $\sqrt{2}$ এটা যৌগিক সংখ্যা নহয়।

উক্তিটোৰ নেতিপদ ~ u হ'ব

~u : $\sqrt{2}$ এটা যৌগিক সংখ্যা।

অথবা

~u : এয়া মিছা যে $\sqrt{2}$ এটা যৌগিক সংখ্যা নহয়।

(iii) উক্তিটোৰ নেতিপদ হ'ব—

এয়া মিছা যে প্রতিটো স্বাভাৱিক সংখ্যা শূন্যতকৈ ডাঙৰ।

অথবা

এনেকুৱা এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা আছে যিটো শূন্যতকৈ ডাঙৰ নহয়।

(iv) উক্তিটোৰ নেতিপদ হ'ব—

এনেকুৱা এটা মৌলিক সংখ্যা আছে যিটো অযুগ্ম নহয়।

অথবা

কিছুমান মৌলিক সংখ্যা অযুগ্ম নহয়।

অথবা

অতি কমেও এটা মৌলিক সংখ্যা অযুগ্ম নহয়।

(v) উক্তিটোৰ নেতিপদ হ'ল—

কিছুমান গণিতজ্ঞ মানুহ নহয়।

অথবা

এনে এক গণিতজ্ঞ আছে যি মানুহ নহয়।

অথবা

অতি কমেও এগৰাকী গণিতজ্ঞ মানুহ নহয়।

অথবা

এয়া মিছা যে সকলো গণিতজ্ঞ মানুহ।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ২ঃ তলৰ উক্তিবোৰৰ নেতিপদবোৰ লিখক-

i) বাংগালুৰু কর্ণাটকৰ ৰাজধানী।

ii) পৃথিৱীখন ঘূৰণীয়া।

iii) সূর্যটো শীতল।

iv) কিছুমান যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা মৌলিক।

v) এটা আয়তক্ষেত্রৰ দুয়োডাল কর্ণৰ দৈর্ঘ্য সমান।

১৩.৪.২ সংযোজক পদ (Conjunction)

দুটা উক্তি P আৰু Q ক লগ লগোৱা পদকে সংযোজক পদ বোলে। ইয়াক উক্তি $P \wedge Q$ বুলি লিখা আৰু "*P* আৰু *Q*" বুলি পঢ়া হয়।

উদাহৰণ ঃ

(i) দুটা উক্তিৰ সংযোজন হ'ব ঃ

P : বৰষুণ দি আছে।

Q : 2 + 2 = 4

P ∧ Q : বৰষুণ দি আছে আৰু 2 + 2 = 4

(ii) তলৰ উক্তিটোলৈ ভালদৰে মন কৰক—

P : পৃথিৱীখন ঘূৰণীয়া আৰু সূর্যটো শীতল।

ইয়াৰ উপাদানবোৰ হ'ল—

Q : পৃথিৱীখন ঘূৰণীয়া।

R : সূর্যটো শীতল।

স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকা ঃ P ∧ Q উক্তিৰ সত্য মান হ'ল T য'ত P আৰু Q দুয়োটাৰে সত্য মান হ'ল T ; অন্যথা ইয়াৰ সত্য মান হ'ব F ।

সংযোজক পদৰ স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকাখন হ'ল—

P	Q	P ∧ Q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

চিত্র ২.২

উদাহৰণ ঃ

তলৰ উক্তিটো প্রতীকী ৰূপত উপস্থাপন কৰক—

ৰামু আৰু ৰঘু স্কুললৈ গৈছিল।

সমাধান ঃ প্রদত্ত বাক্যটো দুটা উক্তিৰ সংযোজক হিচাপে লিখাৰ আগতে উক্তিটোক খণ্ডিত কৰি লোৱাটো দৰকাৰ। ইয়াত খণ্ডিত বাক্য দুটা হ'ব 'ৰামু' স্কুললৈ গৈছিল আৰু ৰঘূ স্কুললৈ গৈছিল।

এতিয়া লিখক P : ৰামু স্কুললৈ গৈছিল।

Q : ৰঘূ স্কুললৈ গৈছিল।

অর্থাৎ, প্রদত্ত বাক্যটো P ∧ Q প্রতীকী ৰূপত উপস্থাপন কৰিব পাৰি।

১৩.৪.৩ বিযুক্তি পদ (Disjunction)

দুটা উক্তি P আৰু Q ৰ বিযুক্তি পদটোক P $\vee$ Q বুলি লিখা আৰু "*P* অথবা *Q*" বুলি পঢ়া হয়।

উদাহৰণ ৩ ঃ

(i) তলৰ যৌগিক উক্তিটোলৈ লৈ মন কৰক—

P : কোনো এক বিন্দুত দুডাল ৰেখাৰ ছেদন হৈছে অথবা দুডাল ৰেখা সমান্তৰাল।

প্রদত্ত উক্তিটোৰ উপাদানবোৰ হ'ল—

Q : কোনো এক বিন্দুত দুডাল ৰেখাৰ ছেদন হৈছে।

R : দুডাল ৰেখা সমান্তৰাল।

(ii) আন এটা উক্তিলৈ মন কৰক—

P : ৪৫ হ'ল ৪ আৰু ৬ৰ এটা গুণিতক।

ইয়াৰ উপাদান উক্তিবোৰ হ'ল—

Q : ৪৫ হ'ল ৪ৰ এটা গুণিতক।

R : ৪৫ হ'ল ৬ৰ এটা গুণিতক।

স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকা ঃ P $\vee$ Q উক্তিটোৰ সত্যমান F হয়। P $\vee$ Q সত্য হ'ব যদিহে P সত্য অথবা Q সত্য (অথবা P আৰু Q দুয়োটাই সত্য হয়)। বিযুক্তিৰ স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকা হ'ল—

P	Q	P $\vee$ Q
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

চিত্র ২.৩



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৩ঃ তলৰ উক্তিকেইটা প্রতীকী ৰূপত লিখক—

(i) পৱন ধনী আৰু ৰাঘৰ সুখী নহয়।

(ii) পৱন ধনী নহয় আৰু ৰাঘৰ সুখী।

(iii) নবীন দুখীয়া কিন্তু সুখী।

(iv) নবীন ধনী অথবা অসুখী।

(v) নবীন আৰু অমল দুয়োজনেই সপ্রতিভ।

(vi) এয়া সঁচা নহয় যে নবীন আৰু অমল দুয়োজনেই সপ্রতিভ।

(vii) নবীন দুখীয়া অথবা তেওঁ ধনী আৰু অসুখী দুয়োটাই।

(vii) নবীন ধনীও নহয় সুখীও নহয়।

উদাহৰণ ঃ

তলৰ যৌগিক বাক্যকেইটাৰ উপাদানবোৰ পৃথক কৰক আৰু যৌগিক বাক্যটো সঁচানে মিছা পৰীক্ষা কৰক।

(i) ৫০ হ'ল ২ আৰু ৫ উভয়ৰে গুণিতক।

(ii) সকলো জীৱিত বস্তুৰে দুখন ঠেং আৰু দুটা চকু থাকে।

(iii) মুম্বাই গুজৰাট অথবা মহাৰাষ্ট্ৰৰ ৰাজধানী।

(iv) $\sqrt{2}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা অথবা এটা অপৰিমেয় সংখ্যা।

(v) এটা আয়তক্ষেত্ৰ হ'ল এটা চতুৰ্ভূজ অথবা এটা পাঁচডাল বাহুবিশিষ্ট বহুভূজ।

সমাধান ঃ (i) প্ৰদত্ত উক্তিটোৰ উপাদানবোৰ হ'ল—

P : ৫০ হ'ল ২ৰ গুণিতক।

Q : ৫০ হ'ল ৫ৰ গুণিতক।

আমি পৰীক্ষা কৰি পাম যে P আৰু Q দুয়োটা উক্তিয়েই সত্য। এতেকে যৌগিক উক্তিটো সত্য।

(ii) প্ৰদত্ত উক্তিটোৰ উপাদানবোৰ হ'ল—

P : সকলো জীৱিত বস্তুৰে দুখন ঠেং থাকে।

Q : সকলো জীৱিত বস্তুৰে দুটা চকু থাকে।

আমি পৰীক্ষা কৰি পাম যে P আৰু Q দুয়োটা উক্তিয়েই মিছা। এতেকে যৌগিক উক্তিটো মিছা।

(iii) প্ৰদত্ত উক্তিটোৰ উপাদানবোৰ হ'ল—

P : মুম্বাই গুজৰাটৰ ৰাজধানী।

Q : মুম্বাই মহাৰাষ্ট্ৰৰ ৰাজধানী।

আমি পৰীক্ষা কৰি পাম যে P উক্তিটো মিছা আৰু Q উক্তিটো সঁচা। এতেকে যৌগিক উক্তিটো সঁচা।

(iv) প্ৰদত্ত উক্তিটোৰ উপাদানবোৰ হ'ল—

P : এটা আয়তক্ষেত্ৰ হ'ল এটা চতুৰ্ভুজ।

Q : এটা আয়তক্ষেত্ৰ হ'ল এটা পাঁচডাল বাহুবিশিষ্ট বহুভূজ।



সংযোজকে সদায়েই *"or"* (অথবা) শব্দটোৰ দৰে একে অৰ্থ প্ৰকাশ নকৰিবও পাৰে। কাৰণ ইংৰাজী ভাষাত *"or"* শব্দটো দুই ধৰণে ব্যৱহৃত হয়— *i)* সমন্বিতে 'অথবা' / *Inclusive OR* (ইটো অথবা সিটো অথবা দুয়োটা) আৰু *ii)* বাহিৰে 'অথবা/ *Exclusive OR* (ইটো অথবা সিটো কিন্তু দুয়োটাই নহয়।

(v) প্রদত্ত উক্তিটোৰ উপাদানবোৰ হ'ল—

P : $\sqrt{2}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা।

Q : $\sqrt{2}$ এটা অপৰিমেয় সংখ্যা।

আমি পৰীক্ষা কৰি পাম যে P আৰু Q দুয়োটা উক্তিয়েই মিছা। এতেকে যৌগিক উক্তিটো মিছা।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৪ঃ তলৰ যৌগিক উক্তিবোৰৰ উপাদানবোৰ পৃথক কৰক আৰু যৌগিক উক্তিটো সঁচানে মিছা পৰীক্ষা কৰক।

(i) দিল্লী ভাৰতত আৰু ২+২=৪।

(ii) দিল্লী ইংলেণ্ডত আৰু ২+২=৪।

(iii) দিল্লী ভাৰতত আৰু ২+২=৫।

(iv) দিল্লী ইংলেণ্ডত আৰু ২+২=৫।

(v) এটা অখণ্ড সংখ্যাৰ বর্গ ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক।

(vi) আকাশ নীলা আৰু ঘাঁহ সেউজীয়া।

(vii) পৃথিৱীখন ঘূৰণীয়া অথবা সূর্যটো শীতল।

(viii) সকলো পৰিমেয় সংখ্যা বাস্তৱ আৰু সকলো বাস্তৱ সংখ্যাই জটিল সংখ্যা।

(ix) ২৫ হ'ল ৫ আৰু ৮ৰ গুণিতক।

(x) ১২৫ হ'ল ৭ আৰু ৮ৰ গুণিতক।

১৩.৪.৫ সপ্রতিবন্ধ পদ (Conditional)

ধৰা হ'ল, যদি P আৰু Q যিকোনো দুটা উক্তি হয়, তেন্তে উক্তি $P \rightarrow Q$ হ'ল সপ্রতিবন্ধ পদ। ইয়াক 'যদি *P* হয়, তেন্তে *Q* হ'ব' (যদি *P*, তেন্তে *Q*) বুলি কোৱা হয়। ইয়াক সপ্রতিবন্ধ উক্তি বোলে।

উদাহৰণ ঃ ধৰা হ'ল P : অমূল্যই কঠোৰ পৰিশ্রম কৰে।

Q : অমূল্য পৰীক্ষাত উত্তীর্ণ হ'ব।

তেন্তে, $P \rightarrow Q$ হ'ব ঃ যদি অমূল্যই কঠোৰ পৰিশ্রম কৰে, তেন্তে সি পৰীক্ষাত উত্তীর্ণ হ'ব।

ইয়াত P উক্তিটোক পূর্বপদ *(antecedent)* আৰু Q ক সিদ্ধান্ত *(consequent)* বোলে। '$\rightarrow$' চিহ্নটোক 'প্রয়োগ চিহ্ন' (sign of implication)বোলা হয়। 'যদিহে Q হয় তেতিয়াহে P' (P only if Q) বুজাবলৈকো $P \rightarrow Q$ লিখা হয়। $P \rightarrow Q$ সপ্রতিবন্ধ উক্তিৰ ক্ষেত্রত থকা স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকাখন হ'ল—

P	Q	$P \rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

$P \rightarrow Q$ লিখিব পৰা অন্য চর্তসাপেক্ষ পৰিস্থিতিবোৰ হ'ল ঃ

(i) যদিহে Q হয় তেতিয়াহে P (P only if Q)

(ii) Q যদি P (Q if P)

(iii) P হ'লেহে Q (Q provided that P)

(iv) Q হ'বৰ বাবে P য়েই যথেষ্ট (P is sufficient for Q)

(v) P ৰ বাবে Q প্রয়োজনীয় চর্ত (Q is necessary conditions for P)

(vi) P য়ে Q সূচায় (P implies Q),

(vii) P ৰ দ্বাৰা Q সূচোৱা হৈছে (Q is implied by P)

উদাহৰণ ঃ

১। তলৰ প্রতিটো উক্তি 'যদি -তেন্তে' ৰূপত (If--then) লিখক।

(i) তোমাৰ চাকৰি পোৱা কথাটোৱে ইয়াকে সূচায় যে তোমাৰ অর্হতাৰ প্রমাণপত্রবোৰ ভাল।

(ii) এটা চতুর্ভুজ সামান্তৰিক হ'ব যদিহে ইয়াৰ কর্ণবোৰে পৰস্পৰক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে।

(iii) শ্রেণীত A+ গ্রেড পাবলৈ তুমি এই কিতাপখনৰ সকলোবোৰ অনুশীলন কৰাটো প্রয়োজনীয়।

সমাধান ঃ

(i) আমি জানো যে 'যদি P হয়, তেন্তে Q হ'ব' ক আমি 'P $\rightarrow$ Q' বুলিও লিখিব পাৰোঁ। সেয়েহে প্রদত্ত উক্তিটোক 'যদি তুমি চাকৰি পোৱা, তেন্তে তোমাৰ অর্হতাৰ প্রমাণপত্রবোৰ ভাল' বুলিও লিখিব পাৰোঁ।

(ii) প্রদত্ত উক্তিটোৰ বিকল্প ৰূপ হ'ব—
'যদি এটা চতুর্ভুজৰ কর্ণবোৰে পৰস্পৰে পৰস্পৰক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে, তেন্তে ই এটা সামান্তৰিক হ'ব।'

(iii) প্রদত্ত উক্তিটোৰ বিকল্প ৰূপ হ'ব—
'যদি তুমি শ্রেণীত A+ গ্রেড পোৱা, তেন্তে তুমি এই কিতাপখনৰ

সকলোবোৰ অনুশীলন কৰিছা।'

২। তলৰ উক্তিবোৰৰ উপাদানবোৰ পৃথক কৰক। লগতে উক্তিবোৰ সঁচানে মিছা পৰীক্ষা কৰক।

(i) যদি ABC ত্রিভুজটো সমবাহু হয়, তেন্তে ই এটা সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

(ii) যদি a আৰু b দুটা অখণ্ড সংখ্যা, তেন্তে ab এটা পৰিমেয় সংখ্যা।

সমাধান ঃ

(i) প্রদত্ত উক্তিটোৰ উপাদানবোৰ হ'ল—

P : ABC ত্রিভুজটো সমবাহু।

Q : ABC ত্রিভুজটো সমদ্বিবাহু।

যিহেতু এটা সমবাহু ত্রিভুজৰ দুডাল বাহুৰ জোখ সমান, সেয়েহে প্রদত্ত উক্তিটো সঁচা।

(ii) প্রদত্ত উক্তিটোৰ উপাদানবোৰ হ'ল—

P : a আৰু b অখণ্ড সংখ্যা।

Q : ab এটা পৰিমেয় সংখ্যা।

যিহেতু দুটা অখণ্ড সংখ্যাৰ পূৰণফল এটা অখণ্ড সংখ্যাই হ'ব, সেয়েহে ই এটা পৰিমেয় সংখ্যা হ'ব। অর্থাৎ, প্রদত্ত যৌগিক উক্তিটো সঁচা।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৫ঃ তলৰ প্রতিটো প্রয়োগৰ সত্য মানবোৰ উলিয়াওক।

(i) যদি ৩+২=৭, তেন্তে পেৰিছ ভাৰতৰ ৰাজধানী।

(ii) যদি ৩+৪=৭, তেন্তে ৩ 〉 ৭

(iii) যদি ৪ 〉 ৫, তেন্তে ৫ 〈 ৬

(iv) যদি ৭ 〉 ৩, তেন্তে ৬ 〈 ১৪

(v) যদি দুটা অখণ্ড সংখ্যা a আৰু b ৰ মান a>b হয়, তেন্তে a-b সদায় এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হ'ব।

১৩.৪.৬ দ্বি-সপ্রতিবন্ধ পদ (যদি প্রদত্ত পৰিস্থিতিত 'যদি' আৰু 'কেৱল মাত্র প্রয়োগ হয়) (Biconditional (If and only if implication)

ধৰা হ'ল P আৰু Q যিকোনো দুটা উক্তি। তেন্তে $P \leftrightarrow Q$ উক্তিটোক (চমুকৈ "Piff Q" বুলি লিখা হয় আৰু 'যদি আৰু কেৱল যদি Q হয় তেতিয়াহে P হ'ব' (P if and only if Q) বুলি পঢ়া হয়) দ্বি-সপ্রতিবন্ধ পদ বোলে।

তলৰ তালিকাখনত দ্বি-সপ্রতিবন্ধ পদৰ সংজ্ঞা পোৱা যাব। $P \leftrightarrow Q$ উক্তিৰ/বিবৃতিৰ সত্য মান হ'ল T য'ত P আৰু Q দুয়োটাৰে সত্যমান সদৃশ হ'ব।

দ্বি-সপ্রতিবন্ধ পদৰ ($P \leftrightarrow Q$) স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকাখন হ'ল—

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

$P \leftrightarrow Q$ দ্বি-সপ্রতিবন্ধ হ'ল $P \rightarrow Q$ আৰু $Q \rightarrow P$ সপ্রতিবন্ধ দুটাৰ সংযোজন।

$P \leftrightarrow Q$ ৰ বিকল্প সাংকেতিক চিহ্ন হ'ল $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

$(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (Q \rightarrow P)$ৰ স্বীকৃত সত্যমান তালিকাখন হ'ল—

P	Q	$P \rightarrow Q$	$Q \rightarrow P$	$\sim P \rightarrow Q \wedge \sim Q \rightarrow P$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

মন কৰিব দুয়োখন স্বীকৃত সত্যমান তালিকা একেই।

উদাহৰণ ঃ

১। তলৰ উক্তিবোৰলৈ মন কৰক ঃ

এটা ত্রিভুজ সমবাহু হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি ত্রিভুজটো সমকোণী হয়।

এইটো এটা 'যদি আৰু কেৱল যদি, প্রয়োগৰ উদাহৰণ। ইয়াৰ উপাদান উক্তিবোৰ হ'ল ঃ

P : এটা ত্রিভুজ সমবাহু।

Q : এটা ত্রিভুজ সমকোণী।

২। ৮ 〉 ৪ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি ৮-৪ৰ বিয়োগফল ধনাত্মক হয়।

৩। ২+২=৪ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি বৰযুণ দি থাকে।

৪। দুডাল ৰেখাক তেতিয়াহে সমান্তৰাল হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি দুয়োডাল ৰেখাৰে নতি (slope) একে হয়।

উক্তিটোৰ দ্বি-সপ্রতিবন্ধ পদবোৰ $P \leftrightarrow Q$ তলত দিয়া ধৰণে পঢ়িব পাৰি ঃ

(ক) P 'যদি আৰু কেৱল যদি' Q হয়।

(খ) P 'Q' ৰ সমতুল্য হয়।

(গ) P 'Q' ৰ বাবে প্ৰয়োজনীয় আৰু পৰ্যাপ্ত চৰ্ত হয়।

(ঘ) Q 'P' ৰ বাবে প্ৰয়োজনীয় আৰু পৰ্যাপ্ত চৰ্ত হয়।

উদাহৰণ ঃ

তলৰ প্ৰতিটো দ্বি-সপ্ৰতিবন্ধ উক্তিৰ সত্যমান নিৰ্ণয় কৰক।

(i) ৪ $\rangle$ ২ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি ০ $\langle$ ৪-২।

(ii) ৩ $\langle$ ২ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি ২ $\langle$ ১।

(iii) ৩+৫ $\rangle$ ৭ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি ৪+৬ $\langle$ ১০।

সমাধান ঃ

(i) ধৰা হ'ল P : ৪ $\rangle$ ২

Q : 0 $\langle$ ৪-২

এতিয়া, প্ৰদত্ত উক্তিটো হ'ল $P \leftrightarrow Q$।

এইটো স্পষ্ট যে, P ও সঁচা আৰু Q ও সঁচা। সেয়েহে, $P \leftrightarrow Q$ সঁচা।

অৰ্থাৎ, প্ৰদত্ত উক্তিটো সঁচা আৰু ইয়াৰ সত্যমান হ'ল T।

(ii) ধৰা হ'ল P : $3 < 2$

Q : $2<1$

এতিয়া, প্ৰদত্ত উক্তিটো হ'ল $P \leftrightarrow Q$ ।

এইটো স্পষ্ট যে, P ও মিছা আৰু Q ও মিছা।

সেয়েহে, $P \leftrightarrow Q$ সঁচা।

অৰ্থাৎ, প্ৰদত্ত উক্তিটো সঁচা আৰু ইয়াৰ সত্য মান হ'ল T।

(iii) ধৰা হ'ল P : $3+5 > 7$

Q : $4+6<10$

এতিয়া, প্ৰদত্ত উক্তিটো হ'ল $P \leftrightarrow Q$

এইটো স্পষ্ট যে, P সঁচা আৰু Q মিছা।

সেয়েহে, $P \leftrightarrow Q$ মিছা।

অৰ্থাৎ, প্ৰদত্ত উক্তিটো মিছা আৰু ইয়াৰ সত্য মান হ'ল F ।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ তলৰ উক্তিবোৰৰ সত্যমান নিৰ্ণয় কৰক—

(i) ৩+৫=৮ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি ৪+৩=৭ হয়।

(ii) ৪ এটা যুগ্ম সংখ্যা হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি ১ এটা মৌলিক সংখ্যা হয়।

(iii) ৬ এটা অযুগ্ম সংখ্যা হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি ২ এটা অযুগ্ম সংখ্যা হয়।

(iv) ২+৩=৫ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি ৩>৫ হয়।

(v) ৪+৩=৮ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি ৫+৪=১০ হয়।

(vi) ২<৩ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি ৩<৪ হয়।



১৩.৫ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- গাণিতিক যুক্তি সকলো ধৰণৰ তর্ক প্রতিষ্ঠা কৰাৰ সৈতে জড়িত। এনে তর্ক কোনো বৈধ যুক্তিও হ'ব পাৰে নাইবা গাণিতিক প্রমাণো হ'ব পাৰে নাইবা কোনো অপ্রমাণিত যুক্তিসংগত ধাৰণাৰ সমষ্টিৰ ভিত্তিত নির্ণিত কোনো বৈজ্ঞানিক তত্ত্বও হ'ব পাৰে।
- বাক্যক সাধাৰণতে দৃঢ়তাসূচক/ঘোষণামূলক, ভাৱবোধক, প্রশ্নবোধক আৰু আদেশ/অনুৰোধ বুজোৱা বাক্যত ভগোৱা হয়। আমি যুক্তি অধ্যয়ন কৰাৰ সময়ত কেৱল দৃঢ়তাসূচক/ঘোষণামূলক বাক্যহে ব্যৱহাৰ কৰো। আমি ধৰি লওঁ যে প্রদত্ত সমস্যাটো বুজাবলৈ ব্যৱহৃত ভাষাত দৃঢ়তাসূচক/ঘোষণামূলক বাক্যৰ সমষ্টি এটা লুকাই থাকে। প্রাথমিক উক্তি এটা হ'ল এনে এক দৃঢ়তাসূচক/ঘোষণামূলক বাক্য যিটো খণ্ডিত কৰিব নোৱাৰি অথবা সৰল বাক্যলৈ ভাঙি বিশ্লেষণ কৰিব নোৱাৰি।
- প্রাথমিক উক্তিৰ লগত সংযোজক পদ লগ লগাই নতুন উক্তি গঠন কৰিব পাৰি। এনেদৰে সৃষ্ট নতুন উক্তিক যৌগিক উক্তি বোলে।
- বাক্য সংযোজক পদবোৰক যৌক্তিক সংযোজক বোলা হয়। কেইটামান ভিন্ন প্রকাৰৰ যৌক্তিক সংযোজক হ'ল— নেতি পদ *(~)*, আৰু (সংযোজক), অথবা (বিযুক্তি পদ), যদি- তেন্তে (সপ্রতিবন্ধ পদ), যদি আৰু কেৱল যদি (দ্বি-সপ্রতিবন্ধ পদ) ইত্যাদি।
- সংযোজকৰ সংজ্ঞাৰ সৈতে স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকাৰ বিষয়েও আলোচনা কৰা হৈছে। এই নীতি তালিকাৰ আধাৰত কোনো এটা উক্তিৰ সৈতে জড়িত উপাদানবোৰৰ সম্ভাব্য যুটীবোৰৰ বাবে সত্য মান নির্ণয় কৰা হয়। এখন তালিকাতকোনো এক নির্দিষ্ট সূত্রৰ সৈতে জড়িত সকলোবোৰ সত্য মান অন্তর্ভুক্ত থাকিলে সেই তালিকাখনক সূত্রটোৰ স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকা (Truth tables) বোলে। এই অধ্যায়টিত ~P, $P \vee Q$, $P \wedge Q$, $P \rightarrow Q$ আৰু $P \leftrightarrow Q$ সূত্রৰ স্বীকৃত সত্য নীতি তালিকা দিয়া হৈছে। মন কৰিবলগীয়া কথাটো হ'ল কোনো প্রদত্ত উক্তিৰ উপাদানবোৰৰ সত্য মান জনাৰ পাছত এনে তালিকা চাই উক্তিটোৰ সত্যমান সহজে নির্ণয় কৰিব পাৰি।
- $P \rightarrow Q$ সূত্রত P উক্তিটোক 'পূর্বপদ' আৰু Q উক্তিটোক সিদ্ধান্ত বোলে।



১৩.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ উক্তি (i), (iii), (iv), (vi), (vii), (viii) আৰু (x)।

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) বাংগালুৰু কর্ণাটকৰ ৰাজধানী নহয়।

(ii) পৃথিৱীখন ঘূৰণীয়া নহয়।

(iii) সূর্যটো শীতল নহয়।

(iv) কোনো যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা মৌলিক নহয়।

(v) অতি কমেও এনে এটা আয়তক্ষেত্র আছে যিটোৰ দুয়োডাল কর্ণৰ দৈর্ঘ্য একে নহয়।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ(i) $P \wedge \sim Q$ য'ত P : পৱন ধনী।
Q : ৰাঘৰ সুখী।

(ii) $\sim P \wedge Q$

(iii) $\sim R \wedge H$ য'ত R : নবীন ধনী।
H : নবীন সুখী।

(iv) $R \vee \sim H$

(v) $P \wedge Q$ য'ত P : নবীন সপ্রতিভ।
Q : অমল সপ্রতিভ।

(vi) $\sim(P \wedge Q)$

(vii) $\sim R \vee (R \wedge \sim H)$ য'ত R : নবীন ধনী।
R : নবীন সুখী।

(viii) $\sim R \wedge \sim H$

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) P : দিল্লী ভাৰতত।
Q : 2+2=4.
এই যৌগিক উক্তিটো সঁচা।

(ii) P : দিল্লী ইংলেণ্ডত।
Q : 2+2=4.
এই যৌগিক উক্তিটো মিছা।

(iii) P : দিল্লী ভাৰতত।
Q : 2+2=5.
এই যৌগিক উক্তিটো মিছা।

(iv) P : দিল্লী ইংলেণ্ডত।

Q : 2+2=5.

এই যৌগিক উক্তিটো মিছা।

(v) P : এটা অখণ্ড সংখ্যাৰ বর্গ ধনাত্মক।

Q : এটা অখণ্ড সংখ্যাৰ বর্গ ঋণাত্মক।

এই যৌগিক উক্তিটো মিছা।

(vi) P : আকাশ নীলা।

Q : ঘাঁহ সেউজীয়া।

এই যৌগিক উক্তিটো সঁচা।

(vii) P : পৃথিৱীখন ঘূৰণীয়া।

Q : সূর্যটো শীতল।

এই যৌগিক উক্তিটো সঁচা।

(viii) P : সকলো পৰিমেয় সংখ্যা বাস্তৱ।

Q : সকলো বাস্তৱ সংখ্যাই জটিল সংখ্যা।

এই যৌগিক উক্তিটো মিছা।

(ix) P : ২৫ হ'ল ৫ৰ গুণিতক।

Q : ২৫ হ'ল ৮ৰ গুণিতক।

এই যৌগিক উক্তিটো মিছা।

(x) P : ১২৫ হ'ল ৭ৰ গুণিতক।

Q : ১২৫ হ'ল ৮ৰ গুণিতক।

এই যৌগিক উক্তিটো মিছা।

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) সঁচা (ii) মিছা (iii) সঁচা (iv) মিছা (v) সঁচা।

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) মিছা (ii) মিছা (iii) সঁচা (iv) মিছা (v) সঁচা (vi) সঁচা।



১৩.৭ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

1) C.L. Liu, Elements of Discrete Mathematics, Tata McGraw-Hill Edition.

2) Seymour Lipschutz Marc Lars Lipson Discrete Mathematics, Tata McGraw-Hill Edition.



১৩.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ তলৰ বাক্যবোৰৰ কোনটো উক্তি নিৰ্ণয় কৰক। আপোনাৰ উত্তৰৰ সপক্ষে যুক্তি দিয়ক।

(i) x বাস্তৱ সংখ্যাটো ২তকৈ সৰু।

(ii) সকলো বাস্তৱ সংখ্যাই জটিল সংখ্যা।

(iii) ৰবি, মোৰ কথা শুনা।

প্ৰশ্ন ২ঃ তলৰ উক্তিবোৰৰ উপাদানবোৰ সঁচানে মিছা পৰীক্ষা কৰক।

(i) ৰেখা পোন আৰু দুয়ো দিশে অসীমলৈ বিস্তৃত।

(ii) আকাশ নীলা আৰু ঘাঁহ সেউজীয়া।

(iii) পৃথিৱীখন ঘূৰণীয়া আৰু সূৰ্যটো শীতল।

(iv) সকলো পৰিমেয় সংখ্যা বাস্তৱ আৰু সকলো বাস্তৱ সংখ্যাই জটিল।

(v) ২৫ হ'ল ৫ আৰু ৮ ৰ গুণিতক।

প্ৰশ্ন ৩ঃ তলৰ উক্তিবোৰৰ উপাদানবোৰ পৃথক কৰক। লগতে উপাদানবোৰ সঁচানে মিছা কওক।

(i) A আৰু B সংহতি দুটা সমান হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি ($A \subseteq B$ আৰু $B \subseteq A$).

(ii) $|a|<2$ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি ($a>-2$ আৰু $a<2$) হয়।

(iii) ΔABC এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি $\angle B = \angle C$ হয়।

(iv) $7<5$ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি 7 এটা মৌলিক সংখ্যা নহয়।

(v) ΔABC এটা ত্ৰিভুজ হ'ব যদি আৰু কেৱল যদি $AB+BC>AC$ হয়।

*** ***** ***

অধ্যায় ১৪ ঃ বুলীয় বীজগণিত (BOOLEAN ALGEBRA)

অধ্যায় গাঁথনি

১৪.১ উদ্দেশ্য
১৪.২ পৰিচয়
১৪.৩ সংজ্ঞা, ধর্ম আৰু উদাহৰণ
১৪.৪ বুলীয় বীজগণিতৰ মূল বিধি
১৪.৫ বুলীয় ৰাশি
১৪.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১৪.৭ অধিক জানিবলৈ
১৪.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
১৪.৯ আৰ্হি প্রশ্ন

১৪.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- বুলীয় বীজগণিত, ইয়াৰ ধর্ম, উদাহৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- বুলীয় বীজগণিতৰ মূল বিধিসমূহ জানিব পাৰিব
- বুলীয় ৰাশি সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

১৪.২ পৰিচয়

ব্রিটিছ ন্যায়তত্বজ্ঞ জর্জ বলৰ (George Boole 1813-1864) নাম অনুসৰি জনাজাত বুলীয় বীজগণিত (Boolean Algebra) এটা বীজগণিতীয় গাঁথনি (algebraic structure)। এটা বা ততোধিক প্রক্রিয়াযুক্ত আৰু নির্দিষ্ট স্বীকার্য সিদ্ধ কৰা এটা অৰিক্ত সংহতিক বীজগণিতীয় গাঁথনি বুলি কোৱা হয়। যদিও ই এটা বিমূর্ত বীজগণিতীয় গাঁথনি, বৈদ্যুতিক বর্তনী বিশ্লেষণ কৰিবলৈ ইয়াক ব্যৱহাৰ কৰা হয়। ইলেকট্রনিক কম্পিউটাৰৰ বিশ্লেষণ আৰু অভিযোজনৰ বাবে সম্প্রতি ইয়াক বিপুলভাৱে ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

১৪.৩ সংজ্ঞা, ধর্ম আৰু উদাহৰণ (DEFINITION, PROPERTIES AND EXAMPLES)

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল দুটা দ্বৈত প্রক্রিয়া + আৰু, . , আৰু এটা একক (unary) প্রক্রিয়া $'$ যুক্ত, আৰু দুটা পৃথক মৌল 0 আৰু 1 থকা B এটা অৰিক্ত সংহতি। তেনেহ'লে B এটা বুলীয় বীজগণিত (Boolean Algebra) বুলি কোৱা হয় যদি তলৰ চর্তসমূহ সিদ্ধ হয়।

1. ক্রমবিনিময়ে বিধি (Commutative laws)

   (i) a + b = b + a, (ii) a.b = b.a, $\forall a, b \in B$

2. বিতৰণ বিধি (Distributive laws)

   (i) a + (b.c) = (a + b).(a + c)

   (ii) a. (b + c) = (a.b) + (a.c), $\forall a, b, c \in B$

3. একক বিধি (Identity laws)

   (i) a + 0 = a, (ii) a.1 = a

4. পূৰক বিধি (Complement laws)

   (i) a + $a^{/}$ = 1, (ii) a.$a^{/}$ = 0

টোকা ঃ 1. সংজ্ঞাৰ পৰা এইটো স্পষ্ট যে এটা মৌলবিশিষ্ট বুলীয় বীজগণিত থাকিব নোৱাৰে।

2. 1 অক একক মৌল (unit element) আৰু 0 ক শূন্য মৌল (zero element) বুলি কোৱা হয়।

3. $a^{/}$ অক a ৰ পূৰক (complement) বুলি কোৱা হয়।

4. এটা বুলীয় বীজগণিতক সাধাৰণতে (B, + , . , $^{/}$, 0, 1) বা (B, +, . ,$^{/}$) বা B ৰে বুজোৱা হয়।

5. 0 আৰু 1 প্ৰতীক দুটা সদায়ে বাস্তৱ সংখ্যা 0 আৰু 1 নহয়।

উদাহৰণ 1 ঃ তলৰ সাৰণীৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ +, . , $^{/}$ প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত B = {0, 1} এটা বুলীয় বীজগণিত।

+	1	0
1	1	1
0	1	0

.	1	0
1	1	0
0	0	0

	/
1	0
0	1

সমাধান ঃ +, . , $^{/}$, প্ৰক্ৰিয়াৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে

1. (i) a + b = b + a

   (ii) a.b = b.a, $\forall a, b \in B$

2. (i) a + (b.c) = (a+b).(a + c)

   (ii) a.(b+c) = (a.b) + (a.c), $\forall a, b, c \in B$

3. (i) a + 0 = a, (ii) a.1 = a, $\forall a \in B$

4. (i) a + $a^{/}$ = 1 (1 + $1^{/}$ = 1 + 0 = 1),

   0 + $0^{/}$ = 0 + 1 = 1)

   (ii) a. $a^{/}$ = 0 (1. $1^{/}$ = 1.0 = 0,

   0.$0^{/}$ = 0.1 = 0)

   $\therefore$ (B, + , . , $^{/}$) এটা বুলীয় বীজগণিত।

ধর্ম

1. এটা বুলীয় বীজগণিত B ত শূন্য মৌল অদ্বিতীয়।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল (B, + , . , $'$) এটা বুলীয় বীজগণিত।

যদি সম্ভৱ, দুটা শূন্য মৌল 0 আৰু 0_1 আছে।

$\therefore$ a + 0 = a, $\forall a \in B$

a + 0_1 = a, $\forall a \in B$

$\therefore$ 0_1 + 0 = 0 ($\because$ 0 শূন্য মৌল)

আকৌ 0_1+0 = 0 + 0_1 (ক্ৰমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা)

= 0 ($\because$ 0_1 শূন্য মৌল)

$\therefore$ 0_1 = 0

অর্থাৎ শূন্য মৌল অদ্বিতীয়।

2. এটা বুলীয় বীজগণিত B ত একক মৌল অদ্বিতীয়।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল (B, +, . , $'$) এটা বুলীয় বীজগণিত।

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল দুটা একক মৌল 1 আৰু 1_u আছে।

$\therefore$ $a.1 = a, \forall a \in B$

$a.1_u = a, \forall a \in B$

$\therefore$ 1_u.1 = 1_u ($\because$ 1 একক মৌল)

$\therefore$ 1_u = 1

অর্থাৎ, একক মৌল অদ্বিতীয়।

3. এটা বুলীয় বীজগণিত B ত, প্ৰত্যেক মৌলৰ পূৰক অদ্বিতীয়।

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল (B, + , . , $'$) এটা বুলীয় বীজগণিত।

ধৰা হ'ল শূন্য মৌলটো 0, আৰু একক মৌলটো 1.

ধৰা হ'ল $a \in B$

যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল a ৰ দুটা পূৰক a' আৰু a_1 .

$\therefore$ a + a' = 1, a . a' = 0 ($\because$ a ৰ পূৰক a')

a + a_1 = 1,a . a_1 = 0 ($\because$ a ৰ পূৰক a_1)

এতিয়া a' = a'.1

= a'. (a + a_1)

= (a'.a) + (a'.a_1)

= (a.a') + (a'.a_1)

= 0 + (a'.a_1)

= (a'.a_1) + 0

= a'.a_1 (1)

আকৌ $a_1 = a_1.1$

$= a_1.(a + a')$

$= (a_1.a) + (a_1.a')$

$= (a.a_1) + (a_1.a')$

$= 0 + (a_1.a^1)$

$= (a'.a_1) + 0$

$= a'.a_1$ (2)

(1) আৰু (2) ৰ পৰা আমি পালোঁ যে

$a' = a_1$

4. এটা বুলীয় বীজগণিত B ত

(i) $1' = 0$, (ii) $0' = 1$, য'ত 0 হ'ল শূন্য মৌল, 1 হ'ল একক মৌল।

প্ৰমাণ ঃ (i) ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত।

এতিয়া একক বিধিৰ পৰা আমি পালোঁ $a + 0 = 1$ আৰু $a.1 = a$, $\forall a \in B$

$a + 0 = a$ ত a ৰ ঠাইত 1 বহুৱাই আমি পাওঁ $1 + 0 = 1$.

$a.1 = 1$ ত a ৰ ঠাইত 0 বহুৱাই আমি পাওঁ $0.1 = 0$

অৰ্থাৎ $1.0 = 0$ ($0.1 = 1.0$, ক্ৰমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা)

গতিকে, $1 + 0 = 1$ (1)

$1.0 = 0$ (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে $0 = 1'$ অৰ্থাৎ $1' = 0$

(ii) ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত।

এতিয়া একক বিধিৰ পৰা আমি পালোঁ $a.1 = 1$ আৰু $a + 0 = a$, $\forall a \in B$

$a.1 = a$ ত a ৰ ঠাইত 0 বহুৱাই আমি পাওঁ $0.1 = 0$.

$a + 0 = a$ ত a ৰ ঠাইত 1 বহুৱাই আমি পাওঁ $1 + 0 = 1$.

অৰ্থাৎ $0 + 1 = 1$, ($1 + 0 = 0 + 1$, ক্ৰমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা)

গতিকে, $0.1 = 0$ (1)

$0 + 1 = 1$ (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে $0' = 1$

টোকা ঃ (i) নম্বৰ ধৰ্ম অৰ্থাৎ $1' = 0$ ত দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া + আৰু . সালসলনি কৰি, আৰু 0 আৰু 1 সালসলনি কৰি (ii) নম্বৰ ধৰ্ম অৰ্থাৎ $0' = 1$ পাব পাৰি। (ii) ক (i) অৰ দ্বৈধ (dual) বুলি কোৱা হয়। বিপৰীতক্ৰমে (i) অক (ii)ৰ দ্বৈধ বুলি কোৱা হয়। এই বিধিটোক দ্বৈধতা বিধি (principle of duality) বুলি কোৱা হয়। বুলীয় বীজগণিতৰ প্ৰতিটো উক্তি আৰু প্ৰতিটো উপপাদ্যৰ ক্ষেত্ৰত এই বিধি প্ৰযোজ্য।

উদাহৰণ 2 ঃ ধৰা হ'ল X এটা অৰিক্ত সংহতি। ধৰা হ'ল

ধৰা হ'ল X অৰ ঘাত সংহতি P(x), অর্থাৎ P(x) হ'ল X অৰ উপসংহতিবোৰৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল $A,B\in P(X)$, অর্থাৎ $A\subseteq X,\ B\subseteq X$

তলৰ সংজ্ঞাবোৰ দিয়া হ'ল

$A+B=A\cup B,$

$A.B=A\cap B$

$A^{/}$ = A ৰ পূৰক সংহতি

স্পষ্টতঃ, P(x)অত মিলন এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া,

P(x) অত ছেদন এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া,

P(x) অত পূৰক এটা একক প্রক্রিয়া।

এতিয়া 1. (i) $A+B=A\cup B=B\cup A=B+A$

(ii) $A.B=A\cap B=B\cap A=B.A,\ \forall A,B\in P(x)$

2. (i) $A+(B.C)=A\cup(B\cap C)$

$=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$=(A+B).(A+C),\ \forall A,B,C\in P(x)$

(ii) $A.(B+C)=A\cap(B\cup C)$

$=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$=(A.B)+(A.C)$

3. (i) $A+\phi=A\cup\phi=A,\ \ \phi\in P(x)$

(ii) $A.X=A\cap X=A$

4. (i) $A+A^{/}=A\cup A^{/}=x$

(ii) $A.A^{/}=A\cap A^{/}=\phi$

$\therefore (P(X),\cup,\cap,^{/})$ এটা বুলীয় বীজগণিত। ইয়াত ϕ হ'ল শূন্য মৌল আৰু X হ'ল একক মৌল।

উদাহৰণ 3 ঃ ধৰা হ'ল 110 অৰ ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতিটো B = {1, 2, 5, 10, 11, 22, 55, 110} তলৰ সংজ্ঞাবোৰ দিয়া হ'ল।

a + b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ

a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$a^{/}=\frac{110}{a},\ \ a,b\in B$

+, . , $^{/}$ প্রক্রিয়াৰ বাবে প্রক্রিয়া সাৰণীকেইখন গঠন কৰা হ'ল—

+	1	2	5	10	11	22	55	110
1	1	2	5	10	11	22	55	110
2	2	2	10	10	22	22	110	110
5	5	10	5	10	55	110	55	110
10	10	10	110	10	110	110	110	110
11	11	22	110	110	11	22	55	110
22	22	22	110	110	22	22	110	110
55	55	55	110	110	55	110	55	110
110	110	110	110	110	110	110	110	110

.	1	2	5	10	11	22	55	110
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2
5	1	1	5	5	1	1	5	5
10	1	2	5	10	1	2	5	10
11	1	1	1	1	11	11	11	11
22	1	2	1	2	11	22	11	22
55	1	1	5	5	11	11	55	55
110	1	2	5	10	11	22	55	110
/	1	2	5	10	11	22	55	110
	110	55	22	11	10	5	2	1

ওপৰৰ সাৰণীকেইখনৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে B ত + এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, B ত এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া আৰু B ত $'$ এটা একক প্ৰক্ৰিয়া।

আকৌ, 1 (i) a+b = a, b লঃ সাঃ গুঃ

= b, a ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= b+a, $\forall a, b \in B$

(ii) a . b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= b, a ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= b.a, $\forall a, b \in B$

2. সাৰণীৰ পৰা আমি পালোঁ যে

(i) a + (b.c) = (a+b).(a+c)

(ii) a.(b+c) = (a.b) + (a.c), $\forall a, b, c \in B$

3. (i) a+1 = a, 1ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= a, $\forall a \in B$

(ii) a.110 = 110 ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= a, $\forall a \in B$

4. (i) $a+a^{/}$ = a, $a^{/}$ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= $a, \frac{110}{a}$ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= 110, $\forall a \in B$

(ii) $a.a^{/}$ = a, $a^{/}$ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= $a, \frac{110}{a}$ ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= 1, $\forall a \in B$

∴ (B, + , . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত। ইয়াক 1 হ'ল শূন্য মৌল আৰু 110 হ'ল একক মৌল।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল X ={1}. প্রমাণ কৰক যে মিলন, ছেদন আৰু পূৰক প্রক্রিয়াৰ অধীনত P(x) = {{1}, ϕ } এটা বুলীয় বীজগণিত।

প্রশ্ন নং ২ঃ ধৰা হ'ল X = {1, 2, 3}, ধৰা হ'ল X অৰ ঘাত সংহতিটো হ'ল P(X)। প্রমাণ কৰক যে মিলন, ছেদন আৰু পূৰক প্রক্রিয়াৰ অধীনত P(X) এটা বুলীয় বীজগণিত।

প্রশ্ন নং ৩ঃ ধৰা হ'ল 30 ৰ সকলো ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতিটো B = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 30} তলৰ সংজ্ঞাবোৰ দিয়া হ'ল।

a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ, $a, b \in B$

a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$a^{/} = \frac{30}{a}$

প্রমাণ কৰক যে (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত।

প্রশ্ন নং ৪ঃ ধৰা হ'ল 70 ৰ সকলো ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতিটো B = {1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70}। তলৰ সংজ্ঞাবোৰ দিয়া হ'ল।

a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ, $a, b \in B$

a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$a^{/} = \frac{70}{a}$

প্রমাণ কৰক যে (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত।

প্রশ্ন নং ৫ঃ এটা 16 টা মৌলবিশিষ্ট বুলীয় বীজগণিতৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ ধৰা হ'ল B = {0, a, b, 1}. B ত +, . , / প্রক্রিয়াৰ সংজ্ঞা তলত দেখুওৱাৰ দৰে দিয়া হ'ল।

+	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

.	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

/	0	a	b	1
	1	b	a	0

প্রমাণ কৰক যে (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত।

প্রশ্ন নং ৭ঃ ধৰা হ'ল 20 ৰ সকলো ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতিটো B = { 1, 2, 4, 5, 10, 20}। তলৰ সংজ্ঞাবোৰ দিয়া হ'ল।

a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ

a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$a' = \frac{20}{a}, \ \forall a \in B$

(B, +, . , /) বুলীয় বীজগণিত হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

১৪.৪ বুলীয় বীজগণিতৰ মূল বিধি (BASIC LAWS OF BOOLEAN ALGEBRA)

ধৰা হ'ল (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত। ধৰা হ'ল B ৰ শূন্য মৌলটো 0, একক মৌলটো 1.

1. বৰ্গসম বিধি (Idempotent Laws)

(i) a+a = a, (ii) a.a = a, $\forall a \in B$

প্রমাণ ঃ (i) a = a+0

= a + (a.a′)

= (a+a).(a+a′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= (a+a).1

= a+a

অর্থাৎ a+a = a

(ii) a = a.1

= a.(a + a′)

= (a.a) + (a.a′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= (a.a) + 0

= a.a

টোকা ঃ (ii) নম্বৰ উক্তিটো (i) নম্বৰ উক্তিৰ দ্বৈধ। বিপৰীতক্ৰমে (i) নম্বৰ উক্তিটো (ii) নম্বৰ উক্তিৰ দ্বৈধ। (i) নম্বৰত + অৰ ঠাইত • বহুৱাই, • ঠাইত + বহুৱাই, 0 ৰ ঠাইত 1 বহুৱাই, 1 অৰ ঠাইত 0 বহুৱাই (ii) পাব পাৰি।

2. পৰিৱদ্ধতা বিধি (Boundedness Laws)

(i) a+1 = 1, (ii) a.0 = 0, $\forall\ a \in B$

প্ৰমাণ ঃ (i) a+1 = (a+1) . 1

= (a+1).(a+a′)

= a+(1.a′), (বিতৰণ বিধিৰ পৰা)

= a+a′, (1.a′ = a′.1 = 1)

= 1

(ii) a.0 = (a.0) + 0

= (a.0) + (a.a′)

= a.(0+a′), (বিতৰণ বিধিৰ পৰা)

= a.a′, (0+a′ = a′+0 = a′)

= 0

3. বিশোষণ বিধি (Absorption Laws)

(i) a+(a.b) = a, (ii) a.(a+b) = a, $\forall a,b \in B$

প্ৰমাণ ঃ (i) a+(a.b) = (a.1) + (a.b)

= a.(1 + b)

= a.1, (1+b = b+1 = 1, পৰিৱদ্ধতা বিধিৰ পৰা)

= a

(ii) a.(a+b) = (a+0).(a+b)

= a+(0.b)

= a+0, (0.b = b.0 = 0, পৰিৱদ্ধতা বিধিৰ পৰা)

= a

4. সাহচর্য্য বিধি (Associative Laws)

(i) (a+b)+c = a + (b+c)

(ii) (a.b).c = a.(b.c)

প্ৰমাণ ঃ (i) ধৰা হ'ল L = (a+b) + c

R = a + (b+c)

এতিয়া a.L = a.((a+b)+c)

$= a.(a+b) + a.c,$ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= a + (a.c),$ বিশোষণ বিধিৰ পৰা

$= a,$ বিশোষণ বিধিৰ পৰা

$a . R = a.(a+(b+c))$

$= (a.a)+(a.(b+c)),$ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= a+(a.(b+c)),$ বৰ্গসম বিধিৰ পৰা

$= a,$ বিশোষণ বিধিৰ পৰা

$\therefore a.L = a.R$

আকৌ $a'.L \quad a'.((a+b) + c)$

$= a'.(a+b) + (a'.c),$ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= (a'.a) + (a'.b) + (a'.c),$ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= 0 + (a'.b) + (a'.c)$

$= (a'.b) + (a'.c)$

$= a'.(b+c)$

$a'.R = a'.(a + (b+c))$

$= (a'.a) + a'.(b+c),$ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= 0 + a'.(b+c)$

$= a'.(b+c)$

$\therefore a'.L = a'.R$

এতিয়া $L = 1.L$

$= (a+a').L$

$= (a.L) + (a'.L)$

$= (a.R) + (a'.R)$

$= (a+a').R$

$= 1.R$

$= R$

$\therefore L = R$

অৰ্থাৎ $(a+b) + c = a+(b+c)$

(ii) ধৰা হ'ল $L = (a.b).c$

$R = a. (b.c)$

এতিয়া $a + L = a + ((a.b).c)$

$= (a + (a.b)).(a+c),$ বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= a.(a+c),$ বিশোষণ বিধিৰ পৰা

= a, বিশোষণ বিধিৰ পৰা

a + R = a +(a.(b.c))

= (a+a).(a+(b.c)), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= a.(a+(b.c)), বৰ্গসম বিধিৰ পৰা

= a, বিশোষণ বিধিৰ পৰা

∴ a + L = a+R

আকৌ a'+L = a' + (a.b).c)

= (a' + (a.b)).(a'+c), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= ((a'+a).(a'+b)).(a'+c), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= 1.(a'+b).(a'+c)

= (a'+b).(a'+c)

= a' + (b.c)

a' + R = a' +(a.(b.c))

= (a'+a).(a' + (b.c)), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= 1.(a' + (b.c))

= a' + (b.c)

∴ a' + L = a' + R

এতিয়া L = 0 + L

= (a.a') + L

= (a+L).(a'+L)

= (a+R).(a'+R)

= (a.a') + R

= 0 + R

= R

∴ L = R

অর্থাৎ (a.b).c = a.(b.c)

5. ঘাতক্রিয়া বিধি (Involution Law) : $\left(a'\right)' = a$

প্ৰমাণ ঃ পূৰকৰ সংজ্ঞাৰ পৰা আমি পালোঁ

a+a' =1, আৰু a.a' = 0

অর্থাৎ a'+a = 1, আৰু a'.a = 0, ক্ৰমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা

∴ পূৰক অদ্বিতীয়, a' অৰ পূৰক হ'ল a, অর্থাৎ (a')$'$ = a.

6. দ্য মৰ্গানৰ বিধি (De Morgan's Laws)

(i) $(a+b)' = a'.b'$, (ii) $(a.b)' = a'+b'$

প্ৰমাণ ঃ (i) $(a+b) + (a'.b') = b+a + (a'.b')$, ক্ৰমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা

$= b +(a+a').(a+b')$, বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= b+1.(a+b')$

$= b + (a+b')$

$= b + (b'+a)$, ক্ৰমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা

$= (b+b') +a$, সাহচৰ্য্য বিধিৰ পৰা

$= 1+a$

$= 1$, পৰিৱৰ্দ্ধতা বিধিৰ পৰা

$(a + b).(a'.b') = ((a+b).a').b'$, সাহচৰ্য্য বিধিৰ পৰা

$= ((a.a') + (b.a')).b'$, বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= (0 + (b.a')).b'$

$= (0 + (b.a')).b'$

$= (b.a').b'$

$= b.(a'.b')$, সাহচৰ্য্য বিধিৰ পৰা

$= b.(b'.a')$, ক্ৰমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা

$= (b.b').a'$, সাহাচৰ্য্য বিধিৰ পৰা

$= 0.a'$

$= 0$

গতিকে আমি দেখিলোঁ যে $a+b$ ৰ পূৰক $a'.b'$

অৰ্থাৎ $(a+b)' = a'.b'$

[আগষ্টাছ দ্য মৰ্গান (Augustus De Morgan 1806 – 1871) এজন বিখ্যাত গণিতজ্ঞ আছিল। ভাৰতবৰ্ষৰ মাদুৰাই চহৰত তেওঁৰ জন্ম হয়।]

অনুসিদ্ধান্ত (i) $a+b = (a'.b')'$, (ii) $a.b = (a'+b')'$

প্ৰমাণ ঃ (i) $(a'.b')' = (a')'+(b')'$, দ্য মৰ্গানৰ বিধিৰ পৰা

$= a+b$, ঘাতক্ৰিয়া বিধিৰ পৰা

(ii) $(a'+b') = (a')'.(b')'$, দ্য মৰ্গানৰ বিধিৰ পৰা

$= a.b$, ঘাতক্ৰিয়া বিধিৰ পৰা

7. (i) যদি $b+a = c+a$, আৰু $b+a' = c+a'$, তেনেহ'লে $b = c$.

(ii) যদি $b.a = c.a$, আৰু $b.a' = c.a'$, তেনেহ'লে $b = c$.

প্ৰমাণ ঃ (i) $b = b+0$

$= b + (a.a')$

= (b+a).(b+a′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= (c+a).(c+a′), (দিয়া আছে)

= c+(a.a′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= c+0

= c.

(ii) b = b.1

= b.(a+a′)

= (b.a) + (b.a′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= (c.a) + (c.a′), দিয়া আছে

= c.1

= c

8. (i) a+b′ = 1 যদি আৰু যদিহে a+b = a

(ii) a.b′ = 0 যদি আৰু যদিহে a.b = a

প্ৰমাণ ঃ (i) ধৰা হ'ল a+b′ = 1

এতিয়া a + b = (a+b) . 1

= (a+b).(a+b′), দিয়া আছে

= (a+(b.b′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= a+0

= a

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল a+b = a

এতিয়া a+b′ = 1.(a+b′)

= (a+a′).(a+b′)

= a+(a′.b′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= a+a+b)′, দ্য মৰ্গানৰ বিধিৰ পৰা

= a+a′, দিয়া আছে

= 1.

(ii) ধৰা হ'ল a.b′ = 0

এতিয়া a.b = a.b + 0

= a.b+a.b′, দিয়া আছে

= a.(b+b′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= a . 1

= a

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল a.b = a

এতিয়া a.b′ = 0 + a.b′

$= (a.a') + (a.b')$

$= a.(a'+b')$, বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= a.(a.b)'$, দ্য মৰ্গানৰ বিধিৰ পৰা

$= a.a'$, দিয়া আছে

$= 0$.

9. (i) $a+(a'.b) = a+b$

(ii) $a.(a'+b) = a.b$

প্ৰমাণ ঃ (i) $a+(a'.b) = (a+a').(a+b)$, বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= 1.(a+b)$

$= a+b$

(ii) $a.(a'+b) = (a.a') + (a.b)$

$= 0 + (a.b)$

$= a.b$

উদাহৰণ 4ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত।

ধৰা হ'ল $a, b \in B$. প্ৰমাণ কৰক যে

$a.(a.b)' = a.b'$

সমাধান ঃ $a.(a.b)'$

$= a.(a'+b')$, দ্য মৰ্গানৰ বিধিৰ পৰা

$= (a.a') + (a.b')$

$= 0 + (a.b')$

$= a.b'$

উদাহৰণ 5ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত, আৰু $a, b, c \in B$. প্ৰমাণ কৰক যে

$(a+b).(b+c).(c+a) = a.b + b.c + c.a$

সমাধান ঃ $(a+b).(b+c).(c+a)$

$= (a+b).(b.c + b.a + c.c + c.a)$

$= (a+b).(b.c + b.a + c + c.a)$

$= a.(b.c) + a.(b.a) + a.c + a.(c.a) + b.(b.c) + b.(b.a) + b.c + b.(c.a)$

$= (a.b.c + a.(a.b) + a.c + a.(a.c) + (b.b).c + (b.b).a + b.c + a.b.c$

$= (a.b.c + a.b.c) + (a.a).b + a.c + (a.a).c + b.c + b.a + b.c)$

$= a.b.c + a.b + a.c + a.c + b.c + b.a + b.c$

$= a.b.c + (a.b + a.b) + (a.c + a.c) + (b.c + b.c)$

$= a.b.c + a.b + a.c + b.c$

$= a.b.(c+1) + a.c + b.c$

= a.b.1 + c.a + b.c

= a.b + b.c + c.a

উদাহৰণ 6ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত আৰু a, b∈B। প্ৰমাণ কৰক যে a+b = 0, a = 0, আৰু b = 0 । এই ফলটোৰ লিখক আৰু প্ৰমাণ কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল a = 0, আৰু b = 0

∴ a+b = 0+0

= 0

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল a+b = 0

এতিয়া a = a+0

= a+(b.b′)

= (a+b).(a+b′), বিতৰণ বিধিৰ পৰা

= 0.(a+b′), দিয়া আছে

b = b+0

= b + (a.a′)

= (b+a).(b+a′)

= (a+b).(b+a′)

= 0.(b+a′)

= 0

দ্বিতীয় অংশ

ওপৰৰ ফলটোৰ দ্বৈধটো হ'ল a.b = 1 $\Leftrightarrow$ a = 1 আৰু b = 1.

যদি a = 1, b = 1,

a.b = 1.1 = 1

বিপৰীতক্ৰমে, ধৰা হ'ল a.b = 1

এতিয়া a = a.1

= a.(b+b′)

= (a.b) + (a.b′)

= 1 + (a.b′)

= 1

b = b.1

= b.(a+a′)

= (b.a) + (b.a′)

= (a.b) + (b.a′)

= a + (b.a′)

= 1

উদাহৰণ 7ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত আৰু a, b, c∈B. প্ৰমাণ কৰক যে তলৰ ৰাশিবোৰ সমান।

(i) $(a+b).(a'+c).(b+c)$

(ii) $a.c + a'.b + b.c$

(iii) $(a+b).(a'+c)$

(iv) $a.c + a'.b$

সমাধান ঃ $(a+b).(a'+c).(b+c)$

$= (a+b).(a'.b + a'.c + c.b + c.c)$

$= (a+b).(a'.b + a'.c + c.b + c)$

$= a.a'.b + a.a'.c + a.c.b + a.c + b.a'.b + b.a'.c + b.c.b + b.c$

$= 0.b + 0.c + a.c.b + a.c + b.a' + b.a'.c + b.c + b.c$

$= b.c.(a + a') + a.c + b.c + b.a'$

$= b.c.1 + a.c + b.c + a'.b$

$= b.c + a.c + b.c + a'.b$

$= a.c + a'.b + b.c$ (1)

আকৌ, $(a+b).(a'+c)$

$= a.a' + a.c + b.a' + b.c$

$= 0 + a.c + a'.b + b.c$

$= a.c + a'.b + b.c$ (2)

আকৌ, $a.c + a'.b + b.c$

$= a.c + a'.b + 1.b.c$

$= a.c + a'.b + (a+a').b.c$

$= a.c + a'.b + a.b.c + a'.b.c$

$= (a.c) + (a.c).b) + ((a'.b) + (a'.b).c)$

$= a.c + a'.b$, বিধিৰ পৰা (3)

(1), (2) আৰু (3)ৰ পৰা আমি পালোঁ যে

$(a+b).((a'+c).(b+c)$

$= a.c + a'.b + b.c$

$= (a+b).(a'+c)$

$= a.c + a'.b$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৮ঃ প্রমাণ কৰক যে তিনিটা মৌলবিশিষ্ট বুলীয় বীজগণিত নাই।

প্রশ্ন নং ৯ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত আৰু ধৰা হ'ল a, b, c∈B. যদি a+c=a, b+c=b, প্রমাণ কৰক যে (a.b) + c = a.b

প্রশ্ন নং ১০ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত। ধৰা হ'ল a, b ∈ B. প্রমাণ কৰক যে $a+(a+b)' = a+b'$.

প্রশ্ন নং ১১ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত, আৰু ধৰা হ'ল a, b∈B. প্রমাণ কৰক যে তলৰ ধর্মবোৰ সমতুল্য।

(i) a+b=a, (ii) $a+b'=1$, (iii) a.b=b

ওপৰৰ ফলটোৰ দ্বৈধটো লিখক আৰু প্রমাণ কৰক।

প্রশ্ন নং ১২ঃ ধৰা হ'ল B এটা বুলীয় বীজগণিত, আৰু ধৰা হ'ল a, b, c∈B. প্রমাণ কৰক যে

$[(abc+a'b')' + bc]' = a'b'$

[ইয়াত abc ৰ অর্থ a.b.c]

১৪.৫ বুলীয় ৰাশি (BOOLEAN EXPRESSION)

B={0, 1} বুলীয় বীজগণিতটো লোৱা হ'ল। ইয়াত +, . , আৰু $'$ প্রক্রিয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে।

+	0	1
0	0	1
1	1	1

•	0	1
0	0	0
1	0	1

/	0	0
	1	0

B ৰ কোনো মৌল বুজাবলৈ যি আঞ্চলিক প্রতীক ব্যৱহাৰ কৰা হয়, তাক বুলীয় চলক (Boolean variable) বোলে। গতিকে যদি x এ এটা বুলীয় চলক বুজায়, তেনেহ'লে x অৰ মান 0 বা 1 হ'ব। যদি x এটা বুলীয় চলক, x' ও এটা বুলীয় চলক।

ধৰা হ'ল x, y দুটা বুলীয় চলক। তলৰ সাৰণীখনত x, y ৰ মান দিয়া আছে।

x	y
1	1
1	0
0	1
0	0

ধৰা হ'ল x, y, z তিনিটা বুলীয় চলক। x, y, z অৰ মান তলৰ সাৰণীখনত দিয়া আছে।

x	y	z
1	1	1
1	1	0
1	0	1
0	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1
0	0	0

সসীম সংখ্যক বুলীয় চলকত দ্বৈত প্রক্রিয়া + আৰু . , আৰু একক প্রক্রিয়া $^{/}$ প্রয়োগ কৰি যি ৰাশি পোৱা যায় তাক **বুলীয় ৰাশি** (Boolean expression) বোলে। উদাহৰণস্বৰূপে $x.y + x^{/}$ এটা দুটা চলকৰ বুলীয় ৰাশি। সেইদৰে $x.y+y.z+z.x$ এটা তিনিটা চলকৰ বুলীয় ৰাশি।

মন কৰিব লগীয়া যে 0, আৰু 1 দুটা বুলীয় ৰাশি। যিকোনো চলকেই এটা বুলীয় ৰাশি।

প্রতিটো বুলীয় ৰাশিৰ অনুৰূপে আমি এখন সাৰণী গঠন কৰিব পাৰোঁ। ইয়াক সত্যতা সাৰণী বা সাৰণী বা মান সাৰণী (truth table or the assignment table or the value table) বোলে।

$xy+x^{/}$ বুলীয় ৰাশিটোৰ বাবে আমি এখন সত্যতা সাৰণী গঠন কৰোঁ। (ইয়াত xy এ x.y বুজাইছে।)।

x	y	xy	$x^{/}$	$xy+x^{/}$
1	1	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ চলকৰ দুটা বুলীয় ৰাশিক **সমান** বুলি কোৱা হয় যদি $x_1, x_2, \ldots, x_n$ চলকৰ প্রত্যেক মান 0, 1 অৰ বাবে একে মান পোৱা যায়।

দুটা বুলীয় ৰাশিৰ সমতাক " = " প্রতীকেৰে বুজোৱা হয়।

উদাহৰণ 8 ঃ x, y, z চলকৰ বুলীয় ৰাশি xy + xz অৰ বাবে সত্যতা সাৰণী গঠন কৰক।

সমাধান ঃ

x	y	z	xy	xz	xy+xz
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

উদাহৰণ 9 ঃ x, y চলকৰ বুলীয় ৰাশি $xy+x'y+xy'+x'y'$ অৰ বাবে সত্যতা সাৰণী গঠন কৰক।

সমাধান ঃ

x	y	x'	y'	xy	$x'y$	xy'	$x'y'$	$xy+x'y+xy'+x'y'$
1	1	0	0	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	0	0	1	1

উদাহৰণ 10 ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $(xy+x)'$ আৰু $(x'+y')x'$ বুলীয় ৰাশি দুটা সমান।

সমাধান ঃ

x	y	xy	xy+x	$(xy+x)'$
1	1	1	1	0
1	0	0	1	0
0	1	0	0	1
0	0	0	0	1

আকৌ,

x	y	x'	y'	$x'+y'$	$(x'+y')x'$
1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

ওপৰৰ সাৰণী দুখনৰ শেষৰ স্তম্ভ দুটা নিৰীক্ষণ কৰি আমি দেখিলোঁ যে $(xy+x)' = (x'+y')x'$.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১৩ঃ ধৰা হ'ল x, y, z চলকৰ f(x, y, z) = xy + z$^{/}$ এটা বুলীয় ৰাশি। f(1, 1, 0), f(0, 1, 1), f(0, 1, 0), f(1, 1, 1), f(0, 0, 0) ৰ মান নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ১৪ঃ তলৰ বুলীয় ৰাশিবোৰৰ বাবে সত্যতা সাৰণী গঠন কৰক।

(i) x + yx$^{/}$ (ii) x(x+y$^{/}$)

(iii) xy + yz + zx (iv) xy$^{/}$ + x(y$^{/}$+z)

প্রশ্ন নং ১৫ঃ তলৰ বুলীয় ৰাশিবোৰ সমান হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

(i) (x+y)$^{/}$, x$^{/}$y$^{/}$

(ii) (xy)$^{/}$, x$^{/}$ + y$^{/}$

(iii) x(y+z), xy+xz

(iv) xz + (x$^{/}$+y$^{/}$)$^{/}$, x(y+z)



১৪.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- ধৰা হ'ল দুটা দ্বৈত প্রক্রিয়া + আৰু . , আৰু এটা একক প্রক্রিয়া $^{/}$ যুক্ত, আৰু দুটা পৃথক মৌল 0 আৰু 1 থকা B এটা অৰিক্ত সংহতি। তেনেহ'লে B ক এটা বুলীয় বীজগণিত বুলি কোৱা হয় যদি তলৰ চর্তসমূহ সিদ্ধ হয়।

  1. (i) a+b = b+a, (ii) a.b = b.a, $\forall\ a,b \in B$

  2. (i) a+ (b.c) = (a+b).(a+c)

     (ii) a.(b+c) = (a.b)+(a.c), $\forall\ a, b, c \in B$

  3. (i) a+0 = a, (ii) a.1 = 1, $\forall\ a \in B$

     (ii) a+a$^{/}$ = 1, (ii) a.a$^{/}$ = 0, $\forall\ a \in B$

     0 ক শূন্য মৌল বুলি কোৱা হয়।

     1 অক একক মৌল বুলি কোৱা হয়।

  a$^{/}$ অক প্রত্যেক মৌলৰ a বুলি কোৱা হয়।

- এটা বুলীয় বীজগণিতত শূন্য মৌল অদ্বিতীয়।
- এটা বুলীয় বীজগণিতত একক মৌল অদ্বিতীয়।
- এটা বুলীয় বীজগণিতত প্রত্যেক মৌলৰ পূৰক অদ্বিতীয়।
- এটা বুলীয় বীজগণিত B ত 1$^{/}$ = 0, 0$^{/}$ = 1.

- বুলীয় বীজগণিতৰ প্ৰতিটো উক্তি আৰু প্ৰতিটো উপপাদ্য বৈধ হয় যদি দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া + আৰু . , আৰু শূন্য মৌল 0 আৰু একক মৌল। সালসলনি কৰা হয়। এই বিধিটোক দ্বৈধতা বিধি বুলি কোৱা হয়।
- এটা বুলীয় বীজগণিত B ত

  1. (i) a+a = a, (ii) a.a = a, $\forall\ a \in B$
  2. (i) a+1 = 1, (ii) a.0 = 0
  3. (i) a+(a.b) = a, (ii) a, (a+b) = a
  4. (i) (a+b)+c = a+(b+c)

     (ii) (a.b).c = a.(b.c), ()
  5. $(a')' = a$
  6. (i) $(a+b)' = a'.b'$, (ii) $(a.b)' = a'+b'$
  7. (i) যদি b+a=c+a, আৰু $b+a' = c+a'$, তেনেহ'লে b=c

     (ii) যদি b.a. = c.a, আৰু $b.a' = c.a'$, তেনেহ'লে b=c
  8. (i) $a+b'=1$ যদি আৰু যদিহে a+b = a

     (ii) $a.b' = 0$ যদি আৰু যদিহে a.b = a
  9. (i) $a+(a'.b) = a+b$

     (ii) $a.(a'+b) = a.b$
- B = {0, 1} বুলীয় বীজগণিতৰ কোনো মৌল বুজাবলৈ যি আক্ষৰিক প্ৰতীক ব্যৱহাৰ কৰা হয়, তাক বুলীয় চলক বোলা হয়। B ত +, . , / প্ৰক্ৰিয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

+	0	1
0	0	1
1	1	1

1	0	1
0	0	0
1	0	1

/	0	
	1	0

- সসীম সংখ্যক বুলীয় চলকত দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া + আৰু . , আৰু একক প্ৰক্ৰিয়া / প্ৰয়োগ কৰি যি ৰাশ পোৱা যায় তাক বুলীয় ৰাশি বোলে।
- 0 আৰু 1 দুটা বুলীয় ৰাশি।
- যিকোনো চলকেই এটা বুলীয় ৰাশি।
- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ চলকৰ দুটা বুলীয় ৰাশিক **সমান** বুলি কোৱা হয় যদি $x_1, x_2, \ldots,$ x_n চলকৰ প্ৰত্যেক মান 0, 1 অৰ বাবে একে মান পোৱা যায়।
  দুটা বুলীয় ৰাশিৰ সমতাক " = " প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হয়।

১৪.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত x = {1}

P(x) = {{1}, (ϕ)}

$\cup$	{1}	ϕ
{1}	{1}	{1}
ϕ	{1}	ϕ

$\cap$	{1}	ϕ
{1}	{1}	ϕ
ϕ	ϕ	ϕ

$\cap$	/	
{1}	ϕ	
ϕ	{1}	

সাৰণীৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে P(x) সংহতিত $\cup$ এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া, $\cap$ এটা দ্বৈত প্রক্রিয়া, $'$ এটা একক প্রক্রিয়া।

এতিয়া 1. (i) $A \cup B = B \cup A$

(ii) $A \cap B = B \cap A, \ \forall \ A, B \in P(x)$

2. (i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \ \forall \ A, B, C \in P(x)$

3. (i) $A \cup \phi = A$

(ii) $A \cap \{1\} = \{1\}, \forall \ A \in P(x)$

4. (i) $A \cup A' = \{1\}$

(ii) $A \cap A' = \phi, \ \forall \ A \in P(x)$

$\therefore (P(X), \cup, \cap, /)$ এটা বুলীয় বীজগণিত। ইয়াত ϕ হ'ল শূন্য মৌল আৰু {1} হ'ল একক মৌল।

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ +, . , / প্রক্রিয়াৰ বাবে প্রক্রিয়া সাৰণী গঠন কৰা হ'ল।

+	1	2	3	5	6	10	15	30
1	1	2	3	5	6	10	15	30
2	2	2	6	10	6	10	30	30
3	3	6	3	15	6	30	15	30
5	5	10	15	5	30	10	15	30
6	6	6	6	30	6	30	30	30
10	10	10	30	10	30	10	30	30
15	15	30	15	15	30	30	15	30
30	30	30	30	30	30	30	30	30

.	1	2	3	5	6	10	15	30
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	1	2	2	1	2
3	1	1	3	1	3	1	3	3
5	1	1	1	5	1	5	5	5
6	1	2	3	1	6	2	3	6
10	1	2	1	5	3	5	15	15
15	1	1	3	5	3	5	15	15
30	1	2	3	5	3	10	15	30

/	1	2	3	5	6	10	15	30
	30	15	10	6	5	3	2	1

ওপৰৰ সাৰণীৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে B ত + এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, আৰু / এটা একক প্ৰক্ৰিয়া।

আকৌ, 1. (i) a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= b, a ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= b+a, $\forall\ a, b \in B$

(ii) a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= b, a ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= b.a, $\forall\ a, b \in B$

2. সাৰণীৰ পৰা আমি পালোঁ

(i) a+(b.c) = (a+b).(a+c)

(ii) a.(b+c) = (a.b)+(a.c), $\forall\ a, b, c \in B$

3. (i) a+1 = a, 1 অৰ লঃ সাঃ গুঃ = a, $\forall\ a \in B$

(ii) a. 30 = a, 30 ৰ গঃ সাঃ গুঃ = a, $\forall\ a \in B$

4. (i) $a+a^{/} = a$, $a^{/}$ ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= a, $\frac{30}{a}$ ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= 30

(ii) $a.a^{/} = a$, $a^{/}$ ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= a, $\frac{30}{a}$ ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$\therefore$ (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত। ইয়াত 1 হ'ল শূন্য মৌল আৰু 30 একক মৌল।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল X = {1, 2, 3, 4}

গতিকে x অৰ ঘাত সংহতি P(x) অত 2^4 টা অর্থাৎ 16 টা মৌল আছে।

মিলন, ছেদন আৰু পূৰক প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত P(x) এটা বুলীয় বীজগণিত।

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত B = {0, a, b, 1}

B ত +, . , / প্ৰক্ৰিয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

+	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

.	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

/	0	a	b	1
	1	b	a	0

সাৰণীৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে B ত + এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, . এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া আৰু / এটা একক প্ৰক্ৰিয়া।

এতিয়া

1. (i) B ত + প্ৰক্ৰিয়া ক্ৰমবিনিময়ে।

   (ii) B ত . প্ৰক্ৰিয়া ক্ৰমবিনিময়

2. (i) B ত . প্ৰক্ৰিয়াৰ ওপৰত + প্ৰক্ৰিয়াই বিতৰণ বিধি মানি চলে।

   (ii) B ত + প্ৰক্ৰিয়াৰ ওপৰত . প্ৰক্ৰিয়াই বিতৰণ বিধি মানি চলে।

3. (i) a+0 = a

   (ii) a.1 = 1, $\forall\ a \in B$

4. (i) $a+a^{/} = 1$

   (ii) $a.a^{/} = 0,\ \forall\ a \in B$

$\therefore$ (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত। ইয়াত 0 হ'ল শূন্য মৌল আৰু 1 হ'ল একক মৌল।

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ 20 ৰ সকলো ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতি B = {1, 2, 4, 5, 10, 20}

প্ৰক্ৰিয়া সাৰণী কেইখন গঠন কৰা হ'ল।

+	1	2	4	5	10	20
1	1	2	4	5	10	20
2	2	2	4	10	10	20
4	4	4	4	20	20	20
5	5	10	20	5	10	20
10	10	10	20	10	10	20
20	20	20	20	20	20	20

.	1	2	4	5	10	20
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	1	2	2
4	1	2	4	1	2	4
5	1	1	1	5	5	5
10	1	2	2	5	10	10
20	1	2	4	5	10	20

/	1	2	4	5	10	20
	20	10	5	4	2	1

সাৰণীৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে B ত + এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, . এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া, / এটা একক প্ৰক্ৰিয়া।

এতিয়া 1 (i) a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= b, a ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= b+a

(ii) a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= b, a ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= b.a

2. সাৰণীৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে

(i) a+(b.c) = (a+b), (a+c)

(ii) a.(b+c) = (a.b) + (a.c), $\forall\ a, b, c \in B$

3. (i) a+1 = a, 1 ৰ লঃ সাঃ গুঃ

(ii) a.20 = a, 20 ৰ গঃ সাঃ গুঃ

= a, $\forall\ a \in B$

4 (i) আৰু 4 (ii) চৰ্ত দুটা সিদ্ধ নহয়। কিয়নো

$10+10^{/} = 10, 10^{/}$ ৰ লঃ সাঃ গুঃ

$= 10, \frac{20}{10}$ ৰ লঃ সাঃ গুঃ

= 10, 2 ৰ লঃ সাঃ গুঃ

$= 10 \neq 20$

∴ B এটা বুলীয় বীজগণিত নহয়।

টোকা ঃ প্ৰমাণ ব্যতিৰেকে তলৰ উপপাদ্যটোৰ উক্তি দিয়া হ'ল।

ধৰা হ'ল n > 1 এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা। ধৰা হ'ল n অৰ সকলো যোগাত্মক ভাজকৰ সংহতিটো B. B ত +, . , / প্ৰক্ৰিয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হ'ল

a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ

a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$a^{/} = \frac{n}{a}$

তেনেহ'লে B এটা বুলীয় বীজগণিত হ'ব যদি আৰু যদিহে কোনো বৰ্গ অখণ্ড সংখ্যাৰে n বিভাজ্য নহয়।

ওপৰৰ উদাহৰণটোত, n = 20 আৰু 4 অৰ দ্বাৰা 20 বিভাজ্য। 4 এটা বর্গ সংখ্যা।

৮ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল B এটা তিনিটা মৌলবিশিষ্ট বুলীয় বীজগণিত।

ধৰা হ'ল B ={0, 1, a}, য'ত $a \neq 0,\ a \neq 1$

আমি জানো যে $0' = 1,\ 1' = 0$

$\therefore a' = a$

এতিয়া $a = a.a$

$= a.a'$

= 0, এইটো স্ববিৰোধী কথা।

$\therefore$ তিনিটা মৌলবিশিষ্ট বুলীয় বীজগণিত থাকিব নোৱাৰে।

৯ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $(a.b) + c = c+(a.b)$, ক্রমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা

$= (c+a).(c+b)$, বিতৰণ বিধিৰ পৰা

$= (a+c).\ (b+c)$, ক্রমবিনিময়ে বিধিৰ পৰা

$= a.b$, (দিয়া আছে)

১০ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $a+(a+b)' = a+(a'.b')$

$= (a+a').(a+b')$

$= 1.\ (a+b')$

$= a+b'$

১১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ প্রথমতে আমি প্রমাণ কৰোঁ যে (i) $\Rightarrow$ (ii)

আমি জানো $a+b = a$

$\therefore a+b' = 1.\ (a+b')$

$= (a+a').(a+b')$

$= a+(a'.b')$

$= a+(a+b)'$

$= a+a'$

$= 1$

দ্বিতীয়তে আমি প্রমাণ কৰোঁ যে (ii) $\Rightarrow$ (iii)

আমি জানো যে $a+b' = 1$

$\therefore a+b = (a+b).1$

$= (a+b).(a+b')$

$= a+(b.b')$

$= a+0$

$= a$

এতিয়া $a.b = (a+b).b$

= b.(a+b)

= b. (b+a)

= b, বিশোষণ বিধিৰ পৰা

তৃতীয়তে আমি প্ৰমাণ কৰোঁ যে (iii) $\Rightarrow$ (i)

আমি জানো a.b = b

এতিয়া a+b = a+ (a.b)

= a, বিশোষণ বিধিৰ পৰা

গতিকে আমি দেখিলোঁ যে (i), (ii), আৰু (iii) ধৰ্মকেইটা সমতুল্য।

দ্বিতীয় অংশ ঃ ওপৰৰ উপপাদ্যটোৰ দ্বৈধটো হ'ল

(i) a.b = a, (ii) a.b$'$ = 0, (iii) a+b = b

প্ৰথম অংশত . প্ৰক্ৰিয়াৰ ঠাইত + , + প্ৰক্ৰিয়াৰ ঠাইত . , 0 ৰ ঠাইত 1, 1 অৰ ঠাইত 0

বহুৰাই এইটো প্ৰমাণ কৰিব পাৰি।

১২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ [(abc+a$'$b$'$)$'$ + bc]$'$

= (abc+a$'$b$'$) (b$'$+c$'$), দ্য মৰ্গানৰ বিধিৰ পৰা

= abc b$'$ + abc c$'$ + a$'$b$'$b$'$+a$'$b$'$c$'$

= ac 0 + ab 0 + a$'$b$'$ + a$'$b$'$c$'$, [bb$'$=0, cc$'$ = 0, b$'$b$'$=b$'$]

= a$'$b$'$ + a$'$b$'$c$'$

= a$'$b$'$ I + a$'$b$'$c$'$

= a$'$b$'$ (1+c$'$)

= a$'$b$'$, 1+c$'$=1

১৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ f(x, y, z) = xy+z$'$

$\therefore$ f(1, 1, 0) = 1.1 + 0$'$

= 1+1 = 1

f(0, 1, 1) = 0.1 + 1$'$

= 0 + 0

= 0

f(0, 1, 0) = 0.1 + 0$'$

= 0+1

= 1

f(1, 1, 1) = 1.1.+1$'$

= 1+0

= 1

f(0, 0, 0) = 0.0 + 0$'$

= 0+1

= 1

১৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ

(i)

x	y	x'	yx'	$x+yx'$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	1	1
0	0	1	0	0

(ii)

x	y	y'	$x+y'$	$x(x+y')'$
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0

(iii)

x	y	z	xy	yz	zx	xy+yz+zx
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
1	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

(iv) নিজে চেষ্টা কৰক।

১৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ

(i)

x	y	x+y	$(x+y)'$	x'	y'	$x'y'$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

স্তম্ভ 4 আৰু স্তম্ভ 7 অৰ পৰা আমি পালো যে $(x+y)' = x'y'$

(ii) নিজে চেষ্টা কৰক।

(iii) নিজে চেষ্টা কৰক।

(iv)

x	y	z	xz	$x^{/}$	$y^{/}$	$x^{/}+y^{/}$	$(x^{/}+y^{/})^{/}$	$xz+(x^{/}+y^{/})$	y+z	x(y+z)
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0
0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0

স্তম্ভ 9 আৰু স্তম্ভ 11 অৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে

$xz + (x^{/}+y^{/})^{/} = x(y+z)$



১৪.৮ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

১) Sen, M. K, Chakraborty B. C. : *Introduction to Discrete Mathematies* (2010), Books and Allied (P) Ltd, Kolkata 700010.

২) Dasgupta Asok : *Abstract and Linean Algebra* (2014), Asoke Prakasan, Kolkata 700007.



১৪.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ ধৰা হ'ল X = {1, 2}. ধৰা হ'ল X অৰ ঘাত সংহতি P (x)। প্ৰমাণ কৰক যে মিলন, ছেদন আৰু পূৰক প্ৰক্ৰিয়াৰ অধীনত P(x) এটা বুলীয় বীজগণিত।

প্ৰশ্ন ২ঃ ধৰা হ'ল 170 ৰ সকলো ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতিটো B = {1, 2, 5, 10, 17, 34, 85, 170}। B ত +, . , / প্ৰক্ৰিয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ

a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$a^{/} = \frac{170}{a}$

(B, +, . , /) বুলীয় বীজগণিত হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন ৩ঃ ধৰা হ'ল 24 অৰ সকলো ধনাত্মক ভাজকৰ সংহতিটো B = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}। B ত +, . , / প্রক্রিয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

a+b = a, b ৰ লঃ সাঃ গুঃ

a.b = a, b ৰ গঃ সাঃ গুঃ

$a' = \frac{24}{a}$

(B, +, . , /) বুলীয় বীজগণিত হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্রশ্ন ৪ঃ ধৰা হ'ল (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত আৰু ধৰা হ'ল $a, b \in B$ তলৰ ৰাশিকেইটা সংক্ষিপ্ত ৰূপত প্রকাশ কৰক।

(i) $(a+b).(a'+b').(a'+b).(a+b')$
(ii) $(a.b)+(a'.b)+(a.b')+(a'.b')$

প্রশ্ন ৫ঃ ধৰা হ'ল (b, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত, আৰু $a, b, c, d \in B$. প্রমাণ কৰক যে $a.c + b.d = (a+b).(b+c).(c+d).(d+a)$

প্রশ্ন ৬ঃ অসীম মৌলবিশিষ্ট বুলীয় বীজগণিত এটাৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্রশ্ন ৭ঃ ধৰা হ'ল (B, +, . , /) এটা বুলীয় বীজগণিত, আৰু $a, b, c \in B$. প্রমাণ কৰক যে $(a+b').(b+c').(c+a')=(a'+b).(b'+c).(c'+a)$

প্রশ্ন ৮ঃ ধৰা হ'ল x, y, z চলক তিনিটাৰ $f(x, y, z) = x.y.z + x.y'.z + x'.y.x + x'.y'.z'$ এটা বুলীয় ৰাশি। f(1, 1, 1), f(1, 1, 0), f(1, 0, 1), f(0, 1, 1), f(0, 0, 0) ৰ মান নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৯ঃ তলৰ বুলীয় ৰাশিৰ বাবে প্রক্রিয়া সাৰণী গঠন কৰক।

(i) $xy+x(x+y)$ (ii) $x'y+xy'+x(x+y')$ (iii) $xyz+xy'z+x'yz+xyz'$

প্রশ্ন ১০ঃ তলৰ বুলীয় ৰাশিকেইটা সমান হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

(i) $(x+y+z)'$, $x'y'z'$
(ii) $(xyz)'$, $x'+y'+z'$
(iii) $x.(x+y)$, x
(iv) $(x+y)z'$, $xz'+yz'$

*** ***** ***



প্রসঙ্গ পুথি

- Fraleigh, John B : A First in Abstract Algebra (First Indian Reprit, 2003, Person Education (Singapore) Pvt. Ltd., Indian Delhi 110, 092.
- Mapa, S. K. : Higher Algebra (Abstract and Linear) (1994), Ashok Prakashan, Calcutta 700 007.
- Khanna, V. K. and Bhambri, S. K. : A Course in Abstract Algebra (2006), Vikas Publishing House Pvt. Ltd, New Delhi 110 014.
- Singh, Surajeet and Zameeruddin, Qazi Modern Algebra (2006, Vikas Publishing House Pvt. Ltd, New Delhi 110 014.
- Tamuli B. K. : Contemporary Algebra (1977), New Book Stall, Guwahati- 781 001.
- Pundir S . K. : Advance Abstract Algebra, Krishna Prakashan Media (P) Ltd, Meerut 250 001
- Sharma, J. K. : Discrete Mathematics, Macmillian Publishing India Ltd., New Delhi- 110002