GEC S3 02 (M)

অৰ্থবিজ্ঞানৰ বিশ্লেষণত সংখ্যাগত তত্ত্ব - ১

তৃতীয় ষাণ্মাসিক

অৰ্থবিজ্ঞান

খণ্ড ঃ ২

কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

বিষয় বিশেষজ্ঞ মণ্ডলী

অধ্যাপক মাধুর্য প্রসাদ বেজবৰুৱা, অর্থনীতি বিভাগ, গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়
অধ্যাপক নিচাৰ আহমেদ বৰুৱা, অর্থনীতি বিভাগ, গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়
ড° গৌতম মজুমদাৰ, অর্থনীতি বিভাগ, কটন বিশ্ববিদ্যালয়, গুৱাহাটী

সমন্বয়ৰক্ষী ঃ ভাস্কৰ শর্মা, উৎপল ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

প্রস্তুতি গোটৰ সদস্য

অধ্যায়	*অৰিহণা যোগাইছে*	*ভাষান্তৰকাৰী*
৭	**ড° দিপু নাথ শর্মা,** প্রাক্তন মুৰব্বী অধ্যাপক, সন্দিকৈ ছোৱালী মহাবিদ্যালয়	**শ্রীপঞ্চানন বর্মণ,** অৱসৰপ্রাপ্ত শিক্ষক আম্ৰিখোৱা উচ্চতৰ মাঃ বিদ্যালয়, সর্থেবাৰী (অধ্যায় ৭, ১৪)
৮, ১৪	**এছ কে ঝা,** লামডিং মহাবিদ্যালয়, লামডিং	
৯	এছ কে ঝা, লামডিং মহাবিদ্যালয়, লামডিং উৎপল ডেকা	**শ্রীপঞ্চানন বর্মণ** (অধ্যায় ৮, ৯)
১০,১২, ১৩	**ভাস্কৰ শর্মা, উৎপল ডেকা** কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়	**ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা,** কটন বিশ্ববিদ্যালয় (অধ্যায় ১০, ১৫)
১১	**ড° পৰাগ দত্ত,** দিশপুৰ মহাবিদ্যালয় **ড° দিব্যজ্যোতি মহন্ত,** কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়	**আমিনুল হক,** ৰাজীৰ গান্ধী বিশ্ববিদ্যালয় (অধ্যায় ৮, ১২, ১৩)
১৫	**শ্রী সুদর্শন নার্জাৰী,** গুৱাহাটী মহাবিদ্যালয়	**ভাস্কৰ শর্মা** (অধ্যায় ১১)

সম্পাদনা ঃ

বিষয়বস্তু সম্পাদনা	ঃ **অধ্যাপক এন. আৰ. দাস,** গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়, **ড° সঞ্জয় দত্ত,** গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়, **ড° চন্দ্রমা গোস্বামী,** কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়
ভাষা সম্পাদনা (অসমীয়া)	ঃ **হৰেকৃষ্ণ ডেকা, ভাস্কৰ শর্মা,** কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়
গাঁথনিক সম্পাদনা	ঃ **হৰেকৃষ্ণ ডেকা, ভাস্কৰ শর্মা,** কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

প্রথম প্রকাশ ঃ মে', ২০১৮

This Self Learning Material (SLM) of the Krishna Kanta Handiqui State University is made available under a Creative Commons Attribution-Non Commercial-ShareAlike4.0 License (International): http.//creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0.

কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ৰ হৈ পঞ্জীয়কৰ দ্বাৰা মুদ্রিত আৰু প্রকাশিত।

এই শিক্ষণ সামগ্রী প্রস্তুতিৰ বাবে আর্থিক অনুদান আগবঢ়োৱা
দূৰ শিক্ষা ব্যুৰো, বিশ্ববিদ্যালয় অনুদান আয়োগৰ ওচৰত বিশ্ববিদ্যালয় কৃতজ্ঞ।

মুখ্য কার্যালয় ঃ পাটগাঁও, ৰাণী গেট, গুৱাহাটী-৭৮১ ০১৭
মহানগৰ কার্যালয় ঃ হাউচ্‌ফেড কমপ্লেক্স, দিচপুৰ, গুৱাহাটী-৭৮১ ০০৬; Web : www.kkhsou.in

খণ্ড পৰিচয় ঃ দ্বিতীয় খণ্ড

'অর্থবিজ্ঞানৰ বিশ্লেষণত সংখ্যাগত তত্ত্ব- ১ ৰ এইটো দ্বিতীয় তথা অন্তিম খণ্ড। খণ্ডটিত অধ্যায় ৭ ৰ পৰা অধ্যায় ১৫ লৈ মুঠতে নটা অধ্যায় আছে। সপ্তম অধ্যয়ত চৰমমান আৰু অবিচ্ছিন্নতা ধাৰণা সম্পৰ্কে আলোচনা কৰা হৈছে। অধ্যায়টিৰ জৰিয়তে চৰমমান আৰু অবিচ্ছিন্নতা সম্পৰ্কে প্ৰাথমিক ধাৰণা লাভ কৰিবলৈ সক্ষম হ'ব। পৰৱৰ্তী অধ্যায়টিত অৱকলন সম্পৰ্কে আলোচনা কৰা হৈছে। অর্থবিজ্ঞানত ব্যৱহৃত হোৱা গণিতৰ বিভিন্ন কৌশলৰ ভিতৰত অৱকলন অন্যতম। অধ্যায়টিৰ জৰিয়তে অৱকলনৰ প্ৰাথমিক ধাৰণা, তাৰ অর্থনৈতিক ব্যাখ্যা আৰু লগতে অৱকলজৰ প্ৰাথমিক সূত্ৰসমূহৰ বিষয়ে জ্ঞাত হ'ব।পৰৱৰ্তী অধ্যায়টিত আংশিক অৱকলজ আৰু পূৰ্ণ অৱকলজৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হৈছে। গতিকে, এই দুয়োটা অধ্যায়ে অৱকলনৰ প্ৰাথমিক ধাৰণা লাভ কৰাত সহায়ক হ'ব। দশম অধ্যায়টিত অর্থবিজ্ঞানৰ বিভিন্ন ক্ষেত্ৰ, বিশেষকৈ মুঠ আয়, গড় আয়, প্ৰান্তিক আয় আৰু স্থিতিস্থাপকতা আদি ক্ষেত্ৰত অৱকলজৰ প্ৰয়োগ সম্পৰ্কে আলোচনা আগবঢ়োৱা হৈছে। একাদশ অধ্যায়ত ফলনৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ ধাৰণাৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হৈছে। আমি আটায়ে জানোঁ যে, অর্থবিজ্ঞানত আমি প্ৰায়ে সৰ্বাধিকৰণ আৰু সৰ্বনিম্নকৰণৰ সমস্যাৰ সৈতে জড়িত হওঁ। যেনে ধৰক, প্ৰতিষ্ঠান এখনে প্ৰায়ে সৰ্বাধিক লাভ আহৰণ কৰিব বিচাৰে; যদিও আকৌ উৎপাদন ব্যয়টো সৰ্বনিম্ন কৰিব বিচাৰে। এনেকুৱা আৰু বহুধৰণৰ সমস্যা আমি আলোচনা কৰোঁ। একাদশ অধ্যায়ত আলোচনা কাৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ ধাৰণা কেইটি পৰৱৰ্তী অধ্যায় দুটিত ক্ৰমে সৰ্বাধিকৰণ আৰু সৰ্বনিম্নকৰণৰ কিছু অর্থবিজ্ঞানৰ সমস্যা সন্দৰ্ভত প্ৰয়োগ সম্পৰ্কে আলোচনা কৰা হৈছে। চতুৰ্দশ অধ্যায়টিত অনুকূলনৰ ধাৰণা আলোচনা কৰা হৈছে। আপুনি হয়তো ইতিমধ্যে জানি আহিছে যে, অনুকূলন হৈছে অৱকলনৰ এক বিপৰীত প্ৰক্ৰিয়া। এই অধ্যায়টিত আমি অনুকূলনৰ প্ৰাথমিক ধাৰণা আৰু অনুকুলৰ পদ্ধতি সম্পৰ্কে আলোচনা কৰিম। পাঠ্যক্ৰমৰ শেহৰ অধ্যায়টিত অনুকুলনৰ কিছু প্ৰাথমিক ধাৰণা অর্থবিজ্ঞানত সমস্যাত প্ৰয়োগ সম্পৰ্কে আলোচনা কৰা হৈছে।

সদৌশেষত, ইয়াকে ক'ব পাৰি যে এই পাঠ্যবিষয়টিয়ে গণিতৰ কিছু প্ৰাথমিক ধাৰণা লাভ কৰাৰ লগতে, ইয়াৰ ধাৰণাসমূহ অর্থবিজ্ঞানত প্ৰয়োগ কৰিবলৈ আপোনাক প্ৰাৰম্ভিক জ্ঞান প্ৰদান কৰিব। অর্থ বিজ্ঞানৰ পৰৱৰ্তী অধ্যয়নত এই ধাৰণাসমূহ আপোনাৰ অতি সহায়ক হ'ব।

এইপাঠ্যবিষয়টি অধ্যয়ন কৰোঁতে মূল পাঠত 'জানি থোৱা ভাল' বাকচবোৰৰ মূল পাঠৰ সৈতে জড়িত কিছু গুৰুত্বপূৰ্ণ তথ্যৰ সম্ভেদ আছে। প্ৰতিটো অধ্যায়ত থকা 'অনুশীলন'সমূহে অধ্যয়ন অধিক সক্ৰিয় আৰু ফলপ্ৰসূ হোৱাত সহায় কৰিব। আকৌ, 'অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ' যোগে আগবঢ়োৱা প্ৰশ্নাৱলীয়ে অধ্যয়নৰ অগ্ৰগতি সম্পৰ্কে স্ব-পৰীক্ষণৰ সুবিধা দিব। অধ্যয়নৰ লগে লগে উক্ত প্ৰশ্নাৱলীৰ উত্তৰসমূহ লিখি শেষত দিয়া 'অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান'ৰ সৈতে ৰিজাই চোৱাটো অধিক লাভদায়ক হ'ব। অধ্যায়বোৰৰ শেষত 'আৰ্হি প্ৰশ্ন' হিচাপে কেইটিমান প্ৰশ্নৰ আৰ্হিও তুলি দিয়া হৈছে।

বিষয় সূচী

পৃষ্ঠা নং

অধ্যায় ৭ঃ চৰমমান আৰু অবিচ্ছিন্নতা ১২৫ - ১৩৬

চৰমমান ঃ বিশ্লেষণাত্মকভাৱে চৰমমান প্ৰাপ্তি, বিভিন্ন বিধি ব্যৱহাৰ কৰি চৰমমান নিৰ্ণয় কৰাৰ উদাহৰণ, প্ৰতিস্থাপন পদ্ধতিৰ দ্বাৰা চৰমমান, এক বিশেষ চৰমমান, কিছুমান আন বিশেষ চৰমমান, এফলীয়া চৰমমান; অবিচ্ছিন্নতা ঃ মৌলিক সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ

অধ্যায় ৮ ঃ অৱকলন ১৩৭ - ১৪৮

ফলন এটাৰ অৱকলজৰ ধাৰণা; ফলনৰ অৱকলজৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা; অৱকলজৰ অৰ্থনৈতিক ব্যাখ্যা; অৱকলজৰ নিয়মঙ্গসূত্ৰ ঃ যোগ আৰু বিয়োগৰ সূত্ৰ, অৱকলজৰ গুণাত্মক সূত্ৰ, যৌগিক ফলনৰ অৱকলজ বা অৱকলজৰ চেইন সূত্ৰ; দ্বিতীয় অনুক্ৰমৰ অৱকলজ; বিভিন্ন প্ৰামাণিক ফলনৰ অৱকলজ; এটা চলকৰ অৱকলজৰ উদাহৰণ

অধ্যায় ৯ ঃ আংশিক অৱকলজ আৰু পূৰ্ণ অৱকলজ ১৪৯ - ১৬১

বহু চলক বিশিষ্ট ফলন; আংশিক অৱকলজ; পূৰ্ণ অৱকলজ

অধ্যায় ১০ ঃ অৱকলজৰ অৰ্থনৈতিক প্ৰয়োগ ১৬২ - ১৭৮

অৱকলজৰ অৰ্থনৈতিক প্ৰয়োগ ঃ চাহিদাৰ স্থিতিস্থাপকতা, AR, MR আৰু ed ৰ মাজৰ সম্বন্ধ নিৰ্ণয়, AC আৰু MC ৰ মাজৰ সম্বন্ধ নিৰ্ণয়, উপযোগিতা ফলন, নিৰপেক্ষ ৰেখা ফলন, সম-উৎপন্ন ফলন, MR, MP আৰু MPR অৰ মাজৰ সম্বন্ধ নিৰ্ণয়, ভোগ ফলন, সঞ্চয় ফলন, আমদানি ফলন, যোগানৰ স্থিতিস্থাপকতা; সাংখ্যিক উদাহৰণ

অধ্যায় ১১ ঃ ফলনৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ ১৭৯ - ১৯০

ফলনৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান ঃ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান উলিওৱাৰ পদ্ধতি

অধ্যায় ১২ ঃ অৰ্থবিজ্ঞানত সৰ্বাধিকৰণৰ প্ৰয়োগ ১৯১ - ২০৪

অৰ্থবিজ্ঞানত সৰ্বাধিকৰণৰ প্ৰয়োগ

অধ্যায় ১৩ ঃ অৰ্থবিজ্ঞানত সৰ্বনিম্নকৰণৰ প্ৰয়োগ ২০৫ - ২১৪

অৰ্থবিজ্ঞানত সৰ্বনিম্নকৰণৰ প্ৰয়োগ

অধ্যায় ১৪ ঃ অনুকলন আৰু অনুকলনৰ পদ্ধতি ২১৫ - ২৩০

সৰল ফলনৰ অনুকলন; নিশ্চিত অনুকূলনঃ ধাৰণা আৰু পৰিমাপ

অধ্যায় ১৫ ঃ অৰ্থনৈতিক সমস্যাত অনুকলন গণিতৰ প্ৰয়োগ ২৩১ - ২৫৫

প্ৰান্তিক ফলনৰ পৰা মুঠ ফলন নিৰ্ণয়; ভোক্তাৰ উদ্বৃত্তৰ পৰিমাপ; উৎপাদনকাৰীৰ উদ্বৃত্তৰ পৰিমাপ

অধ্যায় ৭ঃ চৰমমান আৰু অবিচ্ছিন্নতা (LIMIT AND CONTINUITY)

অধ্যায় গাঁথনি

৭.১ উদ্দেশ্য

৭.২ পৰিচয়

৭.৩ চৰমমান

- ৭.৩.১ বিশ্লেষণাত্মকভাৱে চৰমমান প্ৰাপ্তি
- ৭.৩.২ বিভিন্ন বিধি ব্যৱহাৰ কৰি চৰমমান নিৰ্ণয় কৰাৰ উদাহৰণ
- ৭.৩.৩ প্ৰতিস্থাপন পদ্ধতিৰ দ্বাৰা চৰমমান
- ৭.৩.৪ এক বিশেষ চৰমমান
- ৭.৩.৫ কিছুমান আন বিশেষ চৰমমান
- ৭.৩.৬ এফলীয়া চৰমমান

৭.৪ অবিচ্ছিন্নতা

- ৭.৪.১ মৌলিক সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ

৭.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৭.৬ অধিক জানিবলৈ

৭.৭ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

৭.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

৭.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- চৰমমানৰ ধাৰণাৰ সংজ্ঞা দিব পাৰিব
- চৰমমান মূল্যায়ন কৰিব পাৰিব
- ফলনৰ অবিচ্ছিন্নতাৰ ধাৰণা ব্যাখ্যা কৰিব পাৰিব
- কিছুমান জনা-শুনা ফলনৰ অবিচ্ছিন্নতা প্ৰতিপন্ন কৰিব পাৰিব।

৭.২ পৰিচয়

ইয়াৰ আগৰ অধ্যায়টিত আমি সংহতি তত্ব আৰু ফলন সম্পৰ্কে শিকিছো। এই অধ্যায়টিত চৰমমান, অবিচ্ছিন্নতা, অৱকলন আৰু অনুকলন সম্পৰ্কে আলোচনা কৰিম। গণিতত এইবোৰ অতি দৰ্কাৰী আৰু মৌলিক প্ৰকৃতিৰ।

চৰমমানৰ ধাৰণাটো এক বিমূৰ্ত ধাৰণা। আমি জনা-শুনা ফলনৰ বিভিন্ন বিন্দুত চৰমমান

উলিয়াবৰ কাৰণে বিভিন্ন বীজগণিতীয় নিয়ম বা বিধি সম্পৰ্কে শিকিম। লগতে আমি বাওঁহতীয়া আৰু সোঁহতীয়া চৰমমানৰ বিষয়ে শিকিম। আমি ফলনৰ অবিচ্ছিন্নতা আৰু অৱকলন সম্পৰ্কেও আলোচনা কৰিম। শেষত আমি অনুকুলনৰ ধাৰণা সম্পৰ্কে আলোচনা কৰিম।

অনুকুলনৰ প্ৰতিস্থাপন পদ্ধতি আৰু খণ্ডশঃ অনুকুলন পদ্ধতি নামৰ এই প্ৰভাৱশালী পদ্ধতি দুটাৰ সম্পৰ্কেও আমি আলোচনা কৰিম।

৭.৩ চৰমমান (LIMITS)

ইতিমধ্যে আমি বাস্তৱ ফলন আৰু বাস্তৱ চলক সম্পৰ্কে অৱগত হৈছোঁ। উল্লেখ কৰা হৈছেই যে চৰমমানৰ ধাৰণাটো এক বিমূর্ত ধাৰণা। x = 3ৰ বাহিৰে আন সকলোবিন্দুত সংজ্ঞাবদ্ধ $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ ফলনটো ধৰা হওঁক। তলৰ তালিকাখনৰ প্ৰথম স্তম্ভত 3ৰ ওচৰৰ বা কাষৰ কিছুমান xৰ মান লিখা হৈছে আৰু দ্বিতীয় স্তম্ভত *f(x)*ৰ অনুৰূপ মান লিখা হৈছে।

চলক xৰ মান	$f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ ৰ অনুৰূপ মান
2.97	5.97
2.98	5.98
2.99	5.99
3.01	6.01
3.02	6.02
3.03	6.03

আমি তালিকাখনত লক্ষ্য কৰিছো যে যদি xএ 3ৰ নিচেই ওচৰ চাপে $\frac{x^2-9}{x-3}$ য়েও 6ৰ নিচেই ওচৰ চাপে। এইটোও সত্য যে 3ৰ ওচৰৰ xৰ মানবিলাকৰ কাৰণে $\frac{x^2-9}{x-3}$ ৰ মানবিলাকো 6ৰ ওচৰৰ হয়। এনে ক্ষেত্ৰত আমি কওঁ যে xএ ক্ৰমাৎ 3ৰ ওচৰ চাপিলে $\frac{x^2-9}{x-3}$ ফলনটোৰ মান 6ৰ ওচৰ চাপে নাইবা সমাৰ্থক ভাৱে আমি কওঁ ঃ x = 3 বিন্দুটোত $\frac{x^2-9}{x-3}$ ফলনটোৰ চৰমমান 6 আৰু সংকেত ব্যৱহাৰ কৰি আমি লিখোঁ -

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

সাধাৰণতে $\lim_{x\to a} f(x)=1$ বুলিলে আমি ইয়াকে বুজো যে যেতিয়া x-এ ক্ৰমাৎ aৰ ওচৰ চাপে তেতিয়া f(x) এ চৰমমান 1ৰ ওচৰ চাপে। এই কথাখিনি বেছি স্পষ্টভাৱে এইদৰে ক'ব পাৰি ঃ

$|x-a|$ অক অতি ক্ষুদ্ৰ কৰি $|f(x)-l|$ অক ইচ্ছানুযায়ী ক্ষুদ্ৰাতিক্ষুদ্ৰ কৰিব পাৰি।

> aত fৰ চৰমমান উলিয়াবলৈ a ত ফলনৰ মানৰ অর্থাৎ f (a)ৰ প্ৰয়োজন নহয় নাইবা এই মানৰ কোনো গুৰুত্ব নাই। মাত্ৰ aৰ ওচৰৰ মানবিলাকত fৰ মানৰহে প্ৰয়োজন, aত পোৱা মানৰ নহয়।

তলৰ গণনাৰ ফল দুটা চৰমমানৰ সংজ্ঞাৰ সহজ পৰিণতি।

(1) **ধ্ৰুৱক বিধি** (Constant Rule) ঃ $\lim_{x\to c} c = c$ অর্থাৎ x এ ক্ৰমাৎ aৰ ওচৰ চাপিলে f (x) = c ধ্ৰুৱক ফলনটোৰ চৰমমান c ৰ মানৰ সমান হ'ব।

(2) **একক বিধি** (Identity Rule) ঃ $\lim_{x\to a} x = a$ অর্থাৎ xএ ক্ৰমাৎ aৰ ওচৰ চাপিলে f (x) = x এই একক ফলনটোৰ চৰমমান a ৰ মানৰ সমান হ'ব।

চৰমমানৰ অবিকল্পতা (Uniqueness of Limit) ঃ

> যদি $\lim_{x\to a} f(x)$ স্থিত হয় তেন্তে ই অদ্বিতীয় হ'ব। দুটা ভিন্ন সংখ্যা l_1 আৰু l_2 থাকিব নোৱাৰে যাতে যেতিয়া x এ aৰ ওচৰ চাপে তেতিয়া ফলন f(x) এ l_1 আৰু l_2 উভয়ৰে ওচৰ চাপে।



জনা উচিত

১) $x\to a$ (x এ a লৈ গতি কৰে বুলি পঢ়া হয়) চিহ্নটোৱে বুজায় যে, x এ সোঁফাল বা বাওঁফালৰ পৰা কিছুমান মান একাদিক্ৰমে লাভ কৰে আৰু ক্ৰমান্বয়ে a ৰ অতি ওচৰলৈ গতি কৰে, অর্থাৎ. $|x-a|$ ৰ মান প্ৰায় শূন্য হয়।

২) f(a) আৰু $\lim_{x\to a} f(x)$ ৰ মাজৰ পার্থক্যঃ

(i) f(a) ৰ মান f(x) মানৰ সমান হয়, যেতিয়া x ৰ মান সঠিকভাবে a ৰ সমান হয়। f(a) ৰ মান আমি f(x) ফলনটোৰ সংজ্ঞাৰ পৰাই পাব পাৰোঁ, যিক্ষেত্ৰত x = a হয়, বা, f(x) ত x = a বহুৱাই পাব পাৰোঁ, যদিহে f(x) ফলনটো বর্তি থাকে।

(ii) যেতিয়া f(a) আৰু $\lim_{x\to a} f(x)$ দুয়োটা ফলনেই বর্তি থাকে, দুয়োটা সমান হ'বও পাৰে বা নহ'বও পাৰে ।

(iii) f(a) আৰু $\lim_{x\to a} f(x)$ দুয়োটাই বর্তি থাকিব পাৰে, বা সিহঁত দুটাৰ এটা বর্তি থাকিব পাৰে আৰু আনটো বর্তি নাথাকিবও পাৰে।

৭.৩.১ বিশ্লেষণাত্মকভাৱে চৰমমান প্ৰাপ্তি (Finding Limit by Analytically)

বীজগণিতীয় কৌশল অৱলম্বন কৰি চৰমমান নির্ণয় কৰাটো সম্ভৱ। যোগ, বিয়োগ, ধ্ৰুৱক সংখ্যাৰে পূৰণ, হৰণ ইত্যাদি প্ৰক্ৰিয়াবোৰৰ লগত চৰমমানে ভাল আচৰণ কৰে। চৰমমানবোৰৰ বিশ্লেষণ নিয়ন্ত্ৰণকাৰী আটাইতকৈ মৌলিক উপপাদ্যটো

হ'ল মুখ্য চৰমমান উপপাদ্য (Principal Limit Theorem)।

মুখ্য চৰমমান উপপাদ্য ঃ ধৰা হ'ল a আৰু b বাস্তৱ সংখ্যা, n>0 আৰু ধৰা হ'ল f আৰু g দুটা ফলন যি দুটাৰ aত চৰমমান ক্ৰমে 1 আৰু m অৰ্থাৎ $\lim_{x\to a} f(x) = 1$ আৰু $\lim_{x\to a} g(x) = m$ তেতিয়াহ'লে -

1. **যোগফল বিধি** (Sum Rule)

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = l + m$$

2. **অন্তৰ বিধি** (Difference Rule)

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = l - m$$

3. **পূৰণফল বিধি** (Product Rule)

$$\lim_{x\to a}[f(x) \,.\, g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = l \,.\, m$$

4. **ভাগফল বিধি** (Quotient Rule)

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{1}{m},$$ যদিহে

$$\lim_{x\to a} g(x) = m \neq 0$$

5. **সহগ বিধি** (Co-efficient Rule)

$$\lim_{x\to a} k\ f(x) = k \lim_{x\to a} f(x) = kl$$

6. **ঘাত বিধি** (Power Rule)

$$\lim_{x\to a} k\,[f(x)]^x = [\lim_{x\to a} f(x)]^x = l^x$$

আমি ওপৰৰ বিধিবিলাক ভাষাত বৰ্ণনা কৰিব পাৰো। উদাহৰণ স্বৰূপে, যোগফল বিধিক এনেদৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি ঃ "যোগফলৰ চৰমমান, চৰমমান বিলাকৰ যোগফলৰ সমান।"

৭.৩.২ বিভিন্ন বিধি ব্যৱহাৰ কৰি চৰমমান নিৰ্ণয় কৰাৰ উদাহৰণ
(Examples of Evaluation of Limits using Various Rules)

উদাহৰণ 7.1 ঃ . মান নিৰ্ণয় কৰক ঃ $\lim_{x\to a} x^2$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to a} x^2 = (\lim_{x\to a} x)^2$ (ঘাত বিধিৰ সহায়ত)

$= 2^2$ (একক বিধিৰ সহায়ত)

$= 4$

উদাহৰণ 7.2 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক ঃ $\lim_{x\to a}(2x^3 + 3x^2 + 4x + 5)$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to a}(2x^3 + 3x^2 + 4x + 5)$

$= 2\lim_{x\to a} x^3 + 3\lim_{x\to a} x^2 + 4\lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} 5$

(যোগফল আৰু সহগ বিধিৰ সহায়ত)

$$= 2(\lim_{x\to a} x)^3 + 3(\lim_{x\to a} x)^2 + 4\lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} 5$$

(ঘাত বিধিৰ সহায়ত)

$= 2a^3 + 3a^2 + 4a + 5$ (একক বিধি আৰু ধ্ৰুৱক বিধিৰ সহায়ত)

মন্তব্য ঃ ওপৰৰ উদাহৰণ কেইটাৰ পৰা -

এই কথা স্পষ্ট যে কোনো x বিন্দুত বহুপদ ফলনৰ চৰমমান ফলনটোত চলক x ৰ সেই মান বহুৰাই পাব পাৰি। কিন্তু বহুপদ ফলন নহ'লে উক্ত কথা সদায় সঁচা নহ'ব পাৰে। তলৰ উদাহৰণ দুটাই সেই কথাকে প্ৰদৰ্শন কৰে।

উদাহৰণ 7.3 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক ঃ $\lim_{2\to 1} \frac{2x-1}{x^3-1}$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{x^3-1} = \frac{\lim_{x\to 1}(2x-1)}{\lim_{x\to 1}(x^3-1)}$ (ভাগফল বিধিৰ দ্বাৰা)

$= \frac{\lim_{x\to 1} 2x - \lim_{x\to 1} 1}{\lim_{x\to 1} x^3 - \lim_{x\to 1} 1}$ (অন্তৰ বিধিৰ দ্বাৰা)

$= \frac{\lim_{x\to 1} x - \lim_{x\to 1} 1}{(\lim_{x\to 1})^3 - \lim_{x\to 1} 1}$ (সহগ বিধি আৰু ঘাত বিধিৰ দ্বাৰা)

$= \frac{2(1)-1}{(1)^3-1}$ (ধ্ৰুৱক বিধি আৰু একে বিধিৰ দ্বাৰা)

$= -1$

উদাহৰণ 7.4 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক ঃ $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2}$

সমাধান ঃ যিহেতু x = 2 বিন্দুত হৰ হিচাপে থকা ফলন $x^2 - 3x + 2$ ৰ চৰমমান 0, সেই কাৰণে ইয়াত ভাগফল বিধি প্ৰয়োগ কৰিব নোৱাৰি। গতিকে আমি আন এক পদ্ধতিত ভৰসা কৰিব লাগিব।

লৱ আৰু বৰ উভয়কে উৎপাদকত বিশ্লেষণ কৰি আমি দেখো যে -

$$\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-1)(x-2}$$

যিহেতু $x \neq 2$ সাধাৰণ উৎপাদক $(x-2)$ বাদ দিব পাৰি।

এই হিচাপত, $\frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{x+4}{x-1}$

গতিকে $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x+2)}{(x-1)}$

$$= \frac{\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 2}{\lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 1}$$

$$= \frac{2+2}{2-1} = 4$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ শুদ্ধ নে অশুদ্ধ লিখা -

(ক) $\lim_{x\to 1}(x-1)^2 + 5 = 5$ (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

(খ) $\lim_{x\to 2}(x-2)(x+4) = 0$ (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

(গ) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = 0$ (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

(ঘ) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x+1} = 2$ (শুদ্ধ/অশুদ্ধ)

৭.৩.৩ প্রতিস্থাপন পদ্ধতিৰ দ্বাৰা চৰমমান (Limits by the Method of Substitution)

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x+1}$ উদাহৰণটো বিবেচনা কৰক। আমি দেখো যে -

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

প্রতিস্থাপনৰ সহায়ত সেই একে চৰমমান নির্ণয় কৰিব পাৰি। যদি আমি $\frac{x^2-1}{x+1}$ ৰাশিটোত y = x - 1 অর্থাৎ x = y + 1 প্রতিস্থাপন কৰো, তেন্তে

$$\frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(y+1)^2-1}{y} = y+2$$

আকৌ লক্ষ্য কৰক যে x এ 1ৰ ওচৰ চাপিলে y এ 0 ৰ ওচৰ চাপে। গতিকে,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{y\to 0}(y+2) = 2$$

সাধাৰণতে, $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{h\to 0} f(a+h)$

সমার্থক ভাৱে $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{y\to 0}$ সেয়েহে f . (y) + h . y = x + h

৭.৩.৪ এক বিশেষ চৰমমান (A Special Limit)

আমি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা nৰ ক্ষেত্ৰত $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$ নিৰ্ণয় কৰোঁ আহক।

প্ৰতিস্থাপন পদ্ধতিৰ সহায়ত আমি দেখোঁ যে -

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{(a+h)^n-a^n}{a+h-a}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}h+\binom{n}{1}a^{n-2}h^2+.....+h^n-a^n]$$

(দ্বিপদ উপপাদ্যৰ সহায়ত/by Binomial Theorem)

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[\binom{n}{1}a^{n-1}h+\binom{n}{1}a^{n-2}h^2+.....+h^{n-1}]$$

$$=(\tfrac{n}{1})a^{n-1}=n\,a^{n-1}$$

এতেকে, $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$, n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

যেতিয়া n পৰিমেয় সংখ্যা হয়, তেতিয়াও ওপৰৰ সূত্ৰটো সঁচা হৈ থাকিব যদিহে a ধনাত্মক, সংখ্যা হয়।

উদাহৰণ 7.5 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক ঃ $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}$

সমাধান ঃ $$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\left[\frac{x^3-27}{x-3}\div\frac{x^2-9}{x-3}\right]$$

$$=\lim_{x\to 3}\left[\frac{x^3-27}{x-3}\right]\div\lim_{x\to 3}\left[\frac{x-9}{x-3}\right]$$

$$=\lim_{x\to 3}\left[\frac{x^3-3^3}{x-3}\right]\div\lim_{x\to 3}\left[\frac{x^2-3^2}{x-3}\right]$$

$$=3(3)^2\div 2(3)=27\div 6=\frac{9}{2}$$

উদাহৰণ 7.6 ঃ যদি $\lim_{x\to 2}\frac{x^n-2^n}{x-2}=12$ আৰু যদি n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয় তেন্তে n নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি পাওঁ, $\lim_{x\to 2}\frac{x^n-2^n}{x-2}=n\,2^{n-1}$

প্ৰদত্ত প্ৰশ্নমতে, $n\,2^{n-1} = 12 = 3.2^2$

গতিকে, $n = 3$

৭.৩.৫ কিছুমান আন বিশেষ চৰমমান (Some other Special Limits)

তলত দিয়া ত্ৰিকোণমিতীয় আৰু সূচকীয় ফলনৰ চৰমমানৰ বিধিবিলাক অতিকৈ ব্যৱহাৰ্য।

উদাহৰণ 7.7 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক ঃ $\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x} - 1}{x}$

সমাধান ঃ আমি পাওঁ - $\lim_{x \to 0} \frac{e^{4x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{4x} - 1}{4x} 4$

$= 4 \lim_{x \to 0} \frac{e^{4x} - 1}{y}$ [য'তy = 4x আৰু $x \to 0 \Rightarrow y \to 0$]

= 4 x 1 = 4

৭.৩.৬ এফলীয়া চৰমমান (One Sided Limits)

এই খণ্ডত আমি এফলীয়া চৰমমান সম্পৰ্কে আলোচনা কৰিম। সাংকেতিক $\lim_{x \to a+} f(x) = 1$ য়ে ইয়াকে বুজায় যে যেতিয়া x এ a ৰ ওচৰচাপে আৰু a তকৈ ডাঙৰ হৈ থাকে, তেতিয়া f (x) এ 1 ৰ ওচৰচাপে। সেইদৰে $\lim_{x \to a-} f(x) = 1$ ৰ অৰ্থ হল এই যে যেতিয়া x এ a ৰ ওচৰচাপে আৰু a তকৈ সৰু হৈ থাকে, তেতিয়া f(x) এ 1 ৰ ওচৰ চাপে।

$\lim_{x \to a+} f(x) = 1$ অক a ত f ৰ সোঁ চৰমমান (right limit) বা সোঁহতীয়া চৰমমান (right hand limit) আৰু $\lim_{x \to a-} f(x) = 1$ অক a ত f ৰ বাওঁ চৰমমান (left limit) বা বাওঁহতীয়া চৰমমান (left hand limit) বোলে । এই দুয়োটাৰ উভয়কে a ত f ৰ এফলীয়া চৰমমান বোলে ।

উদাহৰণ 7.8 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক $\lim_{x \to a+} \frac{x}{|x|}$ আৰু $\lim_{x \to a-} \frac{x}{|x|}$

সমাধান ঃ যেতিয়া x ৰ মান ধনাত্মক হয়, তেতিয়া $\frac{x}{|x|} = \frac{x}{x} = 1$

গতিকে, আমি পাওঁ - $\lim_{x \to a+} \frac{x}{|x|} = 1$

আনহাতে যেতিয়া x ৰ মান ঋনাত্মক হয়, তেতিয়া $\frac{x}{|x|}=\frac{x}{-x}=-1$

সেয়ে, $\lim_{x\to a}\frac{x}{|x|}=-1$

যদি $\lim_{x\to a+} f(x)\neq\lim_{x\to a-} f(x)$ তেন্তে $\lim_{x\to a} f(x)$ স্থিত নহয়।

যদি $\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)$ তেন্তে $\lim_{x\to a} f(x)$ স্থিত হ'ব ।

আৰু $\lim_{x\to a} f(x)=1$

উদাহৰণ 7.9 ঃ $\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$ স্থিত হয় নে নহয় নির্ণয় কৰক ।

সমাধান ঃ উদাহৰণ -11 ৰ সমাধানৰ নিচিনাকৈ আমি পাওঁ -

$\lim_{x\to 0+}\frac{x}{|x|}=1$ আৰু $\lim_{x\to 0-}\frac{x}{|x|}=-1$

যিহেতু সোঁ চৰমমান আৰু বাওঁ চৰমমান সমান নহয়, গতিকে $\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}$ স্থিত নহয়।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ২ঃ শুদ্ধ নে অশুদ্ধ লিখক ঃ

(ক) যদি f এটা বাস্তৱ ফলন যাতে x ৰ সকলো মানৰ বাবে f(x) = f(-x), তেন্তে, $\lim_{x\to a+} f(x)=\lim_{x\to a-} f(x)$ (শুদ্ধ / অশুদ্ধ)

(খ) $\lim_{x\to 1-}[x]=1$ (শুদ্ধ / অশুদ্ধ)

(গ) $\lim_{x\to 1+}[x]=1$ (শুদ্ধ / অশুদ্ধ)

প্রশ্ন নং ৩ঃ তলৰ চৰমমান বিলাক নির্ণয় কৰক -

(ক) $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x+2}$ (খ) $\lim_{x\to 3}\frac{e^x-e^3}{x-3}$

(গ) $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^6-1}{(1+x)^2-1}$

৭.৪ অবিচ্ছিন্নতা (CONTINUTY)

আমি এই খণ্ডত অবিচ্ছিন্নতাৰ ধাৰণা সম্পর্কে শিকিম। আমি ইয়াকো দেখুৱাম যে বৃহৎ সংখ্যক জনা শুনা ফলন অবিচ্ছিন্ন হয়।

৭.৪.১ মৌলিক সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ (Basic Definition and Examples)

ধৰা হ'ল f এটা বাস্তৱ ফলন আৰু f ৰ আদি ক্ষেত্রত a আছে । যদি a ত f ৰ চৰমমান a ত f ৰ মানৰ সমান হয়, তেন্তে f অক *a* ত অবিচ্ছিন্ন বুলি কোৱা হয়।

এতেকে a ত f অবিচ্ছিন্ন হ'বলৈ তলৰ চর্ত তিনিটা সিদ্ধ হ'ব লাগিব।

(a) f (a) সংজ্ঞাবদ্ধ হ'ব লাগিব ।

(b) $\lim_{x\to a} f(x)$ স্থিত হ'ব লাগিব ।

(c) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ হ'ব লাগিব ।

উদাহৰণ 7.10 ঃ দেখুৱাওক যে ধ্রুৱকফলন সকলো বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন ।

সমাধান ঃ আমি ধ্রুৱকফলন f (x) = c আৰু এটা স্বেচ্ছ বিন্দু a বিবেচনা কৰোহ'ক।

তেতিয়াহ'লে f (a) = c আৰু $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c$

সেয়ে $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ গতিকে a ত f অবিচ্ছিন্ন ।

উদাহৰণ 7.11 ঃ দেখুৱাওক যে একক ফলন সকলো বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন ।

সমাধান ঃ একক ফলন f (x) = x আৰু এটা স্বেচ্ছ বিন্দু a বিবেচনা কৰক ।

তেনেহ'লে আমি পাওঁ ঃ f (a) = a আৰু $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} x = a$

গতিকে $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ আৰু এইটোৱে প্রতিপন্ন কৰে যে a বিন্দুত f অবিচ্ছিন্ন।

উদাহৰণ 7.12 ঃ প্রমান কৰক যে বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যাৰ ফলন [x], 0 ত অবিচ্ছিন্ন নহয়।

সমাধান ঃ ধৰাহ'ল f (x) = [x]

এতিয়া $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to o+} [x] = o$

আৰু $\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to o-} [x] = -1$

গতিকে x = 0 ত f ৰ সোঁহতীয়া আৰু বাওঁহতীয়া তৰমমান সমান নহয়। এই কথাই প্রতিপন্ন কৰে যে $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to o} [x]$ স্থিত নহয়। সেইকাৰণে, যদিও f (0) = [0] =0 তথাপি x = 0 ত f অবিচ্ছিন্ন নহয়।

তলৰ তালিকাখনত আৰু কিছুমান সিদ্ধান্ত তালিকা ভুক্ত কৰা হৈছে।

(a) x^2 ফলনটো 2 ত অবিচ্ছিন্ন হয়।

(b) $\frac{x-4}{x-1}$ ফলনটো 2 ত অবিচ্ছিন্ন হয় ।

(c) e^x ফলনটো 0 ত অবিচ্ছিন্ন হয়।

(d) $\frac{x}{|x|}$ ফলনটো 0 ত অবিচ্ছিন্ন নহয়।

সংজ্ঞা ঃ এটা বাস্তৱ ফলনক কোনো মুক্ত নাইবা বন্ধ অন্তৰালত অবিচ্ছিন্ন বুলি কোৱা হয় যদি ই অন্তৰালটোৰ প্ৰত্যেক বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হয়।

মন্তব্য ঃ যেতিয়া এটা বন্ধ অন্তৰাল [a,b] ত কোনো এক ফলন f বিবেচনা কৰা হয়, তেতিয়া f ক মূৰ বিন্দু a ত অবিচ্ছিন্ন বুলি কোৱা হয় যদি $\lim_{x \to a+} f(x) = f(a)$, সেইদৰে f ক মূৰ বিন্দু b ত অবিচ্ছিন্ন বুলি কোৱা হয় যদি $\lim_{s \to b-} f(x) = f(b)$



৭.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- এই অধ্যায়ত আমি ফলনৰ চৰমমানৰ ধাৰণাৰ লগতে বিভিন্ন বিন্দুত জনাশুনা ফলন বিলাকৰ চৰমমান উলিয়াবলৈ ব্যৱহৃত বিভিন্ন বীজগণিতীয় নিয়ম সম্পৰ্কে শিকিলোঁ।
- আমি ফলনৰ অবিচ্ছিন্নতা সম্পৰ্কে শিকিলোঁ । সংক্ষেপতে আমি ক'ব পাৰো যে যদি এটা ফলনৰ কোনো বিন্দুত চৰমমান থাকে আৰু এইমান ফলনটোৰ সেই বিন্দুত হোৱা মানৰ সমান হয়, তেন্তে ফলনটো সেই বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হ'ব ।



৭.৬ অধিক জানিবলৈ

১) Agarwal, D.K. (2012). *Business Mathematics*, New Delhi: Vrindra Publication (p) Ltd.

২) Baruah, S. (2011). *Basic Mathematics and Its Application in Economics*, New Delhi: Trinity Press Pvt. Ltd.

৩) Bose, D. (2004). *Mathematical Economics*; New Delhi: Himalaya Publishing House.

৪) Chiang, A.C. & (2010). *Fundamental Methods of Economics Analysis*, MC Graw Hill Education India.

৫) Kandoi, Balwant (2011). *Mathematics for Business and Economics with Application*; New Delhi: Himalaya Publishing House.



৭.৭ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (ক) শুদ্ধ (খ) শুদ্ধ (গ) অশুদ্ধ (ঘ) শুদ্ধ

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (ক) শুদ্ধ (খ) অশুদ্ধ (গ) শুদ্ধ

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (ক) 0 (খ) 3 (গ) e^3



৭.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন নং ১ঃ তলৰ চৰমমান বিলাক নিৰ্ণয় কৰক ঃ

a) $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 4x + 3}$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1 + x} - 1}{x}$

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin 10x}{\sin 11x}$

d) $\lim_{x \to k} \frac{x^{10} - k^{10}}{x^5 - k^5}$

প্ৰশ্ন নং ২ঃ ধৰা হ'ল তলত দিয়া ধৰণে ফলন f ৰ সংজ্ঞাকৃত কৰা হৈছেঃ $f(x) = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x > 0 \end{cases}$

বাওঁহতীয়া আৰু সোঁহতীয়া চৰমমান উলিয়াই প্ৰমাণ কৰক যে $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ যদি f এটা অযুগ্ম ফলন (অৰ্থাৎ f(-x) = - f (x)) আৰু $\lim_{x \to 0} f(x)$ স্থিত হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰক যে এই চৰমমান শূণ্যৰ সমান ।

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ প্ৰশ্ন-2 ত উল্লেখ কৰা ফলনটো x = 0 ত অবিচ্ছিন্ন হয় নে নহয় নিৰ্ধাৰণ কৰক ।

*** ***** ***

অধ্যায় ৮ ঃ অৱকলন (DIFFERENTIATION)

অধ্যায় গাঁথনি

৮.১ উদ্দেশ্য

৮.২ পৰিচয়

৮.৩ ফলন এটাৰ অৱকলজৰ ধাৰণা

৮.৪ ফলনৰ অৱকলজৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা

৮.৫ অৱকলজৰ অর্থনৈতিক ব্যাখ্যা

৮.৬ অৱকলজৰ নিয়ম/সূত্র

৮.৬.১ যোগ আৰু বিয়োগৰ সূত্র

৮.৬.২ অৱকলজৰ গুণাত্মক সূত্র

৮.৬.৩ যৌগিক ফলনৰ অৱকলজ বা অৱকলজৰ চেইন সূত্র

৮.৭ দ্বিতীয় অনুক্রমৰ অৱকলজ

৮.৮ বিভিন্ন প্রামাণিক ফলনৰ অৱকলজ

৮.৯ এটা চলকৰ অৱকলজৰ উদাহৰণ

৮.১০ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৮.১১ অধিক জানিবলৈ

৮.১২ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৮.১৩ আৰ্হি প্রশ্ন

৮.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- $f'(x)$ বা $\frac{dy}{dx}$ অৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা বুজি পাব
- অৱকলজৰ বিভিন্ন পদ্ধতি সম্পর্কে অৱগত হ'ব

৮.২ পৰিচয়

এই অধ্যায়াটিত অৱকলকজৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হৈছে। অৱকলজৰ বিভিন্ন পদ্ধতিৰ বিষয়ে অধ্যায়টিত আলোচনা কৰা হৈছে।

৮.৩ ফলন এটাৰ অৱকলজৰ ধাৰণা (CONCEPT OF DERIVATIVE OF A FUNCTION)

কিছুমান পৰিলক্ষণত পৰিৱৰ্তনশীল ৰাশি আৰু সিহঁতৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰ (বৃদ্ধি বা হ্ৰাস) জড়িত হৈ থাকে। স্বতন্ত্ৰ চলক সাপেক্ষে পৰতন্ত্ৰ চলকৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰ সম্বন্ধে অৱকলন গণিতত আলোচনা কৰা হয়। ধৰা হ'ল f এটা বাস্তৱ মান বিশিষ্ট ফলন আৰু ইয়াৰ আদিক্ষেত্ৰত a এটা বিন্দু। a বিন্দুত f অৰ অৱকলজ (derivative) হ'ল—

$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$, যদিহে সীমাস্থিত হয় আৰু ইয়াক $f'(a)$ ৰে বুজোৱা হয়।

যদি $y = f(x)$ এটা x অৰ ফলন হয়, x সাপেক্ষে y ৰ অৱকলজক $\frac{dy}{dx}$ বা y_1 এ ৰে বুজোৱা হয়।

যদি x আৰু y একেলগে বাঢ়ে বা টুটে, অৱকলজ $\frac{dy}{dx}$ ধনাত্মক। যদি x টুটিলে y বাঢ়ে বা x বাঢ়িলে y টুটে, তেনেহ'লে $\frac{dy}{dx}$ ঋণাত্মক।

মন্তব্য ঃ x অৰ এটা ফলনৰ অৱকলজক x অৰ অৱকল সহগ (differential coefficient) বুলিও কোৱা হয়। অৱকল সহগ উলিওৱা পদ্ধতিক অৱকলন (differentiation) বুলিও কোৱা হয়।

উদাহৰণ 8.1 : $x = 2$ ত $f(x) = 3x$ ফলনৰ অৱকলজ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$$\therefore f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(2+h)-3(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6+3h-6}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 3$$

$$= 3$$

$\therefore$ $f(x) = 3x$ ফলনৰ $x = 2$ বিন্দুত অৱকলজ 3.

উদাহৰণ 8.2 : যদি $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$, সংজ্ঞাৰ সহায়ত দেখুৱাওক যে $f'(0) + 3f'(-1) = 0$.

সমাধান ঃ দিয়া আছে $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$

এতিয়া

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(o+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3h^2 + 3h - 5) - (0 + 0 - 5)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3h+3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (3h + 3) \qquad [\because h \to 0, \therefore h \neq 0]$$

$$= 3$$

আকৌ $f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{2(-1+h)^2 + 3(-1+h) - 5\} - \{2(-1)^2 + 3(-1) - 5\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 - 4h + 2h^2 - 3 + 3h - 5 - (2 - 3 - 5)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 - h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2h-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2h - 1) = -1$$

$\therefore$ f′(0) + 3f′(-1) = 0

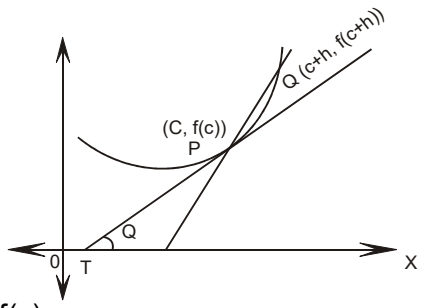
৮.৪ অৱকলজৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা (GEOMETRICAL REPRESENTATION OF DERIVATIVE)

ধৰা হ'ল y = f(x) এটা ফলন। ধৰা হ'ল y = f(x) অৰ লেখত P (c, f(c)) আৰু Q (c+h, f(c+h)) দুটা ওচৰা ওচৰি বিন্দু।

PQ জ্যাৰ প্ৰৱণতা $= \frac{f(c+h) - f(c)}{(c+h) - c}$

$$= \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

যেতিয়া বক্রডালত $Q \to P$, PQ জ্যাডাল P বিন্দুত PT স্পর্শক হয়। গতিকে যেতিয়া $Q \to P$ অর্থাৎ যেতিয়া $h \to 0$, PQ জ্যাডালৰ প্রৱণতা P বিন্দুত স্পর্শকৰ প্রৱণতা হয়।



$\therefore$ P বিন্দুত স্পর্শকৰ প্রৱণতা = $\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$

$= f'(c)$ (সংজ্ঞামতে)

টোকা ঃ যদি স্পর্শক x-অক্ষৰ সমান্তৰাল হয়, $f'(c)=0$.

৮.৫ অৱকলজৰ অর্থনৈতিক ব্যাখ্যা (ECONOMIC INTERPRETATION OF DERIVATIVE)

সাধাৰণতে অৱকলজে প্রান্তিক ফলনক বুজায়। এক সাধাৰণ ব্যয় ফলন $y = f(x)$ ৰ ক্ষেত্রত য'ত y এ উৎপাদনৰ মুঠ ব্যয় আৰু x এ মুঠ উৎপন্নৰ পৰিমাণ বুজায়, অতি সামান্য পৰিমাণৰ উৎপন্ন (Δx) বৃদ্ধিৰ বাবে ব্যয়ত অতি সামান্য পৰিমাণৰ বৃদ্ধি (Δx) হয়। x বিন্দুত এটা ব্যয় ফলনৰ অৱকলজ $\lim_{x-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ হ'ল x পৰিমাণৰ উৎপাদনৰ প্রান্তিক ব্যয়।

৮.৬ অৱকলজৰ নিয়ম /সূত্র (RULES OF DIFFERENTIATION)

এই খণ্ডত আমি অৱকলজৰ বিভিন্ন নিয়মৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

৮.৬.১ যোগ আৰু বিয়োগৰ সূত্র (The Rules for Sums and Differentiation)

উপপাদ্য ১ ঃ যদি f_1 আৰু f_2 ফলন দুটা I ব্যৱধানৰ অৱকলনযোগ্য হয়, আৰু সিঁহতৰ যোগফল যদি f হয়, য'ত $f = f_1 + f_2$, তেন্তে f অৱকলনযোগ্য । যথা-

$$\frac{d}{dx} f = \frac{d}{dx} f_1 + \frac{d}{dx} f_2$$

উপপাদ্য ২ ঃ যদি f_1 আৰু f_2 ফলন দুটা I ব্যৱধানৰ দুটা অৱকলনযোগ্য ফলন হয়, আৰু সিঁহতৰ মাজত পার্থক্য যদি f হয়, য'ত $f = f_1 - f_2$, তেন্তে f অৱকলনযোগ্য । যথা-

$$\frac{d}{dx} f = \frac{d}{dx} f_1 - \frac{d}{dx} f_2$$

উদাহৰণ 8.3 ঃ তলত দিয়াবোৰৰ x ৰ সাপেক্ষে অৱকলন কৰক-

a) $x(1+x)^2$ b) $b\log_e x+x^3+\sqrt{x}$

c) $4\log_{10} x$

সমাধান ঃ

a) $\frac{d}{dx}\left\{x(1+x)^2\right\}=\frac{d}{dx}\left\{x\left(1+2x+x^2\right)\right\}$

$= \frac{d}{dx}\left(x+2x^2+x^3\right)$

$= \frac{d}{dx}(x)+2\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+\frac{d}{dx}\left(x^3\right)$

$= 1 + 2(2x) + 3x^2$

$= 1 + 4x + 3x^2$

b) $\frac{d}{dx}\left(b\log_e x+x^3+\sqrt{x}\right)=b\frac{d}{dx}\left(\log_e x\right)+\frac{d}{dx}\left(x^3\right)+\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$

$= b.\frac{1}{x}+3x^2+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$

$= \frac{b}{x}+3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}$

c) $\frac{d}{dx}\left(4\log_{10} x\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{4\log_e x}{\log_e 10}\right)$

$= \frac{4}{\log_e 10}\frac{d}{dx}\left(\log_e x\right)$

$= 4\log_{10} e\frac{1}{x}$

$= \frac{4\log_{10} e}{x}$

৮.৬.২ অৱকলজৰ গুণাত্মক সূত্ৰ (Product Rule of Differentiation)

উপপাদ্য ৩ ঃ ধৰা হ'ল, u(x) আৰু v(x) দুটা অৱকলনযোগ্য ফলন। তেন্তে ইহঁতৰ পূৰণফল u(x) v(x) ও অৱকলনযোগ্য হ'ব যথা-

$$\frac{d}{dx}\left(u(x)v(x)\right)=u(x)v'(x)+v(x)u'(x)$$

অনুসিদ্ধান্তঃ যদি u, v আৰু w তিনিটা অৱকলনযোগ্য ফলন হয়, তেন্তে,

$$\frac{d}{dx}(u(x)v(x)w(x))=u'(x)v(x)w(x)+v'(x)u(x)w(x)+w'(x)u(x)v(x)$$

উপপাদ্য ৪ ঃ ধৰা হ'ল, u(x) and v(x) একে ব্যৱধানৰ অৱকলনযোগ্য ফলন, তেন্তে ইহঁতৰ ভগ্নাংশৰ ফলন $\frac{u(x)}{v(x)}$ ও অৱকলনযোগ্য হ'ব। যথা-

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\frac{v(x)\frac{d}{dx}(u(x))-u(x)\frac{d}{dx}(v(x))}{(v(x))^2}$$

$$=\frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

উদাহৰণ 8.4 ঃ তলৰ ফলনসমূহক x ৰ সাপেক্ষে অৱকলন কৰক-

a) x^2e^x b) $e^x\log x$

সমাধান ঃ a) $\frac{d}{dx}(x^2e^x)=e^x\frac{d}{dx}(x^2)+x^2\frac{d}{dx}(e^x)$

$= e^x.2x + x^2.e^x$

$= xe^x(2+x)$

b) $\frac{d}{dx}(e^x\log x)=\log x\frac{d}{dx}(e^x)+e^x\frac{d}{dx}(\log x)$

$= \log x.e^x+e^x.\frac{1}{x}$

$= e^x\left(\log x+\frac{1}{x}\right)$

৮.৬.৩ যৌগিক ফলনৰ অৱকলজ বা অৱকলজৰ চেইন সূত্ৰ (Derivative of Composite Functions or Chain Rule of Differentiation)

যদি $y=\phi(t)$ আৰু $t=f(x)$ হয়, তেন্তে $y=\phi(f(x))$ এটা যৌগিক ফলন।

উপপাদ্য ৫ ঃ ধৰা হ'ল, $y=\phi(t)$ যেতিয়া $t=f(x)$, তেন্তে,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}$$

ওপৰৰ উপপাদ্যটোৰ সাধাৰণীকৰণ,

যদি $y=f(u)$, $u=g(t)$, $t=h(x)$ হয়, তেন্তে

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}.\frac{du}{dt}.\frac{dt}{dx}$$

এনেদৰে, যদি যৌগিক ফলন y বহুকেইটা ফলনৰ এটা যৌগিক ফলন হয়, তেতিয়া,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\text{d (প্রথম ফলন)}}{\text{d (দ্বিতীয় ফলন)}} \cdot \frac{\text{d (দ্বিতীয় ফলন)}}{\text{d (তৃতীয় ফলন)}} \cdots\cdots \frac{\text{d (অন্তিম ফলন)}}{dx}$$

ওপৰৰ সূত্ৰটোক **অৱকলজৰ চেইন সূত্ৰ** (Chain rule of differentiation) বুলিও কোৱা হয়।

উদাহৰণ 8.5 ঃ তলৰ ফলনটোক x ৰ সাপেক্ষে অৱকলজ কৰক-

$$y = \log\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $t = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

$\therefore y = \log t$

চেইন সূত্ৰ অনুসৰি,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{d}{dt}(\log t) \cdot \frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{x+1} \cdot \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{x-1}{2x(x+1)}$$

৮.৭ দ্বিতীয় অনুক্ৰমৰ অৱকলজ (SECOND ORDER DERIVATIVE)

আমি আগতেই কৈ আহিছোঁ যে, এটা ফলন y = f(x) ৰ অৱকলজ $\frac{dy}{dx}$ বা $f'(x)$ ও x ৰ এটা ফলন । যদি f(x) অৱকলনযোগ্য হয়, তেন্তে $f'(x)$ ফলনটো x ৰ সাপেক্ষে অৱকলনযোগ্য। $f'(x)$ ক x ৰ সাপেক্ষে অৱকলজ কৰি পোৱা ফলনটোক x ৰ দ্বিতীয় অনুক্ৰমৰ অৱকলজ বুলি কোৱা হয় আৰু ইয়াক এনেদৰে লিখা হয়।

$$\frac{d}{dx}[f'(x)] = f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

উদাহৰণ 8.6 ঃ

যদি $y = f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x + 10$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $y = f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 2x + 10$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5x^3 - 3x^2 + 2x + 10)$$
$$= 5 \times 3x^{3-1} - 3 \times 2x^{2-1} + 2 \times 1 + 0$$
$$= 15x^2 - 6x + 2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(15x^2 - 6x + 2)$$
$$= 15 \times 2x^{2-1} - 6 \times 1 + 0$$
$$= 30x - 6$$

৮.৮ বিভিন্ন প্রামাণিক ফলনৰ অৱকলজ (DERIVATIVES OF STANDARD FUNCTIONS)

১. $\frac{d}{dx}(k) = 0$, k যিকোনো ধ্ৰুৱক

২. $\frac{d}{dx}(x) = 1$

৩. $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

৪. $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

৫. $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$

৬. $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a$

৮.৯ এটা চলকৰ অৱকলজৰ উদাহৰণ (EXAMPLES OF ONE VARIABLE DERIVATIVE)

$\frac{dy}{dx}$ নির্ণয় কৰক -

1) $y = 5x^4$

$$\frac{dy}{dx} = 4 \times 5.x^{4-1} = 20x^3$$

2) $y = -6x^5$

$$\frac{dy}{dx} = -6 \times 5.x^{5-1} = -30x^4$$

3) $y = 5x^{-2}$

$$\frac{dy}{dx} = 5 \times (-2)x^{-2-1} = -10x^{-3} = -\frac{10}{x^3}$$

4) $y = 5e^{3x}$

$$\frac{dy}{dx} = 5 \times 3.e^{3x} = 15e^{3x}$$

5) $y = \frac{1}{x^2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^{-2}) = -2.x^{-2-1} = -2^{x-3} = -\frac{2}{x^3}$$

6) $y = \frac{9}{10}x^{-5}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9}{10}(-5)x^{-5-1} = \frac{9}{2}x^6$$

7) $y = (\sqrt[3]{x})^4$

$$\therefore y = x^{\frac{4}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{3}}$$

8) $y = x^2(x-3)$

$$\therefore y = x^3 - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = (x^3 - 3x^2) = \frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(3x^2)$$

$$= 3x^{3-1} - 3x^{2-1} = 3x^2 - 3x$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ নিম্নলিখিত ফলনবোৰৰ প্রথম অনুক্রমৰ অৱকলজ নির্ণয় কৰক।

(a) $2x^2-6x+3$ (b) $f(x) = x+\frac{1}{x}$

(c) $4x^3-15x^2+12x-1$

.....

.....

.....



৮.১০ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- এই অধ্যায়টিত আমি অৱকলজৰ ধাৰণাৰ লগত ইয়তে বিভিন্ন পদ্ধতি সম্পর্কে অলোচনা কৰিলোঁ।
- অধ্যয়টিত এটা চলকৰ অৱকলজৰ প্রয়োগ সম্পর্কেও আলোচনা কৰিলোঁ।



৮.১১ অধিক জানিবলৈ

১) Agarwal, D.K. (2012). *Business Mathematics*, New Delhi: Vrindra Publication (p) Ltd.

২) Baruah, S. (2011). *Basic Mathematics and Its Application in Economics*, New Delhi: Trinity Press Pvt. Ltd.

৩) Bose, D. (2004). *Mathematical Economics*; New Delhi: Himalaya Publishing House.

৪) Chiang, A.C. & (2010). *Fundamental Methods of Economics Analysis*, MC Graw Hill Education India.

৫) Kandoi, Balwant (2011). *Mathematics for Business and Economics with Application*; New Delhi: Himalaya Publishing House.



৮.১২ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3+x^2+x+2}{x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{x}+\frac{x^2}{x}+\frac{x}{x}+\frac{2}{x}\right)$

$$= \frac{d}{dx}(x^2)+\frac{d}{dx}(x)-\frac{d}{dx}(1)+2\frac{d}{dx}(x^{-1})$$

$$= 2x + 1 - 0 + 2(-1)x^{-2}$$

$$= 2x + 1 - \frac{2}{x^2}$$

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+3}{3x+4}\right) = \frac{(3x+4)\frac{d}{dx}(2x+3) - (2x+3)\frac{d}{dx}(3x+4)}{(3x+4)^2}$

$$= \frac{(3x+4)(2+0) - (2x+3)(3+0)}{(3x+4)^2}$$

$$= \frac{(6x+8) - (6x+9)}{(3x+4)^2}$$

$$= \frac{-1}{(3x+4)^2}$$

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a^2+x^2}\right) = \frac{(a^2+x^2)\frac{d}{dx}(x) - x\frac{d}{dx}(a^2+x^2)}{(a^2+x^2)^2}$

$$= \frac{(a^2+x^2).1 - x(2x)}{(a^2+x^2)^2}$$

$$= \frac{a^2+x^2-2x^2}{(a^2+x^2)^2}$$

$$= \frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}$$



৮.১৩ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন নং ১ঃ তলৰ ফলন কেইটাৰ dy/dx উলিয়াওকঃ

(ক) $y = (x^2+5)(2x^3 - 4x + 3)$

(খ) $y = 3x^2(3x + 5x^2)$

(গ) $y = x^2e^x$

(ঘ) $y = \frac{x^2+1}{x-1}$

(ঙ) $y = \frac{e^x}{1+x}$

(ঙ) $y = b_{+2}\phi_{-1}g$

(ছ) $y = \frac{3x}{x-5}$

(জ) $y = 16x^2 + 15x$

(ঝ) $y = \frac{1 \pm \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}}$

প্রশ্ন নং ২ঃ তলৰ ফলন সমূহৰ দ্বিতীয় অনুক্ৰমৰ অৱকলন নিৰ্ণয় কৰক ঃ

(ক) $y = (3x-2)(x^2+10x)$

(খ) $y = \frac{5x^2-2}{x^2-5x}$

(গ) $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

(ঘ) $y = 10x^5 - 4x^3 + 5x - 2$

*** ***** ***

অধ্যায় ৯ ঃ আংশিক অৱকলজ আৰু পূৰ্ণ অৱকলজ

অধ্যায় গাঁথনি

৯.১ উদ্দেশ্য

৯.২ পৰিচয়

৯.৩ বহু চলক বিশিষ্ট ফলন

৯.৪ আংশিক অৱকলজ

৯.৫ পূৰ্ণ অৱকলজ

৯.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৯.৭ অধিক জানিবলৈ

৯.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৯.৯ আৰ্হি প্রশ্ন

৯.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- আংশিক অৱকলজ আৰু পূৰ্ণ অৱকলজ সম্পর্কে জ্ঞান লাভ কৰিব
- আংশিক অৱকলজ আৰু পূৰ্ণ অৱকলজৰ সমস্যা সমাধান কৰিব পাৰিব।

৯.২ পৰিচয়

আমাৰ অধ্যায়টিত আমি অৱকলজৰ ধাৰণাটিৰ লগতে এটা চলক বিশিষ্ট সমস্যা সম্পর্কে আলোচনা কৰি আহিছোঁ। এই অধ্যায়টিত আমি আংশিক অৱকলজ আৰু পূৰ্ণ অৱকলজৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। অধ্যায়টি অধ্যয়নৰ অন্তত আপুনি আংশিক আৰু পূৰ্ণ অৱকলজৰ সমস্যা সমাধান কৰিব পাৰিব। ইয়াৰ পৰৱর্তী অধ্যায়টিত এই ধাৰণাসমূহৰ সহায়ত অর্থবিজ্ঞানৰ কেইটিমান সমস্যা সমাধান সম্পর্কত আলোচনা কৰিম।

৯.৩ বহু চলক বিশিষ্ট ফলন

এটা চলক বিশিষ্ট ফলন সম্বন্ধে আমি জানোঁ কিন্তু বহু ক্ষেত্রত আমি বহু চলক বিশিষ্ট ফলনৰ মুখামুখি হওঁ।

ধৰি লওক আপোনাৰ চহৰখনৰ সপ্তাহৰ অন্তত বতৰৰ আগতীয়া বতৰা দিব লাগে। আমি তাপমাত্রাৰ বাবে এটা সূত্র গঠন কৰোঁ। ই কেবাটাও পৰিৱেশভিত্তিক চলকৰ ফলন। এটা পৰিৱেশভিত্তিক চলক পৰিৱর্তিত হ'লে আৰু বাকীকেইটা চলক অপৰিৱর্তিত হৈ থাকিলেও বতৰৰ বতৰা সলনি হ'ব। এই ক্ষেত্রত আমি আংশিক অৱকলজৰ ধাৰণা ব্যৱহাৰ কৰিম।

উদাহৰণ স্বৰূপে আয়ত ক্ষেত্ৰৰ কালি A=xy। ই চলক x (দৈর্ঘ্য) আৰু চলক yৰ (প্ৰস্থ) ফলন। কিউবয়ডৰ আয়তন V=xyz । ই চলক x (দৈর্ঘ্য), চলক, y ((প্ৰস্থ) আৰু চলক z অৰ (উচ্চতা) ফলন।

যদি u, y, z চলক তিনিটা এনেদৰে সম্পৰ্কিত হৈ থাকে যে x আৰু y ৰ মানৰ ওপৰত u নির্ভৰশীল, তেনেহ'লে u ক x আৰু y চলক দুটাৰ ফলন বুলি কোৱা হয় আৰু ইয়াক এনেদৰে লিখা হয় $u = f(x, y)$. ইয়াত u ক পৰতন্ত্ৰ চলক (dependent variable) আৰু x আৰু y ক স্বতন্ত্ৰ চলক (independent variables) বুলি কোৱা হয়।

এনেদৰে, $u = f(x_1, x_2)$ হ'ল দুটা চলকৰ ফলন, ইয়াত u হ'ল পৰতন্ত্ৰ চলক, আৰু x_1, x_2 স্বতন্ত্ৰ চলক।

আকৌ, $u = f(x_1, x_2, x_3)$ হ'ল তিনিটা চলকৰ ফলন, ইয়াত u হ'ল পৰতন্ত্ৰ চলক আৰু x_1, x_2, x_3 হ'ল স্বতন্ত্ৰ চলক। সেইদৰে $u = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ হ'ল চাৰিটা চলকৰ ফলন, ইয়াত u হ'ল পৰিতন্ত্ৰ চলক আৰু x_1, x_2, x_3, x_4 হ'ল স্বতন্ত্ৰ চলক।

এইদৰে $u = f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ হ'ল n টা চলকৰ ফলন। ইয়াত u হ'ল পৰতন্ত্ৰ চলক আৰু $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ হ'ল স্বতন্ত্ৰ চলক।

উদাহৰণ ঃ

(i) $u = f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ দুটা চলক x, y অৰ ফলন।

(ii) $u = f(x, y, z) = x^2 + 3xy + yz^2 + z^3$ তিনিটা চলক x,y,z অৰ ফলন।

৯.৪ আংশিক অৱকলজ (PARTIAL DERIVATIVE)

যদি বহু স্বতন্ত্ৰ চলক বিশিষ্ট এটা ফলনৰ এটা চলক সাপেক্ষে অৱকলজ (বাকী কেইটা চলকক ধ্ৰুৱক হিচাপে লৈ উলিওৱা হয়। তেনেহ'লে ইয়াক আংশিক অৱকলজ (partial derivative) বুলি কোৱা হয়। এটাতকৈ বেছি স্বতন্ত্ৰ চলক বিশিষ্ট ফলনৰ আংশিক অৱকলজ উলিওৱা প্ৰক্ৰিয়াক আংশিক অৱকলন (Partial differentiation) বুলি কোৱা হয়।

ধৰা হ'ল $z = f(x, y)$ দুটা চলকৰ ফলন।

x সাপেক্ষে z অৰ আংশিক অৱকলজক $\frac{\partial z}{\partial x}$ বা $\frac{f(x, y)}{\partial x}$ বা f_x, এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংখ্যা এনেদৰে দিয়া হয়,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$, যদিহে সীমা থাকে।

সেইদৰে, y সাপেক্ষে z অৰ আংশিক অৱকলজক

$\frac{\partial z}{\partial y}$ বা $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ বা f_y ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$, যদিহে সীমা থাকে।

$\frac{\partial z}{\partial x}$ আৰু $\frac{\partial z}{\partial y}$ ক z অৰ প্ৰথম ক্ৰমৰ আংশিক অৱকলজ (first order partial derivatives)

উদাহৰণ 9.1: ধৰা হ'ল $f(x,y)=xy^2$ । চৰমমান তত্ত্ব প্ৰয়োগ কৰি অংশিক অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $f(x,y)=xy^2$

গতিকে , $f_x(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)y^2-xy^2}{h}$, $f_y(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{x(y+h)^2-xy^2}{h}$

$=\lim_{h\to 0}\frac{hy^2}{h}$ $=\lim_{h\to 0}\frac{2xyh+xh^2}{h}$

$=y^2$ $=\lim_{h\to 0}(2xy+xh)$

$=2xy$

উদাহৰণ 9.2: দিয়া আছে, $U=5x-6y+8$. fx আৰু fy ৰ আংশিক অৱকলজ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $U=5x-6y+8$.

$\therefore f_x=\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(5x-6y+8)$

$=5-0+0=5.$

একেদৰে, $f_y=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(5x-6y+8)$

$=0-6+0=-6.$

উদাহৰণ 9.3: $U=4x^2+4xy+y^2$ ৰ আংশিক অৱকলজ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $U=4x^2+4xy+y^2$

$\therefore f_x=\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(4x^2+4xy+y^2)$

$=4\times 2x^{2-1}+4\times 1\times y+0=8x+4y$

একেদৰে, $f_y=\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(4x^2+4xy+y^2)$

$=0+4\times x\times 1+2\times y^{2-1}=4x+2y$

উদাহৰণ 9.4: $y={x_1}^3+2x_1{x_2}^2+3{x_2}^2$ ৰ আংশিক অৱকলজ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $y={x_1}^3+2x_1{x_2}^2+3{x_2}^2$

$$\therefore fx_1 = \frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1{}^3 + 2x_1x_2{}^2 + 3x_2{}^2)$$

$$= 3x_1{}^{3-1} + 2x_2{}^2 \times 1 + 0 = 3x_1{}^2 + 2x_2{}^2$$

একেদৰে, $fx_2 = \frac{\partial y}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1{}^3 + 2x_1x_2{}^2 + 3x_2{}^2)$

$$= 0 + 2x_1 \times 2x_2{}^{2-1} + 3 \times 2x_2{}^{2-1} = 4x_1x_2 + 6x_2$$

উদাহৰণ 9.5: $Z = \frac{x+y}{2x+5y}$ ৰ আংশিক অৱকলজ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $Z = \frac{x+y}{2x+5y}$

$$\therefore f_x = \frac{(2x+5y)\frac{\partial}{\partial x}(x+y) - (x+y)\frac{\partial}{\partial x}(2x+5y)}{(2x+5y)^2}$$

$$= \frac{(2x+5y) - (x+y)\times 2}{(2x+5y)^2} = \frac{2x+5y-2x-2y}{(2x+5y)^2}$$

$$= \frac{3y}{(2x+5y)^2}$$

একেদৰে, $f_y = \frac{(2x+5y)\frac{\partial}{\partial y}(x+y) - (x+y)\frac{\partial}{\partial y}(2x+5y)}{(2x+5y)^2}$

$$= \frac{(2x+5y) - (x+y)\times 5}{(2x+5y)^2} = \frac{2x+5y-5x-5y}{(2x+5y)^2}$$

$$= -\frac{3x}{(2x+5y)^2}$$

দুটাতকৈ অধিক চলক বিশিষ্ট ফলন ঃ তিনিটা বা ততোধিক চলক বিশিষ্ট ফলনৰ বাবেও আংশিক অৱকলজৰ সংজ্ঞা দিব পাৰি।

যদি $u = f(x, y, z)$, তেনেহ'লে y আৰু z অক ধ্ৰুৱক হিচাপে লৈ x সাপেক্ষে u ক অৱকলন কৰি x সাপেক্ষে u ৰ আংশিক অৱকল সহগ অর্থাৎ $\frac{\partial u}{\partial x}$ উলিওৱা হয়, অর্থাৎ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x(x, y, z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h}$, যদিহে সীমা থাকে।

সেইদৰে, x আৰু z অক ধ্ৰুৱক হিচাপে লৈ y সাপেক্ষে u ক অৱকলন কৰি y সাপেক্ষে u ৰ

আংশিক অৱকন সহগ অর্থাৎ $\frac{\partial u}{\partial y}$ উলিওৱা হয়, অর্থাৎ

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}=f_y(x,y,z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h,z)-f(x,y,z)}{h}$, যদিহে সীমা থাকে।

আকৌ, x আৰু y ক ধ্রুৱক হিচাপে লৈ z সাপেক্ষে u ক অৱকলন কৰি z সাপেক্ষে u ৰ আংশিক অৱকন সহগ $\frac{\partial u}{\partial z}$ উলিওৱা হয়, অর্থাৎ

$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial z}=f_z(x,y,z)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y,z+h)-f(x,y,z)}{h}$ যদিহে সীমা থাকে।

সাধাৰণভাৱে, যদি u এটা n টা চলকৰ ফলন হয়, অর্থাৎ $u=f(x_1,x_2,.....,x_n)$, চলক x_i সাপেক্ষে u ৰ আংশিক অৱকলজৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=f_{x_i}(x_1,x_2,.....,x_n)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1,x_2,....,x_i+h,x_{i+1},....,x_n)-f(x_1,x_2,.....,x_n)}{h}$$, যদিহে সীমা থাকে।

দ্বিতীয় ক্রমৰ আংশিক অৱকলজ (Second order partial differential)

যদি $z=f(x,y)$, তেনেহ'লে $\frac{\partial z}{\partial x}$ বা f_x আৰু $\frac{\partial z}{\partial y}$ বা f_y প্রত্যেকেই x আৰু y ৰ ফলন। গতিকে ইয়াক পুনৰ আংশিকভাৱে অৱকলন কৰিব পাৰি।

$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right),\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ আৰু $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)$ ক u ৰ দ্বিতীয় ক্রমৰ আংশিক অৱকলজ (second order partial derivatives) বুলি কোৱা হয় আৰু এইবোৰক যথাক্রমে $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ আৰু $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ ৰে বুজোৱা হয়।

উচ্চতৰ ক্রমৰ আংশিক অৱকলজ (Higher order partial derivatives) ঃ ধাৰাবাহিক অৱকলনৰ দ্বাৰা এটা ফলনৰ উচ্চতৰ ক্রমৰ আংশিক অৱকলজ উলিওৱা।

তৃতীয় ক্রমৰ আংশিক অৱকলজক এনেদৰে বুজোৱা হয়।

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}=f_{xxx},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial x^2}=f_{yxx},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = f_{xxy}$$, ইত্যাদি

সাধাৰণভাৱে n-তম আংশিক অৱকলজবোৰ হ'ল

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}\right) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} = f_{x^n}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}\right) = \frac{\partial^n f}{\partial y \partial x^{n-1}} = f_{yx^{n-1}}$$ ইত্যাদি

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 9.6 : যদি $z = x^2 y + xy^3$, প্ৰথম ক্ৰমৰ আংশিক অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $z = x^2 y + xy^3$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y + xy^3\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(xy^3\right)$$

$$= 2xy + y^3$$

আকৌ, $$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y + xy^3\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(xy^3\right)$$

$$= x^2 + 3xy^2$$

উদাহৰণ 9.7 : যদি $z = \log\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$ আৰু $\frac{\partial z}{\partial y}$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে $z = \log\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\log\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}\right)$$

$$= \frac{1}{2\left(x^2 + y^2\right)}.2x$$

$$= \frac{x}{x^2 + y^2}$$

আকৌ, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\log\left(x^2 + y^2\right)^{1/2}\right)$

$$= \frac{1}{2\left(x^2 + y^2\right)}.2y$$

$$= \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

উদাহৰণ 9.8 : যদি $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, $f_x(2,1)$ আৰু $f_y(2,1)$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ y ক ধ্ৰুৱক হিচাপে লৈ আৰু x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ।

$$f_x(x,y) = 3x^2 + 2xy^3$$

আৰু $$f_x(2,1) = 3.2^2 + 2.2.1^3 = 16$$

সেইদৰে x অক ধ্ৰুৱক হিচাপে লৈ আৰু y সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ।

$$f_y(x,y) = 3x^2y^2 - 4y$$

$$f_y(2,1) = 3.2^2.1^2 - 4.1 = 8$$

উদাহৰণ 9.9 : যদি $u = \log\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$,দেখুওৱাক যে $x.\frac{\partial u}{\partial x} + y.\frac{\partial u}{\partial y} + z.\frac{\partial u}{\partial z} = 2$

সমাধান ঃ $u = \log\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \times (2x)$$

$$x.\frac{\partial u}{\partial x} = x.\frac{2x}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{2x^2}{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{... (১)}$$

আকৌ, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \times (2y)$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$y.\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y^2}{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{...(২)}$$

আৰু $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \times (2z)$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$z.\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2z^2}{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{... (৩)}$$

(১), (২) আৰু (৩) যোগ কৰি, আমি পাওঁ

$$x.\frac{\partial u}{\partial x}+y.\frac{\partial u}{\partial y}+z.\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{2\left(x^2+y^2+z^2\right)}{x^2+y^2+z^2}=2.$$

৯.৫ পূৰ্ণ অৱকলজ (TOTAL DIFFERENTIATION)

পূৰ্ণ অৱকলজ ঃ যদি $u=f(x,y)$ য'ত $x=\phi_1(t)$ আৰু $y=\phi_2(t)$, তেনেহ'লে

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy}{dt}.$$

$\frac{du}{dt}$ ক t সাপেক্ষে u ৰ পূৰ্ণ অৱকল সহগ (total differential coefficient) বুলি কোৱা হয়।

$\frac{\partial u}{\partial x}$ আৰু $\frac{\partial u}{\partial y}$ ক্ৰমে x আৰু y সাপেক্ষে u ৰ আংশিক অৱকলজ।

আংশিক অৱকলজৰ ধাৰণাটিয়ে আমাক U{U=(x) y} ফলনটিৰ কোনো এটা চলক যেনে x (বা y) ৰ ক্ষুদ্ৰ পৰিবৰ্তন ঘটালে, যি ক্ষেত্ৰত আন চলক, যেনে y (বা x) অপৰিবৰ্তিত হৈ থাকে, U ফলনটি কি হাৰত পৰিবৰ্তন হয়, সেই সম্পৰ্কে ধাৰণা দিয়ে। কিন্তু যদি x আৰু y একেলগে সলনি কৰা হয়, তেতেয়াহ'লে আমি পূৰ্ণ অৱকলজ ধাৰণাটি ব্যৱহাৰ কৰোঁ।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল t ত δt এটা ক্ষুদ্ৰ বৃদ্ধি আৰু ধৰা হ'ল u, x আৰু y ত অনুৰূপ বৃদ্ধি ক্ৰমে δu, δx আৰু δy তেনেহ'লে আমি পাওঁ $u=f(x,y)$... (১)

আৰু $u+\delta u=f(x+\delta x,y+\delta y)$ ... (২)

$$\therefore\ \delta u=f(x+\delta x,y+\delta y)-f(x,y)$$
$$=\left[f(x+\delta x,y+\delta y)-f(x,y+\delta y)\right]+\left[f(x,y+\delta y)-f(x,y)\right]$$

δt ৰে হৰণ কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{\delta u}{\delta t}=\left\{\frac{f(x+\delta x,y+\delta y)-f(x,y+\delta y)}{\delta t}\right\}+\left\{\frac{f(x,y+\delta y)-f(x,y)}{\delta t}\right\}\ldots(৩)$$

ধৰা হ'ল $\delta t\to 0\ \therefore\ \delta x\to 0$ আৰু $\delta y\to 0$.

$$\lim_{\delta t\to 0}\frac{\delta u}{\delta t}=\lim_{\partial x\to 0}\frac{f(x+\delta x,y+\delta y)-f(x,y+\delta y)}{\delta x}\lim_{\partial t\to 0}\frac{\partial x}{\partial t}$$
$$+\lim_{\delta y\to 0}\frac{f(x,y+\delta y)-f(x,y)}{\delta y}\lim_{\partial t\to 0}\frac{\delta y}{\delta t}\ \ldots(৪)$$

যিহেতু δt শূন্যৰ পিনে অগ্ৰসৰ হ'লে δx আৰু δy ও শূন্যৰ পিনে আগবাঢ়ে, গতিকে (৪) অৰ পৰা

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy}{dt}.$$

টোকা ঃ (১) যদি $u=f(x,y,z)$, য'ত $x=\phi_1(t), y=\phi_2(t), z=\phi_3(t)$, তেনেহ'লে

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}.\frac{\partial z}{\partial t}$$

(২) উপৰিউক্ত ফলটো সসীম সংখ্যক চলকলৈ সম্প্রসাৰণ কৰিব পাৰি।

যদি $u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ য'ত $x_1=\phi_1(t), x_2=\phi_2(t),..., x_n=\phi_n(t)$. তেনেহ'লে

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x_1}.\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial u}{\partial x_2}.\frac{dx_2}{dt}+\cdots+\frac{\partial u}{\partial x_n}.\frac{dx_n}{dt}$$

(৩) যদি u এটা x আৰু y ৰ ফলন, অর্থাৎ, $u=f(x,y)$, য'ত y এটা x অৰ ফলন,

তেনেহ'লে $\frac{du}{dx}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy}{dx}$.

নিগমন ঃ (১) যদি $u=f(x,y)$ য'ত $x=f_1(t_1,t_2)$ আৰু $y=f_2(t_1,t_2)$, তেনেহ'লে

$$\frac{\partial u}{\partial t_1}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t_1}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t_1}$$

আৰু $\frac{\partial u}{\partial t_2}=\frac{\partial u}{\partial x}.\frac{\partial x}{\partial t_2}+\frac{\partial u}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial t_2}$

● **ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ**

উদাহৰণ 9.10: $Z=3x^2+xy-2y^3$ ৰপূৰ্ণ অৱকলজ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $Z=3x^2+xy-2y^3$.

$$\begin{aligned}dZ&=d(3x^2)+d(xy)-d(2y^3)\\&=3\times 2xdx+xdy+ydx-2\times 3y^{3-1}dy\\&=6xdx+xdy+ydx-6y^2dy\end{aligned}$$

উদাহৰণ 9.11: $y=10+2x+3x^2$ ৰপূৰ্ণ অৱকলজ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $y=10+2x+3x^2$

$$\begin{aligned}dy&=d(10)+d(2x)+d(3x^2)\\&=0+2dx+6xdx\\&=2dx+6xdx\end{aligned}$$

উদাহৰণ 9.12: $Z=(x^2+y)(2x-y^2)$ ৰপূৰ্ণ অৱকলজ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $Z=(x^2+y)(2x-y^2)$

$$
\begin{aligned}
dZ &= (x^2+y)d(2x-y^2)+(2x-y^2)d(x^2+y)\\
&= (x^2+y)(2dx-2ydy)+(2x-y^2)(2xdx+dy)\\
&= 2x^2dx+2ydx-2x^2ydy-2y^2dy+4x^2dx-2xy^2dx+2xdy-y^2dy)\\
&= (6x^2+2y-2xy^2)dx+(-2x^2-3y^2+2x)dy
\end{aligned}
$$

উদাহৰণ 9.13: $y=\dfrac{2x^2}{10+x}$ ৰপূৰ্ণ অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $y=\dfrac{2x^2}{10+x}$

$$
\begin{aligned}
dy &= \frac{(10+x)\times d(2x^2)-2x^2\times d(10+x)}{(10+x)^2}\\
&= \frac{(10+x)(2\times 2\times x)-2x^2(1)}{(10+x)^2}\\
&= \frac{40x+4x^2-2x^2}{(10+x)^2}\\
&= \frac{40x+2x^2}{(10+x)^2}
\end{aligned}
$$

উদাহৰণ 9.14: $Z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ ৰপূৰ্ণ অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $Z=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

$$
\begin{aligned}
dZ &= \frac{(x^2+y^2)d(x^2-y^2)-(x^2-y^2)d(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\
&= \frac{(x^2+y^2)(2xdx-2ydy)-(x^2-y^2)(2xdx+2ydy)}{(x^2+y^2)^2}\\
&= \frac{2x^3dx+2xy^2dx-2x^2ydy-2y^3dy-2x^3dx-2x^2ydy+2xy^2dx+2y^3dy}{(x^2+y^2)^2}\\
&= \frac{-4x^2ydy+4xy^2dx}{(x^2+y^2)^2}
\end{aligned}
$$

উদাহৰণ 9.15: যদি $u=f(x-y,y-z,z-x)$, প্ৰমাণ কৰক যে $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}=0$.

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $x-y=X$, $y-z=Y$, $z-x=Z$

তেনেহ'লে $u=f(X,Y,Z)$ য'ত X,Y,Z হ'ল x,y,z অৰ ফলন।

$$\therefore \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial X}.\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial Y}.\frac{\partial Y}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial Z}.\frac{\partial Z}{\partial x}$$

$$=\frac{\partial u}{\partial X}.(1)+\frac{\partial u}{\partial Y}.(0)+\frac{\partial u}{\partial Z}.(-1)$$

$$=\frac{\partial u}{\partial X}-\frac{\partial u}{\partial Z} \quad \ldots (১)$$

সেইদৰে, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial X}.\frac{\partial X}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial Z}.\frac{\partial Z}{\partial y}$

$$=\frac{\partial u}{\partial X}.(-1)+\frac{\partial u}{\partial Y}(1)+\frac{\partial u}{\partial Z}.(0)$$

$$=-\frac{\partial u}{\partial X}.+\frac{\partial u}{\partial Y} \quad \ldots (২)$$

আৰু $\frac{\partial u}{\partial z}=-\frac{\partial u}{\partial Y}+\frac{\partial u}{\partial Z}$ ... (৩)

(১), (২) আৰু (৩) যোগ কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

উদাহৰণ 9.16: যদি $z=xy^2+x^2y$, $x=at^2$, $y=2at$; $\frac{dz}{dt}$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $\frac{\partial z}{\partial x}=y^2+2xy$, $\frac{\partial z}{\partial y}=2xy+x^2$

$$\frac{dx}{dt}=2at \, , \frac{dy}{dt}=2a$$

এতিয়া, $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$

$$=\left(y^2+2xy\right)2at+\left(2xy+x^2\right)2a$$
$$=\left(4a^2t^2+4a^2t^3\right)2at+\left(4a^2t^3+a^2t^4\right)2a$$
$$=a^3\left(16t^3+10t^4\right)$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ যদি $u = x^5 y^4$ য'ত $x = t^2$ আৰু $y = t^3$, $\frac{du}{dt}$ নির্ণয় কৰক।

.....

.....

.....

.....



৯.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- এই অধ্যায়টিত আমি অৱকলজৰ ধাৰণাৰ লগত ইয়তে বিভিন্ন পদ্ধতি সম্পর্কে অলোচনা কৰিলোঁ।
- অধ্যায়টিত আমি অর্থবিজ্ঞান বিষয়ত অৱকলজৰ প্রয়োগ সম্পর্কে ও আলোচনা কৰিলোঁ।



৯.৭ অধিক জানিবলৈ

১) Agarwal, D.K. (2012). *Business Mathematics*, New Delhi: Vrindra Publication (p) Ltd.

২) Baruah, S. (2011). *Basic Mathematics and Its Application in Economics*, New Delhi: Trinity Press Pvt. Ltd.

৩) Bose, D. (2004). *Mathematical Economics*; New Delhi: Himalaya Publishing House.

৪) Chiang, A.C. & (2010). *Fundamental Methods of Economics Analysis*, MC Graw Hill Education India.

৫) Kandoi, Balwant (2011). *Mathematics for Business and Economics with Application*; New Delhi: Himalaya Publishing House.



৯.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ ইয়াত u এটা x আৰু y ৰ ফলন, আৰু x আৰু y হ'ল t ৰ ফলন। u চলক t ৰো ফলন।

$$\therefore \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$$

$$= \left(5x^4y^4\right)2t + \left(4x^5y^3\right)3t^2$$

$$= 10.x^4y^4t + 12x^5y^3t^2$$

$$= 10.t^8t^{12}t + 12t^{10}t^9t^2$$

$$= 22t^{21}$$



৯.৯ আৰ্হি প্রশ্ন

প্রশ্ন নং ১ ঃ পূৰ্ণ অৱকলজ উলিয়াওকঃ $u = x^2 + 2y^2$.

প্রশ্ন নং ২ ঃ পূৰ্ণ অৱকলজ উলিয়াওকঃ $z = x^2 + y^2 + 3xy$.

প্রশ্ন নং ৩ ঃ পূৰ্ণ অৱকলজ উলিয়াওকঃ $z = (x^2 + y)(2x-y^2)$

প্রশ্ন নং ৪ ঃ তলৰ ফলন কেইটাৰ dy/dx উলিয়াওকঃ

(ক) $y = (x^2+5)(2x^3 - 4x+ 3)$

(খ) $y = 3x^2(3x + 5x^2)$

প্রশ্ন নং ৫ ঃ $Q = 40F + 3F^2 + F^{3/3}$ ৰ প্রান্তিক আৰু গড় উৎপাদন ফলন উলিয়াওক।

প্রশ্ন নং ৬ ঃ $Y = (x^2+2)(x+3)$ ৰ উৎপাদনশীলতাৰ পৰা প্রান্তিক উৎপাদনশীলতা উলিয়াওক।

*** ***** ***

অধ্যায় ১০ ঃ অৱকলজৰ অর্থনৈতিক প্রয়োগ

অধ্যায় গাঁথনি

১০.১ উদ্দেশ্য

১০.২ পৰিচয়

১০.৩ অৱকলজৰ অর্থনৈতিক প্রয়োগ

- ১০.৩.১ চাহিদাৰ স্থিতিস্থাপকতা (Ed)
- ১০.৩.২ AR, MR আৰু ed ৰ মাজৰ সম্বন্ধ নির্ণয়
- ১০.৩.৩ AC আৰু MC ৰ মাজৰ সম্বন্ধ নির্ণয়
- ১০.৩.৪ উপযোগিতা ফলন
- ১০.৩.৫ নিৰপেক্ষ ৰেখা ফলন
- ১০.৩.৬ উৎপাদন ফলন
- ১০.৩.৭ সম-উৎপন্ন ফলন
- ১০.৩.৮ MR, MP আৰু MPR অৰ মাজৰ সম্বন্ধ নির্ণয়
- ১০.৩.৯ ভোগ ফলন
- ১০.৩.১০ সঞ্চয় ফলন
- ১০.৩.১১ আমদানি ফলন
- ১০.৩.১২ যোগানৰ স্থিতিস্থাপকতা (Es)

১০.৪ সাংখ্যিক উদাহৰণ

১০.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১০.৬ অধিক জানিবলৈ

১০.৭ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১০.৮ আর্হি প্রশ্ন

১০.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- অর্থবিজ্ঞানৰ যিবোৰ বিভিন্ন ফলনত অৱকলন গণিত প্রয়োগ কৰা হয়, সেইবোৰৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- অর্থনৈতিক সমস্যাত অৱকলন গণিত প্রয়োগ কৰিব পাৰিব ।

১০.২ পৰিচয়

আগৰ অধ্যায় দুটাত আমি অৱকলন গণিতৰ ধাৰণা সম্বন্ধে আলোচনা কৰিছোঁ। এই অধ্যায়ত আমি অর্থবিজ্ঞানৰ কেইটামান বিষয়ত ইয়াৰ প্রয়োগ সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম।

অর্থবিজ্ঞানত মুঠৰপৰা প্রান্তিক উলিয়াবলৈ, উদাহৰণস্বৰূপে, মুঠ ব্যয় বা ৰাজহৰ পৰা প্রান্তিক ব্যয় বা ৰাজহ উলিয়াবলৈ অৱকলন গণিত সঘনাই ব্যৱহাৰ কৰা হয়। স্থিতিস্থাপকতা নির্ণয় কৰাৰ ক্ষেত্রতো এই ধাৰণা সঘনাই ব্যৱহাৰ কৰা হয়। এই অধ্যায়ত আমি এইবোৰৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

১০.৩ অৱকলজৰ অর্থনৈতিক প্রয়োগ (ECONOMIC APPLICATIONS OF DERIVATIVES)

এই অনুচ্ছেদত আমি অৱকলজৰ কেইটামান অর্থনৈতিক প্রয়োগৰ আভাস দিম।

১০.৩.১ চাহিদাৰ স্থিতিস্থাপকতা [Elasticity of Demand (Ed)]

চাহিদাৰ স্থিতিস্থাপকতাক আমি তলত দিয়া ধৰণে প্রকাশ কৰিব পাৰোঁ;

$$Ed = \frac{\text{চাহিদাৰ আনুপাতিক পৰিৱর্তন}}{\text{মূল্যমানৰ আনুপাতিক পৰিৱর্তন}}$$

$$= \frac{dQ/Q}{dP/P}$$

$$Ed = -\frac{dQ}{dP}.P/Q$$

($\because$ P আৰু Q বিপৰীত দিশত পৰিৱর্তন হয়)

বা $|Ed| = \left|\frac{dQ}{dP}.P/Q\right|$

আমি Ed ক তলত দিয়া ধৰণেও প্রকাশ কৰিব পাৰোঁ।

$$Ed = \frac{d(\log Q)}{d(\log P)}$$

বা $Ed = \frac{AR}{AR - MR}$

যদি Ed>1, তেনেহ'লে এয়া স্থিতিস্থাপক চাহিদা

Ed<1, তেনেহ'লে এয়া অস্থিতিস্থাপক চাহিদা

Ed=1, তেনেহ'লে এয়া চাহিদাৰ একক স্থিতিস্থাপকতা

(Unitary elasticity of demand)

১০.৩.২ AR, MR আৰু Edৰ মাজৰ সম্বন্ধ নির্ণয়(Deriving the Relationship between AR, MR and Ed)

আমি জানোঁ যে

$$TR = AR \times Q \text{ ———————— (i)}$$

(i) অক 'Q' সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{dTR}{dQ} = AR\frac{dQ}{dQ} + Q\frac{dAR}{dQ}$$

$$\Rightarrow MR = AR + Q.\frac{dAR}{dQ}$$

$$\therefore MR = P + Q\frac{dP}{dQ} \quad (\because AR = P = \text{মূল্য})$$

$$\Rightarrow MR = P\left(1 + \frac{Q}{P}\frac{dP}{dQ}\right)$$

$$MR = P\left(1 + \frac{1}{P/Q\,\frac{dQ}{dP}}\right)$$

$$\Rightarrow MR = P\left(1 + \frac{1}{Ed}\right) \quad \because Ed = \frac{-dQ}{dp}.\frac{P}{Q}$$

$$\Rightarrow AR / Ed = AR - MR \quad \because AR = P$$

$$\Rightarrow \frac{AR}{AR - MR} = Ed$$

$$\therefore Ed = \frac{AR}{AR - MR}$$

১০.৩.৩ AC আৰু MC ৰ মাজৰ সম্বন্ধ নির্ণয় (Deriving the Relationship between AC and MC)

আমি জানোঁ যে,

$$TC = AC \times Q \text{ ———————— (ii)}$$

(i) অক 'Q' সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\frac{d}{dQ}TC = \frac{d}{dQ}(AC \times Q)$$

$$\Rightarrow MC = AC\frac{dQ}{dQ} + Q\frac{dAC}{dQ}$$

$$\Rightarrow MC = AC + Q.\text{Slope of } AC$$

$$\Rightarrow Q.\text{Slope of } AC = MC - AC$$

$$\therefore \text{Slope of } AC = \frac{1}{Q}(MC - AC) \quad \text{——— (ii)}$$

(ii) ৰ পৰা আমি AC আৰু MC ৰ মাজৰ সম্পৰ্ক এনেদৰে পাওঁ

(i) যেতিয়া MC>AC, AC ৰ প্ৰৱণতা >0

(ii) যেতিয়া MC=AC, AC ৰ প্ৰৱণতা = 0

(iii) যেতিয়া MC < AC, AC ৰ প্ৰৱণতা <0

১০.৩.৪ উপযোগিতা ফলন (Utility Function)

দুবিধ সামগ্ৰীৰ ক্ষেত্ৰত উপযোগিতা ফলনক তলত দিয়া ধৰণে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি ঃ

U = f(x,y) য'ত u = উপযোগতা

x আৰু y দুবিধ সামগ্ৰী

প্ৰান্তিক উপযোগিতা (Marginal utility)

$MU_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, ইয়াত y ধ্ৰুৱক,

য'ত, MU_x = x অৰ প্ৰান্তিক উপযোগিতা

$MU_y = \frac{\partial u}{\partial y}$, ইয়াত x ধ্ৰুৱক

য'ত, MU_y = y ৰ প্ৰান্তিক উপযোগিতা

১০.৩.৫ নিৰপেক্ষ ৰেখা ফলন (Indifference Curve (IC) Function)

নিৰপেক্ষ ৰেখাক তলত দিয়া ধৰণে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি ঃ

U = f(x,y) = C য'ত c এটা ধ্ৰুৱক

IC ৰ প্ৰৱণতা = $-\frac{dy}{dx} = \frac{MU_x}{MU_y}$

টোকা ঃ IC ৰ দুটা বৈশিষ্ট্য আছে। সেই দুটা হ'ল ঃ

(i) IC নিম্নাভিমুখে হেলনীয়া যদি $\frac{dy}{dx} < 0$.

(ii) IC মূল বিন্দু সাপেক্ষে উত্তল (convex) যদি $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

১০.৩.৬ উৎপাদন ফলন (Production function) :

দুটা উৎপাদনৰ উপাদনৰ ক্ষেত্রত উৎপাদন ফলনটো তলত দিয়া ধৰণে প্রকাশ কৰিব পাৰি ঃ

Q=f (L, K), য'ত Q = উৎপাদিত সামগ্রী (Output), L আৰু K ক্রমে অন্তর্গত উপাদান শ্রম আৰু মূলধন।

প্রান্তিক উৎপাদন (Marginal product) :

$MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L}$, ইয়াত K এটা ধ্রুৱক

য'ত MP_L = শ্রমৰ প্রান্তিক উৎপাদন

$MP_K = \frac{dQ}{\partial K}$, ইয়াত L এটা ধ্রুৱক

য'ত MP_K = মূলধনৰ প্রান্তিক উৎপাদন

১০.৩.৭ সম-উৎপন্ন ফলন (Iso-Quant (IQ) Function)

সম-উৎপন্ন ফলন তলত দিয়া ধৰণে প্রকাশ কৰিব পাৰি ঃ

Q = f(L,K) = C য'ত C এটা ধ্রুৱক

IQ ৰ প্রৱণতা $= \frac{dK}{dL} = \frac{MP_L}{MP_K}$

টোকা ঃ IQ ৰ দুটা বৈশিষ্ট্য আছে। সেই দুটা হ'ল ঃ

(i) IQ নিম্নাভিমুখে হেলনীয়া যদি $\frac{dK}{dL} < 0$.

(ii) IQ মূলবিন্দু সপেক্ষে উত্তল (Convex) যদি $\frac{d^2K}{dL^2} > 0$.

১০.৩.৮ MR, MP আৰু MPR অৰ মাজৰ সম্বন্ধ নির্ণয় (Relationship between MR, MP and MPR)

দুটা উপাদানযুক্ত উৎপাদন ফলন (input production function) লোৱা হ'ল ঃ

Q = f (L, K), য'ত L = শ্রম (Labour input)

K = মূলধন (Capital input)

ইয়াত $MP_L = \frac{\partial Q}{\partial L}$, ইয়াত K এটা ধ্রুৱক

য'ত MP_L = শ্রমৰ প্রান্তিক শাৰীৰিক উৎপাদন (Marginal physical product of Labour)

$MP_K = \frac{\partial Q}{\partial K}$, ইয়াত L এটা ধ্ৰুৱক

যাঁত MP_K = মূলধনৰ প্ৰান্তিক শাৰীৰিক উৎপাদন (Marginal physical product of Capital)

টোকা ঃ প্ৰান্তিক উৎপাদন (Marginal product : MP) আৰু প্ৰান্তিক শাৰীৰিক উৎপাদন (Marginal Physical Product/ MPP) একে।

আকৌ মুঠ বিক্ৰী আয় (Total Revenue/ TR) হ'ল পৰিমাণৰ (Quantity/ Q) ফলন। ইয়াক এনেদৰে লিখিব পাৰি।

$TR = f(Q)$

ইয়াত, $MR = \frac{dTR}{dQ}$

এতিয়া, $MRP_L = MP_L \times MR$

আৰু $MRP_K = MP_K \times MR$

১০.৩.৯ ভোগ ফলন (Consumption Function)

ভোগ (Consumption : C) হ'ল ব্যয় সাধ্য আয়ৰ (disposable income, yd), ফলন। ইয়াক এনেদৰে লিখিব পাৰি।

$C = f(Yd)$ যাঁত $Yd = Y - T$

Y = আয়

T = কৰ

ভোগ কৰা প্ৰান্তিক প্ৰৱণতা (Marginal Propensity to consume/ MPC):

$MPC = \frac{dc}{dy}$

টোকা ঃ $0<MPC<1$

১০.৩.১০ সঞ্চয় ফলন (Saving Function)

সঞ্চয় (Saving: s) হ'ল আয় (income: y)ৰ ফলন। ইয়াক এনেদৰে লিখিব পাৰি

$s = f(y)$

সঞ্চয় কৰাৰ প্ৰান্তিক প্ৰৱণতা (Marginal Propensity to Save: MPS) :

$MPS = \frac{ds}{dy}$

১০.৩.১১ আমদানি ফলন (Import Function)

আমদানি (Import: M) হ'ল আয়ৰ (income: y) ফলন। ইয়াক এনেদৰে লিখিব পাৰি ঃ

$M = f(y)$

আমদানি কৰাৰ প্রান্তিক প্রৱণতা (Margainal Proensity to Import : MPM):

$$MPM = \frac{dM}{dy}$$

১০.৩.১২ যোগানৰ স্থিতিস্থাপকতা (Es) [Elasticity of Supply]

$$E_s = \frac{\text{যোগানৰ আনুপাতিক পৰিৱর্তন}}{\text{মূল্যমানৰ আনুপাতিক পৰিৱর্তন}}$$

$$= \frac{dQs}{Qs} / \frac{dp}{p}$$ য'ত Qs = যোগানৰ পৰিমাণ

P = সামগ্রীৰ মূল্যমান

$$\therefore E_s = \frac{dQs}{dp} \cdot \frac{P}{Qs}$$

ইয়াক তলত দিয়া ধৰণেও প্রকাশ কৰিব পাৰি ঃ

$$\therefore E_s = \frac{d(\log Qs)}{d(\log P)}$$

১০.৪ সাংখ্যিক উদাহৰণ

এই অনুচ্ছেদত আমি কেইটামান সাংখ্যিক উদাহৰণ সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম।

উদাহৰণ 10.1 ঃ এখন ফার্মৰ চাহিদা ফলন এনেদৰে দিয়া আছে, $Q = 30 - 5P - P^2$. P = 2 ত চাহিদাৰ স্থিতিস্থাপকতা আৰু MR নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, চাহিদা ফলন $Q = 30 - 5P - P^2$.

যেতিয়া P = 2, $Q = 30 - 5(2) - 4$

$= 30 - 10 - 4$

$= 16.$

এতিয়া,

$$Q = 30 - 5P - P^2$$

$$\therefore \frac{dQ}{dP} = -5 - 2P$$

P = 2 বহুৱাই, আমি পালোঁ

$$\frac{dQ}{dP} = -5 - 2(2)$$

$$= -9.$$

(i) $$E_d = -\frac{dQ}{dP} \times \frac{P}{Q}$$

$$= -(-9) \times \frac{P}{Q}$$

$$= 9 \times \frac{2}{16}$$

$$= \frac{18}{16} = 1.125.$$

(ii) আমি জানোঁ $$MR = AR\frac{(Ed-1)}{(Ed)}$$

$$MR = P\frac{(1.125-1)}{(1.125)}$$

$$= 2\left(\frac{.125}{1.125}\right)$$

$$= 2\ (0.11)$$

$$= 0.22.$$

উদাহৰণ 10.2 ঃ এখন ফাৰ্মৰ চাহিদা ফলন এনেদৰে দিয়া আছে $Q = 100 - 4P - 2P^2$, P ৰ মান ক্ৰমে 2, 5 আৰু 10 হ'লে চাহিদাৰ স্থিতিস্থাপক মূল্য নিৰ্ণয় কৰক, আৰু ইয়াৰ ব্যাখ্যা আগ বঢ়াওক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, চাহিদা ফলন $Q = 100 - 4P - 2P^2$ ——— (i)

$$\therefore \frac{dQ}{dP} = \frac{d}{dP}(100 - 4P - 2P^2)$$

$$= -4 - 4P \text{ ————————} \text{ (ii)}$$

আমি জানোঁ যে $Ed = -\frac{P}{Q} \times \frac{dQ}{dP}$

(a) এতিয়া (i) অত P = 2 বহুৱাই, আমি পাওঁ

$$Q = 100 - 4(2) - 2(2)^2$$

$$= 100 - 8 - 8$$

$$= 84$$

$$\therefore \frac{dQ}{dP} = -4 - 4(2) \qquad [\text{(ii) ৰ পৰা}]$$

$$= -4 - 8$$

$$= -12.$$

$$\therefore Ed = \text{bg}\frac{P}{Q}\text{bk}\frac{dQ}{dP}\text{r}$$

$$= \text{bg}\frac{2}{84}\text{b}12\text{r}$$

$$= \frac{24}{84} = \frac{2}{7} = 0.286$$

যিহেতু |Ed| = 0.29 > 1, গতিকে আমি ক'ব পাৰোঁ যে P = 2 ত চাহিদা আপেক্ষিকভাৱে স্থিতিস্থাপক। দেখা গ'ল যে P = 2 ত, মূল্যমানৰ এক একক পৰিৱর্তনত, চাহিদাৰ পৰিমাণ (Q) 0.29 অর্থাৎ 29% সলনি হয়।

(b) সম্বন্ধ (i) অত P = 5 বহুৰাই আমি পাওঁ

$$Q = 100 - 4(5) - 2(5)^2$$

$$= 100 - 20 - 50$$

$$= 30.$$

আৰু $\frac{dQ}{dP} = -4 - 4(5)$ [(ii)ৰ পৰা]

$$= -4 - 20$$

$$= -24.$$

$$\therefore Ed = \text{bg}\frac{P}{Q}\text{bk}\frac{dQ}{dP}\text{r}$$

$$= \text{bg}\frac{5}{30}\text{bk}24\text{r}$$

$$= \frac{5 \times 24}{30}$$

$$= 4.$$

যিহেতু Ed = 4>1, আমি ক'ব পাৰোঁ যে P = 5 অত চাহিদা আপেক্ষিকভাৱে স্থিতিস্থাপক। দেখা গ'ল যে P = 5 অত মূল্যমানৰ এক একক পৰিৱর্তনত চাহিদা 4 গুণ অর্থাৎ 400% সলনি হয়।

(c) সম্বন্ধ (i) অত P = 10 বহুৰাই আমি পাওঁ

$$Q = 100 - 4(10) - 2(10)^2$$

$$= 100 - 40 - 200$$

$$= -140.$$

$$\therefore \frac{dQ}{dP} = (-4) - 4(10) \qquad [\text{সম্বন্ধ (ii) ৰ পৰা }]$$

$$= -4 - 40$$

$= -44.$

$\therefore Ed = -\frac{dQ}{dP}\cdot\frac{P}{Q}$

$= -\frac{10}{140}\times(-44)$

$= -\frac{10\times 44}{140}$

$= -\frac{22}{7} = -3.14$

বা $|Ed| = 3.14$

যিহেতু $|Ed| = 3.14 > 1$, আমি ক'ব পাৰোঁ যে $P = 10$, অত চাহিদা আপেক্ষিকভাৱে স্থিতিস্থাপক। দেখা গ'ল যে $P = 10$ অত মূল্যমানৰ এক একক পৰিৱৰ্তন চাহিদা 3.14 গুণ অৰ্থাৎ 314 শতাংশ পৰিৱৰ্তিত হয়।

উদাহৰণ 10.3 ঃ এখন ফাৰ্মৰ যোগান ফলন এনেদৰে দিয়া আছে, $P = 4 + 5Q^2$. $P = 9$, $P = 6$, $P = 4$ আৰু $P = 3$ ত যোগানৰ স্থিতিস্থাপকতা নিৰ্ণয় কৰক আৰু ইয়াৰ ব্যাখ্যা আগ বঢ়াওক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, যোগান ফলন

$P = 4 + 5Q^2$ ———————— (i)

$\Rightarrow 5Q^2 = P - 4$

$\Rightarrow Q^2 = \frac{1}{5}(P - 4)$ ———— (ii)

$\Rightarrow Q = \pm\sqrt{\frac{1}{5}(P-4)}$

[ঋণাত্মক চিন বিবেচনা কৰা নহয়, কিয়নো অৰ্থ বিজ্ঞানত ই কোনো অৰ্থ বহন নকৰে।]

এতিয়া, $\frac{dP}{dQ} = \frac{d}{dQ}(4 + 5Q^2)$

$= 10Q$ ———— (iii)

আৰু $\frac{dQ}{dP} = \frac{1}{10Q}$

আমি জানোঁ যে $Es = \frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}$

$= \left(\frac{4+5Q^2}{Q}\right)\left(\frac{1}{10Q}\right)$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{4+5Q^2}{Q^2}\right) \text{ ———— (iv)}$$

(i) যেতিয়া P = 9

$$Q^2 = \frac{1}{5}(9-4) \text{ ———— [সম্বন্ধ (ii)ৰ পৰা]}$$

$$= \frac{1}{5}\times 5$$

$$= 1.$$

$\therefore Q = 1$. (ঋণাত্মক চিন বিবেচনা কৰা হোৱা নাই)

$$\therefore Es = \frac{1}{10}\left\{\frac{4+5(1)^2}{(1)^2}\right\} \quad \text{[(iv) অৰ পৰা]}$$

$$= \frac{1}{10}\times 9 = 0.9. < 1.$$

যিহেতু Es = 0.9<1, আমি ক'ব পাৰোঁ যে যোগানৰ স্থিতিস্থাপকতা আপেক্ষিকভাৱে অস্থিতিস্থাপক। দেখা গ'ল যে P = 9 অত মূল্যমানৰ একক পৰিৱর্তনত যোগানৰ পৰিমাণ 0.9 বা 90% সলনি হয়।

(ii) যেতিয়া P = 6,

$$Q^2 = \frac{1}{5}(6-4)$$

$$= \frac{2}{5}$$

$$\therefore Q = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$= \pm\sqrt{0.40}$$

$$= \pm 0.63 = 0.63 \quad \text{[ঋণাত্মক চিন বিবেচনা কৰা হোৱা নাই]}$$

$$\therefore Es = \frac{1}{10}\left\{\frac{4+5\left(\frac{2}{5}\right)}{\frac{2}{5}}\right\} \quad \text{[সম্বন্ধ (iv) অৰ পৰা]}$$

$$= \frac{1}{10}\left(6\times\frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{15}{10} = 1.5 > 1$$

যিহেতু Es = 1.5>1, আমি ক'ব পাৰোঁ যে P = 6 অত, যোগানৰ স্থিতিস্থাপকতা আপেক্ষিকভাৱে স্থিতিস্থাপক। দেখা গ'ল যে P = 6 অত মূল্যমানৰ একক পৰিৱৰ্তনত, যোগানৰ পৰিমাণ 1.5 গুণ অৰ্থাৎ 150% সলনি হয়।

(iii) যেতিয়া P = 4

$$Q^2 = \frac{1}{5}(4-4)$$

$$= 0$$

$$Q = 0$$

$$\therefore \frac{dP}{dQ} = 10(0) = 0$$

আৰু $\frac{dQ}{dP} = \frac{1}{0}$ বা ∞

$$\therefore Es = \frac{1}{0} \cdot \frac{4}{5} = \infty$$

$= \infty$.

গতিকে P = 4 অত Es স্থিতিস্থাপক (বা অসীমভাৱে স্থিতিস্থাপক)

(iv) যেতিয়া P = 3,

$$Q^2 = \frac{1}{5}(3-4)$$

$$= \frac{-1}{5}$$

বা $Q = \sqrt{-\frac{1}{5}}$

$Q = \sqrt{-\frac{1}{5}}$ বাস্তৱ সংখ্যা নহয়।

p = 3 ত, বাস্তৱ পদত Es সংজ্ঞাৱদ্ধ নহয়।

উদাহৰণ 10.4 ঃ x আৰু y সামগ্ৰী দুবিধৰ মুঠ উপযোগিতা ফলন এনেদৰে দিয়া আছে $u = 2x^3y + 3xy^2 + 3x + 3y$. x = 2 আৰু y = 3 ত y ৰ প্ৰান্তিক উপযোগিতা নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $u = 2x^3y + 3xy^2 + 3x + 3y$

y ৰ প্ৰান্তিক উপযোগিতা $y = \frac{\partial u}{dy}$

$$= \frac{\partial}{dy}(2x^3y + 3xy^2 + 3x + 3y)$$

$= 2x^3 + 6xy + 3$

x = 2 আৰু y = 3 ৰ বাবে

y ৰ প্রান্তিক উপযোগিতা $y = 2(2)^3 + 6(2)(3) + 3$

= 16 + 36 + 3

= 55.

উদাহৰণ 10.5 ঃ দুবিধ সামগ্রী x আৰু y ৰ মুঠ উপযোগিতা ফলন এনেদৰে দিয়া আছে $U = 5x^2y + 2xy^3 + 3x + 9y$. x = –3 আৰু y = 2 ত x আৰু y ৰ প্রান্তিক উপযোগিতা নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $U = 5x^2y + 2xy^3 + 3x + 9y$.

x অৰ প্রান্তিক উপযোগিতা $(MU_x) = \frac{\partial u}{\partial x}$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(5x^2y + 2xy^3 + 3x + 9y)$$

$= 10xy + 2y^3 + 3$ ———————— (i)

y ৰ প্রান্তিক উপযোগিতা $(MU_y) = \frac{\partial u}{\partial y}$

$$= \frac{\partial}{dy}(5x^2y + 2xy^3 + 3x + 9y)$$

$= 5x^2 + 6xy^2 + 9$ ———————— (ii)

(i) অত x = 3 আৰু y = 2 বহুৱাই, আমি পাওঁ

$MU_x = 10(3)(2) + 2(2)^3 + 3$

= 60 + 16 + 3

= 79

সেইদৰে, (ii) ত x = 3 আৰু y = 2 বহুৱাই, আমি পাওঁ

= 45 + 72 + 9

= 126.

উদাহৰণ 10.6 ঃ এখন ফার্মৰ উৎপাদন ফলন এনেদৰে দিয়া আছে $Q = K^2 + 2KL + L^3$, য'ত Q এ পৰিমাণ, L এ শ্রম আৰু K ই মূলধন বুজায়। K = 3 আৰু L = 2 ত মূলধনৰ প্রান্তিক উৎপাদক নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, উৎপাদন ফলন $Q = K^2 + 2KL + L^3$.

এতিয়া, মূলধনৰ প্রান্তিক উৎপাদন $(MP_K) = \frac{\partial Q}{\partial K}$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(K^2 + 2KL + L^3)$$

$$= 2K + 2L.$$

K = 3 আৰু L = 2 ত মূলধনৰ প্ৰান্তিক উৎপাদন হ'ল ঃ

$$= 2(3) + 2(2)$$

$$= 6 + 4$$

$$= 10.$$

উদাহৰণ 10.7 ঃ এখন ফাৰ্মৰ উৎপাদন ফলন এনেদৰে দিয়া আছে $Q = 40F + 3F^2 - F3/3 \cdot$ প্ৰান্তিক আৰু গড় উৎপাদন ফলন নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে উৎপাদন ফলন $Q = 40F + 3F^2 - F3/3$

(i) প্ৰান্তিক উৎপাদন ফলন $= \frac{d}{dF}(Q)$

$$= \frac{d}{dF}(40F + 3F^2 - F3/3]$$

$$= 40 + 6F - \frac{1}{3}F$$

$$= 40 + 6F - F^2$$

(ii) গড় উৎপাদন ফলন $= \frac{Q}{F}$

$$= \frac{(40F + 3F^2 - F3/3)}{F}$$

$$= 40 + 3F - F^2/3$$

উদাহৰণ 10.8 ঃ ভোগ ফলন এটা এনেদৰে দিয়া আছে, $C = 1000 - \frac{5000}{3+y}$.

(i) y = 97 হ'লে ভোগ কৰাৰ প্ৰান্তিক প্ৰৱণতা,

(ii) y = 97 হ'লে সঞ্চয় কৰাৰ প্ৰান্তিক প্ৰৱণতা নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে ভোগ ফলন, $C = 1000 - \frac{5000}{3+y}$.

$$= 1000 - 5000\,(3+y)^{-1}.$$

(i) $MPC = \frac{dc}{dy}$

$$= \frac{d}{dy}\{1000 - 5000(3+y)^{-1}\}$$

$$= 0 - \text{b}\text{g}\text{b}\text{g}$$

$$= \frac{5000}{(3+y)^2}$$

যেতিয়া y = 97, $MPC = \frac{5000}{(3+97)^2}$

$$MPC = \frac{5000}{(3+97)^2}$$

$$= \frac{5}{10}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$= 0.5$$

(ii) সঞ্চায় ফলনৰ সংজ্ঞা এনেধৰণৰ S = y – c

বা $S = y - 1000 + 5000\,(3+y)^{-1}$

$$\therefore MPS = \frac{ds}{dy}$$

$$= \frac{d}{dy}\left\{y - 1000 + 5000(3+y)^{-1}\right\}$$

$$= 1 - 0 + (-1)\,5000\,(3+y)^2$$

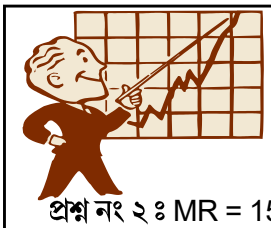
$$= 1 - \frac{5000}{(3+y)^2}$$

যেতিয়া y = 97, $MPS = 1 - \frac{5000}{(3+97)^2}$

$$= 1 - \frac{5000}{10000}$$

$$= 1 - 0.5$$

$$= 0.5$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ ঃ চাহিদা ফলন এনেদৰে দিয়া আছে, Q = 200 – 4P। চাহিদাৰ মূল্যমান স্থিতিস্থাপকতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ ঃ MR = 15 আৰু চাহিদাৰ স্থিতিস্থাপকতা 4 বুলি আছে। AR নির্ণয় কৰক।



১০.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- এই অধ্যায়টোত আমি অৰ্থবিজ্ঞানত অৱকলন গণিতৰ কিছুমান প্ৰয়োগৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিলোঁ।



১০.৬ অধিক জানিবলৈ

১) Agarwal, D.K. (2012). *Business Mathematics*, New Delhi: Vrindra Publication (p) Ltd.

২) Baruah, S. (2011). *Basic Mathematics and Its Application in Economics*, New Delhi: Trinity Press Pvt. Ltd.

৩) Bose, D. (2004). *Mathematical Economics*; New Delhi: Himalaya Publishing House.

৪) Chiang, A.C. & (2010). *Fundamental Methods of Economics Analysis*, MC Graw Hill Education India.

৫) Kandoi, Balwant (2011). *Mathematics for Business and Economics with Application*; New Delhi: Himalaya Publishing House.



১০.৭ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ আমি জানোঁ যে

$$AR = MR\left[\frac{Ed}{Ed-1}\right]$$

$$= 15\left[\frac{4}{4-1}\right]$$

$$= 15 \times \frac{4}{3}$$

= 20.



১০.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্রশ্ন নং ১ ঃ চাহিদা ফলন এনেদৰে দিয়া আছে, $q = 32 - 4p - p^2$. P = 3 ত চাহিদাৰ স্থিতিস্থাপকতা আৰু AR নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ ঃ চাহিদা ফলন $P = -2q^2 + 18$ অৰ বাবে q = 1 অত চাহিদাৰ স্থিতিস্থাপকতা আৰু MR নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ ঃ চাহিদা ৰেখা এনেদৰে দিয়া আছে, $P = (10 - 2D)(20 - D)^2$। D = 1 আৰু D = 4 অৰ বাবে চাহিদাৰ স্থিতিস্থাপকতা নির্ণয় কৰক।
এইক্ষেত্রত যদি MR = Rs 18 আৰু স্থিতিস্থাপকতা 9, AR নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ ঃ তলৰ ফলনবোৰৰ বাবে প্রান্তিক উপযোগিতা নির্ণয় কৰক।

i) $U = 9x^3 + 2x^2 + x - 7$
ii) $U = 3x^3 - 3x + 4$
iii) $U = x^2 + y^2 + 2xy^2$
iv) $U = 2x^2 + 3x^2 - 2x^2y^2$
v) $U = 2x^2y + 3xy - 3x$.

প্রশ্ন নং ৫ ঃ মুঠ ব্যয় ফলন এনেদৰে দিয়া আছে, $C = 2Q - 2Q^2 + Q^3$
(C – মুঠ, আৰু Q – উৎপাদিত সামগ্রীৰ মুঠ পৰিমাণ)
(i) গড় ব্যয় ফলন
(ii) প্রান্তিক ব্যয় ফলন
নির্ণয় কৰক। লগতে সত্যাপন কৰক যে ব্যয় ফলনৰ লঘিষ্ঠত, গড় ব্যয়, প্রান্তিক ব্যয়ৰ সমান।

প্রশ্ন নং ৬ ঃ তলত দুটা চাহিদা ৰেখা দিয়া আছে। প্রান্তিক ব্যয় আৰু চাহিদাৰ স্থিতিস্থাপকতাৰ মাজৰ সম্বন্ধ নির্ণয় কৰক।
(i) p = 1.47 – 0.1x (ii) p = 86 – 25x

প্রশ্ন নং ৭ ঃ মুঠ ব্যয় ফলন এনেদৰে দিয়া আছে
(i) $C = 2Q - 2Q^2 + Q^3$
(ii) $C = 4Q - Q^2 + 2Q^3$
(i) *AC* ফলন নির্ণয় কৰক,
(ii) *MC* ফলন নির্ণয় কৰক,
(iii) উৎপাদনৰ কোনটো স্তৰত *AC* সর্বনিম্ন ?
(iv) সত্যাপন কৰক যে লঘিষ্ঠ গড় ব্যয়ত *AC* = *MC*.

প্রশ্ন নং ৮ ঃ এবিধ সামগ্রীৰ x একক উৎপাদন ব্যয় এনেদৰে দিয়া আছে ঃ C = 3x + 200 আৰু 50 একক উৎপাদিত হয়। (i) স্থিৰ ব্যয়, (ii) পৰিবর্তনশীল ব্যয়, (iii) মুঠ ব্যয়, (iv) প্রতি এককত পৰিবর্তনশীল ব্যয়, (v) প্রতি এককত গড় ব্যয় নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৯ ঃ এবিধ সামগ্রীৰ গড় ব্যয় ফলন এনেদৰে দিয়া আছে $AC = \frac{2}{3}x + 15.2$ । মুঠ আৰু প্রান্তিক ব্যয় নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ১০ ঃ বিক্রী আয় ফলন এনেদৰে দিয়া আছে, $R = 40x - 2x^2 - 20$। গড় বিক্রী আয় আৰু প্রান্তিক বিক্রী আয় নির্ণয় কৰক।

অধ্যায় ১১ ঃ ফলনৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ

অধ্যায় গাঁথনি

১১.১ উদ্দেশ্য

১১.২ পৰিচয়

১১.৩ ফলনৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান

১১.৩.১ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান উলিওৱাৰ পদ্ধতি

১১.৪ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১১.৫ অধিক জানিবলৈ

১১.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১১.৭ আৰ্হি প্রশ্ন

১১.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- কোনো বক্ৰৰ যিবোৰ বিন্দুত গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান থাকে, সেই বিন্দুবোৰ নির্ণয় কৰিব পাৰিব
- কোনো বক্ৰৰ কোনো বিন্দুত বক্ৰটোৰ বক্ৰতা উলিয়াব পাৰিব।

১১.২ পৰিচয়

এই অধ্যায়াটিত ফলনৰ লঘিষ্ঠ মান আৰু গৰিষ্ঠ মান সম্পর্কে আলোচনা কৰা হৈছে। এই অধ্যয়াটিত লঘিষ্ঠ মান আৰু গৰিষ্ঠ মান সম্পর্কে আলোচনা কৰাৰ লগতে ইয়াৰ প্রয়োগ সম্পর্কে আলোচনা কৰা হৈছে।

১১.৩ ফলনৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান (MAXIMUM AND MINIMUM OF A FUNCTION)

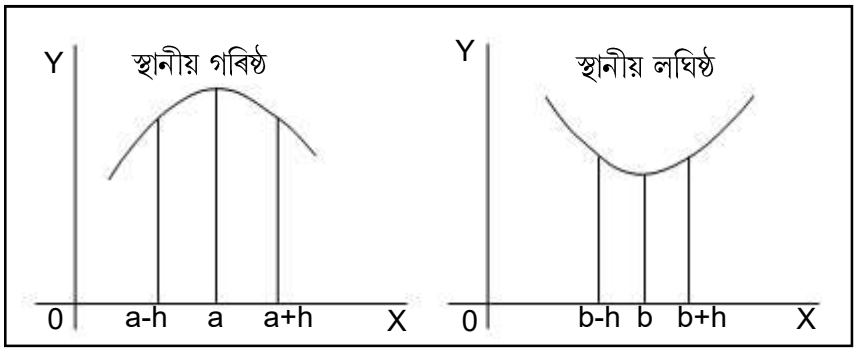
এটা ফলন f(x) অৰ x = a ত গৰিষ্ঠ মান (maximum) থাকে। যদি x = a ৰ নিকটতম সামীপ্যত f(x) এ লোৱা সকলো মানতকৈ f(a) ডাঙৰ।

ইয়াৰ অর্থ এইটোৱেই যে অতি ক্ষুদ্র ধনাত্মক h অৰ বাবে f(a) > f(a+h) আৰু f(a) > f(a–h). (চিত্র 11.1 দ্রষ্টব্য)

সেইদৰে, এটা ফলন f(x) অৰ x = bত লঘিষ্ঠ মান (minimum) থাকে যদি x = bৰ নিকটতম সামীপ্যত f(x)এ লোৱা সকলো মানতকৈ f(b) সৰু।

ইয়াৰ অর্থ এইটোৱেই যে অতি ক্ষুদ্র ধনাত্মক h অৰ বাবে f(b) < f(b+h) আৰু f(b) < f(b–h) [চিত্র ১১.১ দ্রষ্টব্য]

চিত্ৰ ১১.১ঃ স্থানীয় গৰিষ্ঠ আৰু স্থানীয় লঘিষ্ঠ মান



জ্যামিতীয়ভাৱে, এটা বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন কোনো ফলন f অৰ সেই বিন্দুত গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান থাকিব যদিহে যথাক্ৰমে সেই বিন্দুত লেখটোৰ এটা শীৰ্ষ (peak) বা গুহিকা (cavity) তাকে।

টোকা ঃ (i) ফলনৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মানক যথাক্ৰমে স্থানীয় (আপেক্ষিক) গৰিষ্ঠ মান বা স্থানীয় (আপেক্ষিক) লঘিষ্ঠ মান বুলি কোৱা হয়, কিয়নো বিন্দুটোৰ কোনো সামীপ্য সাপেক্ষে এইবোৰ ক্ৰমে গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান। গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে চৰম মান (extremum) শব্দটোৱো ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

(ii) এটা বিন্দুত স্থানীয় গৰিষ্ঠ মান আন এটা বিন্দুত স্থানীয় লঘিষ্ঠ মানতকৈ সৰু হ'ব পাৰে।

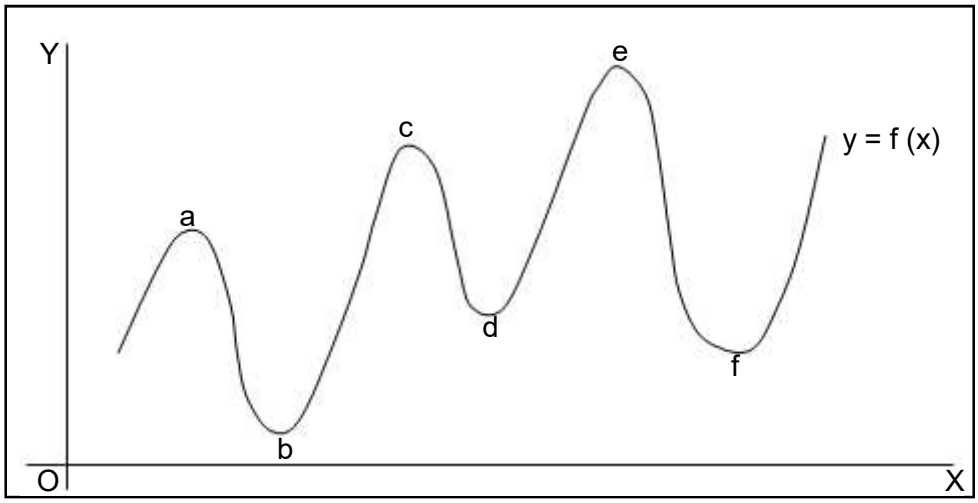
(iii) এটা ফলনৰ কেবাটাও গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান থাকিব পাৰে। এটা অবিচ্ছিন্ন ফলনৰ গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান এটাৰ পিছত এটাকৈ ওলায়।

(iv) গৰিষ্ঠ মানত, f(x) ফলনটো বৰ্ধমানৰ পৰা হ্ৰাসমানলৈ সলনি হয় আৰু লঘিষ্ঠ মানত ফলনটো হ্ৰাসমানৰ পৰা বৰ্ধমানলৈ সলনি হয়।

সৰ্বব্যাপী গৰিষ্ঠ আৰু সৰ্বব্যাপী লঘিষ্ঠ মানৰ ধাৰণা (Concept of Global Maxima and Global Minima))ঃ এতিয়ালৈকে আমি আপেক্ষিকভাৱে স্থানীয় গৰিষ্ঠ আৰু স্থানীয় লঘিষ্ঠ মানৰ ধাৰণা আলোচনা কৰি আহিছোঁ। চিত্ৰ ১১.২ ত দেখুওৱা y=f(x) ফলনটিৰ প্ৰতি মন কৰক।

চিত্ৰটিত দেখা গৈছে যে, Y=f(x) এই সমগ্ৰ ফলনটিৰ 'b' হৈছে সৰ্বনিম্ন মান; ঠিক তেনেদৰে 'e' হৈছে সৰ্বোচ্চ মান। ফলনটিৰ আন নিম্ন মান, যেনে'd' আৰু 'f' হৈছে সিহঁতৰ নিকটতম এলেকাকেইটাৰ নিম্ন মান। ঠিক তেনেদৰে, 'a' আৰু 'c' হৈছে সিহঁতৰ নিকটতম এলেকা কেইটাৰ উচ্চ মান। সেয়ে, এই মান কেইটাক ক্ৰমে স্থানীয় লঘিষ্ঠ আৰু স্থানীয় গৰিষ্ঠ বোলা হয়। আনহাতে, যিহেতু 'b' গোটেই ফলনটোৰে লঘিষ্ঠ মান, সেয়ে তাক সৰ্বব্যাপী লঘিষ্ঠ মান আৰু ঠিক তেনেদৰে, 'c' যিহেতু গোটেই ফলনটোৰে গৰিষ্ঠ মান, সেয়ে তাক সৰ্বব্যাপী গৰিষ্ঠ মান বোলা হয়। গতিকে, আমি ক'ব পাৰো যে, কোনো এক ফলনৰ একাধিক স্থানীয় লঘিষ্ঠ বা গৰিষ্ঠ মান থাকিব পাৰে, কিন্তু কেৱল মাত্ৰ এটায়েই সৰ্বব্যাপী গৰিষ্ঠ বা সৰ্বব্যাপী

চিত্ৰ ১১.২ঃ সৰ্বব্যাপী গৰিষ্ঠ আৰু সৰ্বব্যাপী লঘিষ্ঠ মান



লঘিষ্ঠ মান থাকে।

১১.৩.১ গৰিষ্ঠ মান বা লঘিষ্ঠ মান উলিওৱাৰ পদ্ধতি

প্ৰথম পদ্ধতি ঃ

1) $\frac{dy}{dx}$ নিৰ্ণয় কৰক।

2) x অৰ বাস্তৱ মানৰ বাবে $\frac{dy}{dx} = 0$ সমাধান কৰক। ধৰা হ'ল এই মানবোৰ a, b, c আদি।

3) x = a লোৱা যাওক। a ৰ একেবাৰে ওচৰৰ সৰু আৰু ডাঙৰ মানৰ বাবে $\frac{dy}{dx}$ অৰ চিন চোৱা যাওক।

4) যদি $\frac{dy}{dx}$ অৰ চিন ধনাত্মকৰ পৰা ঋণাত্মকলৈ সলনি হয়, x = a বিন্দুত f(x) লঘিষ্ঠ।

যদি $\frac{dy}{dx}$ অৰ চিন ঋণাত্মকৰ পৰা ধনাত্মকলৈ সলনি হয়, x=aৰ বিন্দুত f(x) লঘিষ্ঠ।

যদি $\frac{dy}{dx}$ অৰ চিন সলনি নহয়, তেনেহ'লে x=a বিন্দুত গৰিষ্ঠ মানো নাই, লঘিষ্ঠ মানো নাই।

দ্বিতীয় পদ্ধতি ঃ

(1) আৰু (2) প্ৰথম পদ্ধতিৰ দৰেই।

3) $\frac{d^2y}{dx^2}$ নিৰ্ণয় কৰক আৰু মান বহুৱাওক। x=a লোৱা হ'ল।

i) যদি x = a ত $\frac{d^2y}{dx^2}$ <0, তেনেহ'লে x = a ত f(x) গৰিষ্ঠ।

ii) যদি x = a ত $\frac{d^2y}{dx^2}$ >0, তেনেহ'লে x=a ত f(x) লঘিষ্ঠ।

iii) যদি x = a ত $\frac{d^2y}{dx^2}$ =0, কিন্তু $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$ তেনেহ'লে x=a ত গৰিষ্ঠ মানো নাই, লঘিষ্ঠ মানো নাই।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ

উদাহৰণ 11.1 ঃ x ৰ কি মানৰ বাবে f(x)=x(5–x) সৰ্বাধিক হ'ব? f(x)=x(5–x) ফলনটোৰ সৰ্বাধিক মান উলিয়াওক।

সমাধানঃ দিয়া আছে, f(x)=x(5–x)

$\Rightarrow f(x) = 5x - x^2$

$\therefore f'(x) = 5 - 2x$

যিকোনো চৰম মান উলিওৱাৰ প্ৰথম চৰ্তটো হ'ল-

$f'(x)=0$

$\Rightarrow 5-2x=0$

$\Rightarrow x=\frac{5}{2}$

আকৌ, $f''(x) = \frac{d}{dx}(5-2x)$

$= -2$

$f''\left(\frac{5}{2}\right) = -2 < 0$

$\therefore$ ত $x=\frac{5}{2}$ ফলনটো সৰ্বাধিক হ'ব। ফলনটোৰ সৰ্বাধিক মান হ'ল-

$= f\left(\frac{5}{2}\right)$

$= \frac{5}{2}\left(5-\frac{5}{2}\right)$

$= \frac{25}{4}$

উদাহৰণ 11.2 ঃ $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$ ৰ সৰ্বাধিক আৰু সৰ্বনিম্ন মান উলিওক।

সমাধানঃ দিয়া আছে, $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 6x^2 + 6x - 36$$
$$= 6\left(x^2 + x - 6\right)$$

সর্বাধিক বা সর্বনিম্ন মান উলিওৱাৰ প্রথম চর্তটো হ'ল-

$$\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\Rightarrow 6\left(x^2 + x - 6\right) = 0$$
$$\Rightarrow 6\left(x+3\right)\left(x-2\right) = 0$$
$$\Rightarrow x = 2 \text{ or } x = -3$$

এতিয়া, $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x + 6$

$x = 2$ ত, $\frac{d^2y}{dx^2} = 12(2) + 6 = 30 > 0$

$x = -3$ ত, $\frac{d^2y}{dx^2} = 12(-3) + 6 = -30 < 0$

গতিকে, $x = -3$ ত y ফলনটো সর্বাধিক আৰু $x = 2$ ত y ফলনটো সর্বনিম্ন।

y ৰ সর্বনিম্ন মান হ'ল-

$$y = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 36(2) + 10$$
$$= 16 + 12 - 72 + 10$$
$$= -34$$

আৰু, y ৰ সর্বধিক মান হ'ল-

$$y = 2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 36(-3) + 10$$
$$= -54 + 27 + 108 + 10$$
$$= 91$$

উদাহৰণ 11.3 ঃ দেখুৱাওক যে $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$ ফলনটো $x = 1$ ত সর্বাধিক আৰু $x = 3$ ত সর্বনিম্ন মানত উপনীত হয়।

সমাধানঃ দিয়া আছে, $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 8$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12x + 9$$
$$= 3\left(x^2 - 4x + 3\right)$$

সর্বাধিক বা সর্বনিম্ন মান উলিওৱাৰ প্রথম চর্তটো হ'ল-

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 3(x^2-4x+3)=0$$
$$\Rightarrow 3(x-1)(x-3)=0$$
$$\Rightarrow x=1,3$$

এতিয়া, $\frac{d^2y}{dx^2}=2x-4$

$x=1$,ত, $\frac{d^2y}{dx^2}=-2<0$

$x=3$,ত, $\frac{d^2y}{dx^2}=2>0$

গতিকে, $x=1$ ত y ফলনটো সৰ্বাধিক আৰু $x=3$ ত y ফলনটো সৰ্বনিম্ন।

গতিকে, y ৰ সৰ্বাধিক্ষ মান হ'ল-

$$=(1)^3-6(1)^2+9(1)-8$$
$$= -4$$

তেনেদৰে, y ৰ সৰ্বনিম্ন মান হ'ল-

$$=(3)^3-6(3)^2+9(3)-8$$
$$=-8$$

উদাহৰণ 11.4 ঃ $y=20x-2x^2$ ফলনটিৰ চৰম মান উলিয়াওক।

সমাধানঃ দিয়া আছে, $y=20x-2x^2$

যিকোনো চৰম মান উলিওৱাৰ প্রথম চর্তটো হ'ল-

$f'(x)=0$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=20\times 1-2\times 2x^{2-1}$$
$$=20-4x$$

এতিয়া, $\frac{dy}{dx}=20-4x=0$

$$\Rightarrow 4x=20$$
$$\Rightarrow x=5$$

দ্বিতীয় চর্ত্ত ঃ এতিয়া, $x=5$ ত প্রদত্ত ফলনটোৰ মান সৰ্বাধিক হ'ব নে সৰ্বনিম্ন হ'ব, সেয়া জানিবৰ বাবে আমি চাব লাগিব $f''(x)>0$ নে $f''(x)<0$।

এতিয়া, $f''(x)=\frac{d2y}{dx2}=\frac{d}{dx}(20-4x)$

$$=-4<0.$$

$\therefore x=5$, ত $y = 20x -2x^2$ প্রদত্ত ফলনটো সৰ্বধিক।

গতিকে, ফলনটোৰ সৰ্বাধিক মান হ'ল-

$$y = 20\times 5 - 2\times (5)^2$$
$$= 100 - 50$$
$$= 50$$

উদাহৰণ 11.5 ঃ $y=2x^2-16x+50$ ফলনটোৰ চৰম মান উলিয়াওক।

সমাধানঃ দিয়া আছে, $y=2x^2-16x+50$

যিকোনো চৰম মান উলিওৱাৰ প্ৰথম চৰ্তটো হ'ল- $f'(x) = 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(2x^2 - 16x + 50)$$
$$= 2\times 2x^{2-1} - 16\times 1 + 0$$
$$= 4x - 16$$

এতিয়া, $\frac{dy}{dx} = 4x - 16 = 0$

$$\Rightarrow 4x = 16$$
$$\Rightarrow x = 4$$

দ্বিতীয় চৰ্ত্ত ঃ এতিয়া, $x=4$ ত প্ৰদত্ত ফলনটোৰ মান সৰ্বাধিক হ'ব নে সৰ্বনিম্ন হ'ব, সেয়া জানিবৰ

বাবে আমি চাব লাগিব $\frac{d^2y}{dx^2}$ বা $f''(x) >0$ নে $f''(x) <0$।

এতিয়া, $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(4x - 16)$

$$= 4 > 0$$

$\therefore x = 4$ ত, $y=2x^2-16x+50$ প্ৰদত্ত ফলনটো সৰ্বধিক।

গতিকে, ফলনটোৰ সৰ্বাধিক মান হ'ল-

$$y = 2\times 4^2 - 16\times 4 + 50$$
$$= 32 - 64 + 50$$
$$= 82 - 64 = 18.$$

উদাহৰণ 11.6 ঃ $y=x^3-3x+1$ ফলনটিৰ সৰ্বাধিক আৰু সৰ্বনিম্ন মান উলিয়াওক।

সমাধানঃ দিয়া আছে, $y=x^3-3x+1$

যিকোনো চৰম মান উলিওৱাৰ প্ৰথম চৰ্তটো হ'ল-

$f'(x)=0$

এতিয়া, $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 - 3x + 1)$

$$= 3 \times x^{3-1} - 3 \times 1 + 0$$
$$= 3x^2 - 3$$

এতিয়া, $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 = 0$

$$\Rightarrow 3x^2 = 3$$
$$\Rightarrow x = \pm 1$$

দ্বিতীয় চর্ত্ত ঃ এতিয়া প্রদত্ত ফলনটোৰ মান সর্বাধিক হ'ব নে সর্বনিম্ন হ'ব, সেয়া জানিবৰ বাবে আমি চাব লাগিব f''(x) >0 নে f''(x) <0।

এতিয়া, $f''(x) = \frac{d}{dx}(3x^2 - 3)$

$$= 6x$$

(i) x = 1 ত, $f''(x) = 6 \times 1 = 6 > 0$ । গতিকে, x = 1 ত ফলনটো সর্বনিম্ন ।

(ii) x = -1 ত, $f''(x) = 6 \times (-1) = -6 < 0$ । গতিকে, x = -1 ত ফলনটো সর্বাধিক।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ নিম্নলিখিত ফলনবোৰৰ গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান নির্ণয় কৰক।

(a) $2x^2-6x+3$ (b) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ (c) $4x^3-15x^2+12x-1$



১১.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- $\frac{dy}{dx}$ এ x সাপেক্ষে y ৰ পৰিৱর্তনৰ হাৰ বুজায়।
- $f'(x)=0$ সমীকৰণ সমাধান কৰি পোৱা x অৰ মানবোৰক অচল (stationary) বা ক্রান্তিক (critical) বিন্দু বোলে। এই বিন্দুবোৰত ফলনটোৰ স্থানীয় গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মান থাকে যদি যথাক্রমে $f''(x)<0$ বা $f''(x)>0$.



১১.৫ অধিক জানিবলৈ

১) Agarwal, D.K. (2012). *Business Mathematics*, New Delhi: Vrindra Publication (p) Ltd.

২) Baruah, S. (2011). *Basic Mathematics and Its Application in Economics*, New Delhi: Trinity Press Pvt. Ltd.

৩) Bose, D. (2004). *Mathematical Economics*; New Delhi: Himalaya Publishing House.

৪) Chiang, A.C. & (2010). *Fundamental Methods of Economics Analysis*, MC Graw Hill Education India.

৫) Kandoi, Balwant (2011). *Mathematics for Business and Economics with Application*; New Delhi: Himalaya Publishing House.

১১.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (a) ধৰা হ'ল $f(x) = 2x^2-6x+3$

$\therefore f'(x)=4x-6$

গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে,

$f'(x)=0$

$\Rightarrow 4x-6=0$

$\Rightarrow x = \frac{3}{2}$

এতিয়া, $f''(x) = \frac{d}{dx}(4x-6)$

$\Rightarrow f''(x) = 4$

$\Rightarrow f''\left(\frac{3}{2}\right) = 4 > 0$

$\therefore x=\frac{3}{2}$ ত ফলনটো লঘিষ্ঠ আৰু

লঘিষ্ঠ মান = $f\left(\frac{3}{2}\right)$

$= 2\times\frac{9}{4}-6\times\frac{3}{2}+3$

$= \frac{9-18+6}{2}$

$= -\frac{3}{2}$

(b) ধৰা হ'ল $f(x) = x+\frac{1}{x}$

$\therefore f'(x) = 1-\frac{1}{x^2}$

গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে

$f'(x) = 0$

$\Rightarrow 1-\frac{1}{x^2} = 0$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow (x+1)(x-1) = 0$

$\Rightarrow x = -1, x = 1$

এতিয়া, $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$

$= 0 - \frac{-2}{x^3}$

$= \frac{2}{x^3}$

$\therefore f''(-1) = -2 < 0$

$\therefore$ $x=-1$ অত ফলনটো গৰিষ্ঠ আৰু গৰিষ্ঠ মান= $f(-1) = -1+\frac{1}{-1} = -2$.

আকৌ, $f''(1) = 2 > 0$

$\therefore$ $x=1$ অত ফলনটো লঘিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান= $f(1) = 1+1 = 2$

(c) ধৰা হ'ল $f(x) = 4x^3-15x^2+12x-1$

$\therefore f'(x) = 12x^2-30x+12$

গৰিষ্ঠ বা লঘিষ্ঠ মানৰ বাবে, $f'(x) = 0$

$\therefore 12x^2 - 30x + 12 = 0$

$\Rightarrow 6(2x^2-5x+2) = 0$

$\Rightarrow (2x-1)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}, \quad x = 2$

এতিয়া, $f''(x) = \frac{d}{dx}\left(12x^2 - 30x + 12\right)$

$= 24x-30$

$\therefore f''\left(\frac{1}{2}\right) = 12-30$

$= -18 < 0$

$\therefore$ $x=\frac{1}{2}$ ত f(x) গৰিষ্ঠ আৰু

গৰিষ্ঠ মান $= f\left(\frac{1}{2}\right)$

$= 4\times\frac{1}{8}-15\times\frac{1}{4}+12\times\frac{1}{2}-1$

$= \frac{1}{2}-\frac{15}{4}+5$

$= \frac{2-15+20}{4}$

$= \frac{7}{4}$

আকৌ, $f''(2)=24 \times 2 - 30$

$= 18 > 0$

$\therefore$ $x = 2$ ত f(x) গৰিষ্ঠ আৰু

গৰিষ্ঠ মান $= f(2)$

$= 4 \times 8 - 15 \times 4 + 12 \times 2 - 1$

$= 32 - 60 + 24 - 1$

$= 56 - 61$

$= -5$



১১.৭ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন নং ১ ঃ নিম্নলিখিত ফলনবোৰৰ কোনবোৰ বিন্দুত গৰিষ্ঠ আৰু লঘিষ্ঠ মান আছে নিৰ্ণয় কৰক-

(a) $y=9x^3-45x^2+48x+11$ (b) $y=11-12x+6x^2-x^3$

প্ৰশ্ন নং ২ ঃ সৰ্বাধিক আৰু সৰ্বনিম্ন মান উলিয়াওক -

(a) $y=\left(\frac{x^2-3x-4}{x-8}\right)$ (b) $y=2x^3-15x^2+36x+10$

প্ৰশ্ন নং ৩ ঃ x ৰ কি মানৰ বাবে নিম্নলিখিত ফলনবোৰ সৰ্বাধিক বা সৰ্বনিম্ন হ'ব ?

(a) $y=x^3-9x^2+15x-3$

(b) $y = \left(\frac{2x+1}{x^2-8x-2} \right)$

(c) $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 10$

প্ৰশ্ন নং ৪ ঃ $y = x^3 - 9x^2 + 15x + 20$ ফলনটোৰ চৰম মান উলিয়াওক -

প্ৰশ্ন নং ৫ ঃ নিম্নলিখিত ফলনবোৰৰ চৰম মান উলিয়াওক।

(a) $y = 3x^2 + 18x + 12$

(b) $y = 5x^2 - 30x + 15$

(c) $y = x^3 - 48x + 10$

*** ***** ***

অধ্যায় ১২ ঃ অর্থবিজ্ঞানত সর্বাধিকৰণৰ প্ৰয়োগ

অধ্যায় গাঁথনি

১২.১ উদ্দেশ্য
১২.২ পৰিচয়
১২.৩ অর্থবিজ্ঞানত সর্বাধিকৰণৰ প্ৰয়োগ
১২.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১২.৫ অধিক জানিবলৈ
১২.৬ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান
১২.৭ আৰ্হি প্ৰশ্ন

১২.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- লাভ সর্বাধিকৰণৰ লগত জড়িত প্ৰশ্নবোৰৰ/সমস্যাবোৰৰ সমাধান কৰিব পাৰিব
- আয় সর্বাধিকৰণৰ লগত জড়িত প্ৰশ্নবোৰৰ/সমস্যাবোৰৰ সমাধান কৰিব পাৰিব ।

১২.২ পৰিচয়

পূৰ্বৰ অধ্যায়ত আমি সর্বাধিকৰণ আৰু সর্বনিম্নকৰণৰ ধাৰণাৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিছোঁ। এই অধ্যায়ত আমি অর্থবিজ্ঞানত সর্বাধিকৰণৰ কেতবোৰ প্ৰয়োগ সমস্যাৰ বিষয়ে আলোকপাত কৰিম, বিশেষকৈ লাভ আৰু আয় সর্বাধিকৰণৰ লগত জড়িত। আমাৰ তত্ত্বগত জ্ঞানৰ পৰা আমি জানিব পাৰিছোঁ যে এগৰাকী ঔদ্যোগীয়ে সদায় তেওঁৰ আৰু লাভ সর্বাধিক কৰিব চেষ্টা কৰে। পৰৱর্তী অধ্যায়ত আমি সর্বনিম্নকৰণৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

১২.৩ অর্থবিজ্ঞানত সর্বাধিকৰণৰ প্ৰয়োগ (ECONOMIC APPLICATIONS OF MAXIMA)

এই অনুবিভাগটোত আমি মূলতঃ সর্বাধিকৰণৰ, বিশেষকৈ লাভ আৰু আয় সর্বোচ্চকৰণৰ কেতবোৰ সমস্যাৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। আমি ইতিমধ্যেই আলোচনা কৰিছোঁ যে লাভ (π) হৈছে মুঠ আয়ৰ (TR) আৰু মুঠ ব্যয় (TC)ৰ পার্থক্য। আহক আমি সর্বাধিকৰণৰ কেতবোৰ উদাহৰণ লওঁ।

উদাহৰণ 12.1 ঃ এখন ব্যৱসায়িক প্ৰতিষ্ঠানৰ চাহিদা ফলনটো এনে ধৰণৰ, $p = 12 - 3q$, য'ত p হ'ল সামগ্ৰীৰ দাম আৰু q হ'ল সামগ্ৰীৰ পৰিমাণ। p আৰু qৰ মূল্য নিৰূপণ কৰা য'ত আয় সর্বাধিক হয়। লগতে সর্বাধিক আয়ো উলিওৱা।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $p = 12 - 3q$ ..... (i)

আমি জানোঁ, মুঠ আয় (TR) = দাম (P) × পৰিমাণ (q)

$\therefore$ TR $= p.q$

$= (12-3q).q$

$= 12q - 3q^2$

আয় সর্বাধিকৰণৰ প্ৰথম অনুক্ৰমণ চৰ্তটো হ'ল, $\frac{dTR}{dq} = 0$

$$\Rightarrow \frac{dTR}{dq} = \frac{d}{dq}(12q - 3q^2)$$

$$= 12 - 6q$$

সৰ্বোচ্চ বিন্দুত, $\frac{dTR}{dq} = 0$

$\Rightarrow 12 - 6q = 0$

$\Rightarrow 6q = 12$

$\Rightarrow q = 2.$

এতিয়া, চাহিদা ফলনটো q = 2ত সৰ্বাধিক হ'ব যদিহে ফলনটোৰ দ্বিতীয় অনুক্ৰমণ চৰ্তটো সন্তুষ্ট হয়।

সৰ্বাধিকৰণৰ দ্বিতীয় অনুক্ৰমণ চৰ্তটো হ'ল, $\frac{d^2TR}{dq^2} < 0$

এতিয়া, $\frac{d^2TR}{dq^2} = \frac{d}{dq}(12 - 6q)$

$= -6 < 0$

$\frac{d^2TR}{dq^2}$ ঋণাত্মক হ'লে উক্ত চাহিদা ফলন (i) q = 2ত সৰ্বাধিক হ'ব।

সমীকৰণ (i)ত q = 2 বহুৰাই আমি পাওঁ, $p = 12 - 3.2$

$= 12 - 6 = 6$

$\therefore$ q = 2 আৰু p = 6ত সৰ্বাধিক আয়, $TR = p.q$

$= 6 \times 2$

$= 12$

উদাহৰণ 12.2 ঃ এখন প্ৰতিষ্ঠানৰ চাহিদা ফলন আৰু ব্যয় ফলন দুটা ক্ৰমে এনেদৰে দিয়া আছে, $p = 46 - 3q$ আৰু $C = 110 + 6q + \frac{q^2}{2}$। উৎপাদনৰ গোটৰ সংখ্যা/পৰিমাণ আৰু দাম উলিওৱা য'ত লাভ সৰ্বাধিক হয়। সৰ্বাধিক লাভ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, চাহিদা ফলন, $p = 46 - 3q$ ..... (i)

আৰু ব্যয় ফলন, $C = 110 + 6q + \frac{q^2}{2}$

আমি জানোঁ যে, মুঠ আয় (TR) = p.q

$= (46 - 3q)q$

$= 46q - 3q^2$

লাভ (π) = TR – TC

$= (46q - 3q^2) - \left(110 + 6q + \frac{q^2}{2}\right)$

$= 46q - 3q^2 - 100 - 6q - \frac{q^2}{2}$

$= 40q - 3q^2 - \frac{q^2}{2} - 100$

$= 40q - \frac{6q^2 - q^2}{2} - 110$

$= 40q - \frac{5q^2}{2} - 110$ ..... (ii)

লাভ সর্বাধিকৰণৰ প্রথম অনুক্রমণ চর্তটো হ'ল, $\frac{d\pi}{dq^2} > 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dq}\left(40q - \frac{5q^2}{2} - 100\right) = 0$

$\Rightarrow 40 - \frac{10q}{2} = 0$

$\Rightarrow \frac{10q}{2} = 40$

$\Rightarrow 10q = 80$

$\Rightarrow q = 8$

এতিয়া q = 8ত লাভ সর্বাধিক যদিহে দ্বিতীয় অনুক্রমণ চর্তটো পূৰণ হয়।

সর্বাধিকৰণৰ দ্বিতীয় চর্তটো হ'ল, $\frac{d^2\pi}{dq^2} > 0$

এতিয়া, $\frac{d^2\pi}{dq^2} = \frac{d}{dq}\left(40 - \frac{10q}{2}\right) = -5 < 0$

যিহেতু $\frac{d^2\pi}{dq^2}$ ঋণাত্মক হয়, লাভ ফলনটো q = 8ত সর্বাধিক হ'ব।

সমীকৰণ (ii)ত q = 8 বহুৱাই, আমি পাওঁ,

$$\text{লাভ } (\pi) = 40.8 - \frac{5.8^2}{2} - 110$$

$$= 320 - 160 - 110$$

$$= 50.$$

উদাহৰণ 12.3 ঃ এখন উৎপাদন প্ৰতিষ্ঠানৰ চাদিহা ফলনটো দিয়া আছে, p = 500 – 0.2q আৰু ব্যয় ফলন হ'ল, $C = 25q_2 + 10000$ (p = দৰ, q = পৰিমাণ আৰু C = ব্যয়)। উৎপাদিত সামগ্ৰীৰ পৰিমাণ উলিওৱা, য'ত প্ৰতিষ্ঠানটোৰ লাভ সর্বাধিক হয়। লগতে প্ৰতিষ্ঠানটোৱে ল'বলগীয়া দৰো নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, চাহিদা ফলন, p = 500 – 0.2q .....(i)

আৰু ব্যয় ফলন, (TC) = 25q + 10000

আমি জানোঁ যে, মুঠ আয়, (TR) = p.q

$$= (500 - 0.2q)q$$

$$= 500q - 0.2q^2$$

$\therefore$ লাভ (π) = TR – TC

$$= 500q - 0.2q^2 - 25q - 10000$$

$$= -0.2q^2 + 475q - 10000 \quad .....(ii)$$

লাভ সর্বাধিকৰণৰ প্ৰথম অনুক্ৰমণ চর্তটো হ'ল, $\frac{d\pi}{dq} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dq}(-0.2q^2 + 475q - 10000) = 0$$

$$\Rightarrow -0.4q + 475 = 0$$

$$\Rightarrow 0.4q = 475$$

$$\Rightarrow q = 1187.5$$

এতিয়া, q = 1187.5ত উক্ত লাভ ফলনটো সর্বাধিক হ'ব যদিহে দ্বিতীয় অনুক্ৰমণ চর্তটো পূৰণ হয়।

লাভ সর্বাধিকৰণৰ দ্বিতীয় অনুক্ৰমণ চর্তটো হ'ল, $\frac{d^2\pi}{dq^2} > 0$

এতিয়া, $\frac{d^2\pi}{dq^2} = \frac{d}{dq}(-0.4q + 475) < 0 = -0.4 < 0$

যিহেতু ঋণাত্মক, লাভ ফলন (ii) q = 1187.5ত লাভ সর্বাধিক হ'ব।

এতিয়া, q = 1187.5 চাহিদা ফলনৰ সমীকৰণত বহুৰাই আমি পাওঁ,

দৰ = 500 – 237.5 = 262.5

উত্তৰ ঃ i) লাভ সর্বাধিক কৰা সামগ্রীৰ পৰিমাণ q = 1185.5

ii) দৰ (p) = 262.5

উদাহৰণ 12.4 ঃ অপূর্ণ প্রতিযোগিতামূলক বজাৰৰ অধীনৰ প্রতিষ্ঠান এটাৰ ব্যয় আৰু চাহিদা ফলন এনেদৰে দিয়া আছে— $C = c(q) = 20 + 2q + 3q^2$

$P = f(p) = 50 – q.$

i) লাভ সর্বাধিক কৰা পৰিমাণ আৰু দৰ নির্ণয় কৰক।

ii) লাভ সর্বাধিক কৰা সামগ্রীৰ পৰিমাণ নির্ণয় কৰক যদি প্রতি একক 5 টকা GST (সামগ্রী আৰু সেৱা কৰ) আৰোপ কৰা হয়।

iii) GSTৰ হাৰ নির্ণয় কৰক যিয়ে চৰকাৰৰ কৰ আয় সর্বাধিক কৰিব।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, ব্যয় ফলন $(TC) = 20 + 2q + 3q^2$

চাহিদা ফলন $(P) = 50 – q$ .....(i)

$\therefore TR = (50 – q).q = 50q – q^2$

i) লাভ $(\pi) = TR – TC$

$= (50q – q^2) – (20 + 2q + 3q^2)$

$= 50q – q^2 – 20 – 2q – 3q^2$

$= –4q^2 + 48q – 20$ .....(ii)

লাভ সর্বাধিকৰণৰ প্রথম অনুক্রমণ চর্তটো হ'ল, $\frac{d\pi}{dq} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dq}(–4q^2 + 48q – 20) = 0$$

$$\Rightarrow –8q + 48 = 0$$

$$\Rightarrow q = \frac{48}{8} = 6$$

এতিয়া, q = 6ত লাভ সর্বাধিক হ'ব যদিহে সর্বাধিকৰণৰ দ্বিতীয় অনুক্রমণ চর্তটো পূৰণ হয়।

সর্বাধিকৰণৰ দ্বিতীয় অনুক্রমণ চর্তটো হ'ল, $\frac{d^2\pi}{dq^2} > 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dq}(–8q + 48) < 0$$

$$\Rightarrow –8 < 0$$

যিহেতু সর্বাধিকৰণৰ দ্বিতীয় চর্তটো সন্তুষ্ট হৈছে, লাভ সর্বাধিক কৰা পৰিমাণ হ'ব,

$q = 6$

$\therefore$ $q = 6$ চাহিদা ফলনত বহুৰাই আমি পাওঁ, $p = 50 - 6 = 44$

ii) 5% হাৰত GST আৰোপ কৰিলে নতুন লাভ ফলনটো হ'ব,

লাভ (π) $= TR - (TC + t.q)$ (ইয়াত t = GST ৰ হাৰ)

$= (50q - q^2) - (20 + 2q + 3q^2 + 5q)$

$= 50q - q^2 - 20 - 2q - 3q^2 - 5q$

$= -4q^2 + 43q - 20$ .....(iii)

নতুন লাভ ফলন, সমীকৰণ (iii)ৰ প্রথম অনুক্রমিক চর্তটো হ'ল, $\frac{d\pi}{dq} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dq}(-4q^2 + 43q - 20) = 0$$

$$\Rightarrow -8q + 43 = 0$$

$$\Rightarrow q = \frac{43}{8} = 5.375$$

এতিয়া, সমীকৰণ (iii) $q = 5.375$ত সর্বাধিক হ'ব দ্বিতীয় অনুক্রমিক চর্তটো পূর্ণ হ'লেহে।

দ্বিতীয় অনুক্রমিক চর্তটো হ'ল, $\frac{d^2\pi}{dq^2} < 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dq}(-8q + 43) < 0$$

$$\Rightarrow -8 < 0$$

$\therefore$ যিহেতু $q = 5.375$ত দ্বিতীয় অনুক্রমিক চর্তটো পূৰণ হৈছে, নতুন লাভ সর্বাধিক কৰা পৰিমাণ হ'ব, $q = 5.375$।

$q = 5.375$ চাহিদা ফলনত বহুৰাই, $p = 50 - 5.375 = 44.625$

গতিকে দেখা যায় যে, সামগ্রী আৰু সেৱাকৰৰ আৰোপ কৰাৰ ফলত দৰ বৃদ্ধি হৈছে আৰু লাভ হ্রাস হৈছে।

iii) ধৰা হ'ল, চৰকাৰে প্রতি একক t হাৰত সামগ্রী আৰু সেৱা কৰ আৰোপ কৰিছে। এতিয়া নতুন লাভ ফলনটো হ'ল,

$\pi = TR - (TC + t.q)$

$= (50q - q^2) - (20 + 2q + 3q^2 + tq)$

$= 50q - q^2 - 20 - 2q - 3q^2 - tq$

$= -4q^2 + 48q - tq - 20$

$= -4q^2 + q(48 - t) - 20$ .....(iv)

চৰকাৰৰ আয় সর্বাধিক কৰা কৰৰ হাৰ উলিয়াবলৈ হ'লে আমি প্রথমতে লাভ সর্বাধিক কৰা সমগ্রীৰ পৰিমাণ (q) উলিয়াব লাগিব।

এতিয়া লাভ সর্বাধিকৰণৰ প্রথম অনুক্রমণ চর্তটো হ'ল, $\frac{d\pi}{dq} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dq}\{-4q^2 + q\,(48 - t) - 20 = 0\} = 0$$

$$\Rightarrow -8q + (48 - t) = 0$$

$$\Rightarrow q = \frac{(48 - t)}{8}$$

নতুন লাভ ফলন সমীকৰণ (iv)টো $q = \frac{(48 - t)}{8}$ ত সর্বাধিক হ'ব যদিহে সর্বাধিকৰণৰ দ্বিতীয় অনুক্রমণ চর্তটো পূৰণ হয়।

সর্বাধিকৰণৰ দ্বিতীয় অনুক্রমণ চর্তটো হ'ল, $\frac{d\pi}{dq} < 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dq}(-8q + 48 - t) < 0$$

$$\Rightarrow -8 < 0$$

যিহেতু দ্বিতীয় অনুক্রমণ চর্তটো সন্তুষ্ট হৈছে, প্রতিষ্ঠানটোৰ লাভ সর্বাধিক কৰা সামগ্রীৰ পৰিমাণ হ'ব, $q = \frac{(48 - t)}{8}$

এতিয়া চৰকাৰৰ মুঠ কৰ আয় হ'ল, $T = t.q = t.\frac{(48 - t)}{8}$

$$= 6t - \frac{t^2}{8} \qquad \text{.....(v)}$$

এতিয়া Tক কৰৰ হাৰ tৰ বাবে সর্বাধিকৰণ কৰিবলৈ, প্রথম অনুক্রমণ চর্ত হ'ল,

$$\frac{dT}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(6t - \frac{t^2}{8}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 6 - \frac{2t}{8} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2t}{8} = 6$$

$$\Rightarrow t = 6 \times 4 = 24$$

অর্থাৎ t = 24ত কৰ ফলন সমীকৰণ (v) সর্বাধিক হ'ব যদিহে সর্বাধিকৰণৰ দ্বিতীয়

অনুক্রমণ চর্তটো পূৰণ হয়। সর্বাধিকৰণৰ দ্বিতীয় অনুক্রমণ চর্ত হ'ল,

$$\frac{d^2T}{dt^2} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(6 - \frac{2t}{8}\right) < 0$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{8} < 0$$

যিহেতু দ্বিতীয় অনুক্রমণ চর্ত পূর্ণ হৈছে, উক্ত ফলন (v) t = 24ত সর্বাধিক হ'ব।

$\therefore$ কৰ সর্বাধিক কৰা কৰৰ হাৰ হ'ল, t = 24 প্রতি একক।

উদাহৰণ 12.5 ঃ এখন উৎপাদন প্রতিষ্ঠানৰ তলত দিয়া ব্যয় আৰু চাহিদা ফলন আছে,

$P = 150 - 0.5q$ $C = 100 + 3q + 7q^2$

i) লাভ সর্বাধিক কৰা পৰিমাণ আৰু দৰ নির্ণয় কৰক যদি প্রতিষ্ঠানটোৱে চৰকাৰৰ পৰা প্রতি একক 3 টকাকৈ ৰাজসাহায্য লাভ কৰে।

ii) ৰাজসাহায্য নোহোৱাকৈ প্রতিষ্ঠানটোৱে উৎপাদন কৰিলেহেঁতেন নে?

iii) ৰাজসাহায্যৰ ফলত ভাৰসাম্য দৰ আৰু পৰিমাণত কিমান পৰিৱর্তন হ'ব?

সমাধান ঃ দিয়া আছে, চাহিদা ফলন $P = 150 - 0.5q$

মুঠ আয় $TR = P.q = 150q - 0.5q^2$

মুঠ ব্যয় $TC = 100 + 3q + 7q^2$

গতিকে, লাভ $(\pi) = TR - TC$

$= (150q - 0.5q^2) - (100 + 3q + 7q^2)$

$= 150q - 0.5q^2 - 100 - 3q - 7q^2$

$= -7.5q^2 + 147q - 100$ .....(i)

i) যেতিয়া চৰকাৰে প্রতি একক 3 টকাকৈ ৰাজসাহায্য দিব, ই প্রতিষ্ঠানটোৰ ব্যয় হ্রাস কৰিব। এনেদৰে লাভ ফলন হ'ব,

$\pi = TR - (TC - tq)$

$= (150q - 0.5q^2) - (100 + 3q + 7q^2 - 3q)$

$= 150q - 0.5q^2 - 100 - 3q - 7q^2 + 3q$

$= -7.5q^2 + 150q - 100$ ..... (ii)

এতিয়া উক্ত লাভ ফলনৰ সর্বাধিকৰণৰ বাবে প্রথম অনুক্রমণ চর্তটো হ'ব,

$$\frac{d\pi}{dq} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dq}(-7.5q^2 + 150q - 100) = 0$$

$$\Rightarrow (-15q + 150) = 0$$

$$\Rightarrow q = \frac{150}{15} = 10$$

উক্ত লাভ ফলন (ii) q = 10ত সর্বাধিক হ'ব যদিহে দ্বিতীয় অনুক্রমণ চর্তটো পূৰণ হয়।

সর্বাধিকৰণৰ দ্বিতীয় চর্তটো হ'ল,

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} < 0 \quad \Rightarrow \frac{d}{dq}(-15q + 150) < 0$$

$$\Rightarrow -15 < 0$$

অর্থাৎ q = 10ত দ্বিতীয় অনুক্রমণ চর্তটো পূৰণ হৈছে।

$\therefore$ q = 10

p = 150 – 0.5.10 = 150 – 5 = 145

π = $-7.5.10^2 + 150.10 - 100$

= 1500 – 850 = 650

ii) যদি ৰাজসাহায্য উঠাই দিয়া হয়, আমি লাভ ফলনটো সমীকৰণ (i)ত দেখুওৱা দৰে পাম। লাভ ফলন (i)ৰ সর্বাধিকৰণৰ প্রথম অনুক্রমণ চর্তটো হ'ল,

$$\frac{d\pi}{dq} = 0 \quad \Rightarrow \frac{d}{dq}(-7.5q^2 + 147q - 100) = 0$$

$$\Rightarrow -15q + 147 = 0$$

$$\Rightarrow q = \frac{147}{15} = 9.8$$

এতিয়া, q = 9.8ত লাভ ফলন (i) সর্বাধিক হ'ব যদিহে সর্বাধিকৰণৰ দ্বিতীয় অনুক্রমণ চর্তটো পূৰণ হয়। সর্বাধিকৰণৰ দ্বিতীয় অনুক্রমণ চর্তটো হ'ল,

$$\frac{d^2\pi}{dq^2} < 0 \quad \Rightarrow \frac{d}{dq}(-15q + 147) < 0$$

$$\Rightarrow -15 < 0$$

যিহেতু দ্বিতীয় অনুক্রমণ চর্তটো পূৰণ হৈছে, q = 9.8ত লাভ ফলন (i) সর্বাধিক হ'ব।

গতিকে, p = 150 – 0.5(9.8)

= 150 – 4.9

= 145.1

আৰু লাভ (π) = $7.5(9.8)^2 + 147(9.8) - 100$

= –720.3 + 1440.6 – 100 = 620.3

iii) যেতিয়া ৰাজসাহায্য উঠাই দিয়া হ'ব,

ক) দৰ 145.00 টকাৰ পৰা 145.1 টকালৈ বৃদ্ধি হ'ব

খ) সামগ্রীৰ পৰিমাণ 10ৰ পৰা 9.8লৈ হ্রাস হ'ব

গ) লাভ 650ৰ পৰা 620.8লৈ হ্রাস হ'ব।

উদাহৰণ 12.6 ঃ তলত উপযোগিতা ফলন দিয়া আছে $U = 8Q - Q^2$। U সর্বাধিক কৰক। Q = 3 হ'লে Uৰ মান নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ (i) দিয়া আছে, $U = 8Q - Q^2$

সর্বাধিকৰণৰ প্রথম অনুক্রমণ চর্তটো হ'ল, $\frac{dU}{dQ} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dQ}(8Q - Q^2) = 0$$

$$\Rightarrow 8 - 2Q = 0$$

$$\Rightarrow Q = 4$$

দিয়া হোৱা উপযোগিতা ফলনটো Q = 4ত সর্বাধিক হ'ব, যদিহে দ্বিতীয় অনুক্রমণ চর্তটো পূৰণ হয়।

সর্বাধিক দ্বিতীয় অনুক্রমণ চর্তটো হ'ল, $\frac{d^2U}{dQ_2} < 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dQ}(8 - 2Q) < 0$$

$$\Rightarrow -2 < 0$$

যিহেতু দ্বিতীয় অনুক্রমণ চর্তটো পূৰণ হৈছে, Q = 4ত উপযোগিতা ফলন U সর্বাধিক হ'ব।

(i) যেতিয়া Q = 3, $U = 8.3 - 3^2 = 24 - 9 = 15$ একক ইউটিল।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ ঃ এখন উৎপাদন প্রতিষ্ঠানৰ ব্যয় ফলন দিয়া আছে $C = 5x^2 - 4x - 10$, য'ত C হ'ল মুঠ ব্যয় আৰু x হ'ল উৎপাদন। প্রতি একক উৎপাদনত 3 টকাকৈ কৰ আৰোপ কৰা হ'ল, যিখিনি মুঠ ব্যয়ত যোগ হ'ল। যদি বজাৰ চাহিদা ফলনটো p = 100 – 3x হয়, য'ত p প্রতি একক দৰ হয়, লাভ সর্বাধিকৰণ হোৱা উৎপাদনৰ পৰিমাণ আৰু দৰ নির্ণয় কৰক।

.....

.....

.....

.....

.....



১২.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

এই অধ্যায়ত আমি প্রধানত তলৰ ধাৰণাকেইটি আলোচনা কৰিলোঁ—

- লাভ সর্বাধিকৰণৰ সমস্যাৱলী।
- আয় সর্বাধিকৰণৰ সমস্যাৱলী।



১২.৫ অধিক জানিবলৈ

ইংৰাজী গ্রন্থ ঃ

১) Agarwal, D.K. (2012). *Business Mathematics*, New Delhi: Vrindra Publication (p) Ltd.

২) Baruah, S. (2011). *Basic Mathematics and Its Application in Economics*, New Delhi: Trinity Press Pvt. Ltd.

৩) Bose, D. (2004). *Mathematical Economics*; New Delhi: Himalaya Publishing House.

৪) Chiang, A.C. & (2010). *Fundamental Methods of Economics Analysis*, MC Graw Hill Education India.

৫) Kandoi, Balwant (2011). *Mathematics for Business and Economics with Application*; New Delhi: Himalaya Publishing House.



১২.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ আমি জানোঁ যে মুঠ আয় = দৰ × উৎপাদনৰ পৰিমাণ,

অর্থাৎ $R = (100 - 3x).x = 100 - 3x^2$

প্রতি একক 3 টকাকৈ কৰ আৰোপ কৰাৰ পিছত ব্যয় ফলন হ'য়,

$C = 5x^2 + 4x + 10 + 3x = 5x^2 + 7x + 10$

এতিয়া, লাভ $(\pi) = R - C$

$= (100x - 3x^2) - (5x^2 + 7x + 10)$

$= -8x^2 + 93x - 10$

দুয়ো দিশত xৰ বিপৰীতে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ, $\frac{d\pi}{dx} = -16 + 93$

এতিয়া, $\frac{d\pi}{dx} = 0 \Rightarrow x = \frac{93}{16} = 5.8125$

লগতে, $\frac{d^2\pi}{dx^2} = -16 = -ve$

গতিকে x = 5.8125 ত লাভ সৰ্বাধিক

গতিকে, লাভ সৰ্বাধিক কৰা পৰিমাণ হ'ল 5.8125 একক।

দৰ p = 100 – 3 × 5.8125 = 82.56



১২.৭ আৰ্হি প্ৰশ্ন

ক) চমু প্ৰশ্ন ঃ

প্ৰশ্ন নং১ঃ চাহিদা ফলন দিয়া আছে, $q = 25 - \frac{1}{4}p$, q আৰু pৰ মান নিৰ্ণয় কৰক, য'ত আয় সৰ্বাধিক হয়।

প্ৰশ্ন নং২ঃ এক নিৰ্দিষ্ট সামগ্ৰীৰ মুঠ আয় ৰেখাডাল দিয়া আছে, $TR = 12x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$, উৎপাদনৰ পৰিমাণ উলিৱাওক, য'ত গড় আয় AR সৰ্বাধিক হয়।

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ যদি $Q = \sqrt{300 - \frac{p}{2}}$ চাহিদা ফলন হয়, উৎপাদনৰ পৰিমাণ উলিয়াওক, য'ত আয় সৰ্বাধিক হয়।

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ যদি এখন উৎপাদন প্ৰতিষ্ঠানৰ বজাৰ চাহিদা ফলনটো 4ptx – 16 = 0 আৰু গড় ব্যয় ফলনটো তলত দিয়া ধৰণৰ হয়, $AC = \frac{4}{x} + 2 - 0.3x + 0.05x^2$। উৎপাদনৰ পৰিমাণ xৰ মান উলিয়াওক, যিয়ে সৰ্বাধিক লাভ প্ৰদান কৰে।

ক) দীঘলীয়া প্ৰশ্ন ঃ

প্ৰশ্ন নং১ঃ দিয়া আছে, $TR = 83x^2 - 4x - 21$, য'ত x = উৎপন্নৰ পৰিমাণ, TR = মুঠ আয়, TC = মুঠ ব্যয়, উৎপন্নৰ পৰিমাণ উলিৱাওক, য'ত লাভ সৰ্বাধিক হ'ব আৰু লগতে সৰ্বাধিক লাভ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং২ঃ এগৰাকী একচেটীয়া ব্যৱসায়ীৰ তলত দিয়া চাহিদা আৰু ব্যয় ফলন আছে—

$p = f(x) = 100 - 5x$

$c = c(x) = x^2 + 4x + 5$

লাভ সৰ্বোচ্চ কৰা উৎপন্নৰ পৰিমাণ আৰু সৰ্বোচ্চ লাভ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ এটি উদ্যোগ প্ৰতিষ্ঠানৰ চাহিদা ফলন আৰু গড় ব্যয় ফলন উভয়ে ৰৈখিক। দেখুৱাওক যে লাভ সৰ্বাধিক কৰা উৎপাদনৰ পৰিমাণ শূন্য লাভৰ উৎপাদনৰ পৰিমাণৰ আধা।

প্ৰশ্ন নং ৪-৬ঃ এগৰাকী একচেটীয়া ব্যৱসায়ীৰ চাহিদা আৰু ব্যয় ফলন তলত দিয়া ধৰণৰ আৰু প্ৰতি একক উৎপন্ন t হাৰত কৰ আৰোপ কৰা হ'ল। t বিপৰীতে দৰ, সৰ্বাধিক লাভ আৰু চৰকাৰী আয়ৰ পৰিৱৰ্তন নিৰ্ণয় কৰক। লগতে চৰকাৰে আহৰণ কৰিব পৰা সৰ্বাধিক আয় নিৰূপণ কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ $x_d = \frac{p}{4} - 3$ $TC = x^2 + 2x$

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ $p = 12 - 4x_d$ $TC = 8x + x^2$

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ $x_d = 75 - 3p$ $TC = 100 + 3x$

প্ৰশ্ন নং ৭ঃ যদি এগৰাকী একচেটীয়া ব্যৱসায়ীৰ চাহিদা বিধিটো $p = \beta + \alpha x$ আৰু মুঠ ব্যয় ফলন, $C = ax^2 + bx + c$ হয়, একচেটীয়া ব্যৱসায়ীজনৰ উৎপন্নৰ পৰিমাণ আৰু দৰ নিৰ্ণয় কৰক, যদি প্ৰতি একক 2 টকাকৈ কৰ চৰকাৰে আৰোপ কৰে।

প্ৰশ্ন নং ৮ঃ যদি চাহিদা বিধিটো $p = 12 - 5Q$ আৰু লগতে মুঠ ব্যয় $C = -Q^3 - 3Q^3$, 20% বিক্ৰীকৰ আৰোপ কৰিলে কৰৰ প্ৰভাৱত দৰত হোৱা পৰিৱৰ্তন নিৰ্ণয় কৰক। যদি (কৰৰ পৰিৱৰ্তে) চৰকাৰে 1% ৰাজসাহায্য প্ৰদান কৰে, দৰ কিমান হ'ব উলিৱাওক। যদি 10% বিক্ৰীকৰ আৰোপ কৰা হয়, লাভ কিমান হ'ব উলিৱাওক।

প্ৰশ্ন নং ৯ঃ চাহিদা ফলন দিয়া আছে, $p = (10 - x)^2$ আৰু ব্যয় ফলন দিয়া আছে, $C = (55 - 8x^2)$। সৰ্বাধিক লাভ নিৰ্ণয় কৰক। প্ৰতি একক 9 টকাকৈ কৰ আৰোপ কৰিলে দৰৰ ওপৰত কি প্ৰভাৱ পৰিলেহেঁতেন?

প্ৰশ্ন নং ১০ঃ চাহিদা ফলন দিয়া আছে, $p = 100 - 0.5x^2$, আৰু ব্যয় ফলন দিয়া আছে এনেদৰে, $C = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 108x$। ভাৰসাম্য উৎপাদন নিৰ্ণয় কৰক। প্ৰতি একক উৎপাদনৰ ওপৰত। টকাকৈ কৰ আৰোপ কৰিলে ভাৰসাম্য দৰ, উৎপাদন আৰু লাভৰ পৰিৱৰ্তন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ১১ঃ চাহিদা ফলনটো দিয়া আছে, $P = 12 - x^2$, আৰু ব্যয় ফলন দিয়া আছে, $C = -\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 + 10$, য'ত P-এ দৰ বুজাইছে আৰু x-এ উৎপাদনৰ পৰিমাণ বুজাইছে। প্ৰতিষ্ঠানটোৰ লাভ সৰ্বাধিক কৰা উৎপন্নৰ পৰিমাণ নিৰ্ণয় কৰক। দৰ আৰু লাভৰ ওপৰত প্ৰতি একক 12 টকাকৈ কৰৰ প্ৰভাৱ কি হ'ব উলিয়াওক। প্ৰাপ্ত ফলাফলক বিশ্লেষণ কৰক। যদি ব্যয় ফলনটো $C = x^3 + 4x^2 + 10$ হয়, মুঠ কৰ আয় সৰ্বাধিক কৰা কৰৰ হাৰ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ১২ঃ চাহিদা ফলন আৰু ব্যয় ফলন দিয়া আছে ক্ৰমে, $p = 90 - x^2$ আৰু $C = 10 + 12x^2 + 3x^3$। উৎপাদন প্ৰতিষ্ঠানটো যদি একচেটীয়া ব্যৱসায়ী হয়, তেওঁৰ লাভ সৰ্বাধিকাৰী উৎপাদনৰ পৰিমাণ নিৰ্ণয় কৰক। লাভ আৰু দৰৰ ওপৰত প্ৰতি একক 10 টকা কৰৰ প্ৰভাৱ কি হ'ব?

প্ৰশ্ন নং ১৩ঃ এখন উৎপাদন প্ৰতিষ্ঠানৰ মুঠ ব্যয় ফলনটো দিয়া আছে, $c = 5x^2 + 4x + 10$, য'ত c আৰু x ক্ৰমে মুঠ ব্যয় আৰু উৎপন্ন। প্ৰতি একক উৎপাদনৰ ওপৰত 3 টকাকৈ কৰ আৱোপ কৰা হ'ল, যিটো উৎপাদন ব্যয়ত যোগ হ'ল। যদি বজাৰ চাহিদা তলত দিয়া থাকে, $p = 100 - 3x$, য'ত p হ'ল সামগ্ৰীৰ প্ৰতি একক দৰ, লাভ সৰ্বাধিক কৰা উৎপন্নৰ পৰিমাণ আৰু দৰ উলিয়াওক।

*** ***** ***

অধ্যায় ১৩ ঃ অর্থবিজ্ঞানত সর্বনিম্নকৰণৰ প্ৰয়োগ

অধ্যায় গাঁথনি

১৩.১ উদ্দেশ্য
১৩.২ পৰিচয়
১৩.৩ অর্থবিজ্ঞানত সর্বনিম্নকৰণৰ প্রয়োগ
১৩.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১৩.৫ অধিক জানিবলৈ
১৩.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
১৩.৭ আৰ্হি প্রশ্ন

১৩.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- লাভ সর্বনিম্নকৰণৰ লগত জড়িত প্রশ্নবোৰৰ/সমস্যাবোৰৰ সমাধান কৰিব পাৰিব
- আয় সর্বনিম্নকৰণৰ লগত জড়িত প্রশ্নবোৰৰ/সমস্যাবোৰৰ সমাধান কৰিব পাৰিব ।

১৩.২ পৰিচয়

পূর্বৰ অধ্যায়ত আমি সর্বাধিকৰণৰ কেতবোৰ প্রয়োগৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিছোঁ। এই অধ্যায়ত আমি অর্থবিজ্ঞানত সর্বনিম্নকৰণৰ কেতবোৰ প্রয়োগ সমস্যাৰ ওপৰত আলোকপাত কৰিম আৰু সেইবোৰ কেনেকৈ সমাধান কৰিব লাগে তাৰ ওপৰত আলোচনা কৰিম।

১৩.৩ অর্থবিজ্ঞানত সর্বনিম্নকৰণৰ প্রয়োগ (ECONOMIC APPLICATIONS OF MINIMA)

অর্থবিজ্ঞানত সর্বনিম্নকৰণে সাধাৰণতে ব্যয় সর্বনিম্নকৰণক জড়িত কৰে। উদাহৰণ স্বৰূপে আমি তলৰ উদাহৰণবিলাকলৈ মন কৰোঁ।

উদাহৰণ 13.1 ঃ এখন ব্যৱসায়িক প্রতিষ্ঠানৰ ব্যয় ফলনটো এনে ধৰণৰ, $c(q) = q^3 - 6q^2 + 15q$। সামগ্রীৰ পৰিমাণ উলিয়াওক, যিয়ে গড় আয় (AC) সর্বনিম্ন কৰে। ইয়াত qএ সামগ্রীৰ পৰিমাণ বুজাইছে।

সমাধান ঃ ব্যয় ফলনটো দিয়া আছে, $c(q) = q^3 - 6q^2 + 15q$

$$\text{গড় আয়, } (AC) = \frac{q^3 - 6q^2 + 15q}{q}$$

$$= q^2 - 6q + 15 \quad \text{.....(i)}$$

সর্বনিম্নকৰণৰ প্ৰথম অনুক্ৰমণ চর্তটো হ'ল, $\frac{d(AC)}{dq} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dq}\left(q^2 - 6q + 15\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2q - 6 = 0$$

$$\Rightarrow q = \frac{6}{2} = 3$$

q = 3ত সমীকৰণ (i)ৰ গড় ব্যয় ফলনটো সর্বনিম্ন হ'ব তেতিয়া যদিহে সর্বনিম্নকৰণৰ দ্বিতীয় অনুক্ৰমণ চর্তটো পূৰণ হয়। সর্বনিম্নকৰণৰ দ্বিতীয় অনুক্ৰমণ চর্তটো হ'ল,

$$\frac{d^2(AC)}{dq^2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dq}(2q - 6) > 0$$

$$\Rightarrow 2 > 0$$

যিহেতু q = 3ত দ্বিতীয় অনুক্ৰমণ চর্তটো পূৰণ হৈছে, q = 3ত গড় ফলনটো সর্বনিম্ন হ'ব।

গতিকে, গড় ব্যয় সর্বনিম্ন কৰা উৎপন্নৰ পৰিমাণ হ'ল, q = 3

সমীকৰণ (i)ৰ পৰা, সর্বনিম্ন গড় ব্যয় $AC = 3^2 - 6.3 + 15 = 6.$

উদাহৰণ 13.2 ঃ এখন উৎপাদন প্ৰতিষ্ঠানৰ মুঠ ব্যয়ৰ ফলনটো দিয়া আছে এনেদৰে, $C = 300q - 10q^2 + \frac{1}{3}q^3$। উৎপাদনৰ পৰিমাণ উলিয়াওক, য'ত প্ৰতিষ্ঠানটোৰ প্ৰান্তিক ব্যয় আৰু গড় ব্যয় সর্বনিম্ন হ'ব।

সমাধান ঃ সমীকৰণ (i)ত ব্যয় ফলন দিয়া আছে,

$$= 300q - 10q^2 + \frac{1}{3}q^3$$

$$\therefore MC = \frac{dc}{dq}$$

$$= \frac{d}{dq}\left(300q - 10q^2 + \frac{1}{3}q^3\right)$$

$$= 300 - 20q + q^2 \qquad \text{.....(i)}$$

সমীকৰণ (i)ত থকা প্ৰান্তিক ব্যয় ফলনটো সর্বনিম্নকৰণ কৰিবলৈ প্ৰথম অনুক্ৰমণ চর্তটো হ'ল,

$$\frac{d(MC)}{dq} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dq}(300 - 20q + q^2) = 0$$

$$\Rightarrow -20 + 2q = 0$$

$$\Rightarrow q = \ = 10$$

q = 10ত সমীকৰণ (i)ত থকা প্ৰান্তিক ব্যয় ফলনটো সৰ্বনিম্ন হ'ব যদিহে সৰ্বনিম্নকৰণৰ দ্বিতীয় অনুক্ৰমণ চৰ্তটো পূৰণ হয়। সৰ্বনিম্নকৰণৰ দ্বিতীয় অনুক্ৰমণ চৰ্তটো হ'ল,

$$\frac{d^2(MC)}{d^2q} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{d(-20+2q)}{dq} > 0$$

$$\Rightarrow 2 > 0$$

যিহেতু দ্বিতীয় অনুক্ৰমণ চৰ্তটো পূৰণ হৈছে, q = 10ত প্ৰান্তিক ব্যয় সৰ্বনিম্ন হ'ব।

এতিয়া, $AC = \frac{TC}{q}$

$$= \frac{\left(300q - 10q^2 + \frac{1}{3}q^3\right)}{q}$$

$$= 300 - 10q + \frac{1}{3}q^2 \qquad \text{.....(ii)}$$

সমীকৰণ (ii)ত থকা গড় ব্যয় ফলনটো সৰ্বনিম্নকৰণ কৰিবলৈ প্ৰথম অনুক্ৰমণ চৰ্তটো হ'ল,

$$\frac{d(AC)}{dq} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\left(300 - 10q + \frac{1}{3}q^2\right)}{dq} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dq}(300) - \frac{d}{dq}(10q) + \frac{1}{3}\frac{d}{dq}(q^2) = 0$$

$$\Rightarrow -10 + \frac{2}{3}q = 0$$

$$\Rightarrow q = 10 \times \frac{3}{2} = 15$$

q = 15ত সমীকৰণ (ii)ত থকা গড় ব্যয় ফলনটো সর্বনিম্নকৰণ তেতিয়াহে হ'ব বুলি ক'ব পাৰিম যেতিয়া সর্বনিম্নকৰণৰ দ্বিতীয় অনুক্ৰমণ চর্তটো পূৰণ হ'ব। সর্বনিম্নকৰণৰ দ্বিতীয় অনুক্ৰমণ চর্তটো হ'ল,

$$\frac{d^2(AC)}{dq^2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dq}\left(-10 + \frac{2}{3}q\right) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} > 0$$

দেখা গৈছে যে দ্বিতীয় অনুক্ৰমণ চর্তটো পূৰণ হৈছে। গতিকে q = 15ত গড় ব্যয় ফলনটো সর্বনিম্ন হ'ব।

গতিকে, প্ৰান্তিক ব্যয় সর্বনিম্ন হ'ব 10 একক পৰিমাণত, আৰু

গড় ব্যয় সর্বনিম্ন হ'ব q = 15 একক পৰিমাণত।

উদাহৰণ 13.3 ঃ প্ৰমাণ কৰক যে ACৰ সর্বনিম্ন বিন্দুত MC = AC।

সমাধান ঃ ধৰা হওক, $TC = f(Q)$

$$\therefore \quad AC = \frac{TC}{Q}$$

$$MC = \frac{d}{dQ}TC$$

$$\therefore \quad TC = AC \times Q \qquad \text{.....(i)}$$

এতিয়া, সমীকৰণ (i)ক Qৰ কাৰণে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{d}{dQ}TC = \frac{d}{dQ}(AC \times Q)$$

$$\Rightarrow MC = AC\frac{dQ}{dQ} + Q\frac{dAC}{dQ}$$

$$\Rightarrow MC = AC.1 + Q.\text{ACৰ ঢাল}$$

$$\Rightarrow MC - AC = Q.\text{ACৰ ঢাল}$$

গতিকে, ACৰ ঢাল $= \frac{1}{Q}(MC - AC),\ Q > 0$

ওপৰৰ পৰা এইটো স্পষ্ট হয় যে যেতিয়া MC = AC, ACৰ ঢাল = 0 (মন কৰিবলগীয়া যে ACৰ সর্বনিম্ন বিন্দুত ACৰ ঢাল শূন্য হয়।)

অর্থাৎ, ACৰ সর্বনিম্ন বিন্দুত MC = AC হয়।

উদাহৰণ 13.4 ঃ এটা ব্যৱসায়িক প্ৰতিষ্ঠানৰ পণ্য প্ৰস্তুতকৰণ ব্যয় তলত দিয়া ধৰণৰ—

স্থিৰ ব্যয় ঃ প্ৰতি একক Rs. 1,000/-

কেঁচা সামগ্ৰী ব্যয় ঃ প্ৰতি একক Rs. 2/-

শ্ৰমিকৰ ওপৰত ব্যয় ঃ প্ৰতি q একক উৎপাদনৰ বাবে)

গড় ব্যয় সৰ্বনিম্ন কৰিবলৈ প্ৰতিষ্ঠানটোৱে কিমান একক উৎপাদন কৰিব উলিয়াওক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে,

স্থিৰ ব্যয় ঃ প্ৰতি একক Rs. 1,000/-

কেঁচা সামগ্ৰী ব্যয় ঃ প্ৰতি একক Rs. 2/-

শ্ৰমিকৰ ওপৰত ব্যয় ঃ $\frac{q^2}{90}$ প্ৰতি q একক উৎপাদনৰ বাবে)

এতিয়া, যিহেতু উৎপাদনৰ পৰিমাণ যিয়েই নহওক স্থিৰ ব্যয় একেই থাকে, q একক উৎপাদনৰ বাবে প্ৰতিষ্ঠানটোৰ মুঠ ব্যয় ফলনটো এনেদৰে আহৰণ কৰা হ'ব,

$$C = 1000 + 2.q + \frac{q^2}{90}$$

গড় ব্যয়, $(AC) = = \frac{1000 - 2.q + \frac{q^2}{90}}{q}$

$$= \frac{1000}{q} + 2 + \frac{q}{10} \qquad \text{.....(i)}$$

সমীকৰণ (i)ৰ গড় ব্যয় ফলনটো সৰ্বনিম্নকৰণৰ প্ৰথম অনুক্ৰমণ চৰ্তটো হ'ল,

$$\frac{d(AC)}{dq} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\left(\frac{1000}{q} + 2 + \frac{q}{90}\right)}{dq} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\left(\frac{1000}{q}\right)}{dq} + \frac{d(2)}{dq} + \frac{d\left(\frac{q}{90}\right)}{dq} = 0$$

$$\Rightarrow 1000\frac{d}{dq}q^{-1} + \frac{d\left(\frac{q}{90}\right)}{dq} = 0$$

$$\Rightarrow 1000(-1)q^{-1-1} + \frac{1}{90} = 0$$

$\Rightarrow q^2 = 1000 \times 90 = 90000$

$\Rightarrow q = \pm\sqrt{900000}$

$= 300$ (যিহেতু উৎপাদন কেতিয়াও ঋণাত্মক হ'ব নোৱাৰে।)

সমীকৰণ (i)ৰ গড় ব্যয় ফলনটো সর্বনিম্ন তেতিয়া হ'ব যেতিয়া সর্বনিম্নকৰণৰ দ্বিতীয় অনুক্ৰমণ চর্তটো পূৰণ হ'ব। সর্বনিম্নকৰণৰ দ্বিতীয় অনুক্ৰমণ চর্তটো হৈছে,

$$\frac{d^2(AC)}{dq^2} > 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\left(-1000\frac{1}{q^2}+\frac{1}{90}\right)}{dq} > 0$$

$$\Rightarrow -1000\frac{d}{dq}\left(\frac{1}{q^2}\right) > 0$$

$$\Rightarrow -1000(-2)q^{-2-1} > 0$$

$$\Rightarrow 2000\frac{1}{q^3} > 0$$

যিহেতু দ্বিতীয় অনুক্ৰমণ চর্তটো পূৰণ হৈছে, q = 300ত গড় ব্যয় ফলনটো সর্বনিম্ন হ'ব।

গতিকে, q = 300ত AC সর্বনিম্ন হয়।

সমীকৰণ (i)ৰ পৰা, যেতিয়া q = 300

$$AC = \frac{1000}{300}+2+\frac{300}{90}$$

$$= \frac{10}{3}+2+\frac{30}{9}$$

$$= \frac{30+18+30}{9}$$

$$= \frac{78}{9}$$

$$= 8.67$$

এনেদৰে প্ৰতিষ্ঠানটোৱে সর্বনিম্ন AC প্ৰতি একক 8.67 হোৱাৰ বাবে 300 একক উৎপাদন কৰিব লাগিব।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১ ঃ যদি C মুঠ ব্যয়, x উৎপন্নৰ পৰিমাণ আৰু মুঠ উৎপাদন ফলনটো $C = (2 + 3x^2)^2$ হয়, প্ৰান্তিক ব্যয় উলিওৱা।

.....

.....

.....

.....

.....

প্ৰশ্ন নং ২ ঃ $X = 3KL^2 + 4K^2L + 2L + 2K$ উৎপাদন ফলনটোৰ বাবে $K = 1$ আৰু $L = 2$ত শ্ৰমৰ প্ৰান্তিক উৎপাদনশীলতা উলিওৱা।

.....

.....

.....

.....

প্ৰশ্ন নং ৩ ঃ তলত দিয়া উৎপাদন ফলনৰ পৰা $\frac{\partial Q}{\partial L}$ আৰু $\frac{\partial Q}{\partial K}$ উলিওৱা—

$Q = 24KL - 10L^2 - 8K^2$

.....

.....

.....

.....

প্ৰশ্ন নং ৪ ঃ তলত দিয়া উপযোগিতা ফলনৰ পৰা x আৰু yৰ প্ৰান্তিক উপযোগিতা উলিওৱা—

$u = 5xy - y^2$

.....

.....

.....

.....



১৩.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

এই অধ্যায়টোত আমি—

- ব্যয় সর্বনিম্নকৰণৰ কেতবোৰ প্ৰশ্ন/সমস্যা সমাধানৰ ওপৰত চকু ফুৰালোঁ।



১৩.৫ অধিক জানিবলৈ

ইংৰাজী গ্ৰন্থ ঃ

১) Agarwal, D.K. (2012). *Business Mathematics*, New Delhi: Vrindra Publication (p) Ltd.

২) Baruah, S. (2011). *Basic Mathematics and Its Application in Economics*, New Delhi: Trinity Press Pvt. Ltd.

৩) Bose, D. (2004). *Mathematical Economics*; New Delhi: Himalaya Publishing House.

৪) Chiang, A.C. & (2010). *Fundamental Methods of Economics Analysis*, MC Graw Hill Education India.

৫) Kandoi, Balwant (2011). *Mathematics for Business and Economics with Application*; New Delhi: Himalaya Publishing House.



১৩.৬ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ আমি প্ৰান্তিক ব্যয় ক অৱকলনৰ চেইন নিয়ম অনুপাতে উলিয়াব পৰোঁ

এনেদৰে, $C = (2 + 3x^2)^2$

ধৰা হ'ল, $y = (2 + 3x^2)$ আৰু $C = y^2$

গতিকে, প্ৰান্তিক ব্যয় $\left(\frac{dC}{dx}\right) = \frac{dC}{dy} \times \frac{dy}{dx}$

$= 2y(6x)$

$= 2(2 + 3x^2)(6x)$

$= (4 + 6x^2)(6x)$

$= 24x + 36x^3$

ওলোটাকৈ, মুঠ ব্যয় (C) = $(2 + 3x^2)^2$

$= 4 + 12x^2 + 9x^2$ ... ... $[(a + b)^2$ সূত্ৰ]

গতিকে, MC $\left(\text{i.e.,}\frac{dC}{dx}\right) = 24x + 36x^3$

২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ MP_L i.e., $\frac{\partial X}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}[3KL^2 + 4K^2L + 2L + 2K]$

$= 6LK + 4K^2 + 2$ (K ধ্ৰুৱক)

K = 1 আৰু L = 2ত, $= 6(2)(1) + 4(1)^2 + 2$

$= 12 + 4 + 2$

$= 18$

৩নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ আমাক উৎপাদন ফলনটো দিয়া আছে, $Q = 24KL - 10L^2 - 8K^2$

এতিয়া, $\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial}{\partial L}[24KL - 10L^2 - 8K^2]$

$= 24K - 20L$

তেনেদৰে, $\frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{\partial}{\partial K}[24KL - 10L^2 - 8K^2]$

$= 24L - 16K$

৪নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ উপযোগিতা ফলনটো দিয়া আছে, $u = 5xy - y^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[5xy - y^2\right] = 5y$$

তেনেদৰে $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[5xy - y^2]$

$= 5x - 2y$



১৩.৭ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন নং ১ঃ এটি সুলভ গ্ৰামোফোন Rs. P দৰত বিক্ৰী কৰা হয় আৰু জনা যায় যে, ইয়াৰ বাৰ্ষিক চাহিদা x হ'ল, $x = \left[\frac{90}{(P+5)}\right] - 6$। কিমান দৰ আৰু পৰিমাণত মুঠ আয় সৰ্বাধিক হ'ব উলিৱাওক।

প্ৰশ্ন নং ২ঃ এগৰাকী উপভোক্তাৰ উপযোগিতা ফলন দিয়া আছে এনেদৰে, $U = X_1X_2 - 10X_1$, য'ত X_1 আৰু X_2 হ'ল উপভোকৃত দুবিধ সামগ্ৰীৰ পৰিমাণ। অনুকূলতম X_1

আৰু X_2ৰ মান নিৰ্ণয় কৰক, যদিহে তেওঁৰ আয় 116 আৰু সামগ্ৰী দুবিধৰ দৰ ক্ৰমে 2 টকা আৰু 8 টকা হয়।

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ এজন পৰিভ্ৰমী চালকে 100 গৰাকী যাত্ৰীলৈকে প্ৰতি যাত্ৰীৰ বিপৰীতে 136 টকাকৈ আৰু তাৰ ওপৰত প্ৰতি 10 গৰাকীৰ বিপৰীতে 4 টকাকৈ ৰেহাই দিয়ে। চালকজনে সৰ্বাধিক টকা আহৰণ কৰিব পৰা যাত্ৰীৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ এখন উৎপাদন প্ৰতিষ্ঠানে ইয়াৰ ব্যয় আৰু আয় গাঁথনি পৰীক্ষণ কৰিলে আৰু নিৰ্ধাৰণ কৰিলে যে C হ'ল ব্যয়, R মুঠ আয় আৰু X হ'ল উৎপাদন গোটৰ সংখ্যা যি তলত দিয়া ব্যয় আৰু আয় ফলনৰ লগত জড়িত। $C = 100 + 0.015X^3$ আৰু $R = 3x$। কোম্পানীটোৰ লাভ সৰ্বাধিক কৰা উৎপাদনৰ হাৰ নিৰ্ণয় কৰক। লাভ উলিয়াওক যেতিয়া $X = 120$।

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ এবিধ সামগ্ৰীৰ চাহিদা ফলন হ'ল, $P = 100e^{-x/400}$, যাৰ বজাৰ দৰ Rs. P হ'লে x একক চাহিদা হয়। দৰ আৰু উৎপাদনৰ পৰিমাণ উলিয়াওক, যিয়ে মুঠ আয় সৰ্বাধিক কৰে।

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ এবিধ সামগ্ৰীৰ চাহিদা ফলন হ'ল, $P = 1000 - 2x$ আৰু মুঠ ব্যয় ফলন হ'ল, $C = (x) = x^3 - 59x^2 + 1315x + 2000$। ভাৰসাম্য দৰ আৰু উৎপাদনৰ পৰিমাণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৭ঃ কোনো এক নিৰ্দিষ্ট সামগ্ৰী উৎপাদনৰ ব্যয় C দিয়া আছে, $C = q^2 - 6q + 38$, য'ত q হ'ল প্ৰস্তুতকৃত সামগ্ৰীৰ পৰিমাণ। Cৰ সৰ্বনিম্ন মান নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৮ঃ ধৰা হ'ল, x একক উৎপাদনৰ মুঠ ব্যয় TC হ'ল, $C = x^3 - 6x^2 + 15x$, উৎপাদনৰ সংখ্যা উলিয়াওক যাৰ বাবে গড় ব্যয় সৰ্বনিম্ন হ'ব।

*** ***** ***

অধ্যায় ১৪ ঃ অনুকলন আৰু অনুকলনৰ পদ্ধতি (INTEGRATION AND METHODS OF INTEGRATION)

অধ্যায় গাঁথনি

১১.১ উদ্দেশ্য
১১.২ পৰিচয়
১১.৩ সৰল ফলনৰ অনুকলন
১৪.৪ নিশ্চিত অনুকূলন
১৪.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১৪.৬ অধিক জানিবলৈ
১৪.৭ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
১৪.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

১৪.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- অৱকলনৰ বিপৰীত প্রক্রিয়া হিচাপে সৰল ফলনৰ অনুকলন সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- নিশ্চিত অনুকলন সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- অনিশ্চিত অনুকূলন আৰু নিশ্চিত অনুকূলনৰ কিছু সমস্যা সমাধান কৰিব পাৰিব।

১৪.২ পৰিচয়

অনুকলনৰ ব্যাখ্যা দুই ধৰণে কৰিব পাৰি। অধোলিখিত দুই ধৰণৰ সমস্যা সমাধানৰ লগত ই জড়িত।

(i) কোনো ফলনৰ অৱকলজ জনা থাকিলে, ফলনটো নির্ণয়,

(ii) নির্দিষ্ট চর্তৰ অধীনত কোনো বক্রই আগুৰা অংশৰ কালি নির্ণয়।

প্রথম ক্ষেত্রৰ পৰা অনিশ্চিত অনুকলনৰ ক্রমবিকাশ হৈছে আৰু দ্বিতীয় ক্ষেত্রৰ পৰা নিশ্চিত অনুকলনৰ ক্রমবিকাশ হৈছে।

ইংৰাজী integration শব্দৰ অর্থ হ'ল summation (সংকলন)। দৰাচলতে ই এটা যোগফলৰ সীমা।

এই অধ্যায়ত আমি অনিশ্চিত অনুকলন আৰু অনুকলনৰ কিছুমান পদ্ধতি সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম।

১৪.৩ সৰল ফলনৰ অনুকলন (INTEGRATION OF SIMPLE FUNCTIONS)

কোনো নির্দিষ্ট অন্তৰালত সংজ্ঞাৱদ্ধ কোনো ফলনৰ অৱকলজ কেনেদৰে নির্ণয় কৰিব লাগে সেয়া আমি জানো। $y = f(x)$ এটা ফলন হ'লে, ইয়াৰ অৱকলজক সাধাৰণতে $f'(x)$ বা $\frac{dy}{dx}$ এৰে বুজোৱা হয়। f' দিয়া থাকিলে, f কেনেদৰে উলিয়াব লাগে, সেই সম্বন্ধে এই অধ্যায়ত আলোচনা কৰা হ'ব। অনুকলন হ'ল অৱকলনৰ বিপৰীত প্ৰক্ৰিয়া, অর্থাৎ, অৱকলজ দিয়া থাকিলে ফলনটো নির্ণয় কৰিব লাগে।

আমি জানো যে (i) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^4}{4}+c\right)=x^3$ | ইয়াত C এটা বাস্তৱ সংখ্যা।

এই ক্ষেত্ৰত $\frac{x^4}{4}+c$ হ'ল x^3 অৰ এটা প্ৰতিঅৱকলজ (antiderivative) [বা অনুকল (integral) বা পূৰ্বগ (primitive)]। স্পষ্টতঃ, $\frac{x^4}{4}+C$ হ'ল x^3 অৰ এটা প্ৰতি অৱকলজ । গতিকে দেখা গ'ল যে ফলনৰ প্ৰতি অৱকলজ অদ্বিতীয় (unique) নহয়।

সংজ্ঞা ঃ যি ফলন এটা প্ৰদত্ত ফলনৰ অৱকলজ, সেইটো ফলনটোৰ প্ৰতি অৱকলজ (বা অনুকল বা পূৰ্বগ)।

অন্তৰাল I ত সংজ্ঞাৱদ্ধ $\phi(x)$ ফলনৰ বাবে $\frac{d}{dx}[\phi(x)]=f(x),$ হ'লে যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা C $\frac{d}{dx}[\phi(x)+C]=f(x), x\in I.$ গতিকে $\phi(x)+C$ এ $f(x)$ অৰ অৱকলজ বুজায়, $\int f(x)dx$ এ প্ৰতি অৱকলজ বুজায়, অর্থাৎ $\int f(x)dx=\phi(x)+C.$

$\int f(x)dx$ অক x সাপেক্ষে $f(x)$ অৰ প্ৰতি অৱকলজ বুলি কোৱা হয়। প্ৰতি অৱকলজ উলিওৱা উপায়ক অনুকলন (integration) বুলি কোৱা হয়। '$\int$' হ'ল অনুকলন চিহ্ন। '$\int$' চিহ্নটো হ'ল প্ৰসাৰিত (elongated) S যাক 'sum' শব্দৰ আদি আখৰৰ পৰা লোৱা হৈছে।

কিছুমান প্ৰাথমিক ফল

উপৰিউক্ত সংজ্ঞা আৰু কিছুমান প্ৰামাণিক অৱকলজৰ সহায়ত আমি তলৰ অনুকলন সূত্ৰবোৰ পাওঁ।

	অৱকলজ	অনুকল (বা প্ৰতিঅৱকলজ)
1.	$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n$	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ (n\neq -1)$
2.	$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$	$\int e^x dx=e^x+C$

3. $\frac{d}{dx}\left(\log^x\right)=\frac{1}{x}$ $\int\frac{1}{x}dx=\log x+c$

4. $\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)]$ $\int[f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

$=f'(x)+g'(x)$ $=F(x)+c_1+G(x)+c_2$

$=F(x)+G(x)+C$ যত $C=c_1+c_2$

টোকাঃ

(i) ওপৰৰ (i) নম্বৰত উল্লিখিত অনুকূলনৰ নীতিটোত অনুকূলনৰ ঘাত নীতি (Power rule of integration) বুলি জনা যায়।

(ii) ওপৰৰ (ii) নম্বৰত উল্লিখিত অনুকূলনৰ নীতিটোত অনুকূলনৰ সূচকীয় নীতি (Exponential rule of integration) বুলি জনা যায়।

(iii) ওপৰৰ (iii) নম্বৰত উল্লিখিত অনুকূলনৰ নীতিটোত অনুকূলনৰ ঘাতাংকীয় নীতি (Lograithmic rule of integration) বুলি জনা যায়।

(iv) ওপৰৰ (iv) নম্বৰত উল্লিখিত অনুকূলনৰ নীতিটোত অনুকূলনৰ যোগ নীতি (Sum rule of integration) বুলি জনা যায়।

(v) অনুকূলনৰ পূৰণ নীতি - $\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$

উদাহৰণ 14.1 ঃ মান নির্ণয় কৰক (i) $\int x^4dx$ (ii) $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ (iii) $\int 3^x dx$

সমাধান ঃ (i) $\int x^4dx=\frac{x^{4+1}}{4+1}+C=\frac{x^5}{5}+C$

(ii) $\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-½}dx=\frac{x^{-½+1}}{-½+1}+C=2\sqrt{x}+C$

(iii) $\int 3^x dx=\frac{3^x}{\log_e 3}+C$

উদাহৰণ 14.2 ঃ মান নির্ণয় কৰক $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

সমাধান ঃ $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$

$=\int\left(x+2+\frac{1}{x}\right)dx$

$=\int xdx+\int 2dx+\int\frac{1}{x}dx$ (P-3 ধর্মৰ সহায়ত)

$$= \frac{x^{1+1}}{1+1} + C_1 + 2\int dx + \log x + C_2$$

$$= \frac{x^2}{2} + C_1 + 2x + C_3 + \log x + C_2$$

$$= \frac{x^2}{2} + 2x + \log x + C \qquad (\text{ইয়াত } C_1 + C_2 + C_3 = C)$$

উদাহৰণ 14.3 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক– (i) $\int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}\, dx$

(ii) $\int \frac{3x^4 + 7x + 5}{2\sqrt{x}}\, dx$

সমাধান ঃ (i) $\int \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x - 1}\, dx$

$$= \int \frac{(x-1)(x^2+1)}{(x-1)} dx$$

$$= \int (x^2 + 1) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + x + C$$

(ii) $\int \frac{3x^4 + 7x + 5}{2\sqrt{x}}\, dx$

$$= \int \left(\frac{3}{2} x^{7/2}\, dx + \frac{7}{2} x^{1/2} + \frac{5}{2} x^{-1/2} \right) dx$$

$$= \frac{3}{2}.\frac{2}{9} x^{9/2} + \frac{7}{2}.\frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{5}{2}.\frac{2}{1} x^{1/2} + C$$

$$= \frac{1}{3} x^{9/2} + \frac{7}{3} x^{3/2} + 5\sqrt{x} + C$$

উদাহৰণ 14.4 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক– $\int x^5 dx$

সমাধান ঃ $\int x^5 dx = \frac{1}{1+5} x^{5+1} + c = \frac{1}{6} x^6 + c$

উদাহৰণ 14.5 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক– $\int dx$

সমাধান ঃ $\int dx = \frac{1}{0+1} x^{0+1} + c = x + c$

উদাহৰণ 14.6 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক– $\int \frac{1}{x^2} dx$

সমাধান ঃ $\int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx$

$$= \frac{1}{-2+1} x^{-2+1} + c = -x^{-1} + c$$
$$= -\frac{1}{x} + c$$

উদাহৰণ 14.7 ঃ মান নির্ণয় কৰক– $\int \left(2x^2 + x^3\right) dx$

সমাধান ঃ $\int \left(2x^2 + x^3\right) dx$

$$= \int 2x^2 dx + \int x^3 dx$$
$$= 2 \times \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{3+1}}{3+1} + c$$
$$= \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 + c$$

উদাহৰণ 14.8 ঃ মান নির্ণয় কৰক– $\int \left(2x^2 + \sqrt{x} + \frac{x}{4}\right) dx$

সমাধান ঃ $\int \left(2x^2 + \sqrt{x} + \frac{x}{4}\right) dx$

$$= \int 2x^2 dx + \int \sqrt{x} dx + \frac{x}{4}$$
$$= 2 \times \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{1}{4}\frac{x^2}{2} + C$$
$$= \frac{2}{3} x^3 + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{8} + c$$
$$= \frac{2}{3} x^3 + \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^2}{8} + c$$

উদাহৰণ 14.9 ঃ মান নির্ণয় কৰক– $\int 5\sqrt{x} dx$

সমাধান ঃ $\int 5\sqrt{x} dx$

$$= 5 \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= 5 \times \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= 5 \times \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{10}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$$

উদাহৰণ 14.10 ঃ মান নির্ণয় কৰক– $\int (3x+2)^2 \, dx$

সমাধান ঃ $\int (3x+2)^2 \, dx$

$$= \int \left(9x^2 + 12x + 4\right) dx$$

$$= \int 9x^2 dx + \int 12x dx + \int 4 dx$$

$$= 9 \times \frac{x^{2+1}}{2+1} + 12 \times \frac{x^{1+1}}{1+1} + 4x + c$$

$$= \frac{9}{3} x^3 + \frac{12}{2} x^2 + 4x + c = 3x^3 + 6x^2 + 4x + c$$

উদাহৰণ 14.11 ঃ মান নির্ণয় কৰক– $\int \left(6e^x - 2x^3 + \frac{5}{x}\right) dx$

সমাধান ঃ $\int \left(6e^x - 2x^3 + \frac{5}{x}\right) dx$

$$= \int 6e^x dx - \int 2x^3 dx + \int \frac{5}{x} dx$$

$$= 6e^x - 2 \times \frac{x^{3+1}}{3+1} + 5 \log x + c$$

$$= 6e^x - \frac{1}{2} x^4 + 5 \log x + c$$

উদাহৰণ 14.12 ঃ মান নির্ণয় কৰক– $\int \left(e^x + \frac{1}{x^2}\right) dx$

সমাধান ঃ $\int \left(e^x + \frac{1}{x^2}\right) dx$

$$= \int e^x dx + \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$= e^2 + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c$$

$$= e^2 + \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$= e^x - \frac{1}{x} + c$$

উদাহৰণ 14.13 ঃ মান নির্ণয় কৰক– $\int\left(5e^x - x^{-2} + \frac{4}{x}\right)dx$

সমাধান ঃ $\int\left(5e^x - x^{-2} + \frac{4}{x}\right)dx$

$$= \int 5e^x dx - \int x^{-2}dx + \int \frac{4}{x}dx$$

$$= 5e^x - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 4\log x + c$$

$$= 5e^x + x^{-1} + 4\log x + c$$

$$= 5e^x + \frac{1}{x} + 4\log x + c$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ অৱকলজ নির্ণয় কৰক–

(i) $\int x^3\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$ (ii) $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx$

প্রশ্ন নং ২ঃ মান নির্ণয় কৰক– (i) $\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - x + 1}\,dx$ (ii) $\int \frac{x^{-1/3} + \sqrt{x} + 2}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

১৪.৪ নিশ্চিত অনুকূলনঃ ধাৰণা আৰু পৰিমাপ

ইমান পৰে আমি অধ্যায়টিত অনিশ্চিত অনুকূলন (indefinite integrals) ৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিছোঁ। আমি অনুকূলৰ সংজ্ঞা এনেদৰে আগবঢ়াইছোঁ- $\int f(x)dx = \phi(x) + c$ । এই ক্ষেত্রত c ৰ মান অজ্ঞাত। সেয়ে, আমি ইয়াৰ অনিশ্চিত অনুকূলন বুলি কৈছোঁ। এই অনিশ্চিত অনুকূলন f(x) ক আমি এনেদৰে লিখিব পাৰোঁ F(x) + K। এতিয়া যদি x ৰ দুটা মান পাওঁ, যি

দুটা মানৰ ভিতৰতে প্ৰদত্ত ফলনটোৰ আদিক্ষেত্ৰ (domain) থাকে, তেতিয়া আমি ফলনটোৰ x ৰ সৰ্বাধিক মান (ধৰাহ'ল x_h) আৰু x ৰ সৰ্বনিম্ন মান (ধৰাহ'ল x_l) উলিয়াব পাৰোঁ। এইদৰে, আমি সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মানৰ পার্থক্যটো উলিয়াব পাৰোঁ। এইদৰে উপনীত হোৱা মানটো অনুকূলনৰ ধ্ৰুৱক (constant: c) ৰ ওপৰত নিভৰশীল নহয়। সাংকেতিকভাৱে-

$$\int_{x_l}^{x_h} F(x)dx = [F(x_h) + K] - [F(x_l) + K]$$

$$= F(x_h) + K - F(x_l) - K$$

$$= F(x_h) - K - F(x_l)$$

উদাহৰণ 14.14 : সমাধান কৰক $\int_2^4 2x^2 dx$

সমাধানঃ $2x^2dx$ ৰ অনুকূলনটো হৈছে-

$$\int 2x^2 dx = 2\frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{2}{3}x^3$$

$$\therefore \int_2^4 2x^2 dx = \frac{2}{3}(4)^3 - \frac{2}{3}(2)^3$$

$$= \frac{2}{3}(64-8) = \frac{112}{3}$$

উদাহৰণ 14.15 : সমাধান কৰক (i) $\int_0^{10} 2x dx$ (ii) $\int_2^3 x^3 dx$ (iii) $\int_2^3 (x^2 + 6x + 7)dx$

(iv) $\int_{10}^{25} 100x^{-2} dx$

সমাধানঃ (i) $\int 2x dx$ ৰ অনুকূলনটো হৈছে-

$$\int 2x dx = 2\int x dx$$

$$= 2\frac{x^{1+1}}{1+1}$$

$$= x^2$$

$$\therefore \int_0^{10} 2x dx = 10^2 - 0^2 = 100$$

(ii) x^3dx ৰ অনুকূলনটো হৈছে –

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{x^4}{4}$$

$$\therefore \int_2^3 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_2^3$$

$$= \frac{81}{4} - \frac{16}{4} = \frac{1}{4}(81-16) = \frac{65}{4} = 16\frac{1}{4}$$

(iii) $(x^2 + 6x + 7)dx$ ৰ অনুকূলনটো হৈছে –

$$\int (x^2 + 6x + 7)dx = \left[\frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{6x^{1+1}}{1+1} + 7x\right]$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} + 7x\right]$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} + 3x^2 + 7x\right]$$

$$\therefore \int_2^3 (x^2 + 6x + 7)dx = \left[\frac{3^3}{3} + 3(3)^2 + 7(3)\right] - \left[\frac{2^3}{3} + 3(2)^2 + 7(2)\right]$$

$$= \left[\frac{27 + 3^4 + 7(3)^2}{3}\right] - \left[\frac{8 + 9(2)^2 + 7(2)(3)}{3}\right]$$

$$= \left[\frac{27 + 81 + 63}{3}\right] - \left[\frac{8 + 36 + 42}{3}\right]$$

$$= \frac{171}{3} - \frac{86}{3}$$

$$= \frac{1}{3}(85) = 28\frac{1}{3}$$

(iv) $100x^{-2}dx$ ৰ অনুকূলনটো হৈছে –

$$\int 100x^{-2}dx = 100\frac{x^{-2+1}}{-2+1} = 100x^{-1}$$

$$\therefore \int_{10}^{25} 100x^{-2}dx = -100(25)^{-1} - [-100(10)^{-1}]$$

$$= -\frac{100}{25} - \left[-\frac{100}{10}\right]$$

$$(25)^{-1} = \frac{1}{25}$$

$$(10)^{-1} = \frac{1}{10}$$

$$= -\frac{100}{25} + \frac{100}{10}$$

$$= -4 + 10 = 6$$

উদাহৰণ 14.16 : মান উলিয়াওক $\int_2^5 2x dx$

সমাধান : $\int_2^5 2x dx$

$$= 2 \times \left[\frac{x^2}{2}\right]_2^5$$

$$= 2 \times \left(\frac{5^2}{2} - \frac{2^2}{2}\right)$$

$$= 2 \times \left(\frac{25-4}{2}\right) = 21$$

উদাহৰণ 14.17 : মান উলিয়াওক $\int_1^5 \frac{12}{x} dx$

সমাধান : $\int_1^5 \frac{12}{x} dx$

$$= 12[\log x]_1^5$$

$$= 12(\log 5 - \log 1)$$

উদাহৰণ 14.18 : মান উলিয়াওক $\int_2^4 3x^2(x^3+1)dx$

সমাধান : $\int_2^4 3x^2(x^3+1)dx$

$$= \int_2^4 (3x^5 + 3x^2)dx$$

$$= 3\left[\frac{x^6}{6}\right]_2^4 + 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4$$

$$= \frac{1}{2}\left(4^6 - 2^6\right) + (4^3 - 2^3)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(4032\right) + (64 - 8)$$

$$= 2016 + 56 = 2072$$

উদাহৰণ 14.19 : মান উলিয়াওক $\int_2^4 2x^2 dx$

সমাধান : $\int_2^4 2x^2 dx$

$$= 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4$$

$$= \frac{2}{3}(4^3 - 2^3)$$

$$= \frac{2}{3}(64 - 8)$$

$$= \frac{2}{3} \times 56 = \frac{112}{3}$$

উদাহৰণ 14.20 : মান উলিয়াওক : (1) $\int_0^{10} 2x dx$ (2) $\int_2^3 x^3 dx$

সমাধান : **(1)** $\int_0^{10} 2x dx$

$$= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2}(10^2 - 0) = 100$$

(2) $\int_2^3 x^3 dx$

$$= \left[\frac{x^4}{4}\right]_2^3$$

$$= \frac{1}{4}\left[3^4 - 2^4\right]$$

$$= \frac{1}{4}(81-16) \quad = \frac{1}{4} \times 65 = \frac{65}{4}$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰক– (i) $\int_2^3 (x^2+6x+7)dx$

(ii) $\int_{10}^{25} (100x^{-2})dx$

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ প্ৰমাণ কৰক : (i) $\int_0^2 (2x+7)dx = 18$ (ii) $\int_1^2 (x^2+4x+3)dx = \frac{34}{3}$



১৪.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- অৱকলন আৰু অনুকলন দুটা পৰস্পৰ বিপৰীত প্ৰক্ৰিয়া।
- সংকলন এটাৰ সীমা উলিওৱাৰ পদ্ধতি হিচাপেও অনুকলনৰ সংজ্ঞা দিব পাৰি।
- যি ফলন এটা প্ৰদত্ত ফলনৰ অৱকলজ, সেইটো ফলনটোৰ প্ৰতি অৱকলজ (বা অনুকল বা পূৰ্বগ)।
- কিছুমান প্ৰামাণিক অৱকলজৰ সহায়ত আমি কিছুমান প্ৰামাণিক অনুকল পাওঁ।
- অনুকলৰ কেইটামান দৰকাৰী ৰূপ হ'ল

  (i) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + C$

  (ii) $\int \{f(x)\}^n f'(x)dx = \frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} + C, \quad n \neq -1$

  (iii) $\int f'(ax+b)dx = \frac{1}{a}f(ax+b) + C$

- দুটা ফলনৰ পূৰণফলৰ বাবে এটা প্ৰয়োজনীয় সূত্ৰ হ'ল

$$\int uv\,dx = u\int v dx - \int \left\{\frac{d}{dx}(u).\int v dx\right\} dx$$



১৪.৬ অধিক জানিবলৈ

১) Agarwal, D.K. (2012). *Business Mathematics*, New Delhi: Vrindra Publication (p) Ltd.

২) Baruah, S. (2011). *Basic Mathematics and Its Application in Economics*, New Delhi: Trinity Press Pvt. Ltd.

৩) Bose, D. (2004). *Mathematical Economics*; New Delhi: Himalaya Publishing House.

৪) Chiang, A.C. & (2010). *Fundamental Methods of Economics Analysis*, MC Graw Hill Education India.

৫) Kandoi, Balwant (2011). *Mathematics for Business and Economics with Application*; New Delhi: Himalaya Publishing House.



১৪.৭ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) $\int x^3\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

$$=\int x^3\left(x^2+\frac{1}{x^2}+2x.\frac{1}{x}\right)dx=\int\left(x^5+x+2x^3\right)dx$$

$$=\frac{x^6}{6}+\frac{x^2}{2}+2\frac{x^4}{4}+C$$

$$=\frac{x^6}{6}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2}+C\,.$$

(ii) $\int\frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{1+2x+x^2}{\sqrt{x}}dx$

$$=\int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+x^{\frac{3}{2}}\right)dx$$

$$=\int x^{-\frac{1}{2}}dx+2\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{\frac{3}{2}}dx$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2.\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) $\int \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - x + 1}dx = \int \frac{\left(x^2+1\right)^2 - x^2}{x^2 - x + 1}dx$

$$= \int \frac{\left(x^2 + 1 + x\right)\left(x^2 + 1 - x\right)}{x^2 - x + 1}dx$$

$$= \int \left(x^2 + x + 1\right)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + C\,.$$

(ii) $\int \frac{x^{-\frac{1}{3}} + \sqrt{x} + 2}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int \frac{x^{-\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{2}} + 2}{x^{\frac{1}{3}}}dx$

$$= \int \left(\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} + \frac{2}{x^{\frac{1}{3}}} \right)dx$$

$$= \int \left(x^{-\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{1}{3}} \right)dx$$

$$= \int \left(x^{-\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{6}} + 2x^{-\frac{1}{3}} \right)dx$$

$$= \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + \frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1} + 2\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + \frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + 2\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C$$

$$= 3x^{\frac{1}{3}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + 3x^{\frac{2}{3}} + C\,.$$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) $\int_2^3 (x^2+6x+7)dx$

$$= \int_2^3 x^2dx + \int_2^3 6xdx + \int_2^3 7dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 + 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 + 7\left[x\right]_2^3$$

$$= \frac{1}{3}(3^3-2^3) + 3(3^2-2^2) + 7(3-2)$$

$$= \frac{1}{3}\times 21 + 3\times 5 + 7$$

$$= \frac{1}{3}\times 19 + 22$$

$$= \frac{19+66}{3} = \frac{85}{3}$$

(ii) $\int_{10}^{25} (100x^{-2})dx$

$$= 100\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_{10}^{25}$$

$$= 100\left[-\frac{1}{x}\right]_{10}^{25}$$

$$= -100\left[\frac{1}{25}-\frac{1}{10}\right]$$

$$= -100\left[\frac{2-5}{50}\right]$$

$$= -100\left(\frac{-3}{50}\right) = 6$$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ **(i)** আৰু **(ii)** নিজে চেষ্টা কৰক।



১৪.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

A. মান নিৰ্ণয় কৰক ঃ

1. $\int \frac{x^4}{x^2+1}dx$ 2. $\int\left(1+\frac{1}{1+x^2}-\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{5}{x\sqrt{x^2-1}}+3^x\right)dx$

3. $\int \frac{4^x+3^x}{5^x}dx$

B. অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰক—

1. $\int \frac{5}{x^2-8x+25}dx$ 2. $\int \frac{1}{3-2x-x^2}dx$

3. $\int \frac{1}{x\left(x^n+1\right)}dx$ 4. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+2}}dx$

5. $\int \frac{1}{\sqrt{6+x-x}}dx$ 6. $\int \frac{x+2}{2x^2+6x+5}dx$ 7. $\int \frac{x^2+2}{x^2-5x+6}dx$

C. মান নিৰ্ণয় কৰক ঃ

1. $\int \sqrt{5x^2+8x+4}\,dx$ 2. $\int \frac{3x+2}{x^3-6x^2+11x-6}dx$

3. $\int \frac{x^2+x-1}{x^2+x-6}dx$ 4. $\int \frac{3x}{\left(x^2-4\right)\left(x+1\right)}dx$

5. $\int \frac{x}{\left(1+x\right)\left(1+x^2\right)}dx$ 6. $\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)\left(x^2+3\right)}dx$

7. $\int \frac{2x+1}{\left(x+2\right)\left(x-3\right)^2}dx$

*** ***** ***

অধ্যায় ১৫ ঃ অর্থনৈতিক সমস্যাত অনুকলন গণিতৰ প্ৰয়োগ

অধ্যায় গাঁথনি

১৫.১ উদ্দেশ্য
১৫.২ পৰিচয়
১৫.৩ প্ৰান্তিক ফলনৰ পৰা মুঠ ফলন নিৰ্ণয়
১৫.৪ ভোক্তাৰ উদ্বৃত্তৰ পৰিমাপ
১৫.৫ উৎপাদনকাৰীৰ উদ্বৃত্তৰ পৰিমাপ
১৫.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১৫.৭ অধিক জানিবলৈ
১৫.৮ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান
১৫.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন

১৫.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- প্ৰান্তিক ফলনক সংশ্লিষ্ট চলক সাপেক্ষে অনুকলন কৰি প্ৰান্তিক ফলনৰ পৰা (প্ৰান্তিক বিক্ৰী আয়, প্ৰান্তিক ব্যয়, সঞ্চয় কৰাৰ প্ৰান্তিক প্ৰৱণতা, ভোগ কৰাৰ প্ৰান্তিক প্ৰৱণতা ইত্যাদি) মুঠ ফলন (যেনে মুঠ বিক্ৰী আয়, মুঠ ব্যয়, সঞ্চয় ফলন, ভোগ ইত্যাদি) নিৰ্ণয় কৰিব পাৰিব
- নিশ্চিত অনুকলৰ সহায়ত ভোক্তাৰ উদ্বৃত্ত আৰু উৎপাদনকাৰীৰ উদ্বৃত্ত নিৰ্ণয় কৰিব পাৰিব।

১৫.২ পৰিচয়

অৰ্থবিজ্ঞানত অনুকলন গণিত বহুলভাৱে ব্যৱহৃত হয়। অনুকলন অৱকলনৰ বিপৰীত প্ৰক্ৰিয়া। যিকোনো মুঠ ফলন অৱকলন কৰি প্ৰান্তিক ফলন পোৱা যায়। গতিকে, প্ৰান্তিক ফলনৰ পৰা মুঠ ফলন উলিয়াবলৈ হ'লে, আমি প্ৰান্তিক ফলনক সংশ্লিষ্ট চলক সাপেক্ষে অনুকলন কৰিব লাগিব। উদাহৰণস্বৰূপে, যদি TR = R (Q), য'ত Q হ'ল বিক্ৰী কৰা সামগ্ৰীৰ পৰিমাণ, তেনেহ'লে TR ফলনক Q সাপেক্ষে অৱকলন কৰি MR পোৱা যায়।

অৰ্থাৎ $MR = \frac{d}{dQ} TR = \frac{d}{dQ} R(Q) = R'(Q)$

যিহেতু অনুকলন, অৱকলনৰ বিপৰীত প্ৰক্ৰিয়া, গতিকে MR ফলনক Q সাপেক্ষে অনুকলন কৰি MR ফলনৰ পৰা TR ফলন নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।

অর্থাৎ $TR = \int MRdQ = \int R^{/}(Q)dQ$

সেইদৰে, প্রান্তিক ব্যয় ফলন, ভোগ কৰাৰ প্রান্তিক প্রৱণতা ফলন, সঞ্চয় কৰাৰ প্রান্তিক প্রৱণতা ফলনৰ পৰা ক্রমে মুঠ ব্যয় ফলন, ভোগ ফলন, সঞ্চয় ফলন নির্ণয় কৰিবলৈ অনুকলন ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

তদুপৰি, ভোক্তাৰ উদ্বৃত্ত আৰু উৎপাদনকাৰীৰ উদ্বৃত্ত নির্ণয় কৰিবলৈ নিশ্চিত অনুকলন ব্যৱহাৰ কৰা হয়। এই অধ্যায়ত আমি অর্থবিজ্ঞানত অনুকলনৰ কেইটামান দৰকাৰী প্রয়োগ সম্বন্দে আলোচনা কৰিম।

১৫.৩ প্রান্তিক ফলনৰ পৰা মুঠ ফলন নির্ণয় (DERIVATION OF TOTAL FUNCTIONS FROM MARGINAL FUNCTIONS)

(a) **প্রান্তিক বিক্রী আয় (Marginal Revenue: MR) ফলনৰ পৰা মুঠ বিক্রী আয় (Total Revenue : TR) নির্ণয় ঃ**

উৎপাদন (Output) সাপেক্ষে মুঠ বিক্রী আয়ৰ অৱকলজ হ'ল প্রান্তিক বিক্রী আয়। সেয়ে উৎপাদন সাপেক্ষে প্রান্তিক বিক্রী আয়ক অনুকলন কৰি মুঠ বিক্রী আয় পাব পাৰি। প্রান্তিক বিক্রী আয় এনেদৰে দিয়া আছে—

MR = a - bQ, য'ত Q হ'ল পৰিমাণ, a আৰু b প্রাচল। তেনেহ'লে TR হ'বগৈ

$TR = \int MRdQ$

$= \int (a - bQ)dQ$

$= \int adQ - \int bQdQ$

$= aQ - \frac{bQ^2}{2} + c$

যিহেতু Q শূন্য হ'লে, TR সদায় শূন্য

$\therefore\ TR = aQ - \frac{bQ^2}{2} + c$

$\Rightarrow O = a.o - \frac{b.o^2}{2} + c$

$\Rightarrow C = O$

$\therefore TR = aQ - \frac{bQ^2}{2}$

উদাহৰণ 15.1 ঃ তলৰ প্রান্তিক বিক্রী আয় ফলনৰ পৰা মুঠ বিক্রী আয় ফলন নির্ণয় কৰক।

MR = 100 – 0.5Q, য'ত Q হ'ল উৎপাদনৰ পৰিমাণ

সমাধান ঃ দিয়া আছে, MR = 100 – 0.5 Q

$\therefore\ TR = \int MR dQ$

$= \int (100 - 0.5Q)dQ$

$= \int 100dQ - \int 0.5QdQ$

$= 100Q - \frac{0.5Q^2}{2} + c$

$TR = 100Q - 0.25Q^2$ [$\because$ c = 0, যিহেতু TR = 0, হ'লে Q = O]

উদাহৰণ 15.2 ঃ প্ৰান্তিক বিক্ৰী আয় ফলন এনেদৰে দিয়া আছে ঃ

MR = 50 – 4Q, য'ত Q হ'ল পৰিমাণ। পৰিমাণ 10 হ'লে গড় বিক্ৰী আয় (average revenue: AR) নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, MR = 50 – 4Q

$AR = \frac{TR}{Q}$ নিৰ্ণয় কৰিব লাগে। প্ৰথমতে TR ফলনটো নিৰ্ণয় কৰা যাওঁক।

$TR = \int MRdQ$

$= \int (50 - 4Q)\, dQ$

$= \int 50dQ - \int 4QdQ$

$= 50Q - 4.\frac{Q^2}{2} + c$

$TR = 50Q - 2Q^2$ [$\because$ C = 0]

$\therefore AR = \frac{TR}{Q} = \frac{50Q - 20Q}{Q}$

$= 50 - 2Q$

$= 50 - 2 \times 10$ [$\because$ Q = 10]

$= 50 - 20$

$AR = 30$

উদাহৰণ 15.3 ঃ প্ৰান্তিক বিক্ৰী আয় ফলন এনেদৰে দিয়া আছে ঃ

MR = 60 – 5Q

Q = 10 হ'লে চাহিদাৰ বিন্দু স্থিতিস্থাপকতা নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, MR = 60 – 5Q

আমি জানোঁ যে চাহিদাৰ বিন্দু স্থিতিস্থাপকতা হ'ল

$e_d = \frac{AR}{AR - MR}$

AR = $\frac{TR}{Q}$ নিৰ্ণয় কৰিবলৈ হ'লে, পোনতে TR উলিয়াব লাগিব

$TR = \int MR dQ$

$= \int (60 - 5Q)\, dQ$

$= 60Q - \frac{5}{2}Q^2 + c$

$TR = 60Q - \frac{5}{2}Q^2$ [$\because$ C = 0]

$\therefore AR = \frac{TR}{Q} = \frac{60Q - \frac{5}{2}Q^2}{Q}$

$= 60 - \frac{5}{2}Q$

$= 60 - \frac{5}{2}.10$ [$\because$ Q = 10]

$= 60 - 25$

$AR = 35$

এতিয়া, $MR = 60 - 5Q$

$= 60 - 5.10$ [$\because$ Q = 10]

$= 60 - 50$

$MR = 10$

$\therefore e_d = \frac{AR}{AR - MR}$

$= \frac{35}{35 - 10}$

$= \frac{35}{25}$

$= \frac{7}{5}$

$= 1.4$

উদাহৰণ 15.4 ঃ MR = 30 – 4Q দিয়া আছে, য'ত Q হ'ল পৰিমাণ। বিক্ৰী 8 অৰ পৰা 12 লৈ বৃদ্ধি পালে TR অৰ পৰিৱৰ্তন নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, MR = 30 – 4Q

$\therefore$ $TR = \int MR dQ$

$= \int (30 - 4Q) dQ$

$= \int 30 dQ - \int 4Q dQ$

$= 30Q - 4\frac{Q^2}{2} + C$

$TR = 30Q - 2Q^2$ [$\because C = 0$]

এতিয়া, $Q = 8$, $TR = 30Q - 2Q^2$

$= 30(8) - 2(8)^2$

$= 240 - 128$

$= 112$

$Q = 12$ হ'লে $TR = 30Q - 2Q^2$

$= 30(12) - 2(12)^2$

$= 360 - 288$

$= 72$

যেতিয়া বিক্ৰী 8 অৰ পৰা 12 অলৈ বৃদ্ধি পায়, TR, 112 টকাৰ পৰা 72 টকালৈ হ্ৰাস পায়, অৰ্থাৎ TR (112–72) টকা = 40 টকা হ্ৰাস পায়।

(b) **প্ৰান্তিক ব্যয় (Marginal Cost: MC) ফলনৰ পৰা মুঠ ব্যয় (Total Cost : TC) ফলন নিৰ্ণয় ঃ**

TC ফলনৰ অৱকলজৰ পৰা MC ফলন পোৱা যায়। গতিকে প্ৰান্তিক ব্যয় ফলনৰ অনুকলনৰ পৰা মুঠ ব্যয় ফলন পোৱা যাব। যদি

$MC = 2aQ + b$, য'ত Q উৎপাদন, তেনেহ'লে

$TC = \int MC\,dQ$

$= \int (2aQ + b)\,dQ$

$= \int 2aQ\,dQ + \int b\,dQ$

$= 2a.\frac{Q^2}{2} + bQ + C$

$= aQ^2 + bQ + C$, য'ত C হ'ল কাল্পনিক (arbitrary) ধ্ৰুৱক।

আমি জানোঁ যে

TC = মুঠ পৰিৱৰ্তনশীল ব্যয় (Total variable cost: TVC) + মুঠ স্থিৰ ব্যয় (Total Fixed Cost: TFC) আৰু TC = TFC, যেতিয়া Q = 0, কিয়নো এই ক্ষেত্ৰত TVC শূন্য।

$\therefore TC = aQ^2 + bQ + c$

$= a.0^2 + b.0 + c$ [যেতিয়া $Q = 0$]

$= c$

গতিকে TC = C = TFC

ইয়াত কাল্পনিক ধ্ৰুৱক C য়ে TFC বুজায়, আৰু ($aQ^2 + bQ$) এ TVC বুজায়।

উদাহৰণ 15.5 ঃ এখন প্ৰতিষ্ঠানৰ MC ফলন এনেদৰে দিয়া আছে ঃ

MC = C′(Q) = 5Q + 2 আৰু মুঠ স্থিৰ ব্যয় 10, মুঠ ব্যয় আৰু গড় ব্যয় ফলন নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে ঃ

MC = C′(Q) = 5Q + 2

এতিয়া,

$$TC = \int MC\,dQ$$

$$= \int (5Q + 2)\,dQ$$

$$= \frac{5}{2}Q^2 + 2Q + C$$

যেতিয়া Q = 0, TC = C = 10

$$\Rightarrow C = 10$$

$$\therefore TC = \frac{5}{2}Q^2 + 2Q + 10$$

আকৌ, $AC = \frac{TC}{Q} = \frac{\frac{5}{2}Q^2 + 2Q + 10}{Q}$

$$\therefore AC = \frac{5}{2}Q + 2 + \frac{10}{Q}$$

উদাহৰণ 15.6 ঃ প্ৰতিষ্ঠান এখনৰ প্ৰান্তিক ব্যয় ফলন এনেদৰে দিয়া আছে ঃ

MC = $5Q^2 - 4Q + 1$, মুঠ স্থিৰ ব্যয় 100 হ'লে, গড় ব্যয় আৰু গড় ব্যয় ফলন নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে,

MC = $5Q^2 - 4Q + 1$

এতিয়া

$$TC = \int MC\,dQ$$

$$= \int (5Q^2 - 4Q + 1)\,dQ$$

$$= 5\frac{Q^3}{3} - 4\frac{Q^2}{2} + Q + C$$

$$= \frac{5}{3}Q^3 - 2Q^2 + Q + C$$

যেতিয়া, Q = 0, TC = C = 100

$$\therefore\ TC = \frac{5}{3}Q^3 - 2Q^2 + Q + 100$$

এতিয়া, $AC = \frac{TC}{Q} = \frac{\frac{5}{3}Q^3 - 2Q^2 + Q + 100}{Q}$

$$\therefore\ AC = \frac{5}{3}Q^2 - 2Q + 1 + \frac{100}{Q}$$

আকৌ TC = TVC + TFC

$$\therefore\ TVC = \frac{5}{3}Q^3 - 2Q^2 + Q$$

আকৌ $AVC = \frac{TVC}{Q}$

$$= \frac{\frac{5}{3}Q^3 - 2Q^2 + Q}{Q}$$

$$= \frac{5}{3}Q^2 - 2Q + 1$$

উদাহৰণ 15.7 ঃ এখন ফার্মৰ প্ৰান্তিক বিক্ৰী আয় আৰু প্ৰান্তিক ব্যয় ফলন এনেদৰে দিয়া আছে ঃ

MR = 4

MC = 2Q – 6

আৰু মুঠ স্থিৰ ব্যয় 10. ফার্মখনে যেতিয়া 5 একক উৎপাদন কৰে আৰু বিক্ৰী কৰে, মুঠ লাভ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে ঃ

MR = 4

MC = 2Q – 6

এখন ফার্মৰ লাভ ফলন (profit function) টো এনেধৰণৰ

π = TR – TC

TR আৰু TC নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।

TR = $\int$ MRdQ

= $\int$ 4dQ

= 4Q + C

$\therefore$ TR = 4Q [$\because$ C = 0]

TC = $\int$ MCdQ

$= \int (2Q-6)dQ$

$= 2.\frac{Q^2}{2} - 6Q + C$

$= Q^2 - 6Q + C$

যেতিয়া Q = 0, TC = C = 10

$\therefore$ $TC = Q^2 - 6Q + 10$

$\therefore$ $\pi = TR - TC$

$= 4Q - (Q^2 - 6Q + 10)$

$= 4Q - Q^2 + 6Q - 10$

$= 10Q - Q^2 - 10$

$= 10.5 - 5^2 - 10$ [দিয়া আছে, Q = 5]

$= 50 - 25 - 10$

$= 50 - 35$

$\pi = 15.$

উদাহৰণ 15.8 ঃ দিয়া আছে MC = 4Q + 5 আৰু মুঠ স্থিৰ ব্যয় 18। AC সৰ্বনিম্ন হ'লে উৎপাদন নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে,

$MC = 4Q + 5$

$\therefore$ $TC = \int MCdQ$

$= \int (4Q + 5)\, dQ$

$= \int 4QdQ + \int 5dQ$

$= 4.\frac{Q^2}{2} + 5Q + C$

$= 2Q^2 + 5Q + C$

$TC = 2Q^2 + 5Q + 18$ [$\because$ C = 18]

এতিয়া, $AC = \frac{TC}{Q} = 2Q + 5 + \frac{18}{Q}$

AC সৰ্বনিম্ন হ'বলৈ হ'লে প্ৰথম ক্ৰমৰ চর্ত হ'ল

$$\frac{dAC}{dQ} = 0$$

এতিয়া, $\frac{dAC}{dQ} = \frac{d}{dQ}\left(2Q + 5 + \frac{18}{Q}\right)$

$$= \frac{d}{dQ}2Q + \frac{d}{dQ}5 + \frac{d}{dQ}18Q^{-1}$$

$$= 2 + 0 + 18(-1)Q^{-1-1} \quad = 2 - 18Q^{-2}$$

$$= 2 - \frac{18}{Q^2}$$

প্ৰথম ক্ৰমৰ চৰ্ত অনুযায়ী

$$\frac{dAC}{dQ} = 2 - \frac{18}{Q^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{18}{Q^2} = 2$$

$$\Rightarrow 2Q^2 = 18$$

$$\Rightarrow Q^2 = 9$$

$$\Rightarrow Q = \sqrt{9}$$

$$\therefore Q = \pm 3$$

$\therefore Q = 3$ ($\because$ Q কেতিয়াও ঋণাত্মক হ'ব নোৱাৰে)

দ্বিতীয় ক্ৰমৰ চৰ্ত ঃ $\frac{d^2AC}{dQ^2} > 0$

এই ক্ষেত্ৰত $\frac{d^2AC}{dQ^2} = \frac{d}{dQ}\left(\frac{dAC}{dQ}\right)$

$$= \frac{d}{dQ}\left(2 - \frac{18}{Q^2}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dQ}}.2 - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dQ}}18\mathrm{Q}^{-2}$$

$$= 0 - 18(-2)Q^{-2-1}$$

$$= 36Q^{-3}$$

$$= \frac{36}{Q^3}$$

যেতিয়া Q = 3,

$$\frac{d^2AC}{dQ^2} = \frac{36}{Q^3} = \frac{36}{3^3} = \frac{36}{27} > 0$$

$\therefore$ Q = 3 হ'লে AC ৰ সৰ্বনিম্নতাৰ দ্বিতীয় ক্ৰমৰ চৰ্ত সিদ্ধ হয়।

(c) **ভোগৰ প্রান্তিক প্রৱণতাৰ পৰা ভোগ ফলন নির্ণয় ঃ**

আয় সাপেক্ষে ভোগ ফলনৰ অৱকলজৰ পৰা ভোগৰ প্রান্তিক প্রৱণতা (Marginal propensity to consume, MPC) নির্ণয় কৰিব পাৰি। সেয়ে আয় সাপেক্ষে MPC ৰ অনুকলনৰ পৰা ভোগ ফলন পোৱা যায়।

C = C(Y) ভোগ ফলন হ'লে

$$MPC = \frac{d}{dy}C = \frac{d}{dy}C(y) = C'(y)$$

MPC ফলনক y সাপেক্ষে অনুকলন কৰি ভোগ ফলন পাব পাৰি।

C = C(Y) = $\int$ MPC dY = $\int$ c'(y) dy.

উদাহৰণ 15.9 ঃ MPC ফলন এনেদৰে দিয়া আছে ঃ

$MPC = C'(y) = 0.8 + 0.1y^{-\frac{1}{2}}$ আয় শূন্য হ'লে যদি সমুদায় ভোগ (aggregate consumption) 100 হয়, তেনেহ'লে ভোগ ফলন নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে,

MPC = C'(Y) = $0.8 + 0.1y^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore$ C(Y) = $\int$ MPC dY

$$= \int \left(0.8 + 0.1y^{-\frac{1}{2}}\right) dy$$

$$= \int 0.8dy + \int 0.1y^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$= 0.8y + 0.1\frac{y^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= 0.8y + 0.1\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 0.8y + 0.2y^{\frac{1}{2}} + c$$

দিয়া আছে,

C(Y) = 100, যেতিয়া y = 0

$\therefore$ C (0) = C = 100

$\Rightarrow$ C = 100

$\therefore$ C(y) = $0.8y + 0.2y^{\frac{1}{2}} + 100$.

উদাহৰণ 15.10 ঃ যদি

$$MPC = \frac{0.4}{\sqrt{y}}$$

ভোগ ফলন নির্ণয় কৰক। দিয়া আছে যে আয় শূন্য হ'লে সমুদায় ভোগ 50 ।

সমাধান ঃ দিয়া আছে,

$$MPC = \frac{0.4}{\sqrt{y}}$$

$$= \frac{0.4}{y^{\frac{1}{2}}}$$

$$= 0.4y^{-\frac{1}{2}}$$

এতিয়া,

$$C(y) = \int MPC dy$$

$$= \int 0.4y^{-1/2}dy$$

$$= 0.4\frac{y^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= 0.4\frac{y^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= 0.8y^{1/2} + c$$

দিয়া আছে যে y = 0 হ'লে সমুদায় ভোগ c(y) = 50.

$\therefore$ c(o) = c = 50

$\Rightarrow$ c = 50

$\therefore$ c(y) = $0.8y^{1/2}$ + 50

(d) সঞ্চয় কৰাৰ প্ৰান্তিক প্ৰৱণতাৰ পৰা সঞ্চয় ফলন নির্ণয় ঃ

সঞ্চয় কৰাৰ প্ৰান্তিক প্ৰৱণতা ফলনক আয় সাপেক্ষে অনুকলন কৰি সঞ্চয় ফলন পোৱা যায়। ধৰা হ'ল

$$S = S(Y)$$

তেনেহ'লে $MPS = \frac{ds}{dy} = \frac{d}{dy}s(y) = s'(y)$

MPS অৰ পৰা সঞ্চয় ফলন এনেদৰে পাব পাৰি

$S = S(Y) = \int MPS dy$

$= \int S'(y) dy.$

উদাহৰণ 15.11 ঃ দিয়া আছে, সঞ্চয় কৰাৰ প্ৰান্তিক প্ৰৱণতা $MPS = 1 - \frac{0.2}{\sqrt{y}}$,

সমুদায় সঞ্চয় (aggregate saving) ফলন নিৰ্ণয় কৰক। দিয়া আছে যে আয় 144 হ'লে সমুদায় সঞ্চয় শূন্য।

সমাধান ঃ দিয়া আছে

$$MPS = 1 - \frac{0.2}{\sqrt{y}}$$

$$= 1 - 0.2 \Big/ y^{1/2}$$

$$= 1 - 0.2 y^{-1/2}$$

$\therefore S(Y) = \int MPS dy$

$$= \int \left(1 - 0.2 y^{-1/2}\right) dy$$

$$= \int 1 dy - \int 0.2 y^{-1/2} dy$$

$$= y - 0.2 \frac{y^{\frac{-1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= y - 0.2 \frac{y^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= y - 0.4 y^{1/2} + c$$

দিয়া আছে যে $S(y) = 0$ হ'লে $y = 144$

$$\therefore 0 = 144 - 0.4(144)^{1/2} + C$$

$= 144 - 0.4.12\ c$

$= 144 - 4.8 + c$

$= 139.2 + c$

$\Rightarrow C = -139.2$

$\therefore S(y) = 144 - 0.4y^{1/2} - 139.2$

উদাহৰণ 15.12 ঃ দিয়া আছে, সঞ্চয় কৰাৰ প্ৰান্তিক প্ৰৱণতা $MPC = 0.2y^{-1/3}$, আৰু $y = 125$ হ'লে সঞ্চয় শূন্য। সমুদায় সঞ্চয় ফলন $s(y)$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $MPC = 0.2y^{-1/3}$

যিহেতু MPS ফলনৰ অনুকলন হ'ল সমুদায় সঞ্চয় ফলন, গতিকে পোনতে আমি MPC ফলনৰ পৰা MPS ফলন নিৰ্ণয় কৰিব লাগিব।

আমি জানোঁ,

$MPC + MPS = 1$

$\therefore MPS = 1 - MPC$

$\Rightarrow MPS = 1 - 0.2y^{-1/3}$

$\therefore S(y) = \int MPS\,dy$

$= \int (1 - 0.2y^{-1/3})dy$

$$= y - 0.2\frac{y^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c$$

$$= y - 0.2\frac{y^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c$$

$$= y - 0.2 \times \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} + c$$

$$= y - 0.3 y^{\frac{2}{3}} + c$$

দিয়া আছে, $y = 125$ হ'লে $S(y) = 0$

$\therefore 0 = 125 - 0.3\,(125)^{2/3} + c$

$= 125 - 0.3\,(5^3)^{\frac{2}{3}} + c$

$= 125 - 0.3 \times 5^2 + c$

$= 125 - 0.3 \times 25 + c$

$= 125 - 7.5 + c$

$= 117.5 + c$

$\Rightarrow C = -117.5$

$\therefore S(y) = y - 0.3y^{\frac{2}{3}} - 117.5$

১৫.৪ ভোক্তাৰ উদ্বৃত্তৰ পৰিমাপ (ESTIMATION OF CONSUMER'S SURPLUS)

ভোক্তাৰ উদ্বৃত্ত (consumer's surplus) ৰ ধাৰণা অৱতাৰণা কৰে আলফ্ৰেড মার্ছালে। ভোক্তাৰ উদ্বৃত্ত হ'ল ভোক্তাই কোনো সামগ্ৰীৰ বাবে দিব বিচৰা মূল্য আৰু প্ৰকৃততে দিয়া মূল্যৰ মাজৰ পার্থক্য। নিশ্চিত অনুকলন ব্যৱহাৰ কৰি ভোক্তাৰ উদ্বৃত্ত নির্ণয় কৰিব পাৰি।

ভোক্তাৰ উদ্বৃত্ত (Consumer's surplus: c.s.) = $\int_0^{\bar{Q}}$ (Q ৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰা $\int_0^{\bar{Q}}$ চাহিদা ফলন) dQ – P x Q

বা, C. S. = f(Q) dQ – P x Q, য'ত P হ'ল মূল্য আৰু Q হ'ল পৰিমাণ

উদাহৰণ 15.13 ঃ যদি চাহিদা ফলন $P = 19 - 2Q - 3Q^2$ আৰু চাহিদাৰ পৰিমাণ (Q) হ'লে 2, ভোক্তাৰ উদ্বৃত্ত কিমান হ'ব?

সমাধান ঃ দিয়া আছে,

$P = 19 - 2Q - 3Q^2$ আৰু $Q = 2$

Q = 2 বহুৰাই, $P = 19 - 2.2 - 3.2^2$

$= 19 - 4 - 12$

$= 3$

এতিয়া,

ভোক্তাৰ উদ্বৃত্ত $= \int_0^{\bar{Q}} f(Q)\,dQ - P \times Q$

$= \int_0^{\bar{2}} (19 - 2Q - 3Q^2)\,h$

$= \left[19Q + Q^2 - Q^3\right]_0^2 - 6$

$= (19.2 + 2^2 - 2^3) - 6$

$= (38 - 4 - 8) - 6$

$= 26 - 6$

$= 20$

উদাহৰণ 15.14 ঃ দিয়া আছে, ভোক্তাৰ চাহিদা ফলন

$$Q = \sqrt{60 - 2p}$$

বজাৰ মূল্য P = 12 হ'লে ভোক্তাৰ উদ্বৃত্ত নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে,

$$Q = \sqrt{60 - 2p}$$

পৰিমাণৰ সহায়ত চাহিদা ফলনটো এনেদৰেও লিখিব পাৰি ঃ

$Q^2 = 60 - 2P$

$\Rightarrow 2P = 60 - Q^2$

$$\Rightarrow p = 30 - \frac{Q^2}{2}$$

এতিয়া, চাহিদা ফলনত P = 12 বহুৱাই, আমি পাওঁ

$$Q = \sqrt{60 - 2.12}$$

$$= \sqrt{60 - 24}$$

$$= \sqrt{36}$$

$$= \pm 6$$

যিহেতু, উৎপাদন ঋণাত্মক হ'ব নোৱাৰে, গতিকে Q = 6

$\therefore$ ভোক্তাৰ উদ্বৃত্ত $= \int_0^6 f(Q)\,dQ - P \times Q$

$$= \int_0^6 \left(30 - \frac{Q^2}{2}\right) dQ - 12 \times 6$$

$$= \left[30Q - \frac{Q^3}{6}\right]_0^6 - 72$$

$$= 30.6 - \frac{6^3}{6} - 72$$

$= 180 - 36 - 72$

$= 72$

উদাহৰণ 15.15 ঃ দিয়া আছে, চাহিদা ফলন P = 20 – 5Q আৰু যোগান ফলন P = 4 + 3Q, য'ত P হ'ল মূল্য আৰু Q হ'ল পৰিমাণ। ভোক্তাৰ উদ্বৃত্ত নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে যে চাহিদা ফলন

P = 20 – 5Q

আৰু যোগান ফলন

P = 4 + 3Q

চাহিদা ফলন আৰু যোগান ফলন সমান কৰি সাম্য মূল্য আৰু পৰিমাণ নির্ণয় কৰিব পাৰি।

20 – 5Q = 4 + 3Q

$\Rightarrow$ – 5Q –3Q = 4 – 20

$\Rightarrow -8Q = -16$

$\Rightarrow Q = 2$

চাহিদা ফলনত Q = 2 বহুৰাই আমি পাওঁ

$P = 20 - 5Q$

$= 20 - 5.2$

$= 20 - 10$

$= 10$

$\therefore$ ভোক্তাৰ উদ্বৃত্ত $= \int_0^2 f(Q)\,dQ - pQ$

$= \int_0^2 (20 - 5Q)\,dQ - 10 \times 2$

$= \left[20Q - \frac{5}{2}Q^2\right]_0^2 - 20$

$= 20 \times 2 - \frac{5}{2}2^2 - 20$

$= 40 - 10 - 20$

$= 10.$

উদাহৰণ 15.16 ঃ দিয়া আছে, চাহিদা ফলন P = 16 – Q, আৰু যোগান ফলন P = 4 + Q, ভোক্তাৰ উদ্বৃত্ত নিৰ্ণয় কৰক যদি

(i) চাহিদা আৰু মূল্য পূৰ্ণ প্ৰতিযোগিতা (perfect competition) ৰ অধীনত নিৰূপিত হয়,

(ii) চাহিদা আৰু মূল্য একচেটিয়া বজাৰ (monopoly market) ৰ অধীনত নিৰূপিত হয় যাতে লাভ সৰ্বোচ্চ হয়, আৰু যোগান, ফলন, প্ৰান্তিক মূল্য ফলনৰ সৈতে একে হয়।

সমাধান ঃ (i) পূৰ্ণ প্ৰতিযোগিতাৰ অধীনত ভোক্তাৰ উদ্বৃত্ত নিৰ্ণয় ঃ

দিয়া আছে, চাহিদা ফলন

$P = 16 - Q$

আৰু যোগান ফলন

$P = 4 + Q$

ভাৰসাম্যাৱস্থাত,

চাহিদা = যোগান

$\Rightarrow 16 - Q = 4 + Q$

$\Rightarrow 2Q = 12$

$\Rightarrow Q = 6$

চাহিদা ফলনত Q = 6 বহুৰাই, আমি পাওঁ

$$P = 16 - Q$$
$$= 16 - 6$$
$$= 10$$

এতিয়া,

$$\text{ভোক্তাৰ উদ্বৃত্ত} = \int_0^Q f(Q)dQ - PQ$$
$$= \int_0^6 (16 - Q)dQ - 10 \times 6$$
$$= \left[16Q - \frac{Q^2}{2}\right]_0^6 - 60$$
$$= 16.6 - \frac{6^2}{2} - 60$$
$$= 96 - 18 - 60$$
$$= 18$$

(ii) চাহিদা আৰু মূল্য, একচেটিয়া বজাৰৰ অধীনত নিৰূপিত হ'লে ভোক্তাৰ উদ্বৃত্ত নির্ণয় ঃ

একচেটিয়া বজাৰত প্ৰান্তিক বিক্ৰী আয় আৰু প্ৰান্তিক ব্যয় বক্ৰৰ সংমিশ্ৰণত ভাৰ সাম্য মূল্য আৰু পৰিমাণ নিৰূপিত হয়।

প্ৰান্তিক বিক্ৰী আয় এনেদৰে নিৰূপণ কৰিব পাৰি ঃ

$$TR = P \times Q$$
$$= (16 - Q)Q$$
$$= 16Q - Q^2$$

$$\therefore MR = \frac{d}{dQ}TR = \frac{d}{dQ}\left(16Q - Q^2\right)$$
$$= 16 - 2Q$$

$\because$ যোগান ফলন, MC ফলনৰ সৈতে একে, গতিকে

$$MC = 4 + Q$$

ভাৰসাম্যাৱস্থাত

$$MR = MC$$
$$\Rightarrow 16 - 2Q = 4 + Q$$
$$\Rightarrow 3Q = 12$$
$$\Rightarrow Q = 4$$

চাহিদা ফলনত Q = 4 বহুৰাই আমি পাওঁ

$$P = 16 - Q$$
$$= 16 - 4$$
$$= 12$$

এতিয়া,

$$\text{ভোক্তাৰ উদ্বৃত্ত} = \int_0^4 f(Q)\,dQ - PQ$$
$$= \int_0^4 (16 - Q)\,dQ - 12 \times 4$$
$$= \left[16Q - \frac{Q^2}{2}\right]_0^4 - 48$$
$$= 16.4 - \frac{4^2}{2} - 48$$
$$= 64 - 8 - 48$$
$$= 8$$

১৫.৫ উৎপাদনকাৰীৰ উদ্বৃত্তৰ পৰিমাপ (ESTIMATION OF PRODUCER'S SURPLUS)

উৎপাদনকাৰীৰ উদ্বৃত্ত হ'ল উৎপানকাৰী এজনে প্রকৃততে কিমান পায় আৰু নির্দিষ্ট পৰিমাণৰ সামগ্রী যোগান ধৰি তেওঁ কিমান পাব বিচাৰে, তাৰ অতিৰিক্তখিনি। অর্থাৎ উৎপাদনকাৰীৰ উদ্বৃত্ত = প্রকৃত মুঠ আয় — আশা কৰা মুঠ আয়। নিশ্চিত অনুকলনব্যহাৰ কৰি উৎপাদনকাৰীৰ উদ্বৃত্ত নির্ণয় কৰিব পাৰি।

উৎপাদনকাৰীৰ উদ্বৃত্ত (Producer's surplus: PS) = PQ – ∫Q (Q ৰ সহায়ত প্রকাশ কৰা যোগান ফলন) dQ

বা, PS = PQ– $\int_0^Q f(Q)dQ$, য'ত P মূল্য, আৰু Q পৰিমাণ।

উদাহৰণ 15.17 ঃ উৎপাদনকাৰীৰ যোগান ফলন এনেদৰে দিয়া আছে ঃ

$$Q = \sqrt{-4 + 4P}$$

আৰু বজাৰ মূল্য 10। উৎপাদনকাৰীৰ উদ্বৃত্ত নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে

$$Q = \sqrt{-4 + 4P}$$

পৰিমাণৰ সহায়ত যোগান ফলন এনেদৰেও লিখিব পাৰি ঃ

$Q^2 = -4 + 4P$

$\Rightarrow 4P = Q^2 + 4$

$\Rightarrow P = \frac{Q^2}{4} + 1$

এতিয়া,

যোগান ফলনত P = 10 বহুৱাই আমি পাওঁ

$Q = \sqrt{-4 + 4.10}$

$= \sqrt{36}$

$= \pm 6$

যিহেতু উৎপাদন ঋণাত্মক হ'ব নোৱাৰে, Q = 6

এতিয়া,

উৎপাদনকাৰীৰ উদ্বৃত্ত $= PQ - \int_0^6 \left(\frac{Q^2}{4} + 1\right) dQ$

$= 10 \times 6 - \left[\frac{1}{4}.\frac{Q^3}{3} + Q\right]_0^6$

$= 60 - \left[\frac{1}{4}.\frac{Q^3}{3} + Q\right]_0^6$

$= 60 - \frac{1}{12}6^3 - 6$

$= 60 - \frac{216}{12} - 6$

= 60 – 18 – 6

= 36

উদাহৰণ 15.18 ঃ দিয়া আছে, যোগান ফলন P = 0.5Q + 1.5।

মূল্য = 6 হ'লে উৎপাদনকাৰীৰ উদ্বৃত্ত নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, P = 0.5 Q + 1.5

P = 6 হ'লে

P = 0.5Q + 1.5

$\Rightarrow$ 6 = 0.5Q + 1.5

$\Rightarrow$ 0.5Q = 4.5

$\Rightarrow$ Q = 9

এতিয়া,

উৎপাদনকাৰীৰ উদ্বৃত্ত $= PQ - \int_0^{\bar{Q}} f(Q)\,dQ$

$= 6 \times 9 - \int_0^9 (0.5Q + 1.5)\,dQ$

$= 54 - \left[0.5\frac{Q^2}{2} + 1.5Q\right] dQ$

$= 54 - \left[0.25Q^2 + 1.5Q\right]_0^9$

$= 54 - [0.25 \times 9^2 + 1.5 \times 9]$

$= 54 - [20.25 + 13.5]$

$= 20.25$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ ঃ (i) দিয়া আছে, প্রান্তিক বিক্রী আয় ফলন $MR = R'(Q) = 25 - 0.5Q$ মুঠ বিক্রী আয় ফলন নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ ঃ প্রান্তিক বিক্রী আয় ফলন এনেদৰে দিয়া আছে ঃ

$MR = R'(Q) = 40 - 8Q$

য'ত Q হ'ল উৎপাদন। যদি বিক্রী (Q) 6 অৰ পৰা 8 অলৈ বৃদ্ধি পায়, তেনেহ'লে গড় বিক্রী আয় ফলন কেনেধৰণৰ হ'ব?

প্রশ্ন নং ৩ ঃ প্রান্তিক ব্যয় ফলন এনেদৰে দিয়া আছে ঃ

$MC = C'(Q) = 3Q^2 - 12Q + 2$

গড় পৰিৱর্তনশীল ব্যয় (average variable cost: AVC) সর্বনিম্ন হ'লে উৎপাদনৰ পৰিমাণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ ঃ সঞ্চয় কৰাৰ প্রান্তিক প্রৱণতা ফলন এনেদৰে দিয়া আছে

$MPS = 0.5y^{-0.5}$

আৰু আয় শূন্য হ'লে মুঠ ভোগ 100, মুঠ ভোগ ফলন নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ ঃ দিয়া আছে, চাহিদা ফলন $P = 8 - 2Q$ আৰু যোগান ফলন $P = 2 + Q$, ভোক্তাৰ উদ্বৃত্ত আৰু উৎপাদনকাৰীৰ উদ্বৃত্ত নির্ণয় কৰক।



১৫.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

এই অধ্যায়টিত আমি নিম্নলিখিত বিষয়সমূহ আলোচনা কৰিলো ঃ

- অর্থনৈতিক বিশ্লেষণত প্রান্তিক ফলনৰ পৰা মুঠ ফলন নির্ণয়, অনুকলন গণিতৰ অন্যতম প্রধান প্রয়োগ।

  উদাহৰণস্বৰূপে $TC = \int MCdQ$ $TR = \int MRdQ$

  $C(Y) = \int MPCdy$ $S(Y) = \int MPSdy$

- ভোক্তাৰ উদ্বৃত্ত আৰু উৎপাদনকাৰীৰ উদ্বৃত্ত নির্ণয় কৰিবলৈ নিশ্চিত অনুকলৰ ধাৰণা প্রয়োগ কৰা হয়।

  - ভোক্তাৰ উদ্বৃত্ত = $\int_0^{\bar{Q}}$ (Q ৰ সহায়ত প্রকাশ কৰা চাহিদা ফলন) $dQ - P\bar{Q}$
  - উৎপাদনকাৰীৰ উদ্বৃত্ত = $P\bar{Q} - \int_0^{\bar{Q}}$ (Q ৰ সহায়ত প্রকাশ কৰা যোগান ফলন) dQ, য'ত P হ'ল মূল্য, আৰু Q হ'ল পৰিমাণ।



১৫.৭ অধিক জানিবলৈ

১) Agarwal, D.K. (2012). *Business Mathematics*, New Delhi: Vrindra Publication (p) Ltd.

২) Baruah, S. (2011). *Basic Mathematics and Its Application in Economics*, New Delhi: Trinity Press Pvt. Ltd.

৩) Bose, D. (2004). *Mathematical Economics*; New Delhi: Himalaya Publishing House.

৪) Chiang, A.C. & (2010). *Fundamental Methods of Economics Analysis*, MC Graw Hill Education India.

৫) Kandoi, Balwant (2011). *Mathematics for Business and Economics with Application*; New Delhi: Himalaya Publishing House.



১৫.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) দিয়া আছে,

$MR = R'(Q) = 25 - 0.5Q$

$\therefore TR = \int MRdQ$

$= \int (25 - 0.5Q)dQ$

$= 25Q - 0.5\frac{Q^2}{2} + C$

$TR = 25Q - 0.25Q^2 \quad [\because C = 0]$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে,

$MR = R'(Q) = 40 - 8Q$

$\therefore TR = \int MRdQ$

$= \int (40 - 8Q)dQ$

$= 40Q - 8.\frac{Q^2}{2} + C$

$TR = 40Q - 4Q^2 \quad [\because C = 0]$

আকৌ,

$$AR = \frac{TR}{Q} = \frac{40Q - 4Q^2}{Q}$$

$= 40 - 4Q$

এতিয়া, At Q = 6, $AR = 40 - 4Q$

$= 40 - 4.6 \quad = 40 - 24 = 16$

At Q = 8, $AR = 40 - 4Q$

$40 - 4.8 = 40 - 32 = 8$

$\therefore$ যেতিয়া বিক্ৰী 6 অৰ পৰা 8 অলৈ বৃদ্ধি হয়, গড় বিক্ৰী আয় 16 অৰ পৰা 8 অলৈ হ্ৰাস পায়, অৰ্থাৎ 8 কমে।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে,

$MC = C'(Q) = 3Q^2 - 12Q + 2$

$\therefore TC = \int MCdQ$

$= \int (3Q^2 - 12Q + 2)dQ$

$= Q^3 - 6Q^2 + 2Q + C$

ইয়াত, $TVC = Q^3 - 6Q^2 + 2Q$

$\therefore AVC = \frac{TVC}{Q} = Q^2 - 6Q + 2$

AVC সৰ্বনিম্ন হ'বলৈ হ'লে

প্ৰথম ক্ৰমৰ চৰ্ত

$$\frac{dAVC}{dQ} = 0$$

$$\frac{dAVC}{dQ} = \frac{d}{dQ}\left(Q^2 - 6Q + 2\right)$$

$= 2Q - 6$

প্ৰথম ক্ৰমৰ চৰ্ত অনুযায়ী

$$\frac{dAVC}{dQ} = 2Q - 6 = 0$$

$\Rightarrow 2Q = 6$

$\Rightarrow Q = 3$

দ্বিতীয় ক্ৰমৰ চৰ্ত

$$\frac{d^2AVC}{dQ^2} > 0$$

ইয়াত, $\frac{d^2AVC}{dQ^2} = \frac{d}{dQ}\left(\frac{dAVC}{dQ}\right) = \frac{d}{dQ}(2Q - 6) = 2 > 0$

$\therefore$ AVC সৰ্বনিম্ন হ'বৰ বাবে দ্বিতীয় ক্ৰমৰ চৰ্ত Q = 3 ৰ বাবে সিদ্ধ হয়।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে, $MPS = 0.5y^{-0.5}$

আমি জানোঁ, MPC + MPS = 1

$\therefore MPC = 1 - MPS$

$\Rightarrow MPC = 1 - 0.5y^{-0.5}$

$\therefore C(y) = \int MPC dy$

$= \int (1 - 0.5y^{-0.5})dy$

$$= y - 0.5.\frac{y^{-0.5+1}}{-0.5+1} + c$$

$$= y - 0.5\frac{y^{0.5}}{0.5} + c$$

$= y - y^{0.5} + c$

দিয়া আছে, y = 0 হ'লে C(y) = 100,

$\therefore C(y) = y - y^{0.5} + c$

$\Rightarrow 100 = 0 - 0^{0.5} + c$

$\Rightarrow 100 = C$

$\therefore C(y) = y - y^{0.5} + 100$

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে, চাহিদা ফলন

$P = 8 - 2Q$

আৰু যোগান ফলন

$P = 2 + Q$

ভাৰসাম্যাৱস্থাত,

চাহিদা = যোগান

$\Rightarrow 8 - 2Q = 2 + Q$

$\Rightarrow 3Q = 6$

$\Rightarrow Q = 2$

চাহিদা ফলনত Q = 2 বহুৱাই আমি পাওঁ

$P = 8 - 2Q$

$= 8 - 2.2$

$P = 4$

এতিয়া, ভোক্তাৰ উদ্বৃত্ত $= PQ - \int_0^Q f(Q)\,dQ$

$= \int_0^2 (8 - 2Q)dQ - 4.2$

$= \left[8Q - Q^2\right]_0^2 - 8$

$= 8.2 - 2^2 - 8$

$= 16 - 12$

$= 4$

আৰু উৎপাদনকাৰীৰ উদ্বৃত্ত $= PQ - \int_0^Q f(Q)\,dQ$

$= 4.2 - \int_0^2 (2 + Q)dQ$

$= 8 - \left[2Q + \frac{Q^2}{2}\right]_0^2$

$$= 8 - \left[2^2 + \frac{2^2}{2}\right]$$

$= 8 - (4 + 2)$

$= 2$



১৫.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন নং ১ঃ এখন ফাৰ্মৰ প্ৰান্তিক ব্যয় এনেদৰে দিয়া আছে ঃ $MC = 3Q^2 - 10Q + 6$, আৰু মুঠ স্থিৰ ব্যয় 100 হ'লে গড় ব্যয় নিৰ্ণয় কৰক, যদি Q=5 হয়।

প্ৰশ্ন নং ২ঃ প্ৰান্তিক বিক্ৰী আয় এনেদৰে দিয়া আছে ঃ

$MR = 50 - 3Q$

মুঠ বিক্ৰী আয় নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ ভোগ কৰাৰ প্ৰান্তিক প্ৰৱণতা এনেদৰে দিয়া আছে—

$MPC = C'(y) = 0.8 + 0.1y^{-\frac{1}{2}}$

আৰু Y = 100 হ'লে, C = Y। ভোগ ফলন C(y) নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ দিয়া আছে,

$MPS = S'(y) = 1 - 0.2y^{-\frac{1}{2}}$,

আৰু y = 81 হ'লে সঞ্চয় শূন্য। সঞ্চয় ফলন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ চাহিদা আৰু যোগান বিধি ক্ৰমে $P_d = (6 - Q)^2$ আৰু $P_s = 14 + Q$। ভোক্তাৰ উদ্বৃত্ত নিৰ্ণয় কৰক যদি

(a) চাহিদা আৰু মূল্য পূৰ্ণ প্ৰতিযোগিতাৰ অধীনত নিৰূপিত হয়,

(b) চাহিদা আৰু মূল্য একচেটিয়া বজাৰৰ অধীনত নিৰূপিত হয় যাতে লাভ সৰ্বোচ্চ হয়, আৰু যোগান ফলন, প্ৰান্তিক মূল্য ফলনৰ সৈতে একে হয়।

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ চাহিদা আৰু যোগান বিধি ক্ৰমে এনেদৰে দিয়া আছে—

$P_d = 3x^2 - 20x + 5$

$P_s = 15 + 9x$

উৎপাদনকাৰীৰ উদ্বৃত্ত নিৰ্ণয় কৰক।

*** ***** ***



প্ৰসংগপুথি

ইংৰাজী গ্ৰন্থ ঃ

১) Agarwal, D.K. (2012). *Business Mathematics*, New Delhi: Vrindra Publication (p) Ltd.

২) Baruah, S. (2011). *Basic Mathematics and Its Application in Economics*, New Delhi: Trinity Press Pvt. Ltd.

৩) Bose, D. (2004). *Mathematical Economics*; New Delhi: Himalaya Publishing House.

৪) Chiang, A.C. & (2010). *Fundamental Methods of Economics Analysis*, MC Graw Hill Education India.

৫) Kandoi, Balwant (2011). *Mathematics for Business and Economics with Application*; New Delhi: Himalaya Publishing House.