GMA S3-01

অৱকলন গণিত

তৃতীয় ষাণ্মাসিক

গণিত

খণ্ড ঃ ১



কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

বিষয় বিশেষজ্ঞ মণ্ডলী

অধ্যাপক নন্দৰাম দাস, গণিত বিভাগ, গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়
ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা, গণিত বিভাগ, কটন মহাবিদ্যালয়

সমন্বয়ৰক্ষী ঃ হৰেকৃষ্ণ ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

প্রস্তুতি গোটৰ সদস্য

অধ্যায়	*অৱিহণা যোগাইছে*	*ভাষান্তৰকাৰী*
১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬ আৰু ৭	এছ. কে. ঝা লামডিং মহাবিদ্যালয়, লামডিং	ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা (অধ্যায় ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬ আৰু ৭)

সম্পাদনা ঃ

বিষয়বস্তু সম্পাদনা ঃ ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা, প্রাক্তন মুৰব্বী, গণিত বিভাগ, কটন কলেজ
গাঁথনিক সম্পাদনা ঃ হৰেকৃষ্ণ ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

প্রথম প্রকাশ ঃ জুন, ২০১৮

This Self Learning Material (SLM) of the Krishna Kanta Handiqui State University is made available under a Creative Commons Attribution-Non Commercial-ShareAlike4.0 License (International): http.//creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0.

কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ৰ হৈ পঞ্জীয়কৰ দ্বাৰা মুদ্রিত আৰু প্রকাশিত।

মুখ্য কার্যালয় ঃ পাটগাঁও, ৰাণী গেট, গুৱাহাটী-৭৮১ ০১৭; Web : www.kkhsou.in
উপ-মুখ্য কার্যালয় ঃ হাউচ্‌ফেড কমপ্লেক্স, দিচপুৰ, গুৱাহাটী-৭৮১ ০০৬

এই শিক্ষণ সামগ্রী প্রস্তুতিৰ বাবে আর্থিক অনুদান আগবঢ়োৱা
দূৰ শিক্ষা ব্যুৰো, বিশ্ববিদ্যালয় অনুদান আয়োগৰ ওচৰত বিশ্ববিদ্যালয় কৃতজ্ঞ।

বিষয়সূচী

পৃষ্ঠা নং

অধ্যায় ১ ঃ **ফলন** ৫ - ১৯

ফলনৰ সংজ্ঞা, ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ, ফলনৰ শ্ৰেণীবিভাজন

অধ্যায় ২ ঃ **ফলনৰ সীমা** ২০ - ৩৬

ফলনৰ সীমা উলিওৱাৰ পদ্ধতি, সোঁহতীয়া আৰু বাঁওহতীয়া সীমা

অধ্যায় ৩ ঃ **ফলনৰ অবিচ্ছিন্নতা** ৩৭ - ৪৬

ফলনৰ অবিচ্ছিন্নতাৰ সংজ্ঞা আৰু উদাহৰণ

অধ্যায় ৪ ঃ **ফলনৰ অৱকলনীয়তা** ৪৭ - ৬০

অৱকলনীয়তাৰ সংজ্ঞা, বাঁও আৰু সোঁ অৱকলজ

অধ্যায় ৫ ঃ **ফলনৰ অৱকলজ** ৬১ - ৮৫

ফলনৰ অৱকলজৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা, বিভিন্ন প্ৰামাণিক ফলনৰ অৱকলজ, ফলনৰ যোগ আৰু অন্তৰৰ অৱকলজ, ফলনৰ পূৰণফলৰ অৱকলজ আৰু ভাগফল বিধি

অধ্যায় ৬ ঃ **কিছুমান বিশেষ ফলনৰ অৱকলজ** ৮৬ - ১০৮

সংযুক্ত ফলনৰ অৱকলজ, ঘাতাঙ্কীয় ফলন আৰু অন্তৰ্নিহিত ফলনৰ অৱকলজ, প্ৰাচলিক ফলনৰ অৱকলজ, এটা ফলন সাপেক্ষে আন এটা ফলনৰ অৱকলজ

অধ্যায় ৭ ঃ **অনিৰ্ণেয় ৰূপ** ১০৯ - ১২৩

কেইটামান বিশেষ অনিৰ্ণেয় ৰূপ, লা' হপিটেল বিধি

পাঠ্যবিষয়ৰ পৰিচয়

'অৱকলন গণিত' হ'ল স্নাতক (কলা) গণিত বিষয়ৰ তৃতীয় পাঠ্যবিষয়। এই পাঠ্যবিষয়টি দুটা খণ্ডত ভাগ কৰা হৈছে। প্ৰথম খণ্ডটি সাতটা আৰু দ্বিতীয় খণ্ডটি সাতটা অধ্যায়েৰে গঠিত।

প্ৰথম খণ্ডত ফলন, ফলনৰ সীমা, ফলনৰ অবিচ্ছিন্নতা আৰু ফলনৰ অৱকলয়ীতাৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব। তদুপৰি, এই খণ্ডটিত ফলনৰ অৱকলজ আৰু কিছুমান বিশেষ ফলনৰ অৱকলজৰ বিষয়ে বিশদভাৱে আলোকপাত কৰা হ'ব। শেষত, ফলনৰ অনিৰ্ণেয় ৰূপৰ বিষয়ে এই খণ্ডটিত আলোচনা কৰা হ'ব।

দ্বিতীয় খণ্ডটিত ধাৰাবাহিক ফলন আৰু অৱকলজৰ বিভিন্ন প্ৰয়োগৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব। মাধ্যমান উপপাদ্যসমূহৰ বিষয়ে এই খণ্ডটিত পৰিচয় কৰাই দিয়া হ'ব। আংশিক অৱকলন আৰু বহু চলক বিশিষ্ট ফলনৰ চৰম মানৰ বিষয়েও এই খণ্ডটিত আলোচনা কৰা হ'ব। শেষত, জেক'বিয়ান আৰু লাগ্ৰঞ্জৰ অনিৰ্ণীত গুণনীয়ক পদ্ধতিৰ বিষয়ে এই খণ্ডটিত জানিব পাৰিব।

খণ্ড পৰিচয়

এই খণ্ডটি 'অৱকলন গণিত' পাঠ্যবিষয়টিৰ প্ৰথম খণ্ড। এই খণ্ডটি সৰ্বমুঠ সাতটা অধ্যায়েৰে গঠিত।

এই খণ্ডটিৰ প্ৰথম অধ্যায়টোত ফলন, ইয়াৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব। এই অধ্যায়টিত কেইটামান প্ৰয়োজনীয় ফলনৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।

দ্বিতীয় অধ্যায়টিত ফলনৰ সীমাৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব। সোঁহতীয়া আৰু বাঁওহতীয়া সীমাৰ বিষয়েও এই অধ্যায়টিত জানিব পাৰিব।

তৃতীয় অধ্যায়টিত ফলনৰ অবিচ্ছিন্নতাৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব।

চতুৰ্থ অধ্যায়টিত ফলনৰ অৱকলয়ীতাৰ বিষয়ে অৱগত কৰা হ'ব। ফলনৰ বাঁও আৰু সোঁ অৱকলজৰ বিষয়েও এই অধ্যায়টিত আলোচনা কৰা হ'ব।

এই খণ্ডটিৰ পঞ্চম অধ্যায়টিত ফলনৰ অৱকলজৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব। এই অধ্যায়টিত ফলনৰ যোগ, অন্তৰ অৱকলজ, ফলনৰ পূৰণফলৰ অৱকলজ আৰু ভাগফল বিধি বিষয়ে জানিব পাৰিব।

আকৌ এই খণ্ডটিৰ ষষ্ঠ অধ্যায়টিত কিছুমান বিশেষ ফলনৰ অৱকলজৰ বিষয়ে পৰিচয় কৰাই দিয়া হ'ব।

সংযুক্ত ফলনৰ অৱকলজ, ঘাতাঙ্কীয় আৰু অন্তনিৰ্হিত ফলনৰ অৱকলজৰ বিষয়েও এই অধ্যায়টিত আলোচনা কৰা হ'ব।

এই খণ্ডটিৰ অন্তিম তথা সপ্তম অধ্যায়টিত ফলনৰ অনিৰ্ণেয় ৰূপ বিষয়েও জানিব পাৰিব।

লা হপিটেল বিধিৰ বিষয়েও এই অধ্যায়টিত আলোচনা কৰা হ'ব।

এই খণ্ডটি অধ্যয়ন কৰোঁতে মূল পাঠত 'জানি থোৱা ভাল' বাকচবোৰৰ মূল পাঠৰ সৈতে জড়িত কিছু গুৰুত্বপূৰ্ণ তথ্যৰ সম্ভেদ আছে। প্ৰতিটো অধ্যায়ত থকা 'অনুশীলন'সমূহে অধ্যয়ন অধিক সক্ৰিয় আৰু ফলপ্ৰসূ হোৱাত সহায় কৰিব। আকৌ, 'অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ' যোগে আগবঢ়োৱা প্ৰশ্নাৱলীয়ে অধ্যয়নৰ অগ্ৰগতি সম্পৰ্কে স্ব-পৰীক্ষণৰ সুবিধা দিব। অধ্যয়নৰ লগে লগে উক্ত প্ৰশ্নাৱলীৰ উত্তৰসমূহ লিখি শেষত দিয়া 'অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান'ৰ সৈতে ৰিজাই চোৱাটো অধিক লাভদায়ক হ'ব। অধ্যায়বোৰৰ শেষত 'আৰ্হি প্ৰশ্ন' হিচাপে কেইটিমান প্ৰশ্নৰ আৰ্হিও তুলি দিয়া হৈছে।

অধ্যায় ১ ঃ ফলন

অধ্যায় গাঁথনি

১.১ উদ্দেশ্য
১.২ পৰিচয়
১.৩ ফলন
১.৩.১ ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ
১.৪ কেইটামান প্ৰয়োজনীয় ফলন
১.৪.১ কেইটামান দৰকাৰী ফলন
১.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১.৬ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান
১.৭ অধিক জানিবলৈ
১.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

১.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

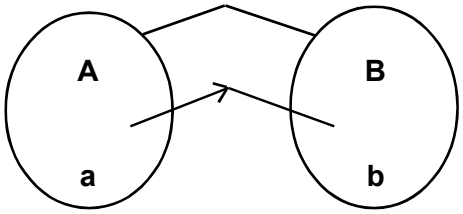
- ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ উলিয়াব পাৰিব
- বিভিন্ন ধৰণৰ ফলন সম্বন্ধে বুজিব পাৰিব

১.২ পৰিচয়

গণিতৰ ফলনৰ ধাৰণাৰ এক গুৰুত্বপূৰ্ণ ভূমিকা আছে। ফলন হ'ল এক বিশেষ ধৰণৰ সম্বন্ধ। এটা ৰাশি আন এটাৰ ওপৰত কেনেদৰে নিৰ্ভৰ কৰে সেইটো ই প্ৰকাশ কৰে।

১.৩ ফলন

ধৰা হ'ল A আৰু B দুটা অৰিক্ত সংহতি আৰু A আৰু B ৰ মৌলবোৰৰ মাজত এটা যোগাযোগ আছে যাতে প্ৰত্যেক $a \in A$ৰ বাবে B ত একমাত্ৰ এটা b আছে। ইয়াক b = f (a), এই ধৰণে লিখা হয়। তেনেহ'লে আমি কওঁ যে f হ'ল A ৰ পৰা B লৈ এটা ফলন (Function) আৰু ইয়াক $f : A \to B$ হিচাপে লিখা হয়।

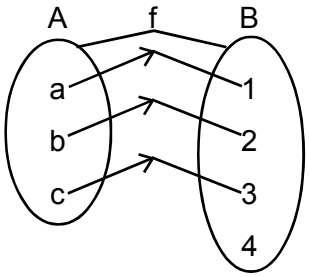


মন্তব্য ঃ

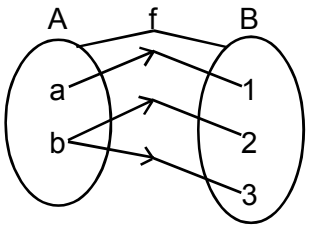
1) B-ৰ b মৌলটোক f-ৰ অধীনত x অৰ প্ৰতিবিম্ব (Image) বুলি কোৱা হয়।
2) যদি Aত এনে এটা মৌল থাকে, যিটো B-ৰ একাধিক মৌলৰ লগত জড়িত, তেনেহ'লে f ফলন নহয়।
3) যদি Aত এনে এটা মৌল থাকে, যিটো B-ৰ কোনো মৌলৰ লগত জড়িত নহয়, তেনেহ'লে f ফলন নহয়।

উদাহৰণ ঃ

1) যদি A = {a, b, c}, B = {1, 2, 3, 4,} আৰু f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3 তেনেহ'লে f ফলন নহয়।



2) যদি A = {a, b}, B = {1, 2, 3} আৰু f(a) = 1, f(b)=2, f(b) = 3 তেনেহ'লে f ফলন নহয়।



১.৩.১ ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ

$f : X \to Y$ এটা ফলন হ'লে, X সংহতিটোক f-ৰ আদিক্ষেত্ৰ (Domain) বোলা হয়।

Yত থকা প্ৰতিবিম্ববোৰৰ সংহতিটোক f-ৰ পৰিসৰ (Range) বোলা হয়। Y সংহতিটোক সহক্ষেত্ৰ (Codomain) বোলে।

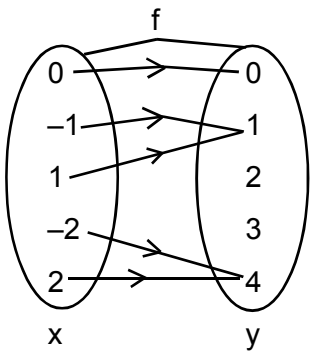
স্পষ্টতঃ পৰিসৰ $\subseteq$ সহক্ষেত্ৰ।

উদাহৰণ ঃ ধৰা হ'ল $X = \{0, \pm 1, \pm 2\}$

$Y = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$f : X \to Y$ ফলনটো এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হৈছে $f(x) = x^2$

ইয়াত f-ৰ আদিক্ষেত্ৰ = X



f-ৰ পৰিসৰ = {0, 1, 4)

f-ৰ সহক্ষেত্ৰ = Y.

অন্তৰাল ঃ

ধৰা হ'ল, a, b দুটা বাস্তৱ সংখ্যা আৰু a < b.

বন্ধ অন্তৰাল ঃ $\{x : a \le x \le b\}$ সংহতিটোক বন্ধ অন্তৰাল (Closed Interval) বুলি কোৱা হয়। ইয়াক [a, b]ৰে বুজোৱা হয়।

মুক্ত অন্তৰাল ঃ {x : a < x < b} সংহতিটোক মুক্ত অন্তৰাল (Open Interval) বুলি কোৱা হয়। ইয়াক]a, b[বা (a, b)ৰে বুজোৱা হয়।

অর্ধ-মুক্ত বা অর্ধ-বন্ধ অন্তৰাল ঃ $\{a \le x < b\}$ আৰু $\{a < x \le b\}$ সংহতি দুটাক অর্ধ-মুক্ত বা অর্ধ-বন্ধ (Semi-Open or Semi-Closed) অন্তৰাল বুলি কোৱা হয়। ইয়াক যথাক্রমে [a, b[আৰু]a, b]ৰে বুজোৱা হয়।

টোকা ঃ বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি R হ'ল মুক্ত অন্তৰাল $(-\infty,-\infty)$.

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1 : যদি f : $x \to x+3$ আৰু f অৰ আদিক্ষেত্ৰ = {x : $-2 \le x \le 2$, x এটা অখণ্ড সংখ্যা}, ফলন f আৰু ইয়াৰ পৰিসৰ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ ফলনটোৰ আদিক্ষেত্ৰ

= {x : $-2 \le x \le 2$, x এটা অখণ্ড সংখ্যা}

= {–2, –1, 0, 1, 2}

$\because$ f(x) = x+3

$\therefore$ f(–2) = –2+3 = 1

f(–1) = –1+3 = 2

f(0) = 0+3 = 3

f(1) = 1+3 = 4

f(2) = 2+3 = 5

$\therefore$ ফলনটো

f = {(–2, 1), (–1, 2), (0, 3), (1, 4), (2, 5)}

আৰু ইয়াৰ পৰিসৰ = {1, 2, 3, 4, 5)

উদাহৰণ 2 : $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

স্পষ্টতঃ সকলো বাস্তৱ সংখ্যাৰ বাবে f সংজ্ঞাবদ্ধ।

$\therefore$ f-ৰ আদিক্ষেত্ৰ R

ধৰা হ'ল $y = f(x) \Rightarrow y = \frac{x}{1+x^2}$

$\Rightarrow y + yx^2 = x$

$\Rightarrow yx^2 - x + y = 0$

$\therefore (-1)^2 - 4.y.y \geq 0$ ($\because x \in R$)

আৰু $y \neq 0$

$\Rightarrow 1 - 4y^2 \geq 0$ আৰু $y \neq 0$

$\Rightarrow (1+2y)(1-2y) \geq 0$ আৰু $y \neq 0$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2}$ আৰু $y \neq 0$

কিন্তু $y = 0$-ৰ পৰা আমি পাওঁ $x = 0$

$y = 0$ বিন্দুটোৱো পৰিসৰত আছে।

f-ৰ পৰিসৰ = $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

উদাহৰণ 3 : $f(x) = \frac{1}{2-\sin 3x}$ -ৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে $f(x) = \frac{1}{2-\sin 3x}$

$\because -1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in R$

$\therefore 2 - \sin x > 0, \forall x \in R$

$\therefore$ সকলো বাস্তৱ x-ৰ বাবে f সংজ্ঞাৱদ্ধ।

$\therefore$ আদিক্ষেত্ৰ হ'ল R.

ধৰা হ'ল $y = f(x) \Rightarrow y = \frac{1}{2-\sin 3x}$

$\Rightarrow \frac{1}{y} = 2 - \sin 3x \quad [\because y > 0]$

$\Rightarrow \sin 3x = 2 - \frac{1}{y}$

$\Rightarrow x = \frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{2y-1}{y}\right)$

$\Rightarrow -1 \leq \frac{2y-1}{y} \leq 1 \quad (\because x \in R)$

$\Rightarrow -y \leq 2y - 1 \leq y \quad (\because y > 0)$

$\Rightarrow 2y - 1 \geq -y$ আৰু $2y - 1 \leq y$

$\Rightarrow 3y \geq 1$ আৰু $y \leq 1$

$\Rightarrow y \geq \frac{1}{3}$ আৰু $y \leq 1$

$\therefore$ পৰিসৰ হ'ল $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$

উদাহৰণ 4 : $f(x) = \frac{x}{|x|}$ ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে $f(x) = \frac{x}{|x|}$

0-ৰ বাহিৰে x-ৰ সকলো বাস্তৱ মানৰ বাবে f সংজ্ঞাৱদ্ধ।

$\therefore$ আদিক্ষেত্ৰ হ'ল $R - \{0\}$

আকৌ $f(x) = \frac{x}{|x|}$

$$= \begin{cases} 1 & \text{for } x > 0 \\ -1 & \text{for } x < 0 \end{cases}$$

$\therefore$ f-ৰ পৰিসৰ $\{-1, 1\}$

উদাহৰণ 5 : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$ ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$

স্পষ্টতঃ f সংজ্ঞাৱদ্ধ যদি $x^2 + x - 6 \neq 0$

$\Rightarrow (x + 3)(x - 2) \neq 0$

$\Rightarrow x \neq -3, 2$

$\therefore$ আদিক্ষেত্ৰ হ'ল $R - \{-3, 2\}$

ধৰা হ'ল $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$

$\Rightarrow x^2y + xy - 6y = x^2 - 3x + 2$

$\Rightarrow (y - 1)x^2 + (y + 3)x - (6y + 2) = 0$

$\because$ x বাস্তৱ

$\therefore (y + 3)^2 - 4(y - 1)\{-(6y + 2)\} \geq 0$

$\Rightarrow y^2 + 6y + 9 + 4(6y^2 - 4y - 2) \geq 0$

$\Rightarrow 25y^2 - 10y + 1 \geq 0$

$\Rightarrow (5y - 1)^2 \geq 0$, আৰু ই y-ৰ সকলো বাস্তৱ মানৰ বাবে সত্য।

$\therefore$ f-ৰ পৰিসৰ R.



CHECK YOUR PROGRESS

প্রশ্ন ১ ঃ $f(x) = \sqrt{2-2x-x^2}$ ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ উলিয়াওক।

প্রশ্ন ২ ঃ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$ ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ উলিয়াওক।

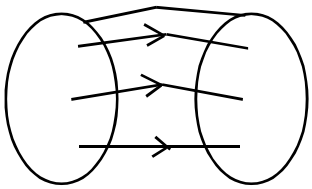
প্রশ্ন ৩ ঃ $y = \frac{x^2}{1+x^2}$ ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ উলিয়াওক।

প্রশ্ন ৪ ঃ $f(x) = \sin x - \cos x$, ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ উলিয়াওক।

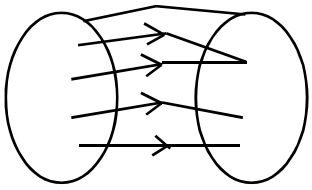
প্রশ্ন ৫ ঃ $f(x) = \frac{x+2}{|x+2|}$ ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ উলিয়াওক।

১.৪ ফলনৰ শ্রেণী বিভাজন

একৈকী ফলন ঃ এটা ফলন $f : X \to Y$ক একৈকী (One-One বা Injective) বুলি কোৱা হয় যদি X-ৰ পৃথক মৌলৰ Yত থকা প্রতিবিম্ববোৰো পৃথক পৃথক।



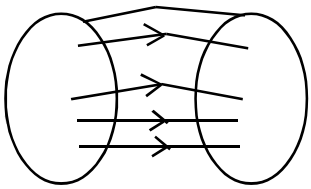
বহু এক ফলন ঃ এটা ফলন $f : X \to Y$ক বহু এক (Many one) বুলি কোৱা হয় যদি Xত অন্ততঃ দুটা পৃথক মৌল থাকে যাৰ প্রতিবিম্ব সমান।



আচ্ছাদক ফলন ঃ এটা ফলন $f: X \to Y$ক আচ্ছাদক (Onto বা Surjective) বুলি কোৱা হয় যদি Y-ৰ প্রতিটো মৌল X-ৰ কোনো মৌলৰ প্রতিবিম্ব।

টোকাঃ যিবোৰ ফলন আচ্ছাদক নহয়, সেইবোৰক অনাচ্ছাদক (Into) বুলি কোৱা হয়।

দ্বিমুখী ফলন ঃ এটা ফলন $f : X \to Y$ক দ্বিমুখী (Bijective) বুলি কোৱা হয় যদি ই একৈকী আৰু আচ্ছাদক।



টোকা ঃ এটা ফলন প্ৰতিলোমনীয় (Invertible) যদি ই একৈকী আৰু আচ্ছাদক অর্থাৎ দ্বিমুখী।

এটা ফলন একৈকী হয়নে নহয় কেনেদৰে পৰীক্ষা কৰিব লাগে ঃ

$f : X \to Y$ ফলনৰ বাবে যদি $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$, তেনেহ'লে f একৈকী।

এটা ফলন আচ্ছাদক হয়নে নহয় কেনেদৰে পৰীক্ষা কৰিব লাগে ঃ

$f : X \to Y$ ফলনৰ পৰিসৰ উলিয়াব লাগে।

যদি পৰিসৰ = Y, তেনেহ'লে ফলনটো আচ্ছাদক।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1 : $f(x) = x + \sqrt{x^2}$ ৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ $f : R \to R$ ফলনটো একৈকী আৰু আচ্ছাদক হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $f(x) = x + \sqrt{x^2}$

$= x + |x|$

এতিয়া $f(-1) = -1 + |-1| = 0$

$f(-2) = -2 + |-2| = 0$

$\therefore f(-1) = f(-2)$ কিন্তু $-1 \neq -2$

$\therefore$ f একৈকী নহয়।

আকৌ, f আচ্ছাদকো নহয় কিয়নো $f(x) \geq 0, \ \forall x \in R$

আৰু পৰিসৰ $\neq$ সহক্ষেত্ৰ।

উদাহৰণ 2 : $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$ -ৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ $f : R - \{1\} \to R - \{1\}$ ফলনটো দ্বিমুখী বুলি দেখুৱাওক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $x, y \in R - \{1\}$ যাতে $f(x) = f(y)$

এতিয়া $f(x) = f(y) \Rightarrow \dfrac{x-3}{x+1} = \dfrac{y-3}{y+1}$

$\Rightarrow xy + x - 3y - 3 = xy - 3x + y - 3$

$\Rightarrow x - 3y = -3x + y$

$\Rightarrow 4x = 4y$

$\Rightarrow x = y$

$\therefore$ f একৈকী

আকৌ ধৰা হ'ল $y \in R - \{1\}$ এটা স্বেচ্ছ মৌল।

$$\therefore f(x) = y \Rightarrow \frac{x-3}{x+1} = y$$

$$\Rightarrow xy + y = x - 3$$

$$\Rightarrow x(y-1) = -(y+3)$$

$$\Rightarrow x = \frac{y+3}{1-y} \in R, \forall y \in R - \{1\}$$

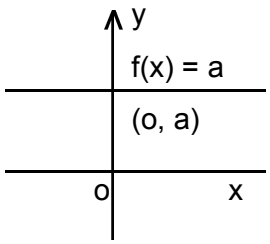
$\therefore$ f আচ্ছাদক।

$\therefore$ f একৈকী আৰু আচ্ছাদক অর্থাৎ f এটা দ্বিমুখী ফলন।

টোকা ঃ যিহেতু f এটা দ্বিমুখী ফলন, গতিকে $f^{-1} : R - \{1\} \to R - \{1\}$ স্থিত হয় আৰু ই এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{1-x}$

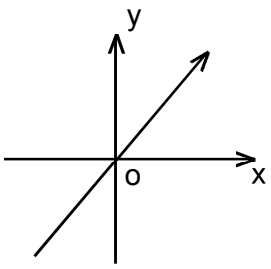
১.৪.১ কেইটামান দৰকাৰী ফলন

ধ্ৰুৱক ফলন ঃ এটা ফলন $f : R \to R$ক ধ্ৰুৱক ফলন (Constant Function) বুলি কোৱা হয় $f(x) = a, \ \forall x \in R$ আৰু a ধ্ৰুৱক।



টোকা ঃ ধ্ৰুৱক ফলনৰ লেখ হ'ল x-অক্ষৰ সমান্তৰাল এডাল ৰেখা। ধ্ৰুৱক ফলনৰ পৰিসৰ এটা একমৌল সংহতি (Singleton Set).

একক ফলন ঃ এটা ফলন $f : R \to R$ক একক ফলন (Identity Function) বুলি কোৱা হয় যদি $f(x) = x, \ \forall x \in R$. ইয়াৰ আদিক্ষেত্ৰ R আৰু পৰিসৰো R.

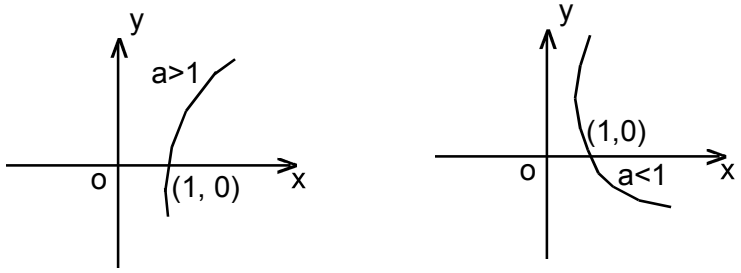


টোকা ঃ একক ফলনৰ লেখ মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু x-অক্ষৰ লগত 45^0 কোণ কৰা এডাল সৰল ৰেখা।

বহুপদ ফলন ঃ এটা ফলন $f : R \to R$ অক বহুপদ ফলন (Polynomial Function) বুলি কোৱা হয়। যদি $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, য'ত $n \in N$আৰু $a_0, a_1, a_2, ... , a_n \in R$, $(a_n \neq 0)$. n অক বহুপদটোৰ মাত্রা (degree) বুলি কোৱা হয়। বহুপদ ফলনৰ আদিক্ষেত্র হ'ল R.

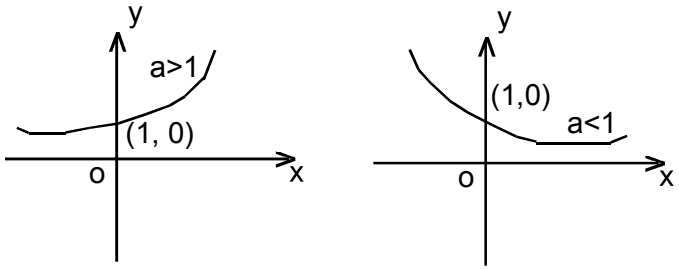
ঘাতাঙ্কীয় ফলন ঃ

ধৰা হ'ল x এটা ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা (এক নহয়)। তেনেহ'লে $f :]0, \infty[\to R$, $f(x) = \log_e x$ ফলনক ঘাতাঙ্কীয় ফলন (Logarithmic Function) বুলি কোৱা হয়।



মন্তব্য ঃ $\log_e x$ক lnx-ৰ দ্বাৰাও বুজোৱা হয়।

সূচকীয় ফলন ঃ ধৰা হ'ল a এটা ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা (এক নহয়)। তেনেহ'লে $f : R \to R$, $f(x) = a^x$ ফলনটোক সূচকীয় ফলন বোলা হয়।



স্পষ্ট ফলন আৰু অন্তর্নিহিত ফলন ঃ এটা ফলন yক x-ৰ স্পষ্ট ফলন (Explicit Function) বুলি কোৱা হয়, যদিহে পৰতন্ত্র চলক yক স্বতন্ত্র চলক x-ৰ সহায়ত সম্পূর্ণ ৰূপে প্রকাশ কৰিব পাৰি। উদাহৰণ স্বৰূপে, $y = \cos^2 x$, $x \in R$, $y = \log x + 2e^{3x} - x^3$; $x > 0$. যেতিয়া x আৰু y চলক দুটা $f(x, y) = 0$ সমীকৰণত এনেদৰে জড়িত হৈ থাকে যে yক স্পষ্টভাৱে x-ৰ সহায়ত প্রকাশ কৰিব নোৱাৰি, তেনেহ'লে yক x-ৰ অন্তর্নিহিত ফলন (Implicit Function) বুলি কোৱা হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, $xy = \sin(x+y)$, $e^{xy} + \cos x + x^2y - 1 = 0$.

অযুগ্ম ফলন ঃ এটা ফলন fকি অযুগ্ম ফলন (Odd Function) বুলি কোৱা হয় যদি f-ৰ আদিক্ষেত্রৰ সকলো x-ৰ বাবে $f(-x) = -f(x)$. উদাহৰণ স্বৰূপে, $f(x) = \sin x$, $f(x) = x^3 + x$.

যুগ্ম ফলন ঃ এটা ফলন fকি যুগ্ম ফলন (Even Function) বুলি কোৱা হয় যদি f-ৰ আদিক্ষেত্রৰ সকলো x-ৰ বাবে f(–x) = f(x). উদাহৰণ স্বৰূপে,

$f(x) = \cos x$, $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2$.

নিৰপেক্ষ মান ফলন ঃ

$f(x) = x$, যদি $x \geq 0$ = –x যদি x < 0-ৰ দ্বাৰা সংজ্ঞাৱদ্ধ f ফলনটোক নিৰপেক্ষ মান ফলন (Absolute Value or Modulus Function) বুলি কোৱা হয়।

ইয়াক $|x|$ ৰে বুজোৱা হয়, অর্থাৎ $|x| = x$, যদি $x \geq 0$ = –x যদি x < 0

তলত প্রমাণ ব্যতিৰেকে উপপাদ্যকেইটা উল্লেখ কৰা হ'ল।

উপপাদ্য ঃ ধৰা হ'ল a, b দুটা বাস্তৱ সংখ্যা।

i) $|a+b| \leq |a| + |b|$

ii) $||a| - |b|| \leq |a-b|$

iii) $|a-b| \leq k \Leftrightarrow b-k \leq a \leq b+k$

iv) $|ab| = |a||b|$

v) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, b \neq 0$

টোকা ঃ নিৰপেক্ষ মান ফলন এটা যুগ্ম ফলন, কিয়নো

$f(x) = |x| = |-x| = f(-x)$.



১.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- ফলন হ'ল এটা বিশেষ ধৰণৰ সম্বন্ধ। এটা ৰাশি আন এটা ৰাশিৰ ওপৰত কেনেদৰে নির্ভৰশীল সেয়া ই দেখুৱায়।
- এটা ফলনৰ পৰিসৰ,সহক্ষেত্রত সমান হ'লে ফলনটো আচ্ছাদক (Onto বা Surjective), অন্যথাই ই আচ্ছাদক নহয়।
- যদি $f : X \to Y$ এটা এক-এক ফলন যাতে X আৰু Y-ৰ মৌলৰ সংখ্যা সমান (X আৰু Y সসীম), তেনেহ'লে f আচ্ছাদক।
- যুগ্ম ফলনৰ লেখ y-অক্ষ সাপেক্ষে প্রতিসম (Symmetrical)।
- অযুগ্ম ফলনৰ লেখ মূল বিন্দু সাপেক্ষে প্রতিসম আৰু ই হয়তো প্রথম আৰু তৃতীয় চোকত নতুবা দ্বিতীয় আৰু চতুর্থ চোকত থাকে।
- f(x) = 0 ফলনটোৱেই একমাত্র ফলন যিটো যুগ্মও আৰু অযুগ্মও।

১.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে $f(x) = \sqrt{2 - 2x - x^2}$

$\therefore 2 - 2x - x^2 \geq 0$

$\Rightarrow x^2 + 2x - 2 \leq 0$

$\Rightarrow (x+1)^2 - 3 \leq 0$

$\Rightarrow \left(x + 1 + \sqrt{3}\right)\left(x + 1 - \sqrt{3}\right) \leq 0$

$\Rightarrow -1 - \sqrt{3} \leq x \leq -1 + \sqrt{3}$

$\therefore$ f-ৰ আদিক্ষেত্ৰ হ'ল $\left[-1 - \sqrt{3},\ -1 + \sqrt{3}\right]$

২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$

$\therefore x^2 - 3x + 2 > 0$

$\Rightarrow (x-1)(x-2) > 0$

$\Rightarrow x < 1$ or $x > 2$

$\therefore$ আদিক্ষেত্ৰ হ'ল $]-\infty, 1[\cup]2, \infty]$

৩নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে $y = \dfrac{x^2}{1 + x^2}$

স্পষ্টতঃ, সকলো বাস্তৱ x-ৰ বাবে y সংজ্ঞাৱদ্ধ।

$\therefore$ আদিক্ষেত্ৰ হ'ল R

আকৌ, $y = \dfrac{x^2}{1+x^2} \Rightarrow y + yx^2 = x^2$

$\Rightarrow x^2 (1 - y) = y$

$\Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{y}{1-y}}$

$\Rightarrow x = \sqrt{\dfrac{y(1-y)}{(1-y)^2}}$

$\Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{y(1-y)}}{1-y}$

x বাস্তৱ হ'বলৈ হ'লে, $1 - y \neq 0$ আৰু $y(1-y) \geq 0$

$\Rightarrow y \neq 1$ আৰু $0 \leq y \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq y < 1$

$\therefore$ পৰিসৰ হ'ল [0, 1]

৪নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $f(x) = \sin x - \cos x$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\sin x - \sin\frac{\pi}{4}\cos x\right)$$

$$\therefore f(x) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

স্পষ্টতঃ, x-ৰ সকলো বাস্তৱ মানৰ বাবে f(x) সংজ্ঞাৱদ্ধ।

$\therefore$ f-ৰ আদিক্ষেত্ৰ হ'ল R

ধৰা হ'ল, $y = f(x) \Rightarrow y = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{2}} = x - \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{2}}$$

$$\because x \in R,\ -1 \le \frac{y}{\sqrt{2}} \le 1$$

$$\Rightarrow -\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2}$$

$\therefore$ f-ৰ পৰিসৰ $\left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$

Ans. to Q. No. 5: দিয়া আছে, $f(x) = y = \frac{x+2}{|x+2|}$

স্পষ্টতঃ $x = -2$-ৰ বাহিৰে x-ৰ সকলো বাস্তৱ মানৰ বাবে f(x) সংজ্ঞাৱদ্ধ।

$\therefore$ f-ৰ আদিক্ষেত্ৰ = $R - \{-2\}$

আকৌ $f(x) = \frac{x+2}{|x+2|}$

$$= \begin{cases} 1 & \text{if } x > -2 \\ -1 & \text{if } x < -2 \end{cases}$$

$\therefore$ f-ৰ পৰিসৰ হ'ল $\{-1, 1\}$



১.৬ অধিক জানিবলৈ

1) Gupta, Sudhir (2011) (1st edition): *Basics of Differentential Calculus*; New Delhi: Anmol publication Pvt. Ltd.

2) Habib, Amber (2011) (1st edition): *The Calculus of Finance*; Hyderabad: Universities Press India Pvt. Ltd.

3) Maron, I. A. (1993) (1st edition): *Problems in Calculus of One Variable*; New Delhi: CBS Publishers & Distributors Pvt. Ltd.

4) Sharma, A. K. (2004) (1st edition): *Text Book of Differential Calculus for B.A., B.Sc., B.Com., I.A.S., P.C.S.*; New Delhi: Discovery Publishing House.



১.৭ অধিক জানিবলৈ

প্ৰশ্ন ১ ঃ তলত দিয়া ফলনবোৰৰ আদিক্ষেত্ৰ নিৰ্ণয় কৰক।

i) $f(x)=\frac{x}{x^2-3x+2}$ ii) $f(x)=\frac{x^2-5x+3}{x^2-1}$

iii) $f(x)=\frac{x+7}{x^2-5x+4}$ iv) $f(x)=\frac{x}{x^2-3x+2}$

v) $f(x)=\frac{1}{5-\cos x}$

প্ৰশ্ন ২ ঃ তলত দিয়া ফলনবোৰৰ আদিক্ষেত্ৰ আৰু পৰিসৰ নিৰ্ণয় কৰক।

i) $f(x) = 1- |x - 3|$ ii) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x+3\sin x}}$

iii) $f(x) = 1 + 3\cos 2x$ iv) $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$

v) $f(x)=\frac{4-x}{x-4}$ vi) $f(x)=\frac{1}{2-\cos 3x}$

vi) $f(x)=\frac{ax+b}{bx-a}$

প্ৰশ্ন ৩ ঃ $f(x)=\sqrt{x^2-6x+5}$ ফলনৰ আদিক্ষেত্ৰ নিৰ্ণয় কৰক।

*** ***** ***

অধ্যায় ২ ঃ ফলনৰ সীমা

অধ্যায় গাঁথনি

২.১ উদ্দেশ্য
২.২ পৰিচয়
২.৩ ফলনৰ সীমা
২.৩.১ ফলনৰ সীমা উলিওৱাৰ পদ্ধতি
২.৩.২ কেইটামান প্ৰয়োজনীয় সীমা
২.৩.৩ সোঁহতীয়া আৰু বাঁওহতীয়া সীমা
২.৪ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
২.৫ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান
২.৬ অধিক জনিবলৈ
২.৭ আৰ্হি প্ৰশ্ন

২.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- নিৰ্দিষ্ট ফলনৰ সীমা নিৰ্ণয় কৰিব পাৰিব
- বাঁওহতীয়া সীমা আৰু সোঁহতীয়া সীমাৰ মাজৰ পাৰ্থক্য অনুধাৱন কৰিব পাৰিব।

২.২ পৰিচয়

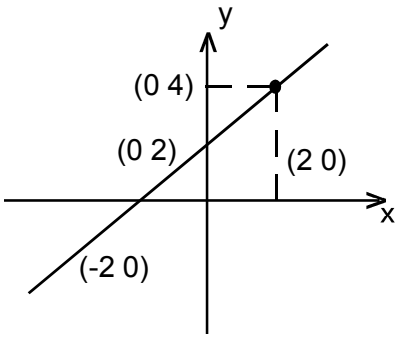
ফলন গণিত অধ্যয়নৰ বাবে সীমাৰ ধাৰণা অপৰিহাৰ্য। এটা বিশেষ মানৰ একেবাৰে ওচৰত স্বতন্ত্ৰ চলকে কেনেধৰণৰ মান লয়, তাৰ প্ৰকৃতি জানিবলৈ সীমাৰ ধাৰণাই সহায় কৰে।

২.৩ ফলনৰ সীমা

$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ ফলনৰ লেখ মোটামুটিভাৱে আঁকা হ'ল।

x	0	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3	4
y	2	3	$3\frac{1}{2}$	সংজ্ঞাবদ্ধ নহয়	$4\frac{1}{2}$	5	6

লেখটোৰ পৰা তলৰ কথাকেইটা আমাৰ দৃষ্টিগোচৰ হয়।



i) f(2) সংজ্ঞাৱদ্ধ নহয়।

ii) x = 2ৰ দুয়োকাষে লেখটোত কোনোধৰণৰ বিচ্ছিন্নতা নাই।

iii) x-ৰ মান 2-ৰ একেবাৰে সমীপত ল'লে f(x) আৰু 4-ৰ মাজৰ পার্থক্য যিমান সৰু ইচ্ছা সিমান সৰু কৰিব পাৰি।

iv) দুয়োপিনৰ পৰা x, 2-ৰ ওচৰলৈ চাপি গ'লে f(x), 4-ৰ ওচৰলৈ যায়।

x = 2-ৰ সাপেক্ষত আমি ফলনটোৰ প্ৰকৃতি আলোচনা কৰোঁহক।

$x \neq 2$ হ'লে,, $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$

$\Rightarrow f(x) = x + 2,\ x \neq 2$

$\therefore f(x) - 4 = x - 2$

$\Rightarrow |f(x) - 4| = |x - 2|$

যদি আমি x এনেদৰে লওঁ যে $|x-2| < 0.1$, তেনেহ'লে $|f(x) - 4| < 0.1$.

যদি আমি x এনেদৰে লওঁ যাতে $|x-2| < 0.001$, তেনেহ'লে $|f(x)-4| < 0.1$.

যদি আমি x এনেদৰে লওঁ যাতে $|x-2| < 0.00001$, তেনেহ'লে $|f(x) - 4| < 0,001$.

ইয়াৰ পৰা উক্তি (iii) সত্য বুলি প্ৰতীয়মান হয়। ওপৰৰ আলোচনাৰ পৰা দেখা গ'ল যে $|f(x)-4|$-ৰ মান যিমান ইচ্ছা সিমান সৰু কৰিবলৈ হ'লে $|x-2|$-ৰ মান যথেষ্ট সৰু কৰি ল'ব পাৰি।

$\therefore$ x, 2-ৰ ওচৰ চাপি গ'লে f(x), 4-ৰ ওচৰ চাপি যায়।

ফলনৰ সীমাৰ সংজ্ঞা ঃ

ধৰা হ'ল a-ৰ সমীপত f ফলনটো সংজ্ঞাৱদ্ধ। x, a কাষ চাপি গ'লে ফলনটো সীমা (Limit) A-ৰ কাষ চাপি যোৱা বুলি কোৱা হয় যদি $|x-a|$ যথেষ্ট সৰু কৰি পার্থক্য $|f(x) - A|$ যিমান ইচ্ছা সিমান সৰু কৰিব পাৰি।

প্ৰতীকৰ সহায়ত এইটো এনেদৰে লিখা হয় $\lim_{x \to a} f(x) = A$

উপৰিউক্ত উক্তিটো আৰু অধিক তলত দিয়া ধৰণে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

x, a-ৰ কাষ চাপি গ'লে A সংখ্যাটোক f(x)-ৰ সীমা বুলি কোৱা হয় যদি এটা স্বেচ্ছ ক্ষুদ্ৰ ধনাত্মক সংখ্যা $\in$-ৰ বাবে আন এটা ক্ষুদ্ৰ সংখ্যা $\delta > 0$ উলিয়াব পাৰি যাতে x-ৰ যিবোৰ মানে $0 < |x - a| < \delta$ মানি চলে তাৰ বাবে $|f(x) - A| < \in$.

তলত আমি প্ৰমাণ ব্যতিৰেকে সীমা সম্বন্ধীয় উপপাদ্য কেইটা উল্লেখ কৰিলোঁ।

i) $\lim_{x \to a} f(x)$, যদি স্থিত হয়, তেনেহ'লে ই একমাত্ৰ এটা (Unique)

যদি $\lim_{x \to a} f(x) = l$ আৰু $\lim_{x \to a} g(x) = m$, তেনেহ'লে

ii) $\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = l \pm m$

iii) $\lim_{x\to a}(f(x).g(x)) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right).\left(\lim_{x\to a} g(x)\right) = l.m$

iv) $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{l}{m}$, where $m \neq 0$.

২.৩.১ ফলনৰ সীমা উলিওৱাৰ পদ্ধতি

ক্ষেত্ৰ I : পৰিমেয় ফলন ঃ x-ৰ পৰিমেয় ফলন হ'ল এনেধৰণৰ $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

যেতিয়া $f(a) = 0$ আৰু $g(a) = 0$, $f(x)$ আৰু $g(x)$-ৰ উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰিব লাগে আৰু যিটো উৎপাদকে $f(x)$ আৰু $g(x)$ শূন্য কৰে সেইটোৰে হৰণ কৰিব লাগে। তাৰ পাছত $\lim_{x\to a} f(x)$ আৰু $\lim_{x\to a} g(x)$ উলিয়াব লাগে।

উদাহৰণ 1: মান নিৰ্ণয় কৰক— $\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-12}{x-3}$

সমাধান ঃ

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+x-12}{x-3} = \lim_{x\to 3} = \frac{(x-3)(x+4)}{(x-3)} = \lim_{x\to 3}(x+4) = 7$$

উদাহৰণ 2: মান নিৰ্ণয় কৰক— $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{n}}-1}{x}$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{n}}-1}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+\frac{1}{n}x + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2!}x^2 + ...) - 1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right).\frac{x}{2} + x\text{-ৰ উচ্চতৰ ঘাত বিশিষ্ট পদবোৰ}\right]$$

$$= \frac{1}{n}$$

ক্ষেত্ৰ II: অপৰিমেয় ফলন ঃ

যদি $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, হৰ বা লবক কৰণীমুক্ত কৰক আৰু সীমা নিৰ্ণয় কৰক।

উদাহৰণ 3: মান নিৰ্ণয় কৰক— $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

সমাধান ঃ $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2x}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}$$

$$= \frac{2}{1+1}$$

$$= 1$$

উদাহৰণ 4: মান নিৰ্ণয় কৰক— $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}$

সমাধান ঃ $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1+x} - 1}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left(\sqrt{1+x} + 1\right)}{1+x-1}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x\left(\sqrt{1+x} + 1\right)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} + 1}{1}$$

$$= 1 + 1$$

$$= 2$$

ক্ষেত্ৰ III: যেতিয়া $x \to \infty$, লব আৰু হৰ উভয়কে x-ৰ সৰ্বোচ্চ ঘাতেৰে হৰণ কৰক। $x = \frac{1}{z}$ বহুৱাওক। যেতিয়া $x \to \infty$, তেতিয়া $z \to 0$. পাছত ক্ষেত্ৰ I বা ক্ষেত্ৰ II-ৰ দৰে কৰি যাওক।

উদাহৰণ 5: মান নিৰ্ণয় কৰক— $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+7x+1}{3x^2+2x+7}$

সমাধান ঃ $\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2+7x+1}{3x^2+2x+7}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{3+\frac{7}{x}+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{2}{x}+\frac{7}{x^2}}$$

$$= \lim_{z \to 0} \frac{3+7z+z^2}{3+2z+7z^2} \qquad \left[\begin{array}{l}\text{Let } x = \frac{1}{z} \\ \because x \to \infty \therefore z \to 0\end{array}\right]$$

$$= \frac{3+0+0}{3+0+0}$$

$$= \frac{3}{3} = 1$$

$$= 1$$

ক্ষেত্ৰ IV: অধোলিখিত প্ৰসাৰণবোৰৰ সহায়ত কিছুমান সীমা নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।

1) $(x+a)^n = x^n + nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}a^2 + \ldots\ldots\ldots + a^n [n \in N]$

2) $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\ldots\ldots\infty, \forall x \in R$

3) $a^x = 1 + x\log_e a + \frac{x^2(\log_e a)^2}{2!} + \ldots\ldots\ldots\infty, a > 0, a \neq 1, x \in R$

4) a) $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\ldots\infty, \ -1 < x \leq 1$

b) $\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots\ldots\ldots\infty, \ -1 < x \leq 1$

5) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\ldots\ldots\infty$

6) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\ldots\ldots\infty$

উদাহৰণ 6: মান নিৰ্ণয় কৰক— $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$

সমাধান ঃ $\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left\{1 + x\log a + \frac{x^2(\log a)^2}{2!} + ...\infty\right\} - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left[x\log a + \frac{x^2}{2!}(\log a)^2 + ...\infty\right]$$

$$= \lim_{x \to 0}\left[\log a + \frac{x}{2!}(\log a)^2 + x \text{-ৰ উচ্চতৰ ঘাত বিশিষ্ট পদবোৰ}\right]$$

= log a.

উদাহৰণ 7: মান নির্ণয় কৰক– $\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x - 1}$

সমাধান ঃ $\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x - 1}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\log(1+h)}{h} \qquad \left[\begin{matrix}\text{Let } x = 1+h \\ \because x \to 1 \ \therefore h \to 0\end{matrix}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} - .....\infty}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}\left[1 - \frac{h}{2} + h \text{-ৰ উচ্চতৰ ঘাত বিশিষ্ট পদবোৰ}\right]$$

= 1

২.৩.২ কেইটামান প্রয়োজনীয় সীমা

1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (x-ৰ মান ৰেডিয়ানত আছে)

2) $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

3) $\lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

4) $\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$; a > 0 আৰু n এটা পৰিমেয় সংখ্যা

5) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log_e a,\quad a>0,\ a\neq 1$

6) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

7) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1$

8) $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1-x)}{x}=-1.$

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}$ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $\sin^{-1}x=y \quad \therefore x=\sin y$

$\because\ x\to 0 \quad \therefore y\to 0$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=\frac{1}{\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}=\frac{1}{1}=1$$

উদাহৰণ 2: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}$ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin ax}{ax}.ax}{\frac{\sin bx}{bx}.bx}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\frac{\sin ax}{ax}}{\frac{\sin bx}{bx}}.\frac{a}{b}\right]$$

$$=\frac{a}{b}.\frac{\lim_{ax\to 0}\frac{\sin ax}{ax}}{\lim_{bx\to 0}\frac{\sin bx}{bx}}\quad\left[\begin{matrix}x\to 0\\ \Rightarrow ax\to 0 \quad bx\to 0\end{matrix}\right]$$

$$=\frac{a}{b}.\frac{1}{1}$$

$$=\frac{a}{b}$$

উদাহৰণ 3: মান নিৰ্ণয় কৰক— $\lim_{x \to 2} \frac{x^{10} - 1024}{x^5 - 32}$

সমাধান ঃ $\lim_{x \to 2} \frac{x^{10} - 1024}{x^5 - 32}$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^{10} - 2^{10}}{x^5 - 2^5}$$

$$= \lim_{x \to 2} \left[\frac{\frac{x^{10} - 2^{10}}{x - 2}}{\frac{x^5 - 2^5}{x - 2}} \right] = \frac{\lim_{x \to 2} \frac{x^{10} - 2^{10}}{x - 2}}{\lim_{x \to 2} \frac{x^5 - 2^5}{x - 2}}$$

$$= \frac{10 \times 2^{10-1}}{5 \times 2^{5-1}}$$

$$= \frac{2^{10}}{2^4} = 64$$

উদাহৰণ 4 : মান নিৰ্ণয় কৰক— $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x}$

সমাধান ঃ $\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x}$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 6}$$

$$= \left[\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{2}}\right)^{\frac{x}{2}} \right]^6$$

$$= \left[\lim_{y \to \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y} \right]^6 \qquad \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = y \\ \because x \to \infty \quad \therefore y \to \infty \end{array} \right]$$

$= e^6$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

অধোলিখিতবোৰ নির্ণয় কৰক—

প্ৰশ্ন ১ঃ $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x}$ **প্ৰশ্ন ২ঃ** $\lim_{x\to 3}\frac{x^5-243}{x^3-27}$

প্ৰশ্ন ৩ঃ $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+6}{6x^3+5x+1}$ **প্ৰশ্ন ৪ঃ** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^0}{x}$

প্ৰশ্ন ৫ঃ $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$ **প্ৰশ্ন ৬ঃ** $\lim_{x\to 1}\frac{(2x-3)\left(\sqrt{x}-1\right)}{2x^2+x-3}$

প্ৰশ্ন ৭ঃ $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ **প্ৰশ্ন ৮ঃ** $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}+e^{-x}-2}{x^2}$

২.৩.৩ সোঁহতীয়া আৰু বাঁওহতীয়া সীমা

$x\to a$ হ'লে f(x)-ৰ সীমা সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰোঁতে আমি a-ৰ সন্নিকটত f(x) ফলনটোৰ প্ৰকৃতি বিবেচনা কৰিছোঁ। যদি আমি $x > a$ বা $x < a$-ৰ বাবে ফলনটোৰ প্ৰকৃতি বিবেচনা কৰোঁ, তেনেহ'লে আমি যথাক্ৰমে x, সোঁফালৰ পৰা (বা ওপৰৰ) পৰা) বা বাঁওফালৰ পৰা (বা তলৰ পৰা) a-ৰ ওচৰ চপা বুলি কওঁ।

ইয়াক $x\to a+0$ বা $x\to a-0$ হিচাপে প্ৰকাশ কৰা হয়।

এই সীমাবোৰৰ একপক্ষীয় সীমা বুলি কোৱা হয়।

সোঁহতীয়া সীমা (The Right Hand Limit/RHL): $x\to a$ হ'লে এটা ফলন f(x) ওপৰৰ পৰা বা সোঁফালৰ পৰা সীমা l অৰ ওচৰলৈ যায় যদি প্ৰত্যেক $\varepsilon > 0$-ৰ বাবে, এনে $\delta > 0$ থাকে যাতে $|f(x)-l|<\in$, যেতিয়া $a < x < a+\delta$.

প্ৰতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে লিখা হয় ঃ $\lim_{x\to a+0} f(x)=l$

বাঁওহতীয়া সীমা (The Left Hand Limit/LHL) : $x\to a$ হ'লে এটা ফলন f(x) তলৰ পৰা বা বাঁওফালৰ পৰা সীমা l-ৰ ওচৰলৈ যায় যদি প্ৰত্যেক $\varepsilon > 0$-ৰ বাবে, এনে $\delta > 0$ থাকে যাতে $|f(x)-l|<\in$ যেতিয়া $a-\delta < x < a$.

প্ৰতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে লিখা হয় ঃ $\lim_{x\to a-0} f(x)=l$

টোকা ঃ $x\to a$ হ'লে এটা ফলন f(x) সীমা l-ৰ ওচৰলৈ যায় যদি সোঁহতীয়া আৰু বাঁওহতীয়া দুয়োটা সীমাই স্থিত হয় আৰু প্ৰত্যেকেই l-ৰ সমান।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1 : ধৰা হ'ল $f(x)=\frac{|x|}{x}$, দেখুওৱাক যে $\lim_{x\to 0} f(x)$ স্থিত নহয়।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $f(x)=\frac{|x|}{x}$

$$\text{R.H.L.} = \lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{|x|}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{x}{x} \qquad [\because |x| = x \text{ যেতিয়া } x>0]$$

$$= 1$$

$$\text{L.H.L.} = \lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0+0} \frac{|x|}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0+0} \frac{-x}{x} \qquad [\because |x| = -x \text{ যেতিয়া } x<0]$$

$$= -1$$

$\therefore$ R. H. L. $\neq$ L. H. L.

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)$ স্থিত নহয়।

উদাহৰণ 2: f ফলনটোৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{যদি } x\le 2 \\ 8-2x & x>2 \end{cases}$

নির্ণয় কৰক a) $\lim_{x\to 2+0} f(x)$ b) $\lim_{x\to 2-0} f(x)$

c) $\lim_{x\to 2} f(x)$, যদি থাকে।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{যদি } x\le 2 \\ 8-2x & x>2 \end{cases}$

a) $\lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2+0} (8-2x) = 8-4=4$

b) $\lim_{x\to 2-0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} x^2 = 2^2 = 4$

c) $\because \lim_{x\to 2+0} f(x) = \lim_{x\to 2-0} = 4$

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)$ স্থিত হয় আৰু ই হ'ল 4.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন ১ ঃ যদি $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-|x|}{x} & , x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ স্থিত হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ১০ ঃ যদি $f(x)=\begin{cases}5x-4, & 0<x\le 1\\ 4x^2-3x, & 1<x<2\\ 3x^2+4, & x\ge 2\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ আৰু $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, যদি আছে, নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ১১ ঃ নির্ণয় কৰক— $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$



২.৪ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- প্ৰয়োজনীয় প্ৰামাণিক সীমা ঃ

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

c) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}\ ;\ a>0$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\log_e a\ ;\ a>0$

- $x \to a$ হ'লে এটা ফলন f(x)-ৰ সীমা স্থিত হয় যদি $\lim_{x \to a-0} f(x)$ আৰু $\lim_{x \to a+0} f(x)$ স্থিত আৰু সমান।



২.৫ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+x^2}}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1+x) - (1+x^2)}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1+x-1-x^2}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(1-x)}{x\left(\sqrt{1+x} + \sqrt{1+x^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{1+1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\lim_{x \to 3} \frac{x^5 - 243}{x^3 - 27} = \lim_{x \to 3} \frac{x^5 - 3^5}{x^3 - 3^3}$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{\frac{x^5 - 3^5}{x-3}}{\frac{x^3 - 3^3}{x-3}} = \frac{\lim_{x \to 3} \frac{x^5 - 3^5}{x-3}}{\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3^3}{x-3}}$$

$$= \frac{5 \times 3^4}{3 \times 3^2}$$

$$= 15$$

৩নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\lim_{x \to \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + 6}{6x^3 + 5x + 1}$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{4 - \frac{2}{x} + \frac{6}{x^3}}{6 + \frac{5}{x^2} + \frac{1}{x^3}}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{4 - 2y + 6y^3}{6 + 5y^2 + y^3} \qquad \left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ \therefore x \to \infty \Rightarrow y \to 0 \end{array}\right]$$

$$= \frac{4 - 0 + 0}{6 + 0 + 0}$$

$$= \frac{2}{3}$$

৪নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin \frac{\pi x}{180}}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi x}{180}} \times \frac{\pi}{180} \right)$$

$$= \frac{\pi}{180} \lim_{\frac{\pi x}{180} \to 0} \frac{\sin \frac{\pi x}{180}}{\frac{\pi x}{180}}$$

$$= \frac{\pi}{180} \times 1$$

$$= \frac{\pi}{180}$$

৫নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x)}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \infty \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \ldots \infty \right]$$

$$= 1$$

৬নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\lim_{x \to 1} \frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{2x^2+x-3}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{(2x+3)(x-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(2x-3)(\sqrt{x}-1)}{(2x+3)(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x-3}{(2x+3)(\sqrt{x}+1)}$$

$$= \frac{2-3}{(2+3)(1+1)} = -\frac{1}{10}$$

৭নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\lim_{x \to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(e^{ax}-1)-(e^{bx}-1)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{e^{ax}-1}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{e^{bx}-1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{ax}-1}{ax} \times a\right) - \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^{bx}-1}{bx} \times b\right)$$

$$= a \lim_{x \to 0} \frac{e^{ax}-1}{ax} - b \lim_{x \to 0} \frac{e^{bx}-1}{bx}$$

$$= a \times 1 - b \times 1$$

$$= a - b$$

৮নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\lim_{x \to 0} \frac{e^{x}+e^{-x}-2}{x^2}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(e^{x}+e^{-x})^2}{x^2}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{(e^{x}-1)-(e^{-x}-1)}{x}\right]^2$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{e^{x}-1}{x} + \frac{e^{-x}-1}{-x}\right]^2$$

$= (1+1)^2 = 4$

৯নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $f(x)=\begin{cases}\frac{x-|x|}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$

$$\text{L.H.L.}=\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{x-|x|}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0-0}\frac{x+x}{x} \qquad [\because |x|=-x \text{ যদি } x<0]$$

$$=\lim_{x\to 0-0} 2$$

$$=2$$

$$\text{R.H.L.}=\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{x-|x|}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0-0}\frac{x-x}{x} \qquad [\because |x|=x \text{ যদি } x>0]$$

$$=0$$

$\therefore$ L.H.L. $\neq$ R.H.L.

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x)$ স্থিত নহয়।

১০নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $f(x)=\begin{cases}5x-4, & 0<x\leq 1\\ 4x^2-3x, & 1<x<2\\ 3x^2+4, & x\geq 2\end{cases}$ $x\to 1$-ৰ বাবে

$$\text{L.H.L.}=\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(5x-4)=5-4=3$$

$$\text{R.H.L.}=\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(4x^2-3x)=4-3=1$$

$\therefore$ L.H.L. $\neq$ R.H.L.

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)$ স্থিত নহয়।

$x\to 2$-ৰ বাবে

$$\text{L.H.L.}=\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(4x^2-3x)=4\times 4-3\times 2=10$$

$$\text{R.H.L.}=\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(3x^2+4)=3\times 2^2+4=16$$

$\therefore$ L.H.L. $\neq$ R.H.L.

$\therefore \lim_{x\to 2} f(x)$ স্থিত নহয়।

১১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ R.H.L. $= \lim_{x \to 0+0} \frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$

$$= \lim_{x \to 0+0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}}-1}$$

$$= \frac{0}{0-1}$$

$$= 0$$

$$\text{L.H.L.} = \lim_{x \to 0-0} \frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{1-0} = 1$$

$\therefore$ L.H.L. $\neq$ R.H.L.

$\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-e^{\frac{1}{x}}}$ স্থিত নহয়।



২.৬ অধিক জানিবলৈ

1) Gupta, Sudhir (2011) (1st edition): *Basics of Differentential Calculus*; New Delhi: Anmol publication Pvt. Ltd.
2) Habib, Amber (2011) (1st edition): *The Calculus of Finance*; Hyderabad: Universities Press India Pvt. Ltd.
3) Maron, I. A. (1993) (1st edition): *Problems in Calculus of One Variable*; New Delhi: CBS Publishers & Distributors Pvt. Ltd.
4) Sharma, A. K. (2004) (1st edition): *Text Book of Differential Calculus for B.A., B.Sc., B.Com., I.A.S., P.C.S.*; New Delhi: Discovery Publishing House.



২.৭ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক ঃ

a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2+2x-8}$

b) $\lim_{\theta\to 0} \frac{\theta}{\theta+\cos\theta}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1-3x}}{x}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2-x}}$

প্ৰশ্ন ২ ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক ঃ

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+5x+9}{x^3-7x+3}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)(3x+5)}{3x^2+1}$

c) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+1}-1\right)$

প্ৰশ্ন ৩ ঃ তলত দিয়া ফলনবোৰৰ চৰম মানৰ অস্তিত্ব থকা নথকা সম্বন্ধে আলোচনা কৰক ঃ

a) $\lim_{x\to 3} f(x)$ য'ত $f(x) = x^2$ যদি $x > 0$

$= 0$ যদি $x = 0$

$= -x$ যদি $x < 0$

b) $\lim_{x\to 0} \phi(x)$ য'ত $\phi(x) = x^2$ যদি $x < 0$

$= 25$ যদি $x = 1$

$= x^2 + 2$ যদি $x > 1$

প্ৰশ্ন ৪ ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক ঃ $\lim_{y\to 1} \frac{y^2-1}{\sqrt{3y+1}-\sqrt{5y-1}}$

প্ৰশ্ন ৫ ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক ঃ

a) $\lim_{x\to 0} \frac{(2+x)^4-16}{x}$

b) $\lim_{h\to 1} \frac{h^2+2h-3}{h-1}$

c) $\lim_{y\to 1} \frac{y^2-1}{\sqrt{3y+1}-\sqrt{5y-1}}$

*** ***** ***

অধ্যায় ৩ ঃ ফলনৰ অবিচ্ছিন্নতা

অধ্যায় গাঁথনি

৩.১ উদ্দেশ্য
৩.২ পৰিচয়
৩.৩ ফলনৰ অবিচ্ছিন্নতা
৩.৪ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি শিকিলোঁ
৩.৫ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
৩.৬ অধিক জানিবলৈ
৩.৭ আৰ্হি প্রশ্ন

৩.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- কোনো বিন্দুত এটা ফলনৰ অবিচ্ছিন্নতা পৰীক্ষা কৰিব পাৰিব।

৩.২ পৰিচয়

অৱকলন গণিত অধ্যয়নৰ বাবে অবিচ্ছিন্নতাৰ ধাৰণা অপৰিহার্য। যদি আমি অবিচ্ছিন্ন ফলন ব্যৱহাৰ নকৰোঁ, ফলন গণিতৰ বহুতো ফলেই সত্য নহয়। সহজাত ধাৰণাৰ পৰা আমি এইটোকে ক'ব পাৰোঁ যে যিবিলাক ফলনৰ লেখ পেঞ্চিলডাল নদঙাকৈয়ে আঁকিব পাৰি, সেইবোৰ অবিচ্ছিন্ন ফলন।

৩.৩ ফলনৰ অবিচ্ছিন্নতা

এটা ফলন এটা বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন যদি ফলনটোৰ লেখত সেই বিন্দুত কোনো ভাঙোন নাই। এটা বিন্দুত ফলনৰ অবিচ্ছিন্নতা সেই বিন্দুৰ সমীপত ফলনৰ সীমাৰ প্রকৃতিৰ লগত ঘনিষ্ঠভাৱে জড়িত।

সংজ্ঞা ঃ $x = a$ বিন্দুত এটা ফলন f অবিচ্ছিন্ন বুলি কোৱা হয় যদি কোনো সম্ভাব্য ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক সংখ্যা $\in$-ৰ বাবে, আন এটা ধনাত্মক সংখ্যা δ পোৱা যায়, যাতে x-ৰ যিবোৰ মানৰ বাবে $0 < |x - a| < \delta$, $|f(x) - f(a)| < \in$.

সহজ ভাষাত ক'বলৈ হ'লে $x = a$ত এটা ফলন f অবিচ্ছিন্ন হ'বলৈ হ'লে—

$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ অর্থাৎ, $\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1: দেখুৱাওক যে $x = 0$ বিন্দুত $f(x) = |x|$ ফলনটো অবিচ্ছিন্ন।

সমাধান ঃ $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} (-x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} x = 0$$

আৰু $f(0) = 0$

$$\therefore \lim_{x \to 0+0} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 0-0} f(x)$$

$\therefore$ $x = 0$ বিন্দুত f অবিচ্ছিন্ন।

উদাহৰণ 2: $x = 0$ বিন্দুত অধোলিখিত ফলনটোৰ অবিচ্ছিন্নতা পৰীক্ষা কৰক।

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

সমাধান ঃ $\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} \dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1}$

$$= \lim_{x \to 0+0} \frac{1 - e^{-\frac{1}{x}}}{1 + e^{-\frac{1}{x}}}$$

$$= \frac{1-0}{1+0} \qquad \left[\because x \to 0+0 \;\; \therefore e^{-\frac{1}{x}} \to 0\right]$$

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{e^{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

$$\therefore \lim_{x \to 0+0} f(x) \neq \lim_{x \to 0-0} f(x)$$

$\therefore$ $x = 0$ বিন্দুত f অবিচ্ছিন্ন নহয়।

উদাহৰণ 3: a, b, c-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰক যাতে

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(a+1)x+\sin x}{x}, & x<0\\ c & x=0\\ \dfrac{\sqrt{x+bx^2}-\sqrt{x}}{bx\sqrt{x}}, & x>0\end{cases}$$

ফলনটো $x = 0$ বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হয়।

সমাধান ঃ $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+bx^2}-\sqrt{x}}{bx\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+bx}-1\right)}{bx\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+bx}-1\right)\left(\sqrt{1+bx}+1\right)}{bx\left(\sqrt{1+bx}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+bx-1}{bx\left(\sqrt{1+bx}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1+bx}+1} = \frac{1}{2}$$

আকৌ, $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+1)x+\sin x}{x}$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(a+1)x}{(a+1)x}.(a+1)+\frac{\sin x}{x}\right]$$

$= 1.(a+1) + 1 = a + 2$

আৰু $f(0) = c$, দিয়া আছে

যিহেতু অবিচ্ছিন্ন $x = 0$ত f অবিচ্ছিন্ন, গতিকে

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = \lim_{x\to 0-0} f(x) = f(0) \Rightarrow \frac{1}{2} = a+2 = c$$

$\therefore c = \dfrac{1}{2}$ আৰু $a = -\dfrac{3}{2}$

যিহেতু ফলটো b-ৰ ওপৰত নির্ভৰশীল নহয়, গতিকে b যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা হ'ব পাৰে।

$\therefore b \in R$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন ১ ঃ অধোলিখিতবোৰ প্ৰমাণ কৰক ঃ

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}+\cos x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$

ফলনটো $x = 0$ত অবিচ্ছিন্ন নহয়।

b) $x = 1$ আৰু $x = 2$ত $f(x)=|x-1|+|x-2|$ অবিচ্ছিন্ন।

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\log(1+ax)-\log(1-bx)}{x}, & x\neq 0\\ a+b, & x=0\end{cases}$

$x = 0$ত অবিচ্ছিন্ন।

প্ৰশ্ন ২ ঃ সকলো বিন্দুতে f অবিচ্ছিন্ন হ'লে a আৰু b নিৰ্ণয় কৰক।

a) $f(x)=\begin{cases}1, & x\le 3\\ ax+b, & 3<x<5\\ 7, & x\ge 5\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}-4, & x\le -1\\ ax^2+b, & -1<x<0\\ \cos x, & x\ge 0\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sin^3 x}{3\cos^2 x}; & x<\dfrac{\pi}{2}\\ 2a; & x=\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{b(1-\sin x)}{(\pi-2x)^2}; & x>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$



৩.৪ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- $x = a$ এটা ফলন f অবিচ্ছিন্ন যদি

  $x = a$ যদি $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=f(a)$

- প্ৰত্যেক বহুপদেই বাস্তৱ ৰেখাৰ প্ৰত্যেক বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

৩.৫ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x\right)$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x \to 0} \cos x$

$= 1 + 1$

$= 2$

আকৌ, $f(0) = 1$ দিয়া আছে

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$

$\therefore$ $x = 0$ত f অবিচ্ছিন্ন নহয়।

b) $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$

$$= \begin{cases} -(x-1)-(x-2), & x < 1 \\ (x-1)-(x-2), & 1 \le x < 2 \\ (x-1)+(x-2), & x \ge 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2x+3 ; & x < 1 \\ 1 ; & 1 \le x < 2 \\ 2x-3 ; & x \ge 2 \end{cases}$$

$\lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1} 1 = 1$

$\lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1} (-2x+3) = -2+3 = 1$

$f(1) = 1$

$\therefore \lim_{x \to 1+0} f(x) = \lim_{x \to 1-0} f(x) = f(1)$

$\therefore$ $x = 1$ত f অবিচ্ছিন্ন।

সেইদৰে $x = 2$ত অবিচ্ছিন্নতা পৰীক্ষা কৰক।

c) $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+ax) - \log(1-bx)}{x}$

$= \lim_{x \to 0} \frac{\log(1+ax)}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{\log(1-bx)}{x}$

$= a \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{1}{ax} . \log(1+ax) \right\} - b \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{1}{bx} . \log(1-bx) \right\}$

$= a \times 1 - b \times (-1)$ [1.5.2 দ্ৰষ্টব্য]

$= a + b$

আকৌ, $f(0) = a + b$, দিয়া আছে

$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

$\therefore$ x = 0ত f অবিচ্ছিন্ন।

২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) $\therefore$ সকলো বিন্দুতে f অবিচ্ছিন্ন,

$\therefore$ x = 3 আৰু x = 5ত f অবিচ্ছিন্ন।

$\therefore$ x = 3ত f অবিচ্ছিন্ন,

$\therefore \lim_{x \to 3-0} f(x) = \lim_{x \to 3+0} f(x) = f(3)$

$\Rightarrow \lim_{x \to 3} 1 = \lim_{x \to 3} (ax + b) = 1$

$\Rightarrow 1 = 3a + b = 1$

$\Rightarrow 3a + b = 1$ ..... (1)

আকৌ, x = 5ত f অবিচ্ছিন্ন।

$\therefore \lim_{x \to 5-0} f(x) = \lim_{x \to 5+0} f(x) = f(5)$

$\Rightarrow \lim_{x \to 5} (ax + b) = \lim_{x \to 5} 7 = 7$

$\Rightarrow$ 5a + b = 7

$\Rightarrow$ 5a + 1 – 3a = 7, (1)-ৰ সহায়ত

$\Rightarrow$ 2a = 6

$\Rightarrow$ a = 3

$\therefore$ (1)-ৰ পৰা b = –8

$\therefore$ a = 3, b – 8.

b) দিয়া আছে, সকলো বিন্দুতে f অবিচ্ছিন্ন।

$\therefore$ $x = -1$ আৰু $x = 0$ত f অবিচ্ছিন্ন।

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1-0} f(x) = \lim_{x \to 1+0} f(x) = f(-1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to -1} -4 = \lim_{x \to -1} ax^2 + b = -4$$

$\Rightarrow -4 = a + b = -4$

$\Rightarrow a + b = -4$ ..... (i)

আকৌ, $\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} f(x) = f(0)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} \cos x = \lim_{x \to 0} (ax^2 + b) = 1$$

$\Rightarrow 1 = b = 1$ অৰ্থাৎ, $b = 1$

$\therefore$ (i)-ৰ পৰা $a + 1 = -4 \Rightarrow a = -5$

c) যিহেতু সকলো বিন্দুতে f অবিচ্ছিন্ন।

$\therefore$ $x = \frac{\pi}{2}$ত f অবিচ্ছিন্ন।

এতিয়া, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^3 x}{3\cos^2 x}$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^3 x}{3(1-\sin^2 x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(1-\sin x)(1+\sin x+\sin^2 x)}{3(1-\sin x)(1+\sin x)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x+\sin^2 x}{3(1+\sin x)}$$

$$= \frac{1+1+1}{3(1+1)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{b(1-\sin x)}{(\pi-2x)^2}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{b\left\{1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{y}{2}\right)\right\}}{y^2} \qquad \begin{bmatrix} \text{ধৰা হ'ল} \\ y = \pi - 2x \\ \therefore x = \frac{\pi}{2} - \frac{y}{2} \\ \because x \to \frac{\pi}{2} \therefore y \to 0 \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{b\left(1-\cos\frac{y}{2}\right)\left(1+\cos\frac{y}{2}\right)}{y^2\left(1+\cos\frac{y}{2}\right)}$$

$$= \lim_{y \to 0} \frac{b\sin^2\frac{y}{2}}{y^2\left(1+\cos\frac{y}{2}\right)}$$

$$= \lim_{y \to 0} \left\{ b.\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}.\frac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}.\frac{1}{4\left(1+\cos\frac{y}{2}\right)} \right\}$$

$$= b.1.1.\frac{1}{4(1+1)}$$

$$= \frac{b}{8}$$

আকৌ, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2a$, দিয়া আছে

কিন্তু $x = \frac{\pi}{2}$ ত f অবিচ্ছিন্ন।

$$\therefore \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+0} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{b}{8} = 2a$$

$$\therefore \frac{1}{2} = \frac{b}{8} \text{ আৰু } \frac{1}{2} = 2a$$

$$\Rightarrow b = 4 \text{ আৰু } a = \frac{1}{4}$$



৩.৬ অধিক জানিবলৈ

1) Gupta, Sudhir (2011) (1st edition): *Basics of Differentential Calculus*; New Delhi: Anmol publication Pvt. Ltd.
2) Habib, Amber (2011) (1st edition): *The Calculus of Finance*; Hyderabad: Universities Press India Pvt. Ltd.
3) Maron, I. A. (1993) (1st edition): *Problems in Calculus of One Variable*; New Delhi: CBS Publishers & Distributors Pvt. Ltd.
4) Sharma, A. K. (2004) (1st edition): *Text Book of Differential Calculus for B.A., B.Sc., B.Com., I.A.S., P.C.S.*; New Delhi: Discovery Publishing House.



৩.৭ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ x = a বিন্দুত x-ৰ ফলন f-ৰ অবিচ্ছিন্নতা সংজ্ঞা দিয়ক।

প্ৰশ্ন ২ ঃ তলৰ ফলনটোৰ অবিচ্ছিন্নতা আলোচনা কৰক ঃ

f(x) = |x + 1| + |x – 2|, x = –1 আৰু x = 2.

প্ৰশ্ন ৩ ঃ তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞাবদ্ধ ফলনবোৰ উল্লেখিত বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক ঃ

a) $f(x) = 2 + x$ যদি $x > 1$

$= 3$ যদি $x = 1$

$= 4 - x$ যদি $x < 1$

b) $f(x) = \frac{1}{2} - x$ যদি $x < 3$

$= 1$ যদি $x = 3$

$= x - \frac{1}{2}$ যদি $x > 3$

c) $\psi(x) = x^2 + 1$ যদি $x < 1$

$= x + 1$ যদি $1 \le x < 3$

$= \frac{x^3}{27} + 3$ যদি $x \ge 3$

d) $g(x) = \frac{\tan 5x}{2x}$ যদি $x \neq 0$

$= \frac{2}{5}$ যদি $x = 0$

$x = 0$ বিন্দুত

প্ৰশ্ন ৪ ঃ $x = 0$ত ফলনটো অবিচ্ছিন্ন হ'লে a-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰক ঃ

যদি, $f(x) = \frac{1-\cos x}{x \sin x}$, $x \neq 0$

$= \frac{a^2}{2}$, $x = 0$

প্ৰশ্ন ৫ ঃ xৰ সকলো মানৰ বাবে f অবিচ্ছিন্ন হ'লে m-ৰ মান উলিওৱাক ঃ

যদি, $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 16x + 20}{(x-2)^2}$, $x \neq 2$

$= m$, $x = 2$

প্ৰশ্ন ৬ ঃ ফলন f তলত দিয়া ধৰণে সংজ্ঞাবদ্ধ কৰা হৈছে ঃ

a) $f(x) = \frac{x^2}{a} - a$ যদি $0 < x < a$

$= 0$ যদি $x = a$

$= a - \frac{a^3}{x^2}$ যদি $x > a$

প্ৰমাণ কৰক যে $x = a$ বিন্দুত ফলনটো অবিচ্ছিন্ন হ'ব।

b) $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$ যদি $x \neq 0$

$= 0$ যদি $x = 0$

প্ৰমাণ কৰক যে $x = 0$ বিন্দুত ফলনটো বিচ্ছিন্ন হ'ব।

*** ***** ***

অধ্যায় ৪ ঃ ফলনৰ অৱকলনীয়তা

অধ্যায় গাঁথনি

৪.১ উদ্দেশ্য
৪.২ পৰিচয়
৪.৩ অৱকলজৰ ধাৰণা
৪.৩.১ ফলনৰ অৱকলজ
৪.৩.২ বাঁও আৰু সোঁ অৱকলজ
৪.৪ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
৪.৫ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
৪.৬ অধিক জানিবলৈ
৪.৭ আৰ্হি প্রশ্ন

৪.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- সীমাৰ সহায়ত ফলনৰ অৱকলজ উলিয়াব পাৰিব
- বাঁওহতীয়া অৱকলজ আৰু সোঁহতীয়া অৱকলজৰ মাজৰ পার্থক্য অনুধাৱন কৰিব পাৰিব।

৪.২ পৰিচয়

তৃতীয় অধ্যায়ত আমি ফলনৰ অবিচ্ছিন্নতা বিষয়ে আলোচনা কৰিলোঁ। এই অধ্যায়টিত, আমি ফলনৰ অৱকলনীয়তাৰ বিষয়ে জানিব পাৰিম।

৪.৩ অৱকলজৰ ধাৰণা

কিছুমান পৰিলক্ষণত পৰিৱর্তনশীল ৰাশি আৰু সিহঁতৰ পৰিৱর্তনৰ হাৰ (বৃদ্ধি বা হ্রাস) জড়িত হৈ থাকে। স্বতন্ত্র চলক সাপেক্ষে পৰতন্ত্র চলকৰ পৰিৱর্তনৰ হাৰ সম্বন্ধে অৱকলন গণিতত আলোচনা কৰা হয়।

৪.৩.১ ফলনৰ অৱকলজ

ধৰা হ'ল f এটা বাস্তৱ মান বিশিষ্ট ফলন আৰু ইয়াৰ আদিক্ষেত্রত a এটা বিন্দু। a বিন্দুত f-ৰ অৱকলজ (Derivative) হ'ল—

$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ যদিহে সীমাস্থিত হয় আৰু ইয়াক $f'(a)$ৰে বুজোৱা হয়।

যদি $y = f(x)$ এটা x-ৰ ফলন হয়, x সাপেক্ষে y-ৰ অৱকলজক $\frac{dy}{dx}$ বা y_1ৰে বুজোৱা হয়।

যদি x আৰু y একেলগে বাঢ়ে বা টুটে, অৱকলজ $\frac{dy}{dx}$ ধনাত্মক। যদি x টুটিলে y বাঢ়ে বা x বাঢ়িলে y টুটে, তেনেহ'লে $\frac{dy}{dx}$ ঋণাত্মক।

মন্তব্য ঃ x-ৰ এটা ফলনৰ অৱকলজক x অৰ অৱকল সহগ (Differential Coefficient) বুলিও কোৱা হয়।অৱকল সহগ উলিওৱা পদ্ধতিক অৱকলন (Differentiation) বুলিও কোৱা হয়।

উদাহৰণ 1: $x = 2$ত $f(x) = 3x$ ফলনৰ অৱকলজ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$$\therefore f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3(2+h) - 3(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{6 + 3h - 6}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} 3 = 3$$

$\therefore f(x) = 3x$ ফলনৰ $x = 2$ বিন্দুত অৱকলজ 3.

উদাহৰণ 2: যদি $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$, সংজ্ঞাৰ সহায়ত দেখুৱাওক যে $f'(0) + 3f'(-1) = 0$.

সমাধান ঃ দিয়া আছে $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$

এতিয়া $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(o+h) - f(0)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3h^2 + 3h - 5) - (0 + 0 - 5)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3h+3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (3h + 3) \qquad [\because h \neq 0 . \therefore h \to 0]$$

$$= 3$$

আকৌ, $f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{2(-1+h)^2 + 3(-1+h) - 5\} - \{2(-1)^2 + 3(-1) - 5\}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 - 4h + 2h^2 - 3 + 3h - 5 - (2 - 3 - 5)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h^2 - h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2h-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (2h - 1) = -1$$

$\therefore f'(0) + 3f'(-1) = 0$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন ১ ঃ সংজ্ঞাৰ সহায়ত, অধোলিখিতবোৰ উলিয়াওক।

a) $f'(2)$ যদি $f(x) = x^2 - 6x + 1$

b) $f'(0)$ যদি $f(x) = \cos x$ c) $f'(1)$ যদি $f(x) = e^x$

d) $f'(-1)$ যদি $f(x) = x + \frac{1}{x}$ e) $f'(x)$ যদি $f(x) = \sqrt{x+2}$

৪.৩.২ বাঁও আৰু সোঁ অৱকলজ

$x = a$ বিন্দুত এটা ফলন f বাঁও অৱকলনীয় যদি

$\lim_{h \to 0-0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ সসীমভাৱে স্থিত হয় আৰু ইয়াক $Lf'(a)$ৰে বুজোৱা হয়।

$x = a$ বিন্দুত এটা ফলন f সোঁ অৱকলনীয় যদি

$\lim_{h \to 0+0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ সসীমভাৱে স্থিত হয় আৰু ইয়াক $Rf'(a)$ৰে বুজোৱা হয়।

যদি $Lf'(a) = Rf'(a)$, $x = a$ত f অৱকলনীয় বুলি কোৱা হয় আৰু ইয়াক $f'(a)$ৰে বুজোৱা হয়।

টোকা ঃ যদি এটা ফলন এটা বিন্দুত অৱকলনীয় হয়, তেনেহ'লে ই সেই বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন হয়। কিন্তু বিপৰীতটো সত্য নহয়।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1: $x = 0$ আৰু $x = 1$ বিন্দুত তলৰ ফলনটোৰ অৱকলনীয়তা পৰীক্ষা কৰক।

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - x + 1, & x > 1 \end{cases}$$

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত ফলনটো হ'ল $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x \le 1 \\ x^2 - x + 1, & x > 1 \end{cases}$

$$Rf'(0) = \lim_{h \to 0+0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} h = 0$$

$$Lf'(0) = \lim_{h \to 0-0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h - 0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} -1 = -1$$

$\therefore Rf'(0) \neq Lf'(0)$

$\therefore$ $x = 0$ বিন্দুত f অৱকলনীয় নহয়।

আকৌ, $Rf'(1) = \lim_{h \to 0+0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - (1+h) + 1 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1 - h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (h+1) = 1$$

$$Lf'(1) = \lim_{h \to 0-0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2-1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1+2h+h^2-1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}(2+h)$$

$$= 2$$

$\therefore Rf'(1) \neq Lf'(1)$

$\therefore$ x = 1ত f অৱকলনীয় নহয়।

উদাহৰণ 2: যদি $f(x) = \begin{cases} x+a & \text{if } x \leq 1 \\ ax^2+1 & \text{if } x > 1 \end{cases}$

'a' নির্ণয় কৰক যাতে f ফলনটো x = 1 বিন্দুত অৱকলনীয় হয়।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $f(x) = \begin{cases} x+a & ; x \leq 1 \\ ax^2+1 & ; x > 1 \end{cases}$

$$Rf'(1) = \lim_{h \to 0+0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\{a(1+h)^2+1\}-(1+a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{a+2ah+ah^2+1-1-a}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2a+ah)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0}(2a+ah) = 2a$$

আকৌ, $Lf'(1) = \lim_{h \to 0-0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h+a)-(1+a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h}$$

$$= 1$$

কিন্তু x = 1ত f(x) অৱকলনীয়।

$\therefore Rf'(1) = Lf'(1)$

$\Rightarrow 2a = 1$

$\Rightarrow a = \frac{1}{2}$

উদাহৰণ 3: যদি x = 1ত f অৱকলনীয়,

প্ৰমাণ কৰক যে $\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = f(a) - af'(a)$

সমাধান ঃ $\because$ x = 1ত f অৱকলনীয়।

$\therefore \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$ .....(1)

বাঁওপক্ষ = $\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)f(a) - af(a+h)}{h}$ $\begin{bmatrix} \text{Let } h = x - a \\ \because x \to a \\ \therefore h \to 0 \end{bmatrix}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{af(a) + hf(a) - af(a+h)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \frac{hf(a) - a\{f(a+h) - f(a)\}}{h}$

$= \lim_{h \to 0} \left[f(a) - a.\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right]$

$= f(a) - a \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$= f(a) - af'(a)$, (1)-ৰ সহায়ত

= সোঁপক্ষ

উদাহৰণ 4: ধৰা হ'ল $f(x) = \begin{cases} x\left(\frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{-\frac{1}{x}}}\right) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$

দেখুওৱাক যে ফলনটো x = 0ত অবিচ্ছিন্ন, কিন্তু অৱকলনীয় নহয়।

সমাধান ঃ দিয়া আছে $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}\right)}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}} ; x\neq 0\\ 0 \quad ; x=0\end{cases}$

x = 0ত অবিচ্ছিন্নতা।

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{x\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}\right)}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{x\left(1-e^{-\frac{2}{x}}\right)}{1+e^{-\frac{2}{x}}}$$

$$=\frac{0(1-0)}{1+0}=0 \qquad \left[\because x\to 0+0,\ \therefore e^{-\frac{2}{x}}\to 0\right]$$

আকৌ $\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{x\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{-\frac{1}{x}}\right)}{e^{\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}$

$$=\lim_{x\to 0-0}\frac{x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)}{e^{\frac{2}{x}}+1}$$

$$=\frac{0(0-1)}{0+1}$$

$$=0$$

আকৌ, f (0) = 0 (দিয়া আছে)

$$\therefore \lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0-0} f(x)=f(0)$$

$\therefore$ x = 0ত f অৱকলনীয়।

x = 0ত অৱকলনীয়তা।

$$Rf'(0)=\lim_{h\to 0+0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\frac{h\left(e^{\frac{1}{h}} - e^{-\frac{1}{h}} \right)}{e^{\frac{1}{h}} + e^{-\frac{1}{h}}} - 0 \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 - e^{-\frac{2}{h}}}{1 + e^{-\frac{2}{h}}}$$

$$= \frac{1-0}{1+0}$$

$$= 1$$

$$Lf'(0) = \lim_{h \to 0-0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0-0} \frac{1}{h} \left[\frac{h\left(e^{\frac{1}{h}} - e^{-\frac{1}{h}} \right)}{e^{\frac{1}{h}} + e^{-\frac{1}{h}}} - 0 \right]$$

$$= \lim_{h \to 0-0} \frac{\left(e^{\frac{2}{h}} - 1 \right)}{\left(e^{\frac{2}{h}} + 1 \right)}$$

$$= \frac{0-1}{0+1}$$

$$= -1$$

$\therefore Rf'(0) \neq Lf'(0)$

$\therefore$ x = 0ত f অৱকলনীয় নহয়।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন ২ ঃ দেখুওৱাক যে $f(x) = \begin{cases} xe^{-\left(\frac{1}{|x|} + \frac{1}{x}\right)} & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$

x = 0 বিন্দুত অৱকলনীয় নহয়।

প্ৰশ্ন ৩ ঃ a আৰু b-ৰ মান নিৰ্ধাৰণ কৰক যাতে

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3x+a; & x\le 0 \\ bx+c & ; x>0 \end{cases}$$ ফলনটো সকলো বিন্দুতে অৱকলনীয় হয়।

প্ৰশ্ন ৪ ঃ দেখুওৱাক যে $f(x)=\begin{cases}(x-a)\cos\left(\frac{1}{x-a}\right); & x\neq a \\ 0 ; & x=a\end{cases}$

ফলনটো x = a বিন্দুত অৱকলনীয় নহয়।



৪.৪ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- যদি এটা ফলন x = a বিন্দুত অৱকলনীয় হয়, তেনেহ'লে ফলনটো বিন্দুটোত অবিচ্ছিন্ন।
- যদি এটা ফলন x = a বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন নহয়, তেনেহ'লে ফলনটো সেই বিন্দুত অৱকলনীয় নহয়।
- $f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$
- $Rf'(a)=\lim_{h\to 0+0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

  $Lf'(a)=\lim_{h\to 0-0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

  $f'(a)$ স্থিত হয় যদিহে $Rf'(a)$ আৰু $Lf'(a)$ স্থিত আৰু সমান।



৪.৫ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) $f(x) = x^2 - 6x + 1$ দিয়া আছে।

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{(2+h)^2-6(2+h)+1\}-(2^2-6\times 2+1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-12-6h+1+7}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2-2h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(h-2)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} (h-2)$$

$$= -2$$

b) $f(x) = \cos x$ দিয়া আছে।

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cosh - \cos o}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-(1-\cosh)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-(1-\cosh)(1+\cosh)}{h(1+\cosh)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\sin^2 h}{h(1+\cosh)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[-\frac{\sinh}{h} \cdot \frac{\sinh}{h} \cdot \frac{h}{1+\cosh} \right]$$

$$= -1.1.\frac{0}{1+1}$$

$$= 0$$

c) $f(x) = e^x$ দিয়া আছে।

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e^{1+h} - e}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{e(e^h - 1)}{h}$$

$$= e. \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}$$

$$= e.1$$

$$= e$$

d) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ দিয়া আছে।

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(-1+h+\frac{1}{-1+h}\right) - \left(-1+\frac{1}{-1}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(h-1)^2 + 1 + 2(h-1)}{h(h-1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 2h + 1 + 1 + 2h - 2}{h(h-1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h(h-1)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h-1}$$

$$= 0$$

e) $f(x) = \sqrt{x+2}$ দিয়া আছে।

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h+2} - \sqrt{x+2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x+h+2-x-2}{h\left(\sqrt{x+h+2} + \sqrt{x+2}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\sqrt{x+h+2} + \sqrt{x+2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+2}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$$

২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) দিয়া আছে, $f(x)=\begin{cases} xe^{-\left(\frac{1}{|x|}+\frac{1}{x}\right)} & ; x\neq 0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases}$

$$=\begin{cases} xe^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)} & ; x>0 \\ xe^{-\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right)} & ; x<0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} xe^{-\frac{2}{x}} & ; x>0 \\ x & ; x<0 \\ 0 & ; x=0 \end{cases}$$

এতিয়া, $Rf'(0)=\lim\limits_{h\to 0+0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0+0}\frac{he^{-\frac{2}{h}}-0}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0+0}e^{-\frac{2}{h}}$$

$$=0$$

আকৌ, $Lf'(0)=\lim\limits_{h\to 0-0}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}$

$$=\lim_{h\to 0-0}\frac{h-0}{h}=1$$

$\therefore Rf'(0)\neq Lf'(0)$

$\therefore$ x = 0ত f অৱকলনীয় নহয়।

৩নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্ৰদত্ত ফলনটো হ'ল, $f(x)=\begin{cases} x^2+3x+a & ; x\leq 0 \\ bx+2 & ; x>0 \end{cases}$

$\therefore$ সকলো বিন্দুতে f অৱকলনীয়,

$\therefore$ x = 1ত f অবিচ্ছিন্ন আৰু অৱকলনীয়।

$$\therefore \lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}f(x)=f(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 1}(x^2+3x+a) = \lim_{x \to 1}(bx+2) = 1^2+3\times 1+a$$

$$\Rightarrow 1+3+a = b+2 = 1+3+a$$

$$\Rightarrow 4 + a = b + 2$$

$$\Rightarrow a = b - 2 \qquad \text{.....(1)}$$

আকৌ, $x = 1$ত f অৱকলনীয়।

$$\therefore Rf'(1) = Lf'(1)$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0+0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \to 0-0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0+0} \frac{\{b(1+h)+2\}-\{1+3+a\}}{h} = \lim_{h \to 0-0} \frac{(1+h)^2-3(1+h)+a-\{1+3+a\}}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{b+bh+2-4-b+2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1+2h-h^2+3+3h+a-4-a}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{bh}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h_2+5h}{h}$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} b = \lim_{h \to 0}(h+5)$$

$$\therefore b = 5 \qquad \therefore a = 3$$

8নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $f(x) = \begin{cases} (x-a)\cos\left(\frac{1}{x-a}\right) & ; x \neq a \\ 0 & ; x = a \end{cases}$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h-a)\cos\left(\frac{1}{a+h-a}\right)-0}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\cos\frac{1}{h}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos\frac{1}{h}$$, যিটো স্থিত নহয়।



৪.৬ অধিক জানিবলৈ

1) Gupta, Sudhir (2011) (1st edition): *Basics of Differentential Calculus*; New Delhi: Anmol publication Pvt. Ltd.
2) Habib, Amber (2011) (1st edition): *The Calculus of Finance*; Hyderabad: Universities Press India Pvt. Ltd.
3) Maron, I. A. (1993) (1st edition): *Problems in Calculus of One Variable*; New Delhi: CBS Publishers & Distributors Pvt. Ltd.
4) Sharma, A. K. (2004) (1st edition): *Text Book of Differential Calculus for B.A., B.Sc., B.Com., I.A.S., P.C.S.*; New Delhi: Discovery Publishing House.



৪.৭ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ যদি এটা ফলন এটা বিন্দুত অৱকলনীয় হয়, তেনেহ'লে প্ৰমাণ কৰক যে ফলনটো সেই বিন্দুত অবিচ্ছিন্ন।

প্ৰশ্ন ২ ঃ যদি $f(x) = 5x - 4$ যদি $0 < x \le 1$

$= 4x^3 - 3$ যদি $1 < x < 2$

$= 3x + 4$ যদি $x \ge 2$

x = 1 আৰু x = 2ত ফলনটোৰ অবিচ্ছিন্নতা আৰু অৱকলনীয়তা আলোচনা কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ ঃ যদি $f(x) = \frac{x^2}{a} - a$ যদি $0 < x < a$

$= a$ যদি $x = a$

$= a - \frac{x^2}{a}$ যদি $x > a$

x = 0ত ফলনটোৰ অবিচ্ছিন্নতা আৰু অৱকলনীয়তা পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ ঃ যদি $\psi(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}$, $x \neq 0 = 0$, $x = 0$, তেন্তে দেখুওৱাক যে x = 0ত ψ ফলনটো অবিচ্ছিন্ন আৰু অৱকলনীয় হ'ব।

প্ৰশ্ন ৫ ঃ দেখুওৱাক যে x = 0 আৰু x = 1 বিন্দুত f(x) = |x|+|x–1| ফলনটো অবিচ্ছিন্ন, কিন্তু অৱকলনীয় নহয়।

*** ***** ***

অধ্যায় ৫ ঃ ফলনৰ অৱকলজ

অধ্যায় গাঁথনি

৫.১ উদ্দেশ্য
৫.২ পৰিচয়
৫.৩ ফলনৰ অৱকলজৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা
৫.৪ বিভিন্ন প্ৰামাণিক ফলনৰ অৱকলজ
৫.৫ ফলনৰ যোগ আৰু অন্তৰৰ অৱকলজ
৫.৬ ফলনৰ পূৰণফলৰ অৱকলজ আৰু ভাগফল বিধি
৫.৭ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
৫.৮ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান
৫.৯ অধিক জানিবলৈ
৫.১০ আৰ্হি প্ৰশ্ন

৫.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- $f'(x)$ বা $\frac{dy}{dx}$ -ৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা বুজি পাব
- বীজগণিতীয়, ত্ৰিকোণমিতীয়, সূচকীয় আৰু ঘাতাঙ্কীয় ফলনৰ অৱকলজ উলিয়াব পাৰিব।

৫.২ পৰিচয়

আমি ইতিমধ্যে চতুৰ্থ অধ্যায়ত অৱকলজৰ ধাৰণাৰ অৱতাৰণা কৰিছোঁ। এই অধ্যায়ত আমি কিছুমান প্ৰামাণিক ফলনৰ অৱকলজ উলিওৱাৰ লগতে অৱকলজৰ কিছু বীজগণিত সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম। অৱকলজৰ ধাৰণা মূলতঃ স্বতন্ত্ৰ চলক সাপেক্ষে পৰতন্ত্ৰ চলকৰ পৰিৱৰ্তনৰ হাৰৰ লগত জড়িত।

৫.৩ অৱকলজৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা

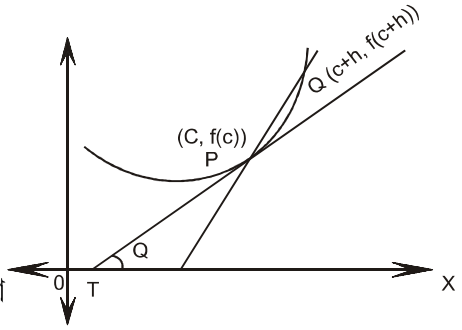
ধৰা হ'ল, $y = f(x)$ এটা ফলন। ধৰা হ'ল, $y = f(x)$-ৰ লেখত $P[c, f(c)]$ আৰু $Q[c+h, f(c+h)]$ দুটা ওচৰা ওচৰি বিন্দু।

PQ জ্যাৰ প্ৰৱণতা $= \frac{f(c+h) - f(c)}{(c+h) - c}$

$= \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$

যেতিয়া বক্ৰডালত $Q \to P$, PQ জ্যাডাল P বিন্দুত PT স্পৰ্শক হয়।

গতিকে যেতিয়া $Q \to P$ অৰ্থাৎ যেতিয়া $h \to 0$, PQ জ্যাডালৰ প্ৰৱণতা P বিন্দুত স্পৰ্শকৰ প্ৰৱণতা হয়।



$\therefore$ P বিন্দুত স্পৰ্শকৰ প্ৰৱণতা = $\lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c)$ (সংজ্ঞামতে)

আকৌ যদি স্পৰ্শকডালে x-অক্ষৰ লগত θ কোণ কৰে, তেনেহ'লে P বিন্দুত স্পৰ্শকৰ প্ৰৱণতা = $\tan\theta$.

গতিকে, $f'(c) = \tan\theta = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h)-f(c)}{h}$

টোকা ঃ যদি স্পৰ্শক x-অক্ষৰ সমান্তৰাল হয়, $f'(c) = 0$.

৫.৪ বিভিন্ন প্ৰামাণিক ফলনৰ অৱকলজ

1) $\frac{d}{dx}(k) = 0$, k যিকোনো ধ্ৰুৱক

2) $\frac{d}{dx}(x) = 1$

3) $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$

4) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

5) $\frac{d}{dx}(\log_e x) = \frac{1}{x}$

6) $\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a$

7) $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

8) $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

9) $\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

10) $\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$

11) $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$

12) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x . \cot x$

13) $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $-1<x<1$

14) $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$; $-1<x<1$

15) $\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$; $x \in R$

16) $\frac{d}{dx}(\cot^{-1}x) = \frac{-1}{1+x^2}$; $x \in R$

17) $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$; $|x| > 1$

18) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1}x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$; $|x| > 1$

প্রমাণ ঃ

1) ধৰা হ'ল, $y = f(x) = k$

$\therefore\ f(x+h) = k$

সংজ্ঞামতে, $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(k) = \lim_{h \to 0} \frac{k-k}{h} = 0$$

2) ধৰা হ'ল, $y = f(x) = x$

$\therefore\ f(x+h) = x + h$

সংজ্ঞামতে, $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$$

3) ধৰা হ'ল, $y = f(x) = x^n$

$\therefore\ f(x+h) = (x+h)^n$

সংজ্ঞামতে, $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^n\right) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

প্রথম ক্ষেত্র ঃ ধৰা হ'ল, n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(x^n + {}^nc_1 x^{n-1}h + {}^nc_2 x^{n-2}h^2 + ... + h^n\right) - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left({}^nc_1 x^{n-1} + {}^nc_2 x^{n-2}h + ... + h^{n-1} \right)$$

$= {}^nc_1\, x^{n-1}$

$= nx^{n-1}$

দ্বিতীয় ক্ষেত্র ঃ ধৰা হ'ল, n এটা ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা বা ভগ্নাংশ।

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^n\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[x^n \left\{ 1 + n.\frac{h}{x} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{h}{x}\right)^2 + ...\infty \right\} - x^n \right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[x^n\left\{n.\frac{1}{x}+\frac{n(n-1)}{2!}.\frac{h}{x^2}+...\infty\right\}\right]$$

$$= x^n.n.\frac{1}{x} = nx^{n-1}$$

$\therefore$ সকলো পৰিমেয় n-ৰ বাবে $\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$

4) ধৰা হ'ল, $y = f(x) = e^x$

$\therefore\ f(x+h) = e^{x+h}$

সংজ্ঞামতে, $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(e^x\right) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{e^x.e^h-e^x}{h}$$

$$= e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$$

$$= e^x.1 = e^x$$

5) ধৰা হ'ল, $y = f(x) = \log_e x$

$\therefore\ f(x+h) = \log_e(x+h)$

সংজ্ঞামতে, $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\log_e x\right) = \lim_{h\to 0}\frac{\log_e(x+h)-\log_e x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_e\left(\frac{x+h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}....\infty\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{h}{2x^2}+\frac{h^2}{3x^3}...\infty\right]$$

$$= \frac{1}{x}$$

6) ধৰা হ'ল, $y = f(x) = a^x$

$\therefore\ f(x+h) = a^{x+h}$

সংজ্ঞামতে, $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(a^x\right) = \lim_{h\to 0} \frac{a^x.a^h - a^x}{h}$$

$$= a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

$$= a^x \log_e a$$

7) ধৰা হ'ল, $y = f(x) = \sin x$

$\therefore\ f(x+h) = \sin(x+h)$

সংজ্ঞামতে, $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\sin x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\ \frac{x+h+x}{2}\ \sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\frac{\sin\frac{h}{2}}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} .2\cos\left(x+\frac{x}{2}\right) \lim_{h\to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= \cos x.1 = \cos x$$

8) ধৰা হ'ল, $y = f(x) = \cos x$

$\therefore\ f(x+h) = \cos(x+h)$

সংজ্ঞামতে, $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\cos x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\sin\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{h}\right]$$

$$= \left(\lim_{h\to 0} -\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right).\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)$$

$$= -\sin x.$$

9) ধৰা হ'ল, $y = f(x) = \tan x$

$\therefore f(x+h) = \tan(x+h)$

সংজ্ঞামতে, $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\tan x) = \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)\cos x-\cos(x+h)\sin x}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h-x)}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right).\left(\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x+h)\cos x}\right)$$

$$= 1.\frac{1}{\cos x.\cos x}$$

$$= \sec^2 x$$

10) ধৰা হ'ল, $y = f(x) = \cot x$

$\therefore f(x+h) = \cot(x+h)$

সংজ্ঞামতে, $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\cot x) = \lim_{h\to 0}\frac{\cot(x+h)-\cot x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)} - \frac{\cos x}{\sin x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x\cos(x+h) - \cos x\sin(x+h)}{h\sin(x+h)\sin x}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin\{x-(x+h)\}}{h\sin(x+h)\sin x}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(-h)}{h\sin(x+h)\sin x}$$

$$= -\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\right).\left(\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sin(x+h).\sin x}\right)$$

$$= -1.\frac{1}{\sin x.\sin x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

11) ধৰা হ'ল, $y = f(x) = \sec x$

$\therefore\ f(x+h) = \sec(x+h)$

সংজ্ঞামতে, $\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\sec x) = \lim_{h\to 0}\frac{\sec(x+h)-\sec x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.\frac{\cos x - \cos(x+h)}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.\frac{2\sin\frac{x+x+h}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\sin\left(x+\frac{h}{2}\right).\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.\frac{1}{\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\sin\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}.\frac{1}{\lim\{\cos(x+h).\cos x\}}$$

$$= \sin x.1.\frac{1}{\cos x.\cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos x}.\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$= \sec x.\ \tan x.$$

12) ধৰা হ'ল, $y = f(x) = \text{cosec } x$

$\therefore\ f(x+h) = \text{cosec } (x+h)$

সংজ্ঞামতে, $\quad \frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\text{cosec } x) = \lim_{h\to 0} \frac{\text{cosec}(x+h)-\text{cosec } x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{1}{\sin(x+h)} - \frac{1}{\sin x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x - \sin(x+h)}{h.\sin(x+h)\sin x}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{x+x+h}{2}\ \sin\frac{x-x-h}{2}}{h\sin(x+h)\ \sin x}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\frac{2.\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\ \sin\left(-\frac{h}{2}\right)}{h\ \sin(x+h)\sin x}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[-\frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\sin(x+h).\sin x}.\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right]$$

$$= -\lim_{h\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\sin(x+h).\sin x}.\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$= -\frac{\cos x}{\sin x.\sin x}.1 = -\text{cosec}x\ \text{cot}x$$

13) ধৰা হ'ল, $y = \sin^{-1}x$

$\therefore\ \text{siny} = x$

$$\therefore\ \frac{d}{dy}(\text{siny}) = \frac{d}{dy}(x)$$

$$\Rightarrow \cos y = \frac{dx}{dy}$$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$ যাতে $\cos y \neq 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$ $[\because \cos y > 0]$

$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$

14) ধৰা হ'ল, $y = \cos^{-1}x$

$\therefore \cos y = x$

$\Rightarrow \frac{d}{dy}(\cos y) = \frac{d}{dy}(x)$

$\Rightarrow -\sin y = \frac{dx}{dy}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin y}$ যাতে $\sin y \neq 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\cos^{-1}x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$

$= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$

15) ধৰা হ'ল, $y = \tan^{-1}x$

$\Rightarrow \tan y = x$

$\therefore \frac{d}{dy}(\tan y) = \frac{dx}{dy}$

$\Rightarrow \sec^2 y = \frac{dx}{dy}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$ $[\sec y \neq 0]$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\tan^2 y}$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\tan^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$; $x \in R$

16) ধৰা হ'ল, $y = \cot^{-1}x$

$\Rightarrow \cot y = x$

$\Rightarrow \frac{d}{dy}(\cot y) = \frac{d}{dy}(x)$

$$\Rightarrow -\operatorname{cosec}^2 y = \frac{dx}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\operatorname{cosec}^2 y} \quad [\operatorname{cosec} y \neq 0]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right) = \frac{-1}{1+\cot^2 y} = \frac{-1}{1+x^2}, \; x \in R$$

17) ধৰা হ'ল, $y = \sec^{-1} x$

$$\Rightarrow \sec y = x$$

$$\therefore \frac{d}{dy}(\sec y) = \frac{d}{dy}(x)$$

$$\Rightarrow \sec y \tan y = \frac{dx}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y \tan y}, \sec y \neq 0, \tan y \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec y\left(\pm\sqrt{\sec^2 y - 1}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \frac{1}{\pm x\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{for } x > 1, \\ \dfrac{1}{-x\sqrt{x^2-1}} & \text{for } x < -1, \end{cases}$$

$$= \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \; ; |x| > 1$$

18) ধৰা হ'ল, $y = \operatorname{cosec}^{-1} x$

$$\Rightarrow \operatorname{cosec} y = x$$

$$\therefore \frac{d}{dy}(\operatorname{cosec} y) = \frac{d}{dy}(x)$$

$$\Rightarrow -\operatorname{cosec} y \cot y = \frac{dx}{dy}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\operatorname{cosec} y . \cot y}, \operatorname{cosec} y \neq 0, \cot y \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\cos ecy\left(\pm\sqrt{\cos ec^2 y - 1}\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\cos ec^{-1}x\right) = \frac{-1}{\pm x\sqrt{x^2-1}}$$

$$= \begin{cases} \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} \text{ if } x > 1 \\ \frac{-1}{-x\sqrt{x^2-1}} \text{ if } x < -1 \end{cases}$$

$$= \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}};\ |x| > 1$$

৫.৫ ফলনৰ যোগ আৰু অন্তৰৰ অৱকলজ

উপপাদ্য ৫.৫.১: অন্তৰালত সংজ্ঞাৱদ্ধ f_1 আৰু f_2 দুটা অৱকলনীয় ফলন আৰু f হ'ল সিহঁতৰ যোগ ফলন, অর্থাৎ $f = f_1 + f_2$, তেনেহ'লে f অৱকলনীয় আৰু

$$\frac{d}{dx}f = \frac{d}{dx}f_1 + \frac{d}{dx}f_2$$

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল, I অন্তৰালত x এটা বিন্দু আৰু x + h এটা ওচৰৰ বিন্দু।

তেনেহ'লে, $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

আৰু $f(x+h) = f_1(x+h) + f_2(x+h)$

$\therefore f(x+h)-f(x) = f_1(x+h) + f_2(x+h) - f_1(x) - f_2(x)$

$$\Rightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h} + \frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h} \quad \text{.....(1)}$$

$\because$ (1)ত f_1 আৰু f_2 অৱকলনীয়।

$$\therefore \frac{df_1}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f_1(x+h)-f_1(x)}{h}$$

আৰু $\frac{df_2}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f_2(x+h)-f_2(x)}{h}$ স্থিত হয়।

$$\therefore (1) \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{d}{dx}f_1(x) + \frac{d}{dx}f_2(x)$$

ইয়াৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে f অৱকলনীয়

আৰু $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}f_1(x) + \frac{d}{dx}f_2(x)$

অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}f = \frac{d}{dx}f_1 + \frac{d}{dx}f_2$

উপপাদ্য ৫.৫.২: I অন্তৰালত সংজ্ঞাৱদ্ধ f_1 আৰু f_2 দুটা অৱকলনীয় ফলন, আৰু f সিহঁতৰ অন্তৰ ফলন, অর্থাৎ $f = f_1 - f_2$ তেনেহ'লে f অৱকলনীয় আৰু

$$\frac{d}{dx}f = \frac{d}{dx}f_1 - \frac{d}{dx}f_2$$

প্রমাণ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1: অৱকলজ উলিয়াওক (x সাপেক্ষে)

a) $x(1+x)^2$ b) $b\log_e x + x^3 + \sqrt{x}$

c) $4\log_{10} x$ d) $\sqrt[3]{1 + 3\log_a x + 3(\log_a x)^2 + (\log_a x)^3}$

সমাধান ঃ

a) $$\frac{d}{dx}\left\{x(1+x)^2\right\} = \frac{d}{dx}\left\{x\left(1+2x+x^2\right)\right\}$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x + 2x^2 + x^3\right)$$

$$= \frac{d}{dx}(x) + 2\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + \frac{d}{dx}\left(x^3\right)$$

$$= 1 + 2(2x) + 3x^2$$

$$= 1 + 4x + 3x^2$$

b) $$\frac{d}{dx}\left(b\log_e x + x^3 + \sqrt{x}\right) = b\frac{d}{dx}\left(\log_e x\right) + \frac{d}{dx}\left(x^3\right) + \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= b.\frac{1}{x} + 3x^2 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= \frac{b}{x} + 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

c) $$\frac{d}{dx}\left(4\log_{10} x\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{4\log_e x}{\log_e 10}\right)$$

$$= \frac{4}{\log_e 10}\frac{d}{dx}\left(\log_e x\right)$$

$$= 4\log_{10} e\,\frac{1}{x}$$

$$= \frac{4\log_{10} e}{x}$$

d) $\frac{d}{dx}\sqrt[3]{1+3\log_a x+3\left(\log_a x\right)^2+\left(\log_a x\right)^3} = \frac{d}{dx}\left\{\left(1+\log_a x\right)^3\right\}^{\frac{1}{3}}$

$= \frac{d}{dx}\left\{1+\frac{\log_e x}{\log_e a}\right\} = \frac{d}{dx}(1)+\frac{1}{\log_e a}\frac{d}{dx}\left(\log_e x\right)$

$= 0+\frac{1}{\log_e a}.\frac{1}{x} = \frac{1}{x}\log_a e$

উদাহৰণ 2: অধোলিখিত yবোৰৰ x সাপেক্ষে অৱকলজ উলিয়াওক।

a) $y = \frac{9}{\sin x} - 3\cot x + a^x$ b) $y = \tan x - e^x + 4$

c) $y = 3\log x + x^7 - 4\sec x$

সমাধান ঃ

a) $y = \frac{9}{\sin x} - 3\cot x + a^x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{9}{\sin x} - 3\cot x + a^x\right)$

$= 9\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) - 3\frac{d}{dx}(\cot x) + \frac{d}{dx}(a^x)$

$= 9(-\operatorname{cosec} x.\cot x) - 3(-\operatorname{cosec}^2 x) + a^x \log_e a$

$= -9\operatorname{cosec} x.\cot x + 3\operatorname{cosec}^2 x + a^x \log_e a$

b) $y = \tan x - e^x + 4$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\tan x - e^x + 4\right)$

$= \frac{d}{dx}(\tan x) - \frac{d}{dx}\left(e^x\right) + \frac{d}{dx}(4)$

$= \sec^2 x - e^x$

c) $y = 3\log x + x^7 - 4\sec x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(3\log x + x^7 - 4\sec x\right)$

$= 3\frac{d}{dx}(\log x) + \frac{d}{dx}\left(x^7\right) - 4\frac{d}{dx}(\sec x)$

$= \frac{3}{x} + 7x^6 - 4\sec x \tan x$

উদাহৰণ 3: $y = x^2 - 3x$ বক্ৰৰ কোণ বিন্দুত স্পৰ্শকডাল x-অক্ষৰ সমান্তৰাল নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $y = x^2 - 3x$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3 + 2x\right) = 2x - 3$$

স্পৰ্শক x-অক্ষৰ সমান্তৰাল হ'লে,

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

$$\therefore y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{-9}{4}$$

$\therefore$ বিন্দুটো হ'ল $\left(\frac{3}{2}, \frac{-9}{4}\right)$



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন ১ ঃ তলৰ ফলনবোৰৰ x সাপেক্ষে অৱকলজ উলিয়াওক।

a) $\frac{x^3 + x^2 - x + 2}{x}$ b) $\sin x + e^x - \frac{1}{x^4}$

c) $\text{cosec}\, x + a^x$ d) $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2$

e) $\log(a^2 x^3 e^x)$ f) $3\sin^{-1}x + \cos x - a^x + 1$

প্ৰশ্ন ২ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $y = x^3 + 2x$ বক্ৰৰ কোনো স্পৰ্শক x-অক্ষৰ সমান্তৰাল নহয়।

৫.৬ ফলনৰ পূৰণফলৰ অৱকলজ আৰু ভাগফল বিধি

উপপাদ্য ৫.৬.১: ধৰা হ'ল, u(x) আৰু v(x) দুটা অৱকলনীয় ফলন। তেনেহ'লে u(x) v(x) পূৰণফলো অৱকলনীয় আৰু

$$\frac{d}{dx}\left(u(x)v(x)\right) = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$$

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল, আদি ক্ষেত্ৰত x এটা বিন্দু আৰু x + h এটা অতি ওচৰৰ বিন্দু।

ধৰা হ'ল, $f(x) = u(x)v(x)$

$\therefore f(x+h) = u(x+h)v(x+h)$

$\therefore f(x+h) - f(x) = u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)$

$= u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)$

$= u(x+h)\{v(x+h) - v(x)\} + v(x)\{u(x+h) - u(x)\}$

$\therefore \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = u(x+h).\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$

$\therefore \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} u(x+h).\lim_{h\to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x)\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$

$= u(x).\lim_{h\to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h} + v(x).\lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$ .....(1)

$\because$ u আৰু v অৱকলনীয়।

$\therefore u'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h}$ আৰু $v'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{v(x+h)-v(x)}{h}$

$\therefore$ গতিকে, (1)-ৰ পৰা $\Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$

গতিকে, f অৱকলনীয় আৰু

$f'(x) = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$

অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}(f(x)) = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$

অর্থাৎ, $\frac{d}{dx}u(x)v(x) = u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$.

অনুসিদ্ধান্ত ঃ যদি u, v, w তিনিটা অৱকলনীয় ফলন, তেনেহ'লে,

$\frac{d}{dx}(u(x)v(x)w(x)) = u'(x)v(x)w(x) + v'(x)u(x)w(x) + w'(x)u(x)v(x)$

উপপাদ্য ৫.৬.২: ধৰা হ'ল, u(x) আৰু v(x) দুটা অৱকলনীয় ফলন। তেনেহ'লে

ভাগফল ফলন $\frac{u(x)}{v(x)}$ও অৱকলনীয় আৰু

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{v(x)\frac{d}{dx}(u(x)) - u(x)\frac{d}{dx}(v(x))}{(v(x))^2}$$

$$= \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল, $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

$\therefore f(x+h) = \frac{u(x+h)}{v(x+h)}$

$$\therefore f(x+h)-f(x)=\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}$$

$$=\frac{v(x)u(x+h)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{v(x)u(x+h)-v(x)u(x)+v(x)u(x)-u(x)v(x+h)}{h.v(x+h)v(x)}$$

$$=\frac{v(x)\left[u(x+h)-u(x)\right]+u(x)\left[v(x)-v(x+h)\right]}{h.v(x+h)v(x)}$$

$$=\frac{v(x).\dfrac{\left[u(x+h)-u(x)\right]}{h}-u(x)\dfrac{\left[v(x+h)-v(x)\right]}{h}}{v(x+h)v(x)}$$

$$\therefore \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\frac{v(x).\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}-u(x).\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x).v(x)} \quad .....(1)$$

$\because$ u(x) আৰু v(x) অৱকলনীয়।

$$\therefore u'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$$

$$\text{আৰু } v'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$

$$\therefore (1)\text{-ৰ পৰা} \Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{\{v(x)\}^2}$$

অর্থাৎ, xত f(x) অৱকলনীয় আৰু

$$f'(x)=\frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{\{v(x)\}^2}$$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{d}{dx}(f(x))=\frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{\{v(x)\}^2}$$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{d}{dx}\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)=\frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1: অধোলিখিত ফলনবোৰৰ x সাপেক্ষে অৱকলজ উলিয়াওক।

a) x^2e^x b) $e^x\log x$ c) $x^3e^x\sin x$

সমাধান ঃ

a) $\frac{d}{dx}\left(x^2e^x\right) = e^x\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + x^2\frac{d}{dx}\left(e^x\right)$

$= e^x.2x + x^2.e^x$

$= xe^x(2+x)$

b) $\frac{d}{dx}\left(e^x\log x\right) = \log x\frac{d}{dx}\left(e^x\right) + e^x\frac{d}{dx}\left(\log x\right)$

$= \log x.e^x + e^x.\frac{1}{x}$

$= e^x\left(\log x + \frac{1}{x}\right)$

c) $\frac{d}{dx}\left(x^3e^x\sin x\right) = e^x\sin x\frac{d}{dx}\left(x^3\right) + x^3\sin x\frac{d}{dx}\left(e^x\right) + x^3e^x\frac{d}{dx}\left(\sin x\right)$

$= e^x\sin x.3x^2 + x^3\sin x.e^x + x^3e^x\cos x$

$= x^2e^x(3\sin x + x\sin x + x\cos x)$

উদাহৰণ 2: অধোলিখিত ফলনবোৰৰ x সাপেক্ষে অৱকলজ উলিয়াওক।

a) $\frac{\cos x}{\log_a x}$ b) $\frac{x^n}{\log_e x}$ c) $\frac{x^2}{e^x}$

সমাধান ঃ a) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\log_a x}\right) = \frac{\log_a x\frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x\frac{d}{dx}\left(\log_a x\right)}{\left(\log_a x\right)^2}$

$= \frac{\log_a x(-\sin x) - \cos x.\frac{d}{dx}\left(\frac{\log_e x}{\log_e a}\right)}{\left(\log_a x\right)^2}$

$= \frac{-\sin x\log_a x - \cos x.\frac{1}{\log_e a}.\frac{1}{x}}{\left(\log_a x\right)^2}$

$= \frac{-\sin x\log_a x - \cos x\log_a e}{x\left(\log_a x\right)^2}$

b) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^n}{\log_e x}\right)=\frac{\log_e x\frac{d}{dx}\left(x^n\right)-x^n\frac{d}{dx}\left(\log_e x\right)}{\left(\log_e x\right)^2}$$

$$=\frac{\log_e x.nx^{n-1}-x^n.\frac{1}{x}}{\left(\log_e x\right)^2}$$

$$=\frac{nx^{n-1}\log_e x-x^{n-1}}{\left(\log_e x\right)^2}$$

c) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{e^x}\right)=\frac{e^x\frac{d}{dx}\left(x^2\right)-x^2\frac{d}{dx}\left(e^x\right)}{\left(e^x\right)^2}$$

$$=\frac{e^x.2x-x^2.e^x}{\left(e^x\right)^2}$$

$$=\frac{xe^x(2-x)}{\left(e^x\right)^2}=\frac{x(2-x)}{e^x}$$

উদাহৰণ 3: অধোলিখিত ফলনবোৰৰ x সাপেক্ষে অৱকলজ উলিয়াওক।

a) $3x^2+x^3\log x$ b) $\frac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$

c) $\frac{\sec x}{x+e^x}$ d) $x^3\sin x+\frac{e^x+1}{\log x}$

সমাধান ঃ a) $\frac{d}{dx}(3x^2+x^3\log x)=\frac{d}{dx}(3x^2)+\frac{d}{dx}(x^3\log x)$

$$=3\frac{d}{dx}(x^2)+\log x\frac{d}{dx}(x^3)+\frac{d}{dx}x^3(\log x)$$

$$=3(2x)+\log x(3x^2)+x^3.\frac{1}{x}$$

$$=6x+3x^2\log x+x^2$$

b) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+x-1}{x^2-x+1}\right)$$

$$=\frac{\left(x^2-x+1\right)\frac{d}{dx}\left(x^2+x-1\right)-\left(x^2+x-1\right)\frac{d}{dx}\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2-x+1\right)^2}$$

$$= \frac{(x^2-x+1)(2x+1)-(x^2+x-1)(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3-2x^2+2x+x^2-x+1-2x^3-2x^2+2x-x^2-x+1}{(x^2-x+1)^2}$$

$$= \frac{-4x^2+2x+2}{(x^2-x+1)^2}$$

c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{\sec x}{x+e^x}\right) = \frac{(x+e^x)\frac{d}{dx}(\sec x)-\sec x\frac{d}{dx}(x+e^x)}{(x+e^x)^2}$

$$= \frac{(x+e^x).\sec x\tan x-\sec x(1+e^x)}{(x+e^x)^2}$$

$$= \frac{\sec x\{(x+e^x)\tan x-1-e^x\}}{(x+e^x)^2}$$

d) $\frac{d}{dx}\left(x^3\sin x+\frac{e^x+1}{\log x}\right)$

$$= \frac{d}{dx}(x^3\sin x)+\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x+1}{\log x}\right)$$

$$= \sin x\frac{d}{dx}(x^3)+x^3\frac{d}{dx}\sin x+\frac{\log x\frac{d}{dx}(e^x+1)-(e^x+1)\frac{d}{dx}(\log x)}{(\log x)^2}$$

$$= \sin x.3x^2 + x^3.\cos x + \frac{\log x.(e^x+0)-(e^x+1).\frac{1}{x}}{(\log x)^2}$$

$$= x^2(3\sin x + x\cos x) + \frac{e^x(x\log x)-e^x-1}{x(\log x)^2}$$

উদাহৰণ 4: যদি $y=\frac{x}{x+5}$, প্ৰমাণ কৰক যে $x\frac{dy}{dx}=y(1-y)$

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $y=\frac{x}{x+5}$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{x+5}\right) = \frac{(x+5)\frac{d}{dx}(x)-x\frac{d}{dx}(x+5)}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{(x+5).1-x(1+0)}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{x+5-x}{(x+5)^2}$$

$$\therefore x\frac{dy}{dx} = \frac{5x}{(x+5)^2} \quad \text{.....(1)}$$

আকৌ, $y\,(1-y) = \frac{x}{x+5}\left(1-\frac{x}{x+5}\right)$

$$= \frac{x}{x+5}.\frac{x+5-x}{x+5}$$

$$= \frac{5x}{(x+5)^2} \quad \text{.....(2)}$$

(1) আৰু (2)-ৰ পৰা আমি পালোঁ $x\frac{dy}{dx} = y(1-y)$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন ৩ ঃ অধোলিখিত ফলনবোৰৰ x সাপেক্ষে অৱকলজ উলিয়াওক।

a) $\frac{2x+3}{3x+4}$ b) $\frac{1+\tan x}{1-\tan x}$ c) $\frac{x}{a^2+x^2}$

d) $7xa^x + \log x^x$ e) $3\log x \tan x - x^3e^x+2$

f) $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}$ g) $\log\,(x^3\,e^{4x}\,a^x)$

প্ৰশ্ন ৪ ঃ যদি $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$, প্ৰমাণ কৰক যে $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\cos x}$

প্ৰশ্ন ৫ ঃ যদি $f(x) = \frac{x-2}{2\sqrt{x}}$, $f'(4)$ উলিয়াওক।



৫.৭ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- কোনো বক্ৰ $y = f(x)$-ৰ এটা বিন্দুত $\frac{dy}{dx}$ এ সেই বিন্দুত টনা স্পৰ্শকৰ প্ৰৱণতা বুজায়।
- x-অক্ষৰ সমান্তৰাল স্পৰ্শকৰ বাবে, $\frac{dy}{dx} = 0$.

- বিভিন্ন প্ৰামাণিক ফলনৰ অৱকলজ ঃ

$$\frac{d}{dx}(k) = 0 \quad (k = \text{ধ্ৰুৱক})$$

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log_e a$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x.\tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x.\cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; -1 < x < 1$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}; -1 < x < 1$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}; x \in \Re$$

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = \frac{-1}{1+x^2}; x \in \Re$$

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}; |x| > 1$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec}^{-1} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}; |x| > 1$$

- $\frac{d}{dx}(f_1 \pm f_2) = \frac{df_1}{dx} \pm \frac{df_2}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(uv) = v.\frac{du}{dx} + u.\frac{dv}{dx}$
- $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v.\frac{du}{dx} + u.\frac{dv}{dx}}{v^2}, v \neq 0$



৫.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x}\right)$

$= \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{x} + \frac{x^2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{2}{x}\right)$

$= \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(1) + 2\frac{d}{dx}(x^{-1})$

$= 2x + 1 - 0 + 2(-1)x^{-2}$

$= 2x + 1 - \frac{2}{x^2}$

b) $\frac{d}{dx}\left(\sin x + e^x - \frac{1}{x^4}\right) = \frac{d}{dx}(\sin x) + \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x^{-4})$

$= \cos x + e^x - (-4)x^{-4-1}$

$= \cos x + e^x + \frac{4}{x^5}$

c) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x + a^x) = \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) + \frac{d}{dx}(a^x)$

$= -\operatorname{cosec} x \cot x + a^x \log_e a$

d) $\frac{d}{dx}\left\{\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2\right\} = \frac{d}{dx}\left(x + \frac{1}{x} + 2 + 2\right)$

$= \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(x^{-1}) + \frac{d}{dx}(4)$

$= 1 + (-1)x^{-1-1} + 0$

$= 1 - \frac{1}{x^2}$

e) $\frac{d}{dx}\{\log(a^2x^3e^x)\} = \frac{d}{dx}(\log a^2 + \log x^3 + \log e^x)$

$= \frac{d}{dx}(2\log a + 3\log x + x\log e)$

$= \frac{d}{dx}(2\log a) + 3\frac{d}{dx}(\log x) + \frac{d}{dx}(x) \quad (\because \log e = 1)$

$= 0 + \frac{3}{x} + 1 = 1 + \frac{3}{x}$

f) $\frac{d}{dx}(3\sin^{-1}x + \cos x - a^x + 1)$

$= 3\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x) + \frac{d}{dx}(\cos x) - \frac{d}{dx}(a^x) + \frac{d}{dx}(1)$

$= \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + (-\sin x) - a^x\log a + 0$

$= \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} - \sin x - ax\log a$

২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $y = x^3 + 2x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 + 2x)$

$= \frac{d}{dx}(x^3) + 2\frac{d}{dx}(x)$

$= 3x^2 + 2$

$\neq 0$ for $x \in \Re$

$\therefore$ x-ৰ কোনো মান নাই যাৰ বাবে $\frac{dy}{dx} = 0$

$\therefore$ $y = x^3 + 2x$ বক্ৰৰ কোনো স্পৰ্শক x-অক্ষৰ সমান্তৰাল হ'ব নোৱাৰে।

৩নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) $\frac{d}{dx}\left(\frac{2x+3}{3x+4}\right) = \frac{(3x+4)\frac{d}{dx}(2x+3) - (2x+3)\frac{d}{dx}(3x+4)}{(3x+4)^2}$

$= \frac{(3x+4)(2+0) - (2x+3)(3+0)}{(3x+4)^2}$

$= \frac{(6x+8) - (6x+9)}{(3x+4)^2}$

$= \frac{-1}{(3x+4)^2}$

b) $\frac{d}{dx}\left(\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right)=\frac{(1-\tan x)\frac{d}{dx}(1+\tan x)-(1+\tan x)\frac{d}{dx}(1-\tan x)}{(1-\tan x)^2}$

$$=\frac{(1-\tan x)(\sec^2 x)-(1+\tan x)(-\sec^2 x)}{(1-\tan x)^2}$$

$$=\frac{\sec^2 x(1-\tan x+1+\tan x)}{(1-\tan x)^2}$$

$$=\frac{2\sec^2 x}{(1-\tan x)^2}$$

c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{a^2+x^2}\right)=\frac{(a^2+x^2)\frac{d}{dx}(x)-x\frac{d}{dx}(a^2+x^2)}{(a^2+x^2)^2}$

$$=\frac{(a^2+x^2).1-x(2x)}{(a^2+x^2)^2}$$

$$=\frac{a^2+x^2-2x^2}{(a^2+x^2)^2}$$

$$=\frac{a^2-x^2}{(a^2+x^2)^2}$$

d) $\frac{d}{dx}(7xa^x+\log x^x)=\frac{d}{dx}(7xa^x+x\log x)$

$$=7\frac{d}{dx}(xa^x)+\frac{d}{dx}(x\log x)$$

$$=7\left[a^x\frac{d}{dx}(x)+x\frac{d}{dx}(a^x)\right]+\left[\log x\frac{d}{dx}(x)+x\frac{d}{dx}(\log x)\right]$$

$$=7\left[a^x.1+x.a^x\log_e a\right]+\left[\log x.1+x.\frac{1}{x}\right]$$

$$=7a^x(1+x\log_e a)+\log x+1$$

e) $\frac{d}{dx}\left[3\log x\tan x-x^3e^x+2\right]$

$$=3\frac{d}{dx}(\log x\tan x)-\frac{d}{dx}(x^3e^x)+\frac{d}{dx}(2)$$

$$=3\left[\tan x\frac{d}{dx}(\log x)+\log x\frac{d}{dx}(\tan x)\right]-\left[e^x\frac{d}{dx}(x^3)+x^3\frac{d}{dx}(e^x)\right]+0$$

$$= 3\left[\tan x.\frac{1}{x} + \log x.\sec^2 x\right] - \left[e^x.3x^2 + x^3.e^x\right]$$

$$= 3\left[\frac{\tan x}{x} + \log x \sec^2 x\right] - x^2e^x[3 + x]$$

f) $$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{x}}\right] = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right) - \left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)\left(0+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) - \left(\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)\left(0-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}+\sqrt{a}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{x}\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^2}$$

g) $$\frac{d}{dx}\left[\log\left(x^3e^{4x}a^x\right)\right] = \frac{d}{dx}\left[\log x^3 + \log e^{4x} + \log a^x\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[3\log x + 4x\log e + x\log a\right]$$

$$= 3\frac{d}{dx}(\log x) + 4\frac{d}{dx}(x) + \log a\frac{d}{dx}(x)\left[\because \log e = 1\right]$$

$$= \frac{3}{x} + 4 + \log a$$

৪নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$ $\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$

$$= \frac{(1+\cos x)\frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x\frac{d}{dx}(1+\cos x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{(1+\cos x)(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+\cos x}$$

৫নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $f(x) = \frac{x-2}{2\sqrt{x}}$

$$= \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - \left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}\right)$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}$$

$$\therefore f'(4) = \frac{1}{4(2)} + \frac{1}{2(4)(2)}$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

$$= \frac{3}{16}$$



৫.৯ অধিক জানিবলৈ

1) Gupta, Sudhir (2011) (1st edition): *Basics of Differentential Calculus*; New Delhi: Anmol publication Pvt. Ltd.

2) Habib, Amber (2011) (1st edition): *The Calculus of Finance*; Hyderabad: Universities Press India Pvt. Ltd.

3) Maron, I. A. (1993) (1st edition): *Problems in Calculus of One Variable*; New Delhi: CBS Publishers & Distributors Pvt. Ltd.

4) Sharma, A. K. (2004) (1st edition): *Text Book of Differential Calculus for B.A., B.Sc., B.Com., I.A.S., P.C.S.*; New Delhi: Discovery Publishing House.



৫.১০ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ অধোলিখিতবোৰৰ x সাপেক্ষে অৱকলজ উলিয়াওক।

a) $\frac{1}{3x+5}$ b) $\sqrt{ax+b}$ c) $\sqrt{\sec x}$

d) $\sqrt{\log x}$ (e) $\frac{x^4+8x+5}{x}$

f) $2e^{3x}+\tan x-\cos 2x+9\sin^{-1}x$ g) $\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

প্ৰশ্ন ২ ঃ অধোলিখিতবোৰৰ x সাপেক্ষে অৱকল গুণাঙ্ক উলিয়াওক।

a) $\frac{1-x^2}{1+x^2}$ b) $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$

c) $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ d) $\frac{a+b\cos x}{a-b\cos x}$

প্ৰশ্ন ৩ ঃ যদি $y=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$, প্ৰমাণ কৰক যে $\frac{dy}{dx}=y$.

প্ৰশ্ন ৪ ঃ x সাপেক্ষে $y=\cos x\log x+e^x\operatorname{cosec} x$-ৰ অৱকল সহগ উলিয়াওক।

প্ৰশ্ন ৫ ঃ x সাপেক্ষে $y=\frac{e^x\log x}{\sin x+\cos x}$ -ৰ অৱকল সহগ উলিয়াওক।

*** ***** ***

অধ্যায় ৬ ঃ কিছুমান বিশেষ ফলনৰ অৱকলজ

অধ্যায় গাঁথনি

৬.১ উদ্দেশ্য
৬.২ পৰিচয়
৬.৩ সংযুক্ত ফলনৰ অৱকলজ
৬.৪ ঘাতাঙ্কীয় ফলন আৰু অন্তর্নিহিত ফলনৰ অৱকলজ
৬.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
৬.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
৬.৭ অধিক জানিবলৈ
৬.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

৬.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- সংযুক্ত ফলনৰ (ফলনৰ ফলন) অৱকলজ উলিয়াব পাৰিব
- অন্তর্নিহিত ফলনৰ অৱকলজ উলিয়াব পাৰিব
- আন এটা ফলন সাপেক্ষে এটা নির্দিষ্ট ফলনৰ অৱকলজ উলিয়াব পাৰিব।

৬.২ পৰিচয়

আমি ইতিমধ্যে পঞ্চম অধ্যায়ত ফলনৰ অৱকলজৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিছোঁ। এই অধ্যায়ত আমি সংযুক্ত ফলনৰ,অৱকলজ ঘাতাঙ্কীয় ফলনৰ অৱকলজ, অন্তর্নিহিত ফলনৰ অৱকলজ আৰু আন এটা ফলন সাপেক্ষে এটা নির্দিষ্ট ফলনৰ অৱকলজৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

৬.৩ সংযুক্ত ফলনৰ অৱকলজ

যদি $y = \phi(t)$ আৰু $t = f(x)$, তেনেহ'লে $y = \phi(f(x))$ এটা সংযুক্ত ফলন (Composite Function)।সংযুক্ত ফলনৰ কেইটামান উদাহৰণ হ'ল $\cos 2x$, $\sin x^2$, $\log \cos x$, $e^{\sin x}$ ইত্যাদি।

উপপাদ্য ৬.৩.১: ধৰা হ'ল $y = \phi(t)$ য'ত $t = f(x)$. তেনেহ'লে $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল x-ৰ বৃদ্ধি h অনুৰূপে t-ৰ বৃদ্ধি k.

$\because t = f(x)$ .....(1)

$\therefore t + k = f(x + h)$ .....(2)

(2) – (1) $\Rightarrow$ k = f(x+h) – f(x) .....(3)

আকৌ, $h \to 0$ gives $t+k \to t$ or $k \to 0$

এতিয়া, $\phi(f(x)) = \phi(t) \Rightarrow \phi(f(x+h)) = \phi(t+k)$

$\therefore \phi(f(x+h)) - \phi(f(x)) = \phi(t+k) - \phi(t)$

$$\Rightarrow \frac{\phi(f(x+h)) - \phi(f(x))}{h} = \frac{\phi(t+k) - \phi(t)}{k} \cdot \frac{k}{h}$$

$$= \frac{\phi(t+k) - \phi(t)}{k} \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \text{ (3)-ৰ পৰা}$$

উভয় পক্ষৰ সীমা লৈ আমি পাম

$$\lim_{h\to 0} \frac{\phi(f(x+h)) - \phi(f(x))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\phi(t+k) - \phi(t)}{k} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\phi(f(x))) = \frac{d}{dt}(\phi(t)) \cdot \frac{d}{dx}(f(x))$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\phi(t)) = \frac{d}{dt}(y) \cdot \frac{d}{dx}(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

উপৰিউক্ত উপপাদ্যৰ সাধাৰণীকৰণ ঃ

ধৰা হ'ল, $y = f(u)$, $u = g(t)$, $t = h(x)$ তেনেহ'লে, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$

অর্থাৎ, কেবাটাও ফলনৰ y এটা সংযুক্ত ফলন হ'লে,

গতিকে, $\frac{dy}{dx} = \frac{d(1^{st} \text{ফলন})}{d(2^{nd} \text{ফলন})} \cdot \frac{d(2^{nd} \text{ফলন})}{d(3^{rd} \text{ফলন})} \cdots \frac{d(\text{শেষ ফলন})}{dx}$

এইটোক শৃঙ্খল বিধি বুলিও কোৱা হয়।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1: অধোলিখিত ফলনবোৰৰ x সাপেক্ষে অৱকলজ উলিয়াওক।

a) $\cos x^3$ b) $e^{\sin x^2}$ c) $\sec^3 3x$.

সমাধান ঃ a) ধৰা হ'ল, $t = x^3$ $\therefore \frac{dt}{dx} = 3x^2$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cos x^3) = \frac{d}{dx}(\cos t)$$

$$= \frac{d}{dt}(\cos t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= -\sin t . 3x^2 = -3x^2 \sin x^3$$

b) ধৰা হ'ল, $y = e^{\sin x^2}$

$= e^{\sin t}$, য'ত $t = x^2$

$= e^u$, য'ত $u = \sin t$

শৃঙ্খল বিধিৰ পৰা, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{d}{du}(e^u)\frac{d}{dt}(\sin t).\frac{d}{dx}(x^2)$

$= e^u \cos t.2x$

$= 2xe^{\sin t}.\cos t$

$= 2xe^{\sin x^2}\cos x^2$

c) ধৰা হ'ল, $y = \sec^3 3x$

$= \sec^3 u$, য'ত $u = 3x$

$= t^3$, য'ত $t = \sec u$

শৃঙ্খল বিধিৰ পৰা, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{d}{dt}(t^3).\frac{d}{du}(\sec u).\frac{d}{dx}(3x)$

$= 3t^2 \sec u \tan u.3$

$= 9\sec^2 u.\ \sec u \tan u$

$= 9\sec^3 3x \tan 3x.$

উদাহৰণ 2: অধোলিখিত ফলনবোৰৰ x সাপেক্ষে অৱকলজ উলিয়াওক।

a) $y = \log\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ b) $y = \log\log\log x^2$

c) $y = \cos^{-1} x^2$ d) $y = a\cot^{-1}(m\tan^{-1} bx)$

সমাধান ঃ a) ধৰা হ'ল, $t = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\therefore y = \log t$

শৃঙ্খল বিধিৰ পৰা, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}(\log t).\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

$= \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}.\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

$= \frac{\sqrt{x}}{x+1}.\frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$

$= \frac{x-1}{2x(x+1)}$

b) $y = \log \log \log x^2$

ধৰা হ'ল, $v = \log \log x^2$

$w = \log x^2$

$t = x^2$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}.\frac{dv}{dw}.\frac{dw}{dt}.\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{d}{dv}(\log v).\frac{d}{dw}(\log w).\frac{d}{dt}(\log t).\frac{d}{dx}(x^2)$$

$$= \frac{1}{v}.\frac{1}{w}.\frac{1}{t}.2x$$

$$= \frac{2x}{\log\log x^2.\log x^2.x^2}$$

$$= \frac{2}{x(\log\log x^2)(\log x^2)}$$

c) $y = \cos^{-1}x^2$

$= \cos^{-1}u$,where $u = x^2$

শৃঙ্খল বিধিৰ পৰা, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}\left(\cos^{-1}u\right)\frac{d}{dx}\left(x^2\right)$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}.2x$$

$$= \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}$$

d) $y = a\cot^{-1}(m\tan^{-1}bx)$

$= a\cot^{-1}(m \tan^{-1} u)$, যাতে $u = bx$,

$= a \cot^{-1} v$, যাতে $v = m\tan^{-1}u$,

$= aw$, যাতে $w = \cot^{-1} v$.

শৃঙ্খল বিধিৰ পৰা আমি পালোঁ, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw}.\frac{dw}{dv}.\frac{dv}{du}.\frac{du}{dx}$

$$= \frac{d}{dw}(aw).\frac{d}{dv}\left(\cot^{-1} v\right).\frac{d}{du}\left(m\tan^{-1} u\right).\frac{d}{dx}(bx)$$

$$= a.1.\frac{-1}{1+v^2}.\frac{m}{1+u^2}.b.1$$

$$= \frac{-mab}{\left\{1+\left(m\tan^{-1}bx\right)^2\right\}\left(1+b^2x^2\right)}$$

উদাহৰণ 3: প্ৰমাণ কৰক যে এটা যুগ্ম ফলনৰ অৱকলজ এটা অযুগ্ম ফলন।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল f এটা যুগ্ম ফলন।

গতিকে, $f(x) = f(-x)$

$$\therefore \frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}f(-x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = f'(-x)\frac{d}{dx}(-x)$$

$$= -f'(-x).(-1)$$

$$= -f'(-x)$$

$\therefore f'(-x) = -f'(x)$

$\Rightarrow f'$ এটা অযুগ্ম ফলন।

উদাহৰণ 4: যদি $y = \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$, প্ৰমাণ কৰক যে $(1-x^2)\frac{dy}{dx} = xy + 1$

সমাধান ঃ $y = \frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ .....(1)

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-x^2}.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \sin^{-1}x.\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x)}{1-x^2}$$

$$= \frac{1 + x.\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}$$

$$= \frac{1+xy}{1-x^2}$$

$$\therefore (1-x^2)\frac{dy}{dx} = xy + 1$$



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন ১ ঃ অধোলিখিত ফলনবোৰৰ x সাপেক্ষে অৱকলজ উলিয়াওক।

a) $y = \log(\sec x + \tan x)$ b) $y = \sin(\cos x)$

c) $y = \log\left(x + \frac{1}{x}\right)$

প্ৰশ্ন ২ ঃ $\frac{dy}{dx}$ উলিয়াওক।

a) $y = \log\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$ b) $y = e^{ax^2+bx+c}$

c) $y = \log(e^{3x}.x^3)$ d) $y = x^3\sin 2x.\log x$

প্ৰশ্ন ৩ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে এটা অযুগ্ম ফলনৰ অৱকলজ এটা যুগ্ম ফলন।

৬.৪ ঘাতাঙ্কীয় ফলন আৰু অন্তৰ্নিহিত ফলনৰ অৱকলজ

যদি ফলন এটাত চলক এটা সূচক হিচাপে থাকে নতুবা যদি ই দুটা বা ততোধিক ফলনৰ পূৰণফল বা ভাগফল হয়, তেনেহ'লে প্ৰথমতে ঘাতাংক লোৱা হয় আৰু পাছত অৱকলন কৰা হয়। এই প্ৰক্ৰিয়াটোক ঘাতাঙ্কীয় অৱকলন বুলি কোৱা হয়।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1: অধোলিখিত ফলনবোৰৰ x সাপেক্ষে অৱকলজ উলিয়াওক।

a) x^x b) $a^{\tan x}$ c) $(\log_e x)^{\sin x}$

সমাধান ঃ a) ধৰা হ'ল, $y = x^x$

$\therefore \log_e y = \log_e x^x \Rightarrow \log_e y = x\log_e x$

উভয় পক্ষক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1.\log_e x + x.\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y(\log_e x + 1)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(x^x\right) = x^x(1 + \log_e x)$$

b) ধৰা হ'ল, $y = a^{\tan x}$

$\therefore \log_e y = \log_e a^{\tan x} \Rightarrow \log_e y = \tan x \log_e a$

উভয় পক্ষক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \sec^2 x.\log_e a$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\log_e a.\sec^2 x$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left(a^{\tan x}\right) = a^{\tan x}.\log_e a.\sec^2 x$$

c) ধৰা হ'ল, $y = (\log_e x)^{\sin x}$

$$\therefore \log_e y = \log_e(\log_e x)^{\sin x} \Rightarrow \log_e y = \sin x.\log_e(\log_e x)$$

উভয় পক্ষক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = \cos x.\log_e(\log_e x) + \sin x.\frac{1}{\log_e x}.\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[\log_e(\log_e x)\cos x + \frac{\sin x}{x\log_e x}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left\{(\log_e x)^{\sin x}\right\} = (\log_e x)^{\sin x}\left[\log_e(\log_e x)\cos x + \frac{\sin x}{x\log_e x}\right]$$

উদাহৰণ 2: যদি $y = x^{x^{x^{\cdots\cdots\infty}}}$, প্ৰমাণ কৰক যে $x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-y\log x}$

সমাধান ঃ $y = x^{x^{x^{\cdots\cdots\infty}}} \Rightarrow y = x^y$

$\therefore \log y = \log x^y \Rightarrow \log y = y\log x$

উভয় পক্ষক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = y.\frac{1}{x} + \frac{dy}{dx}.\log x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{y} - \log x\right) = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{1-y\log x}{y}\right) = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x(1-y\log x)}$$

উদাহৰণ 3: $\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}$-ৰ x সাপেক্ষে অৱকল সহগ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $y = \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}$

$$\therefore \log_e y = \log_e\left\{\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3e^x}\right\}$$

$$\Rightarrow \log_e y = 2\log_e(x+1) + \frac{1}{2}\log_e(x-1) - 3\log_e(x+4) - x\log_e e$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log_e y) = \frac{d}{dx}\left[2\log_e(x+1) + \frac{1}{2}\log_e(x-1) - 3\log_e(x+4) - x\right]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}.\frac{dy}{dx} = 2.\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}.\frac{1}{x-1} - 3.\frac{1}{x+4} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1\right)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left[\frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}\right] = \frac{(x+1)^2\sqrt{x-1}}{(x+4)^3 e^x}\left(\frac{2}{x+1} + \frac{1}{2(x-1)} - \frac{3}{x+4} - 1\right)$$

উদাহৰণ 4: যদি $x^y = e^{x-y}$, প্ৰমাণ কৰক যে $\frac{dy}{dx} = \frac{\log_e x}{(\log_e(ex))^2}$

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $x^y = e^{x-y}$

$$\therefore \log_e x^y = \log_e e^{x-y}$$

$$\Rightarrow y\log_e x = (x-y)\log_e e \qquad \text{.....(1)}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(y\log_e x) = \frac{d}{dx}(x-y)$$

$$\Rightarrow y.\frac{1}{x} + \frac{dy}{dx}.\log_e x = 1 - \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(1+\log_e x\right) = 1 - \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x\left(1+\log_e x\right)} = \frac{x-y}{x(\log_e e + \log_e x)}$$

$$= \frac{x-y}{x\log(ex)}$$

$$= \frac{y\log_e x}{x\log(ex)}, \text{ (1)ৰ সহায়ত.....(2)}$$

আকৌ, (1) $\Rightarrow y\log_e x = x - y$

$$\Rightarrow y\left(1+\log_e x\right) = x$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{1}{\log_e e + \log_e x} = \frac{1}{\log_e(ex)}$$

$$\therefore (2) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\log_e(ex)} \cdot \frac{\log_e x}{\log_e(ex)} = \frac{\log_e x}{(\log_e(ex))^2}$$

অন্তর্নিহিত ফলনৰ অৱকলজ ঃ কেতিয়াবা x আৰু y এনেদৰে যুক্ত হৈ থাকে যে yক x-ৰ মাধ্যমত প্ৰকাশ কৰা সম্ভৱ নহয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, তলৰ সম্বন্ধকেইটালৈ মন কৰক।

1) $x^3 + y^2 - 3xy = 0$ 2) $\cos y = x\sin(x+y)$

ওপৰৰ উদাহৰণ দুটাত yক স্পষ্টভাৱে x-ৰ ফলন হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰা। এনেধৰণৰ ফলনক অন্তর্নিহিত ফলন (Implicit Functions) বোলে। এনে ক্ষেত্ৰত কেনেদৰে $\frac{dy}{dx}$ উলিয়াব লাগিলে সেই বিষয়ে তলৰ উদাহৰণকেইটাৰ সহায়ত ব্যাখ্যা কৰা হৈছে।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1: যদি $y= \sin(x+y) + x^2y$, $\frac{dy}{dx}$ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $y = \sin(x+y) + x^2y$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\sin(x+y) + x^2y\right\}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(x+y).\frac{d}{dx}(x+y) + 2xy + x^2.\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(x+y).\left(1+\frac{dy}{dx}\right) + 2xy + x^2.\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos(x+y) + \cos(x+y).\frac{dy}{dx} + 2xy + x^2.\frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left[1 - x^2 - \cos(x+y)\right] = \cos(x+y) + 2xy$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\cos(x+y) + 2xy}{1 - x^2 - \cos(x+y)}$$

উদাহৰণ 2: যদি $x^y.y^x = 1$, $\frac{dy}{dx}$ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $x^y.y^x = 1$

$$\therefore \log\left(x^y.y^x\right) = \log 1$$

$$\Rightarrow y\log x + x\log y = 0$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(y\log x + x\log y) = 0$$

$$\Rightarrow y.\frac{1}{x} + \frac{dy}{dx}.\log x + x.\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + 1.\log y = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\log x + \frac{x}{y}\right) = -\left(\frac{y}{x} + \log y\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{y\log x + x}{y}\right) = -\frac{y + x\log y}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-y(y + x\log y)}{x(y\log x + x)}$$

উদাহৰণ 3: যদি siny = xsin(a+y), দেখুওৱাক যে $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$

সমাধান ঃ দিয়া আছে, siny = xsin(a+y)

$$\Rightarrow x = \frac{\sin y}{\sin(a+y)}$$

$$\therefore \frac{d}{dy}(x) = \frac{d}{dy}\left(\frac{\sin y}{\sin(a+y)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{\sin(a+y)\frac{d}{dy}(\sin y) - \sin y \frac{d}{dy}\sin(a+y)}{\sin^2(a+y)}$$

$$= \frac{\sin(a+y)\cos y - \sin y \cos(a+y)}{\sin^2(a+y)}$$

$$= \frac{\sin(a+y-y)}{\sin^2(a+y)}$$

$$= \frac{\sin a}{\sin^2(a+y)}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

উদাহৰণ 4: যদি $y = \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + ...\infty}}}$

দেখুওৱাক যে $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{1-2y}$

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $y = \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + \sqrt{\cos x + ...\infty}}}$

$$\Rightarrow y = \sqrt{\cos x + y}$$

$$\Rightarrow y^2 = \cos x + y$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(\cos x + y)$$

$$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -\sin x + \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(2y-1) = -\sin x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{1-2y}$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন ৪ ঃ $\frac{1}{(x+p)(x+q)(x+t)}$ -ৰ x সাপেক্ষে অৱকল সহগ উলিয়াওক।

প্রশ্ন ৫ ঃ $\frac{dy}{dx}$ উলিয়াওক, যদি

a) $y = (\log x)^{\cos x}$ b) $y = (1+\cos x)^x$

c) $y = \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}$ d) $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$

প্রশ্ন ৬ ঃ যদি $y = e^{x+e^{x+e^{x+\cdots}}}$, দেখুওৱাক যে $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1-y}$

প্রশ্ন ৭ ঃ যদি $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$, প্রমাণ কৰক যে $\frac{dy}{dx} = -(1+x)^{-2}$, $x \neq y$

প্রশ্ন ৮ ঃ $\frac{dy}{dx}$ উলিয়াওক, যদি

a) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

b) $x^n+y^n = a^x$ c) $\sqrt{x^2+y^2} + \log(x^2-y^2) = 0$

প্রাচলিক ফলনৰ অৱকলজ আৰু এটা ফলন সাপেক্ষে আন এটা ফলনৰ অৱকলজ ঃ কেতিয়াবা x আৰু y উভয়কে আন এটা চলকৰ ফলন হিচাপে প্রকাশ কৰা হয়। এই তৃতীয় চলকটোক প্রাচল (Parameter) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ স্বৰূপে, $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$

এই ক্ষেত্রত, আমি প্রথমতে প্রাচলটো অপনয়ন নকৰাকৈ, অধোলিখিত ফলটোৰ সহায়ত $\frac{dy}{dx}$ উলিয়াওক। $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}$, যদি θ প্রাচল।

যদি y_1 আৰু y_2 দুটা x-ৰ প্রাচল হয় যাতে $y_1 = f_1(x)$ আৰু $y_2 = f_2(x)$ তেনেহ'লে,

$$\frac{dy_1}{dy_2} = \frac{\text{x সাপেক্ষে } y_1\text{-ৰ অৱকলজ}}{\text{x সাপেক্ষে } y_2\text{-ৰ অৱকলজ}}$$

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1: যদি $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$, $\frac{dy}{dx}$ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ $\because x = a\cos\theta$ $\therefore \frac{dx}{d\theta} = -a\sin\theta$

আৰু $y = a\sin\theta$ $\therefore \frac{dy}{d\theta} = a\cos\theta$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\cos\theta}{-a\sin\theta} = -\cot\theta$$

উদাহৰণ 2: যদি $x = a\log\left(\tan\frac{t}{2} + \cos t\right)$ and $y = a\sin t$, $\frac{dy}{dx}$ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ $\because x = a\left(\log\tan\frac{t}{2} + \cos t\right)$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = a\left[\frac{1}{\tan\frac{t}{2}}.\sec\frac{2t}{2}.\frac{1}{2} + (-\sin t)\right]$$

$$= a\left[\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}.\frac{1}{2} - \sin t\right]$$

$$= a\left(\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} - \sin t\right)$$

$$= a\left(\frac{1}{\sin t} - \sin t\right)$$

$$= \frac{a(1-\sin^2 t)}{\sin t} = \frac{a\cos^2 t}{\sin t}$$

আকৌ, $\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(a\sin t) = a\cos t$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\cos t}{\frac{a\cos^2 t}{\sin t}} = \frac{\sin t}{\cos t} = \tan t.$$

উদাহৰণ 3: (x^2+2x) সাপেক্ষে $\log(x^2+2x+1)$-ৰ অৱকল সহগ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $u = \log(x^2+2x+1)$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2+2x+1}(2x+2) = \frac{2(x+1)}{x^2+2x+1}$$

আকৌ, ধৰা হ'ল, $v = x^2 + 2x$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = 2x+2 = 2(x+1)$$

$$\therefore \frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{2(x+1)}{x^2+2x+1} \times \frac{1}{2(x+1)} = \frac{1}{x^2+2x+1}$$

উদাহৰণ 4: $\cos x$ সাপেক্ষে $e^{\sin x}$-ৰ অৱকল সহগ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $u = e^{\sin x}$ $\quad \therefore \frac{du}{dx} = e^{\sin x}.\cos x$

আকৌ, ধৰা হ'ল, $v = \cos x$ $\quad \therefore \frac{dv}{dx} = -\sin x$

$$\therefore \frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{e^{\sin x}.\cos x}{-\sin x} = -\cot x.e^{\sin x}$$

উদাহৰণ 5: $v = (\sin x)^x$ সাপেক্ষে $u = x^{\sin x}$-ৰ অৱকলজ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $u = x^{\sin x}$

$\therefore \log u = \log x^{\sin x}$

$\Rightarrow \log u = \sin x.\log x$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log u) = \frac{d}{dx}(\sin x.\log x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \cos x.\log x + \sin x.\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = u\left(\cos x \log x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

$$= x^{\sin x}.\frac{x\cos x \log x + \sin x}{x}$$

আকৌ, $v = (\sin x)^x$

$\therefore \log v = \log(\sin x)^x$

$\Rightarrow \log v = x\log(\sin x)$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log v) = \frac{d}{dx}\{x\log(\sin x)\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v}.\frac{dv}{dx} = 1.\log(\sin x) + x.\frac{1}{\sin x}.\cos x$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = v\{\log(\sin x) + x\cot x\}$$

$$= (\sin x)^x\,[\log(\sin x)+x\cot x]$$

$$\therefore \frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{x^{\sin x}.(x\cos x\log x + \sin x)}{x(\sin x)^x\,[\log(\sin x) + x\cot x]}$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন ৯ ঃ অধোলিখিত প্রাচলিক সমীকৰণৰ ক্ষেত্রত $\frac{dy}{dx}$ উলিয়াওক।

a) $x = a\cos^3\theta,\ y = a\sin^3\theta$

b) $x = \sqrt{1+t}\ ,\ y = \sqrt{1-t}$

c) $x = e^t(\cos t - \sin t),\ y = e^t(\cos t + \sin t)$

প্রশ্ন ১০ ঃ $\sin^{-1}x$ সাপেক্ষে $e^{\sin^{-1}x}$ -ৰ অৱকল সহগ উলিয়াওক।

প্রশ্ন ১১ ঃ x^2 সাপেক্ষে $\frac{x^2}{1+x^2}$ -ৰ অৱকলজ উলিয়াওক।

প্রশ্ন ১২ ঃ $e^x+\cos x$ সাপেক্ষে $\log x+\sin x$-ৰ অৱকলজ উলিয়াওক।



৬.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- যদি $y = f(u),\ u = g(t),\ t = h(x)$, তেনেহ'লে, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}.\frac{du}{dt}.\frac{dt}{dx}$
- যদি u আৰু v দুটা x-ৰ ফলন যাতে $u = f(x)$ আৰু $v = g(x)$, তেনেহ'লে,

$$\frac{du}{dv} = \frac{x \text{ সাপেক্ষে } u\text{-ৰ অৱকলজ}}{x \text{ সাপেক্ষে } v\text{-ৰ অৱকলজ}}$$

৬.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) $y = \log(\sec x + \tan x) = \log t$, যাতে $t = \sec x + \tan x$

শৃঙ্খল বিধিৰ সহায়ত, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}$

$$= \frac{d}{dt}(\log t)\frac{d}{dx}(\sec x + \tan x)$$

$$= \frac{1}{t}(\sec x \tan x + \sec^2 x)$$

$$= \frac{\sec x(\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x}$$

$$= \sec x.$$

b) $y = \sin(\cos x) = \sin t$, যাতে $t = \cos x$

শৃঙ্খল বিধিৰ সহায়ত, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}$

$$= \frac{d}{dt}(\sin t)\frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= \cos t\ (-\sin x)$$

$$= -\cos(\cos x).\ \sin x$$

c) $y = \log\left(x + \frac{1}{x}\right) = \log t$, যাতে $t = x + \frac{1}{x}$

শৃঙ্খল বিধিৰ সহায়ত, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}$

$$= \frac{d}{dt}(\log t)\frac{d}{dx}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{t}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x + \frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{x}{x^2 + 1}.\frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - 1}{x(x^2 + 1)}$$

২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) $y = \log\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$

$\Rightarrow y = \log t$, যাতে $t = x+\sqrt{a^2+x^2}$

শৃঙ্খল বিধিৰ সহায়ত, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}$

$= \frac{d}{dt}(\log t).\frac{d}{dx}\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)$

$= \frac{1}{t}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}.2x\right]$

$= \frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{\sqrt{a^2+x^2}\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)}$

$= \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$

b) $y = e^{ax^2+bx+c}$

$\Rightarrow y = e^t$, যাতে $t = ax^2 + bx + c$

শৃঙ্খল বিধিৰ সহায়ত, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}.\frac{dt}{dx}$

$= \frac{d}{dt}\left(e^t\right).\frac{d}{dx}\left(ax^2+bx+c\right)$

$= e^t(2ax+b)$

$= e^{\left(ax^2+bx+c\right)}.(2ax+b)$

c) $y = \log(e^{3x}.x^3)$

$= 3x\log e + 3\log x$

$= 3x+3\log x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(3x+3\log x) = 3+\frac{3}{x}$

d) $y = x^3\sin 2x \log x$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3\sin 2x\log x\right)$

$= \frac{d}{dx}\left(x^3\right).\sin 2x\log x + x^3\log x\frac{d}{dx}(\sin 2x)+x^3\sin 2x\frac{d}{dx}(\log x)$

$= 3x^2\sin 2x\log x + x^3\log x.\cos 2x.2 + x^3\sin 2x.\frac{1}{x}$

$= 3x^2\sin 2x\log x + 2x^3\log x.\cos 2x + x^2\sin 2x$

৩নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, f এটা অযুগ্ম ফলন।

$\therefore f(-x) = -f(x)$

$\therefore \frac{d}{dx}f(-x) = \frac{d}{dx}\{-f(x)\}$

$\Rightarrow f'(-x)\frac{d}{dx}(-x) = -f'(x)$

$\Rightarrow f'(-x).(-1) = -f'(x)$

$\Rightarrow -f'(-x) = -f'(x)$

$\Rightarrow f'(-x) = f'(x)$

$\therefore$ f এটা যুগ্ম ফলন।

৪নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, $y = \frac{1}{(x+p)(x+q)(x+t)}$

$\therefore \log y = \log\frac{1}{(x+p)(x+q)(x+t)}$

$\Rightarrow \log y = \log 1 - \log(x+p) - \log(x+q) - \log(x+t)$

$\therefore \frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}\left[-\log(x+p) - \log(x+q) - \log(x+t)\right]$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x+p} - \frac{1}{x+q} - \frac{1}{x+t}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y\left(\frac{1}{x+p} + \frac{1}{x+q} + \frac{1}{x+t}\right)$

$\therefore \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{(x+p)(x+q)(x+t)}\right] = -\frac{1}{(x+p)(x+q)(x+t)}\left(\frac{1}{x+p} + \frac{1}{x+q} + \frac{1}{x+r}\right)$

৫নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) $y = (\log x)^{\cos x}$

$\therefore \log y = \log (\log x)^{\cos x}$

$\Rightarrow \log y = \cos x.\log(\log x)$

$\therefore \frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}(\cos x.\log(\log x))$

$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = -\sin x.\log(\log x) + \cos x.\frac{1}{\log x}.\frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[\frac{\cos x}{x\log x} - \sin x\log(\log x)\right]$

$= (\log x)^{\cos x}\left[\frac{\cos x}{x\log x} - \sin x\log(\log x)\right]$

b) $y = (1+\cos x)^x$

$$\therefore \log y = \log(1+\cos x)^x$$

$$\Rightarrow \log y = x\log(1+\cos x)$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\log y) = \frac{d}{dx}\{x\log(1+\cos x)\}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1.\log(1+\cos x) + x.\frac{1}{1+\cos x}.(-\sin x)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\left[\log(1+\cos x) - \frac{x\sin x}{1+\cos x}\right]$$

$$= (1+\cos x)^x\left[\log(1+\cos x) - \frac{x\sin x}{1+\cos x}\right]$$

c) $y = \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}$

$$\Rightarrow \log y = \log\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \log y = \frac{1}{2}\left[\log(x^2+x+1) - \log(x^2-x+1)\right]$$

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2+x+1}(2x+1) - \frac{1}{x^2-x+1}(2x-1)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2}\left[\frac{(2x+1)(x^2-x+1) - (2x-1)(x^2+x+1)}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}\right]$$

$$= \frac{y}{2}\left[\frac{2x^3+x^2-2x^2-x+2x+1-2x^3+x^2-2x^2+x-2x+1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}\right]$$

$$= \frac{y}{2}\frac{-2x^2+2}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= y\frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}.\frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$

d) $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$

$\therefore \log y = \log(\sin x \sin 2x \sin 3x)$

$\Rightarrow \log y = \log \sin x + \log \sin 2x + \log \sin 3x$

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x}(\cos x) + \frac{1}{\sin 2x}(\cos 2x).2 + \frac{1}{\sin 3x}(\cos 3x).3$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y[\cot x + 2\cot 2x + 3\cot 3x]$$

$= \sin x \sin 2x \sin 3x (\cot x + 2\cot 2x + 3\cot 3x).$

৬নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $y = e^{x+e^{x+e^{x\ldots\ldots\infty}}}$

$\Rightarrow y = e^{x+y}$

$\therefore \log y = \log e^{x+y}$

$\Rightarrow \log y = x + y$

x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{y} - 1\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{1-y}{y}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{1-y}\right)$$

৭নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $x\sqrt{1+y} + y\sqrt{1+x} = 0$

$\Rightarrow x\sqrt{1+y} = -y\sqrt{1+x}$

$\therefore x^2(1+y) = y^2(1+x)$

$\Rightarrow x^2 - y^2 + x^2y - xy^2 = 0$

$\Rightarrow (x+y)(x-y) + xy(x-y) = 0$

$\Rightarrow (x-y)(x+y+xy) = 0$

$\Rightarrow x + y + xy = 0 \quad [\because x \neq y]$

$\Rightarrow y(1+x) = -x$

$$\Rightarrow y = -\frac{x}{1+x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1+x)}\right)$$

$$= \frac{-[(1+x).1-x.1]}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$= -(1+x)^{-2}$$

৮নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) দিয়া আছে, $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c\right) = 0$$

$$\Rightarrow a(2x) + 2h\left(1.y + x\frac{dy}{dx}\right) + b\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + 2g(1) + 2f\frac{dy}{dx} + 0 = 0$$

$$\Rightarrow 2ax + 2hy + 2hx\frac{dy}{dx} + 2by\frac{dy}{dx} + 2g + 2f\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}(hx + by + f) = -(ax + hy + g)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{ax + hy + g}{hx + by + f}$$

b) $x^n + y^n = a^n$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(x^n + y^n\right) = \frac{d}{dx}\left(a^n\right)$$

$$\Rightarrow nx^{n-1} + ny^{n-1}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow ny^{n-1}\frac{dy}{dx} = -nx^{n-1}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x^{n-1}}{y^{n-1}}$$

c) $\sqrt{x^2 + y^2} + \log\left(x^2 - y^2\right) = 0$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left\{\sqrt{x^2 + y^2} + \log\left(x^2 - y^2\right)\right\} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right) + \frac{1}{x^2 - y^2}\left(2x - 2y\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{x^2 - y^2} - \frac{2y}{x^2 - y^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{2y}{x^2-y^2}\right)=-\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{2x}{x^2-y^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}\left\{\frac{y\left(x^2-y^2-2\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\left(x^2-y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}}\right\}=-x\left\{\frac{x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}}{\left(x^2-y^2\right)\sqrt{x^2-y^2}}\right\}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{-x\left(x^2-y^2+2\sqrt{x^2+y^2}\right)}{y\left(x^2-y^2-2\sqrt{x^2+y^2}\right)}$$

৯নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) $\because x=a\cos^3\theta$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\left(a\cos^3\theta\right)=a.3\cos^2\theta\left(-\sin\theta\right)=-3a\cos^2\theta\sin\theta$$

আকৌ, $y = a\sin^3\theta$

$$\therefore \frac{dy}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\left(a\sin^3\theta\right)=a.3\sin^2\theta\left(\cos\theta\right)=3a\sin^2\theta\cos\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{3a\sin^2\theta\cos\theta}{-3a\cos^2\theta\sin\theta}=-\tan\theta$$

b) $\because x=\sqrt{1+t}$

$$\therefore \frac{dx}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{1+t}}$$

আকৌ, $y = \sqrt{1-t}$

$$\therefore \frac{dy}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{1-t}}(-1)=\frac{-1}{2\sqrt{1-t}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{-1}{2\sqrt{1-t}}.2\sqrt{1+t}=-\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$$

c) $\because x=e^t\left(\cos t-\sin t\right)$

$$\therefore \frac{dx}{dt}=e^t\left(\cos t-\sin t\right)+e^t\left(-\sin t-\cos t\right)$$

$$= e^t\left(\cos t-\sin t-\sin t-\cos t\right)$$

$$= -2e^t\sin t$$

আকৌ, $y = e^t(\cos t + \sin t)$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = e^t(\cos t + \sin t) + e^t(-\sin t + \cos t)$$

$= e^t(\cos t + \sin t - \sin t + \cos t)$

$= 2e^t \cos t$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2e^t \cos t}{-2e^t \sin t} = -\cot t.$$

১০নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, $u = e^{\sin^{-1}x}$ আৰু $v = \sin^{-1}x$

$$\therefore \frac{du}{dx} = e^{\sin^{-1}}x.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ আৰু } \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = e^{\sin^{-1}}x.\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \times \sqrt{1-x^2} = e^{\sin^{-1}}x$$

১১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, $u = \frac{x^2}{1+x^2}$ আৰু $v = x^2$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{(1+x^2).2x - x^2.2x}{(1+x^2)^2} = \frac{2x + 2x^3 - 2x^3}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

আৰু $\frac{dv}{dx} = 2x$

$$\therefore \frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{2x}{(1+x^2)^2} \times \frac{1}{2x} = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

১২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, $u = \log x + \sin x$ আৰু $v = e^x + \cos x$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} + \cos x = \frac{1 + x\cos x}{x}$$

আৰু $\frac{dv}{dx} = e^x - \sin x$

$$\therefore \frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{1 + x\cos x}{x(e^x - \sin x)}$$



৬.৭ অধিক জানিবলৈ

1) Gupta, Sudhir (2011) (1st edition): *Basics of Differentential Calculus*; New Delhi: Anmol publication Pvt. Ltd.
2) Habib, Amber (2011) (1st edition): *The Calculus of Finance*; Hyderabad: Universities Press India Pvt. Ltd.
3) Maron, I. A. (1993) (1st edition): *Problems in Calculus of One Variable*; New Delhi: CBS Publishers & Distributors Pvt. Ltd.
4) Sharma, A. K. (2004) (1st edition): *Text Book of Differential Calculus for B.A., B.Sc., B.Com., I.A.S., P.C.S.*; New Delhi: Discovery Publishing House.



৬.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ অধোলিখিতবোৰৰ x সাপেক্ষে অৱকলজ উলিয়াওক।

a) $(\sin x)^{\cos x}$ b) $(\tan x)^{\log x}$ c) $(\log x)^x + (\sin x)^{\sin x}$ d) $x^{\sin x} + (\sin x)^x$

প্ৰশ্ন ২ ঃ $\frac{dy}{dx}$ উলিয়াওক, যদি

a) $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$ b) $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$

c) $y = \log y^x$ d) $x^y - y = 0$

প্ৰশ্ন ৩ ঃ x সাপেক্ষে অৱকলজ উলিয়াওক।

a) $\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ b) $\frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ c) $\cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}$

d) $\tan^{-1}\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)^{\frac{1}{2}}$ e) $\tan^{-1}\frac{\cos x}{1+\sin x}$

f) $\log\left(x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right)$ g) $\left(a+bx^2\right)^{1/2}$

প্ৰশ্ন ৪ ঃ x সাপেক্ষে $\sin[\cos(\tan x)]$-ৰ অৱকল সহগ উলিয়াওক।

প্ৰশ্ন ৫ ঃ যদি $y = \frac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}} + \log\sqrt{1-x^2}$, প্ৰমাণ কৰক যে $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^{-1}x}{\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

প্ৰশ্ন ৬ ঃ যদি $\tan y = \frac{2t}{1-t^2}$ আৰু $\sin x = \frac{2t}{1-t^2}$, প্ৰমাণ কৰক যে $\frac{dy}{dx} = 1$.

*** ***** ***

অধ্যায় ৭ ঃ অনির্ণেয় ৰূপ

অধ্যায় গাঁথনি

৭.১ উদ্দেশ্য
৭.২ পৰিচয়
৭.৩ অনির্ণেয় ৰূপ
৭.৪ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
৭.৫ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
৭.৬ অধিক জানিবলৈ
৭.৭ আৰ্হি প্রশ্ন

৭.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- অনির্ণেয় ৰূপ $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty, -\infty, 1^{\infty}, 0.\infty, 0^{\infty}$ ইত্যাদিৰ সীমা নির্ণয় কৰিব পাৰিব।

৭.২ পৰিচয়

এই অধ্যায়টোত আকৌ আমি এটা নির্দিষ্ট বিন্দুত এটা ফলনৰ লৱ আৰু হৰ শূন্যৰ ওচৰলৈ গ'লে কেনে প্রকৃতি হয় সেই বিষয়ে আলোচনা কৰিম (অনির্ণেয় ৰূপ)। কেইটামান অনির্ণেয় ৰূপ হ'ল, $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty, -\infty, 1^{\infty}, 0.\infty, 0^{\infty}$ ইত্যাদি।

৭.৩ অনির্ণেয় ৰূপ

দ্বিতীয় অধ্যায়ত আমি পাইছোঁ যে, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ যদিহে $\lim_{x\to a} g(x)$ আৰু $\lim_{x\to a} f(x)$ স্থিত হয় আৰু $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

কিন্তু যদি $\lim_{x\to a} f(x) = 0 = \lim_{x\to a} g(x)$, তেনেহ'লে $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ এ $\frac{0}{0}$. অনির্ণেয় ৰূপ (Indeterminate Form) পৰিগ্রহ কৰে। অন্য অনির্ণেয় ৰূপ হ'ল $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0.\infty$, 0^{0}, ∞°, 1^{∞}.

লা' হ'পিটেলৰ বিধি ঃ

1) যদি $f(a) = g(a) = 0$, $f'(x)$ আৰু a-ৰ সমীপত (aত নহ'বও পাৰে) $f'(x)$ আৰু $g'(x)$ স্থিত হয়, তেনেহ'লে $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

2) f আৰু g ফলন দুটাৰ ক্ষেত্ৰত যদি $x \to \infty$ হ'লে $f(x) \to \infty$, $x \to \infty$ হ'লে $g(x) \to \infty$, তেনেহ'লে $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

টোকা ঃ $0.\infty$ আৰু $\infty - \infty$ আকাৰৰ অনির্ণেয় ৰূপ $\frac{0}{0}$ বা $\frac{\infty}{\infty}$ আকাৰৰ ভাগফললৈ ৰূপান্তৰ কৰি আৰু পিছত লা' হ'পিটেলৰ বিধি প্ৰয়োগ কৰি নির্ণয় কৰিব পাৰি।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1: নির্ণয় কৰক ঃ $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ $\left[\frac{0}{0} \text{ ৰূপ}\right]$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$ $\left[\frac{0}{0} \text{ ৰূপ}\right]$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{6x}$ $\left[\frac{0}{0} \text{ ৰূপ}\right]$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}$

উদাহৰণ 2: নির্ণয় কৰক ঃ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2\log(1+x)}{x \sin x}$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2\log(1+x)}{x \sin x}$ $\left[\frac{0}{0} \text{ ৰূপ}\right]$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - \frac{2}{1+x}}{\sin x + x\cos x}$ $\left[\frac{0}{0} \text{ ৰূপ}\right]$

$= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} + \frac{2}{(1+x)^2}}{\cos x + \cos x - x\sin x}$

$= \frac{1 - 1 + 2}{1 + 1 - 0} = 1$

উদাহৰণ 3: নির্ণয় কৰক ঃ $\lim_{x\to 0}\frac{\log\tan 7x}{\log\tan 2x}$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0}\frac{\log\tan 7x}{\log\tan 2x}$ $\left[\frac{\infty}{\infty}\text{ ৰূপ}\right]$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\tan 7x}.\sec^2 7x.7}{\frac{1}{\tan 2x}.\sec^2 2x.2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{7\sec^2 7x}{2\sec^2 2x}.\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan 7x}$$

$$= \frac{7}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan 7x} \qquad \left[\frac{0}{0}\text{ ৰূপ}\right]$$

$$= \frac{7}{2}.\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 2x}{7\sec^2 7x}$$

$$= \frac{7}{2}.\frac{2}{7} = 1$$

উদাহৰণ 4: a আৰু b উলিয়াওক, যদি $\lim_{x\to 0}\frac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3}=1$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0}\frac{x(1+a\cos x)-b\sin x}{x^3}$ $\left[\frac{0}{0}\text{ ৰূপ}\right]$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+a\cos x+x(-a\sin x)-b\cos x}{3x^2}$$

$\because x\to 0$ হ'লে হৰ $\to 0$ আৰু সীমাটোৰ মান সসীম,

$\therefore x\to 0$ হ'লে লৱ $\to 0$

$\Rightarrow 1 + a - b = 0$ .....(1)

এতিয়া,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+a\cos x-ax\sin x-b\cos x}{3x^2} \qquad \left[\frac{0}{0}\text{ ৰূপ}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2a\sin x-ax\cos x+b\sin x}{6x} \qquad \left[\frac{0}{0}\text{ ৰূপ}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2a\cos x-a\cos x+ax\sin x+b\cos x}{6}$$

$$= \frac{-2a-a+b}{6}$$

= 1 (দিয়া আছে)

$\therefore -3a + b = 6$

$\Rightarrow -3a+1+a = 6$, (1)-ৰ সহায়ত

$\Rightarrow -2a = 5$

$\Rightarrow a = -\frac{5}{2}$

$\therefore (1) \Rightarrow b = 1 + a = 1 - \frac{5}{2} = -\frac{3}{2}$

উদাহৰণ 5: মান নিৰ্ণয় কৰক ঃ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cot x}{x}\right)$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cot x}{x}\right)$ $[\infty - \infty$ ৰূপ$]$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^2 \sin x} \quad \left[\frac{0}{0} \text{ ৰূপ}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} \quad \left[\frac{0}{0} \text{ ৰূপ}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos x + x\sin x}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x} \quad \left[\frac{0}{0} \text{ ৰূপ}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{3} = \frac{1}{3}$$

উদাহৰণ 6: মান নিৰ্ণয় কৰক ঃ $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 1}(1-x)\tan\frac{\pi x}{2}$ $[0.\infty$ ৰূপ$]$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-(1-x)}{\cot\frac{\pi x}{2}} \quad \left[\frac{0}{0} \text{ ৰূপ}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{-1}{-\operatorname{cosec}^2\frac{\pi x}{2}\cdot\frac{\pi}{2}}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{2}{\pi}\sin^2\frac{\pi x}{2} = \frac{2}{\pi}$$

উদাহৰণ 7: মান নির্ণয় কৰক ঃ $\lim_{x\to 0} x\log x$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0} x\log x$ $[0.\infty$ ৰূপ$]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \qquad \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ ৰূপ}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0} (-x) = 0$$

উদাহৰণ 8: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)$ $[\infty-\infty$ ৰূপ$]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ ৰূপ}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{xe^x+e^x-1} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ ৰূপ}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{xe^x+e^x+e^x}$$

$$= \frac{-1}{0+1+1} = -\frac{1}{2}$$

উদাহৰণ 9: মান নির্ণয় কৰক ঃ $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\log(1+x)\right]$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\log(1+x)\right]$ $[\infty-\infty$ ৰূপ$]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x-\log(1+x)}{x^2} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ ৰূপ}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+x-1}{2x(1+x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2}$$

উদাহৰণ 10: মান নির্ণয় কৰক ঃ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x - \tan x)$

সমাধান ঃ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec - \tan x)$ $[\infty - \infty$ ৰূপ$]$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1-\sin x}{\cos x}\right) \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ ৰূপ}\right]$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{-\cos x}{-\sin x}\right)$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\cot x$$

$$= 0$$

0^0, 1^∞ আৰু ∞^0 অনির্ণেয় ৰূপঃ উপৰিউক্ত ৰূপৰ সূচকীয় ৰাশিৰ সীমা নির্ণয় কৰিবলৈ ৰাশিটোৰ ঘাতাঙ্ক লোৱা হয় আৰু পিছত ইয়াক $\frac{0}{0}$ বা $\frac{\infty}{\infty}$ ৰূপত প্রকাশ কৰা হয়।

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ 1: মান নির্ণয় কৰক ঃ $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}}$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সীমাটো 1^∞ ৰূপত আছে।

ধৰা হ'ল, $f(x) = x^{\frac{1}{x-1}}$

$$\therefore \log f(x) = \frac{1}{x-1}\log x$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\log f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ ৰূপ}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = e^1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e$$

উদাহৰণ 2: মান নির্ণয় কৰক ঃ $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সীমাটো 1^∞ ৰূপত আছে।

ধৰা হ'ল, $y = (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

$$\therefore \log y = \frac{1}{x^2}\log(\cos x)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \log y = \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ রূপ}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\tan x}{2x} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ রূপ}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sec^2 x}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} y = e^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

উদাহৰণ 3: মান নির্ণয় কৰক ঃ $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সীমাটো 1^{∞} রূপত আছে।

ধৰা হ'ল, $y = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \quad \therefore \log y = \frac{1}{x}\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \log y = \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{x} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ রূপ}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\sin x}\,\frac{x\cos x - \sin x}{x^2}}{1}$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ রূপ}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2} = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} y = e^{0} \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = 1$$

উদাহৰণ 4: মান নির্ণয় কৰক ঃ $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x}$

সমাধান ঃ প্রদত্ত সীমাটো 1^{∞} ৰূপত আছে।

ধৰা হ'ল, $y = (\tan x)^{\tan 2x}$

$\therefore \log y = \tan 2x . \log(\tan x)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \log y = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \tan 2x . \log(\tan x) \qquad [\infty . 0 \text{ ৰূপ}]$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\log(\tan x)}{\cot 2x} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ ৰূপ}\right]$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\tan x}.\sec^2 x}{-\operatorname{cosec}^2 2x.2}$$

$$= \frac{1.(\sqrt{2})^2}{-2.1}$$

$$= -1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} y = e^{-1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} (\tan x)^{\tan 2x} = \frac{1}{e}$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন ১ ঃ অধোলিখিতবোৰ নির্ণয় কৰক।

a) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x^3}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\log(1+x)}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{\log(1+bx)}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x-\log(1+x)}{x^2}$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{5\sin x-7\sin 2x+3\sin 3x}{\tan x-x}$

প্রশ্ন ২ ঃ যদি $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x+a\sin x}{x^2}$ সসীম, a-ৰ মান আৰু সীমাটো উলিয়াওক।

প্ৰশ্ন ৩ ঃ অধোলিখিতবোৰ নিৰ্ণয় কৰক।

a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\tan x$

b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$

c) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

d) $\lim_{x\to 0}x^{x}$

e) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

f) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$

g) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$



৭.৪ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- যদি $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{0}{0}$ বা $\frac{\infty}{\infty}$ ৰূপত থাকে আৰু $\lim_{x\to a}f(x)$ আৰু $\lim_{x\to a}g(x)$ স্থিত হয়,

  তেনেহ'লে $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

  চৰ্ত প্ৰযোজ্য হ'লে এই প্ৰক্ৰিয়াটো যিকোনো সংখ্যকবাৰ প্ৰয়োগ কৰিব পাৰি।
- সৰলীকৰণ কৰি $\infty-\infty$ ৰূপৰ সীমাক $\frac{0}{0}$ বা $\frac{\infty}{\infty}$ ৰূপলৈ নিব পাৰি।
- যদি সীমাই 0^{0}, 1^{∞}, ∞^{0} ৰূপ লয়, তেনেহ'লে ঘাতাঙ্ক লৈ ইয়াক $\frac{0}{0}$ বা $\frac{\infty}{\infty}$ ৰূপলৈ নিব পাৰি।

৭.৫ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^{2}}$ $\left[\frac{0}{0}\text{ ৰূপ}\right]$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}$ $\left[\frac{0}{0}\text{ ৰূপ}\right]$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}$

$=\frac{1}{6}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$ $\left[\frac{0}{0}\text{ রূপ}\right]$

$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$ $\left[\frac{0}{0}\text{ রূপ}\right]$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}$ $\left[\frac{0}{0}\text{ রূপ}\right]$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\log(1+x)}$ $\left[\frac{0}{0}\text{ রূপ}\right]$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\log(1+x)+\frac{x}{1+x}}$ $\left[\frac{0}{0}\text{ রূপ}\right]$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{\frac{1}{1+x}+\frac{1.(1+x)-x.1}{(1+x)^2}}$

$=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{\log(1+bx)}$ $\left[\frac{0}{0}\text{ রূপ}\right]$

$=\lim_{x\to 0}\frac{ae^{ax}+ae^{-ax}}{\frac{1}{1+bx}.b}$

$=\frac{a+a}{b}=\frac{2a}{b}$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\log(1+x)}{x^2}$ $\left[\frac{0}{0}\text{ রূপ}\right]$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\frac{1}{1+x}}{2x}$ $\left[\frac{0}{0}\text{ রূপ}\right]$

$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x-\sin x-x\cos x+\frac{1}{(1+x)^2}}{2}$

$=\frac{1}{2}$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\sin x-7\sin 2x+3\sin 3x}{\tan x-x}$ $\left[\dfrac{0}{0}\text{ ৰূপ}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\cos x-14\cos 2x+9\cos 3x}{\sec^2 x-1}$ $\left[\dfrac{0}{0}\text{ ৰূপ}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-5\sin x+28\sin 2x-27\sin 3x}{2\sec x.\sec x\tan x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{-5\sin x+28\sin 2x-27\sin 3x}{2\sec^2 x.x}.\dfrac{x}{\tan x}\right]$

$=\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-5\sin x+28\sin 2x-27\sin 3x}{2x\sec^2 x}\right)\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\tan x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-5\sin x+28\sin 2x-27\sin 3x}{2x\sec^2 x}$ $\left[\dfrac{0}{0}\text{ ৰূপ}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-5\cos x+56\cos 2x-81\cos 3x}{2\sec^2 x+2x.2\sec x.\sec x\tan x}$

$=\dfrac{-5+56-81}{2}$

$=-15$

২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+a\sin x}{x^2}$ $\left[\dfrac{0}{0}\text{ ৰূপ}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 2x+a\cos x}{2x}$

$\because x\to 0$ হ'লে হৰ $\to 0$ আৰু সীমাটোৰ মান সসীম,

$\therefore x\to 0$ হ'লে লৱ $\to 0$

$\Rightarrow 2+a=0$

$\therefore a=-2$

$\therefore$ প্ৰদত্ত সীমাটো।

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 2x-2\cos x}{2x}$ $\left[\dfrac{0}{0}\text{ ৰূপ}\right]$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-4\sin 2x+2\sin x}{2}$

$=0$

৩নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (1-\sin x)\tan x$ $[0.\infty$ ৰূপ$]$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\cot x} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ ৰূপ}\right]$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x}{-\operatorname{cosec}^2 x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin^2 x.\cos x = 0$$

b) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$ $[\infty-\infty$ ৰূপ$]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\sin x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x - x}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x}\right)$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^2}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^2} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ ৰূপ}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{2x} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ ৰূপ}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2}$$

$$= 0$$

c) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$. প্ৰদত্ত সীমাটো 1^{∞} ৰূপত আছে।

Let $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$

$$\therefore \log y = \frac{1}{x}\log(1+x)$$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\log y = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ ৰূপ}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} y = e^1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

d) $\lim_{x\to 0} x^x$. প্ৰদত্ত সীমাটো 0^o ৰূপত আছে।

Let $y = x^x$

$\Rightarrow \log y = x\log x$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \log y = \lim_{x\to 0} x \log x$ $[0.\infty$ ৰূপ$]$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}}$ $\left[\frac{\infty}{\infty} \text{ ৰূপ}\right]$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \log y = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$

$= \lim_{x\to 0} -x = 0$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} y = e^o$

$\Rightarrow \lim_{x\to 0} x^x = 1$

e) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$. প্ৰদত্ত সীমাটো 1^∞ ৰূপত আছে।

ধৰা হ'ল, $y = \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

$\therefore \log y = \frac{1}{x}\log\left(\frac{\tan x}{x}\right)$

$\therefore \lim_{x\to 0} \log y = \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{\tan x}{x}\right)}{x}$ $\left[\frac{0}{0} \text{ ৰূপ}\right]$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\tan x}\cdot\frac{x\sec^2 x - \tan x.1}{x^2}}{1}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2}$ $\left(\because \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x} = 1\right)$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2x\sec^2 x\tan x + \sec^2 x - \sec^2 x}{2x}$

$= \lim_{x\to 0} \sec^2 x \tan x = 0$

$\therefore \lim_{x\to 0} y = e^o \Rightarrow \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1$

f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$. প্ৰদত্ত সীমাটো 0^0 ৰূপত আছে।

ধৰা হ'ল, $y = (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x} \Rightarrow \log y = \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\log(\cos x)$

$\therefore \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\log y) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)\log(\cos x)$ $[0.\infty$ ৰূপ$]$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\log(\cos x)}{\frac{1}{\frac{\pi}{2}-x}} \qquad \left[\frac{\infty}{\infty} \text{ ৰূপ}\right]$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos x}(-\sin x)}{\frac{-1}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}(-1)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2(-\tan x) = 0$$

$\therefore \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} y = e^0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x} = 1$

g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$. প্ৰদত্ত সীমাটো 1^∞ ৰূপত আছে।

ধৰা হ'ল, $y = \left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}}$

$\therefore \log y = \frac{1}{x}\log\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} \log y = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(2x+1)-\log(x+1)}{x} \qquad \left[\frac{0}{0} \text{ ৰূপ}\right]$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{x+1}}{1}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{2x+1}-\frac{1}{x+1}\right) = 2-1 = 1$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} y = e^1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^{\frac{1}{x}} = e$



৭.৬ অধিক জানিবলৈ

1) Gupta, Sudhir (2011) (1st edition): *Basics of Differentential Calculus*; New Delhi: Anmol publication Pvt. Ltd.
2) Habib, Amber (2011) (1st edition): *The Calculus of Finance*; Hyderabad: Universities Press India Pvt. Ltd.
3) Maron, I. A. (1993) (1st edition): *Problems in Calculus of One Variable*; New Delhi: CBS Publishers & Distributors Pvt. Ltd.
4) Sharma, A. K. (2004) (1st edition): *Text Book of Differential Calculus for B.A., B.Sc., B.Com., I.A.S., P.C.S.*; New Delhi: Discovery Publishing House.



৭.৭ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক ঃ

a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

c) $\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x - \cos x + \log(1-x)}{x\tan^2 x}$

d) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2 - \sin^2 x}{x^4}$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x - b^x}{x}$

f) $\lim_{x\to 0}\frac{\log x}{\cos ecx}$

g) $\lim_{x\to 0}\cot x \log\frac{1+x}{1-x}$

*** ***** ***