অধ্যায় ২ ঃ নিশ্চিত অনুকলন (REDUCTION FORMULAE)

অধ্যায় গাঁথনি

২.১ উদ্দেশ্য
২.২ পৰিচয়
২.৩ নিশ্চিত অনুকল-যোগফলৰ সীমা হিচাপে অনুকলন
২.৪ অনুকলনৰ মৌলিক উপপাদ্য
২.৫ অনুকলনৰ সহায়ত শ্রেণীৰ যোগফল
২.৬ ধর্মৰ সহায়ত নিশ্চিত অনুকল নির্ণয়
২.৮ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
২.৯ অধিক জানিবলৈ
২.১০ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
২.১১ আৰ্হি প্রশ্ন

২.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- যোগফলৰ চৰম মান হিচাপে নিশ্চিত অনুকলনৰ অর্থ বুজিব পাৰিব
- অনুকলনৰ মৌলিক উপপাদ্য বুজিব পাৰিব
- নিশ্চিত অনুকলনৰ মান নির্ধাৰণ কৰিব পাৰিব
- কিছুমান শ্রেণীৰ যোগফলৰ চৰম মান নিশ্চিত অনুকল হিচাপে প্রকাশ কৰি মান নির্ধাৰণ কৰিব পাৰিব
- নিশ্চিত অনুকলনৰ ধর্ম বুজিব পাৰিব।

২.২ পৰিচয়

আগৰ অধ্যায়ত আমি অৱকলনৰ বিপৰীত প্রক্রিয়া হিচাপে অনুকলন চর্চা কৰিছোঁ। এই অধ্যায়ত আমি যোগফলৰ চৰম মান হিচাপে অনুকলন আলোচনা কৰিম।

২.৩ নিশ্চিত অনুকলন যোগফলৰ সীমা হিচাপে অনুকলন

ধৰা হ'ল $[a, b]$ অন্তৰালত f এটা পৰিৱদ্ধ ফলন। $a = x_0, x_1, x_2,.....,x_{r-1}, x_r,..., x_{n-1}, x_n = b$ বিন্দুসমূহৰ দ্বাৰা $[a, b]$ অন্তৰালক সসীম সংখ্যক উপ অন্তৰালত ভাগ কৰা হ'ল। ইয়াত $x_0<x_1<x_2<... ... ...<x_{r-1}<x_r<... ... ...<x_{n-1}<x_n$ উপ অন্তৰালবোৰৰ দৈর্ঘ সমান নহ'বও পাৰে।

এই ভাগসমূহক অন্তৰালটোৰ বিভাজন (partition) বুলি কোৱা হয়।

ধৰা হ'ল $\Delta x_r = x_r - x_{r-1}$

তেনেহ'লে $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots\ldots\ldots$, $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ হ'ল $[a, b]$ ৰ উপ অন্তৰালসমূহ। ধৰা হ'ল উপ অন্তৰালসমূহত ক্ৰমে $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots, \xi_r, \ldots\ldots, \xi_n$ স্বেচ্ছ বিন্দু। এনেদৰে লোৱা বিন্দুসমূহ উপ অন্তৰালবোৰৰ প্ৰান্ত বিন্দুও হ'ব পাৰে, বা ভিতৰৰ বিন্দুও হ'ব পাৰে। গতিকে আমি পালোঁ।

$x_0 \le \xi_1 \le x_1$, $x_1 \le \xi_2 \le x_2, \ldots\ldots\ldots$ আৰু এইদৰে হৈ থাকিব।

এতিয়া তলৰ যোগফলটো গঠন কৰা হ'ল

$$S_n = \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\Delta x_r$$
$$= f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots\ldots\ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

পৃথক বিভাজন আৰু উপ অন্তৰালবোৰত বিন্দু লোৱাৰ পৃথক উপায় অনুৰূপে S_n অৰ মানবোৰ বিভিন্ন হ'ব।

এতিয়া n অক অসীমভাৱে এনেদৰে বুজোৱা হ'ল যাতে উপ অন্তৰালসমূহৰ সবাতোকৈ ডাঙৰটোৰ দৈর্ঘ শূন্যৰ ওচৰলৈ যায়।

এতিয়া $n \to \infty$ হ'লে আৰু প্ৰত্যেক $\Delta x_r \to 0$ (r = 1, 2, 3,... ... ..., n) হ'লে যদি S_n অৰ এটা সীমা থাকে আৰু সম্ভাব্য সকলো বিভাজনৰ বাবে সীমাটো একে হয়, তেনেহ'লে এই সীমাটোক a ৰ পৰা b লৈ $f(x)$ অৰ নিশ্চিত অনুকল বুলি কোৱা হয়। এই নিশ্চিত অনুকলক $\int_a^b f(x)dx$ ৰে বুজোৱা হয়।

ইয়াত $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}(S_n)$

$$= \lim_{\Delta x_r \to 0} \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\Delta x_r \qquad ..(I)$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots\ldots\ldots + f(\xi_n)\Delta x_n\right]$$

যদি S_n অৰ সীমা থাকে, তেনেহ'লে $[a, b]$ অন্তৰালত $f(x)$ অনুকলনীয় বুলি কোৱা হয়। a আৰু b সংখ্যা দুটাক যথাক্ৰমে অনুকলটোৰ উচ্চ সীমা আৰু নিম্ন সীমা বুলি কোৱা হয় আৰু $f(x)$ অক অনুকুল্য (integrand) বুলি কোৱা হয়।

টোকা 1 : ধৰা হ'ল প্ৰত্যেক উপ অন্তৰালৰ দৈর্ঘ্য সমান আৰু দৈর্ঘ্য = h.

$\therefore \Delta x_1 = \Delta x_2 = \ldots = \Delta x_n (= h)$.

তদুপৰি, আমি প্ৰত্যেক উপ অন্তৰালৰ সোঁহাতৰ প্ৰান্ত বিন্দুবোৰ $\xi_1, \xi_2, \ldots\ldots\ldots\xi_n$ হিচাপে লওঁ।

অৰ্থাৎ $\xi_1 = x_1 = x_0 + h = a + h$

$\xi_2 = x_2 = (a + h) + h = a + 2h$

এইদৰে হৈ থাকিব

শেষত $\xi_n = x_n = b = a + nh$

আকৌ $b = a + nh$ অৰ পৰা আমি পাওঁ $n = \dfrac{b-a}{h}$

ইয়াৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে $n \to \infty$ হ'লে $h \to 0$.

$\therefore$ (1) অৰ পৰা আমি পালোঁ

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[hf(a+h) + hf(a+2h) + \ldots\ldots\ldots + hf(a+nh)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh)$$

টোকা 2: যদি আমি উপ অন্তৰালবোৰৰ বাওঁহাতৰ প্ৰান্তবিন্দুবোৰ $\xi_1, \xi_2, \ldots\ \ldots\ \ldots \xi_n$ হিচাপে লওঁ,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh)$$

ব্যাখ্যাকাৰী উদাহৰণ

উদাহৰণ 1 ঃ সমষ্টিৰ চৰম মান হিচাপে প্ৰকাশ কৰি $\int_0^1 x^2 dx$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ইয়াত $a = 0$, $b = 1$ আৰু $f(x) = x^2$

$\therefore b = a + nh \Rightarrow 1 = nh$

আকৌ $f(a+rh) = (a+rh)^2 = (rh)^2$ য'ত $r = 1,2,3,\ldots\ldots\ldots n$

এতিয়া $\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh)$

$$\Rightarrow \int_0^1 x^2 dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} (rh)^2$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left\{(h)^2 + (2h)^2 + (3h)^2 + \ldots\ldots\ldots + (nh)^2\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} h^3\left\{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots\ldots + n^2\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} h^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{h\to 0} \frac{nh(nh+h)(2nh+h)}{6}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)(2+h)}{6}$$

$$= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

উদাহৰণ 2 ঃ সংজ্ঞাৰ পৰা $\int_a^b e^x\,dx$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ইয়াত $f(x)=e^x$ আৰু $b=a+nh$

$\therefore nh=b-a$ আৰু সেইবাবে $h\to 0$ হ'লে $n\to\infty$.

$$\therefore \int_a^b e^x dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=0}^{n-1} f(a+rh)$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left\{e^a + e^{a+h} + e^{a+2h} + \ldots\ldots\ldots + e^{a+(n-1)h}\right\}$$

$$= \lim_{h\to 0} h e^a\left(1+e^h + e^{2h} + \ldots\ldots\ldots + e^{(n-1)h}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} h e^a \frac{\left(e^h\right)^n - 1}{e^h - 1}$$

$$= \lim_{h\to 0} h e^a \frac{e^{nh} - 1}{e^h - 1}$$

$$= \lim_{h\to 0} h e^a \frac{e^{b-a} - 1}{e^h - 1}$$

$$= e^a\left(e^{b-a} - 1\right).\lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h - 1} \qquad \left(\text{যিহেতু } \lim_{h\to 0}\frac{e^h - 1}{h} = 1\right)$$

$$= \left(e^b - e^a\right)\times\frac{1}{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h - 1}{h}}$$

$$= e^b - e^a$$

২.৪ অনুকলনৰ মৌলিক উপপাদ্য

যদি (i) $\int_a^b f(x)dx$ থাকে আৰু (ii) এটা ফলন $\phi(x)$ থাকে যাতে সকলো $x\in[a,b]$ ৰ বাবে $\phi'(x)=f(x)$, তেনেহ'লে $\int_a^b f(x)dx = \phi(b)-\phi(a)$

প্ৰমাণ ঃ আগৰ আলোচনাৰ পৰা, আমি লিখিব পাৰোঁ

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_r\to 0}\sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\Delta x_r \quad \ldots (1)$$

এতিয়া $\phi(x)$ এ মাধ্যমান উপপাদ্যৰ সকলোবোৰ চর্ত সিদ্ধ কৰে। গতিকে $x_{r-1} < \alpha_r < x_r$ সিদ্ধ কৰাকৈ এটা বিন্দু আছে যাতে

$$\phi(x_r) - \phi(x_{r-1}) = (x_r - x_{r-1})\phi'(\alpha_r)$$
$$= \Delta x_r . f(\alpha_r) \quad ...(2)$$

যিহেতু ξ_r অৰ প্ৰত্যেক বাছনিৰ বাবে (1) প্ৰযোজ্য, গতিকে $\xi_r = \alpha_r$ লৈ (1) আৰু (2)ৰ পৰা আমি পাওঁ

$$\sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\Delta x_r = \sum_{r=1}^{n} \{\phi(x_r) - \phi(x_{r-1})\} = \phi(b) - \phi(a)$$

আৰু ইয়াৰ পৰা

$$\lim_{\Delta x_r \to 0} \sum_{r=1}^{n} f(\xi_r)\Delta x_r = \int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$$

অৰ্থাৎ $\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$ প্ৰমাণিত হ'ল।

টোকা ঃ যদি f(x) অৰ $F(x)$ এটা অনুকল হয়, তেনেহ'লে

$$\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a).$$

ইয়াত আমি অনুকলন ধ্ৰুৱক C নিলিখোঁ। কিয়নো যদি F(x) অৰ সলনি $F(x) + C$ ক আমি $f(x)$ অৰ এটা অনুকল হিচাপে লওঁ, তেনেহ'লে

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x) + C]_a^b = \{F(b) + C\} - \{F(a) + c\}$$
$$= F(b) - F(a)$$

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ

উদাহৰণ 1 ঃ $\int_0^1 (3x^2 + x - 9)dx$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি পোনতে $\int (3x^2 + x - 9)dx$ নিৰ্ধাৰণ কৰোঁ।

উচ্চ আৰু নিম্ন সীমা বহুৰাই আমি পাওঁ

$$\int_0^1 (3x^2 + x - 9)dx = \left[3.\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 9x\right]_0$$

$$= (1)^3 + \frac{(1)^2}{2} - 9(1)$$

$$= -15/2$$

উদাহৰণ 2 ঃ $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)dx$

$$= \frac{1}{2}\left[x - \frac{\sin 2x}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\sin \pi}{2} \right) - \frac{1}{2}\left(0 - \frac{\sin 0}{2} \right)$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

উদাহৰণ 3 ঃ $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $\sin x = t$

$$\therefore \cos x \, dx = dt$$

আকৌ $x = 0$ হ'লে $t = 0$

আৰু $x = \pi/2$ হ'লে $t = 1$

$$\therefore \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{(1+\sin x)(2+\sin x)} = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)(2+t)}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{2+t} \right) dt \text{ (আংশিক ভগ্নাংশত ভাঙি)}$$

$$= \left[\log(1+t) - \log(2+t) \right]_0^1$$

$$= (\log 2 - \log 3) - (\log 1 - \log 2)$$

$$= 2\log 2 - \log 3 = \log 4/3$$

উদাহৰণ 4 ঃ $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4 + 5\sin x}$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4 + 5\sin x}$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4\left(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2} \right) + 5\left(2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} \right)}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 \frac{x}{2} dx}{4\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) + 10\tan x/2}$$

$$= \int_0^1 \frac{2dt}{4\left(1+t^2\right)+10t} \qquad \text{(ধৰা হ'ল } \tan\frac{x}{2} = t \text{)}$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{2t^2+5t+2} = \int_0^1 \frac{dt}{2\left(t^2+\frac{5}{2}t+1\right)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dt}{\left(t+\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2.\frac{3}{4}}\log\frac{\left(t+\frac{5}{4}\right)-\frac{3}{4}}{\left(t+\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{4}}\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left[\log\left(\frac{2t+1}{2t+4}\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\left(\log\frac{3}{6}-\log\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3}\log 2$$

২.৫ অনুকলনৰ সহায়ত শ্ৰেণীৰ যোগফল

আমি ইতিমধ্যে পাইছো যে

$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} f(a+rh)$ য'ত $b = a+nh$

এতিয়া, যদি $a = 0$ আৰু $b = 1$, তেনেহ'লে

$$\int_0^1 f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\sum_{r=1}^{n} f(rh) \qquad \ldots \text{(i)}$$

$\therefore b = a+nh$ হ'বগৈ $1 = nh$ অৰ্থাৎ $h = \frac{1}{n}$. গতিকে $h \to 0$ হ'লে $n \to \infty$.

$\therefore$ (i) অৰ পৰা আমি পাম

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) = \int_0^1 f(x)dx$$

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ

উদাহৰণ 1 ঃ $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2}+\frac{n}{1^2+n^2}+\frac{n}{2^2+n^2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{n}{(n-1)^2+n^2}\right]$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ইয়াত $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{n^2}+\frac{n}{1^2+n^2}+\frac{n}{2^2+n^2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{n}{(n-1)^2+n^2}\right]$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{n^2}{0^2+n^2} + \frac{n^2}{1^2+n^2} + \frac{n^2}{2^2+n^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{n^2}{(n-1)^2+n^2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\frac{1}{\left(\frac{0}{n}\right)^2+1} + \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\right)^2+1} + \frac{1}{\left(\frac{2}{n}\right)^2+1} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^2+1}\right]$$

(লব আৰু হৰ উভয়কে n^2 এৰে হৰণ কৰি)

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{1+\left(\frac{r}{n}\right)^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \left[\tan^{-1} x\right]_0^1 = \tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \pi/4$$

উদাহৰণ 2 ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক $\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\ldots\ldots\ldots\left(1+\frac{4}{n}\right)\right\}^{1/n}$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $P= \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\ldots\ldots\ldots\left(1+\frac{4}{n}\right)\right\}^{1/n}$

$$\therefore \log P = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\log\left(1+\frac{1}{n}\right) + \log\left(1+\frac{2}{n}\right) + \ldots\ldots\ldots + \log\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} \log\left(1+\frac{r}{n}\right)$$

$$= \int_0^1 \log(1+x)\,dx$$

$$= \left[x\log(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x}.x\,dx$$

$$= \log 2 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x}\right)dx$$

$$= \log 2 - \left[x - \log(1+x)\right]_0^1 = \log 2 - (1 - \log 2)$$

$$= 2\log 2 - 1 = \log 4 - \log e = \log\left(4/e\right)$$

$$\therefore P = 4/e$$



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ১

প্ৰশ্ন নং ১ ঃ সমষ্টি এটাৰ সীমা হিচাপে প্ৰকাশ কৰি তলৰ অনুকলবোৰৰ মান নিৰ্ধাৰণ কৰক।

(i) $\int_a^b x\,dx$ (ii) $\int_0^1 x\,dx$ (iii) $\int_a^b x^2\,dx$

(iv) $\int_0^1 x^3\,dx$ (v) $\int_0^1 (ax+b)\,dx$

প্ৰশ্ন নং ২ ঃ তলৰ অনুকলবোৰৰ মান নিৰ্ধাৰণ কৰক।

(i) $\int_0^1 xe^x\,dx$ (ii) $\int_0^1 x^2e^x\,dx$ (iii) $\int_0^{\pi/2} \sin 2x\,dx$ (iv) $\int_0^1 xe^{x^2}\,dx$

(v) $\int_0^1 \sin^{-1} x\,dx$ (vi) $\int_0^{\pi/2} x\sin x\,dx$ (vii) $\int_0^{\sqrt{e}} x\log x\,dx$

(viii) $\int_0^{\pi/2} x^3\sin x\,dx$

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ মান নিৰ্ধাৰণ কৰক।

(i) $\int_0^{\pi/2} \cos 3\theta\cos 2\theta\,d\theta$ (ii) $\int_a^b \frac{1}{x}\log x\,dx$

(iii) $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$ (iv) $\int_0^2 \sqrt{2x-2^2}\,dx$

(v) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$ (vi) $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-2}}$ (vii) $\int_1^e \frac{dx}{x(1+\log x)}$

(viii) $\int_1^{\log 2} \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$ (ix) $\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}}$ (x) $\int_1^2 \frac{dx}{(x)(1+2x)^2}$

প্ৰশ্ন নং ৪ ঃ দেখুৱাওক যে—

(i) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{4}$

(ii) $\int_0^a \sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)dx = 2a\tan^{-1} a - \log\sqrt{1+a^2}$

(iii) $\int_1^2 (\log x)^2\,dx = 2 - 4\log 2 + 2(\log 2)^2$

(iv) $\int_0^{\pi/2} \sin x\sin 2x\,dx = 2/3$

(v) $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x\sin^3 x\,dx = \frac{2}{35}$

প্ৰশ্ন নং ৫ ঃ তলৰ সীমাবোৰৰ মান নিৰ্ধাৰণ কৰক।

(i) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2n}\right]$

(ii) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{1^2+n^2}+\frac{4}{2^2+n^2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{2n}\right]$

(iii) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{(n^2-1^2)}}+\frac{1}{\sqrt{(n^2-2^2)}}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{\sqrt{\left[n^2-(n-1)^2\right]}}\right]$

(iv) $\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{r^3}{r^4+n^4}$

২.৬ ধৰ্মৰ সহায়ত নিশ্চিত অনুকল নিৰ্ণয়

আগৰ অনুচ্ছেদত আমি নিশ্চিত অনুকলৰ মান নিৰ্ণয়ৰ কিছুমান পদ্ধতি আলোচনা কৰিছোঁ। এতিয়া আমি নিশ্চিত অনুকলৰ কিছুমান প্ৰয়োজনীয় ধৰ্মৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। ইয়াৰ সহায়ত বহু নিশ্চিত অনুকলৰ মান অতি সহজে উলিয়াব পাৰি। ধৰ্মসমূহ তলত দিয়া হ'ল।

P.1 $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(z)dz$

P.2 $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

P.3 $\int_a^b f(x)dx=\int_b^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx,\ \ (a<c<b)$

P.4 $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$

P.5 $\int_0^{2a} f(x)dx=\int_0^a f(x)dx+\int_0^a f(2a-x)dx$

P.6 $\int_0^{na} f(x)dx=n\int_0^a f(x)dx$ if $f(a+x)=f(x)$

P.7 $\int_a^a f(x)dx=\int_0^a[f(x)+f(-x)]dx$

প্ৰমাণ P (1) ধৰা হ'ল $\int f(x)dx=\phi(x)$ then $\int f(z)dz=\phi(z)$

এতিয়া $\int_a^b f(x)dx=[\phi(x)]_a^b=\phi(b)-\phi(a)\ldots\ \ldots\ \ldots$(i)

আৰু $\int_a^b f(z)dt=[\phi(z)]_a^b=\phi(b)-\phi(a)\ldots\ \ldots\ \ldots$(ii)

$\therefore$ (i) আৰু (ii)ৰ পৰা $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(z)dz$

প্ৰমাণ P (2) $\int_a^b f(x)dx=[\phi(x)]_a^b=\phi(b)-\phi(a)$ আৰু

$$-\int_b^a f(x)dx=-[\phi(x)]_b^a=-[\phi(a)-\phi(b)]=\phi(b)-\phi(a)$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

প্ৰমাণ (P.3) ধৰা হ'ল $\int f(x)dx = \phi(x)$

$$\therefore \text{ বাওঁপক্ষ } = \int_a^b f(x)dx = [\phi(x)]_a^b = \phi(b) - \phi(a)$$

$$\begin{aligned}\text{সোঁপক্ষ } &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\ &= [\phi(x)]_a^c + [\phi(x)]_c^b \\ &= [\phi(c) - \phi(a)] + [\phi(b) - \phi(c)] \\ &= \phi(b) - \phi(a)\end{aligned}$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

য'ত $a < c < b$.

P(3)ৰ অনুসিদ্ধান্ত ঃ উপৰিউক্ত ধৰ্মটো তলত দিয়াৰ দৰে সম্প্ৰসাৰণ কৰিব পাৰি।

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \ldots\ldots\ldots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)dx + \int_{c_n}^b f(x)dx$$

য'ত $a < c_1 < c_2 < \ldots\ldots\ldots < c_{n-1} < c_n < b$.

প্ৰমাণ P(4). সোঁপক্ষ $a - x = z$ বহুওৱা হ'ল

$$\begin{aligned}\therefore \text{সোঁপক্ষ } &= \int_0^a f(a-x)dx && \text{যিহেতু } a - x = z \\ &= \int_a^0 f(z)(-dz) && dx = -dz \\ &= -\int_a^0 f(z)dz = \int_0^a f(z)dz, && \text{আৰু } x = 0 \Rightarrow z = a \text{ ধৰ্ম (P. 2) অনুযায়ী} \\ & && x = a \Rightarrow z = 0 \\ &= \int_0^a f(x)dx, && \text{ধৰ্ম (P. 1) অনুযায়ী}\end{aligned}$$

= বাওঁপক্ষ

$$\therefore \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

প্ৰমাণ P (5). আমি এনেদৰে লিখিব পাৰোঁ

$$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{2a} f(x)dx, \text{ (ধৰ্ম P. 3) ... ...(i)}$$

(i) অৰ সোঁপক্ষৰ দ্বিতীয় অনুকলত $x = 2a - z$ বহুওৱা হ'ল। তেনেহ'লে $dx = -dz$.

আকৌ $x = a$ হ'লে $z = a$, আৰু $x = 2a$ হ'লে $z = 0$.

$\therefore$ (i)অৰ সোঁপক্ষৰ দ্বিতীয় অনুকল

$$= \int_a^{2a} f(x)dx = \int_a^0 f(2a-z)(-dz) = -\int_a^0 f(2a-z)dx$$

$$= \int_0^a f(2a-z)dz,$$

$$= \int_0^a f(2a-x)dz,$$

$\therefore$ (i) হ'বগৈ

$$\int_0^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(2a-x)dx$$

অনুসিদ্ধান্ত 5 (i) যদি $f(2a-x) = f(x)$, তেনেহ'লে

$$\int_0^{2a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

অনুসিদ্ধান্ত 5 (ii) যদি $f(2a-x) = -f(x)$, তেনেহ'লে

$$\int_0^{2a} f(x)dx = 0$$

প্ৰমাণ P. (6) আমি এনেদৰে লিখিব পাৰোঁ

$$\int_0^{na} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_a^{2a} f(x)dx + \ldots\ldots\ldots + \int_{(n-1)a}^{na} f(x) \quad \ldots \ldots \ldots (i)$$

ধৰা হ'ল $x = z + a$

তেনেহ'লে $\int_a^{2a} f(x)dx = \int_0^a f(z+a)dz = \int_0^a f(x+a)dx = \int_0^a f(x)dx$

সেইদৰে আমি দেখুৱাব পাৰোঁ যে $\int_{2a}^{3a} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$ আৰু এইদৰে ওলাই গৈ থাকিব।

এইদৰে (i) অৰ সোঁপক্ষৰ প্ৰতিটো অনুকলকে $\int_0^a f(x)dx$ বুলি দেখুৱাব পাৰি।

$\therefore \int_0^{na} f(x)dx = n\int_0^a f(x)dx$

প্ৰমাণ P.(7) আমি এনেদৰে লিখিব পাৰোঁ

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \quad \ldots(i)$$

(i)অৰ সোঁপক্ষৰ প্ৰথম অনুকলৰ বাবে $x = -z$ বহুৱাওঁ। তেনেহ'লে প্ৰথম অনুকলটো হ'বগৈ

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_a^0 f(-z)(-dz)$$

$$= -\int_a^0 f(-z)dz$$

$$= \int_0^a f(-z)dz,$$

$$= \int_0^a f(-x)dx$$

$\therefore$ (i) হ'বগৈ

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx$$

$$= \int_0^a [f(x) + f(-x)]dx$$

অনুসিদ্ধান্ত 7 (i) যদি $f(-x) = f(x)$, অর্থাৎ যদি f যুগ্ম ফলন, তেনেহ'লে

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

অনুসিদ্ধান্ত 7 (ii) যদি $f(-x) = -f(x)$, অর্থাৎ যদি f অযুগ্ম ফলন, তেনেহ'লে

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ

উদাহৰণ 1 ঃ দেখুওৱাক যে $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx = \frac{\pi^2}{4}$

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin(\pi - x)}{1 + \{\cos(\pi - x)\}^2} dx$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx - \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx - I$$

$$\therefore 2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x} dx$$

$= \pi \int_1^{-1} \frac{-dz}{1+z^2}$ (ধৰা হ'ল $z = \cos x$)

$= -\pi \int_1^{-1} \frac{dz}{1+z^2}$ তেনেহ'লে $dz = -\sin x\, dx$

$= \pi \int_{-1}^{1} \frac{dz}{1+z^2}$ $x = 0$ ৰ বাবে, $z = 1$ আৰু $x = \pi$ ৰ বাবে, $z = -1$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{1+z^2} dz$$

$$= 2\pi \left[\tan^{-1}(z)\right]_0^1$$

$$= 2\pi \left[\tan^{-1}(1) - \tan^{-1}(0)\right]$$

$$\Rightarrow 2I = 2\pi \left(\frac{\pi}{4} - 0\right)$$

$$\therefore I = \frac{\pi^2}{4} \qquad \text{অর্থাৎ } \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\,dx = \frac{\pi^2}{4}$$

উদাহৰণ 2 ঃ দেখুৱাওক যে $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{(a^2-x^2)}} = \pi/4$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $x = a\sin\theta$, $\therefore dx = a\cos\theta d\theta$

$x = 0$ ৰ বাবে, $\theta = 0$

$x = a$ ৰ বাবে, $\theta = \pi/2$

$\therefore$ প্ৰদত্ত অনুকল (I) হ'বগৈ

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{a\cos\theta d\theta}{a\sin\theta + \sqrt{a^2 - a^2\sin^2\theta}}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta+\cos\theta} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\left(\pi/2-\theta\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\,d\theta$$

এতিয়া $I + I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta d\theta}{\sin\theta+\cos\theta} + \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\,d\theta$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\,d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta$$

$$= [\theta]_0^{\pi/2} = \pi/2$$

$\therefore I = \frac{\pi}{4}$ অর্থাৎ $\int_0^a \frac{dx}{x+\sqrt{a^2-x^2}} = \pi/4$

উদাহৰণ 3 ঃ দেখুওৱাক যে $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $x = \tan\theta$, $\therefore dx = \sec^2\theta d\theta$

$x = 0$ হ'লে, $\theta = 0$

আৰু $x = 1$ হ'লে, $\theta = \pi/4$

$\therefore$প্ৰদত্ত অনুকলটো (I) হ'বগৈ

$$I = \int_0^{\pi/4} \frac{\log(1+\tan\theta)}{\sec^2\theta}\sec^2\theta d\theta = \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan\theta)d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left\{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log\left(1 + \frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log \frac{2}{1+\tan\theta}\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/4} \log 2 d\theta - \int_0^{\pi/4} \log(1+\tan\theta) d\theta$$

$$= \log 2 \int_0^{\pi/4} d\theta - I$$

$$\Rightarrow 2I = (\log 2)[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = (\log 2)\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\log 2$$

$$\therefore\ I = \frac{\pi}{8}\log 2$$



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

প্ৰশ্ন ঃ অধোলিখিতবোৰ প্ৰমাণ কৰক—

1. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx = \frac{\pi}{4}$

2. $\int_0^{\pi/2} \log \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \log \cos x dx = \frac{\pi}{2}\log\left(\frac{1}{2}\right)$

3. $\int_0^{\pi} \frac{x dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x} = \frac{\pi^2}{2ab}$

4. $\int_0^{\pi/4} \log(1+\tan\theta) d\theta = \frac{\pi}{8}\log 2$

5. $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\pi/2} \sin^9 x dx = 0$

6. $\int_0^{\pi} \sin^8 x \cos^7 x dx = 0$

7. $\int_{-a}^{a} \phi(y^2) dy = 2\int_0^a \phi(y^2) dy$

8. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x \sin x + 1} dx = 0$

9. $\int_0^{\pi/2} (2\log\sin x - \log\sin 2x) dx = \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$

10. $\int_0^{\pi/2} \frac{x \sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx = \frac{\pi^2}{16}$

11. $\int_0^p \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{p-x}} dx = \frac{p}{2}$

12. $\int_0^{2a} \frac{f(x)dx}{f(x) + f(2a-x)} = a$

13. $\int_0^{\pi/2} (a\cos^2 x + b\sin^2 x) dx = \frac{\pi}{4}(a+b)$

14. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \log(\tan x) dx = 0$

15. $\int_0^{\pi} \frac{x \tan x dx}{\sec x + \cos x} = \frac{\pi^2}{4}$

16. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x+\sin x}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$

17. $\int_0^{\pi/2} \log\left(\frac{3+5\sin x}{3+5\cos x}\right)dx = 0$

18. $\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1+\sin x} = \pi$

19. $\int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{\pi}{2}\log 2$



২.৮ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- ইয়াত নিশ্চিত অনুকলক সমষ্টি এটাৰ সীমা হিচাপে প্ৰকাশ কৰা হৈছে।
- $\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} \sum_{r=1}^{n} f(a+rh)$
- যদি $\int_a^b f(x)dx$ স্থিত হয় আৰু এটা ফলন $\phi(x)$ থাকে যাতে সকলো $x \in [a,b]$, ৰ বাবে $\phi'(x) = f(x)$, তেনেহ'লে $\int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$
  ইয়াক অনুকলন গণিতৰ মৌলিক উপপাদ্য বুলি কোৱা হয়।
- 2.6 অত নিশ্চিত অনুকলৰ ধৰ্মসমূহ (ধৰ্ম P-1 অৰ পৰা P-7) দিয়া হৈছে।



২.৯ অধিক জানিবলৈ

1) *Integral Calculus,* Kishan, Hari, Atlantic Publishers & Distributors. New Delhi -110027.
2) *Integral Calculus*, Dhami, H.S. New age International Publishers,New Delhi - 110002.
3) *Text book of Integral Calculus*, Sharma, A. K. Discovery Publishing House, New Delhi -110002.

২.১০ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) আমি জানো

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(a+(n-1)h)\right]$$

ইয়াত $f(x)=x$, $a=a$, $b=b$ and $h=\dfrac{b-a}{n} \Rightarrow nh=b-a$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\left[a+(a+h)+(a+2h)+\cdots+(a+(n-1)h)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[(a+a+\cdots+a)+(h+2h+3h+\cdots+(n-1)h)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[na+h(1+2+3+\cdots+(n-1))\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[na+h\frac{n(n-1)}{2}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[(nh)a+\frac{nh(nh-h)}{2}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[(b-a)a+\frac{(b-a)(b-a-h)}{2}\right]$$

$$= \left[(b-a)a+\frac{(b-a)(b-a)}{2}\right]$$

$$= (b-a)\left[a+\frac{b-a}{2}\right]$$

$$= (b-a)\left[\frac{2a+b-a}{2}\right]$$

$$= \frac{(b-a)(b+a)}{2}$$

$$= \frac{b^2-a^2}{2}$$

(ii) নিজে চেষ্টা কৰক।

(iii) আমি জানো

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\left[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(a+(n-1)h)\right]$$

ইয়াত $f(x)=x^2$, $h=\dfrac{b-a}{n} \Rightarrow nh=b-a$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \lim_{h\to 0} h\left[a^2+(a+h)^2+(a+2h)^2+\cdots+(a+(n-1)h)^2\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[na^2+2ah(1+2+3+\cdots+(n-1))+h^2\left(1^2+2^2+3^2+\cdots+(n-1)^2\right)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[na^2+2ah\frac{n(n-1)}{2}+h^2\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[(nh)a^2+a(nh)(nh-h)+\frac{1}{6}(nh)(nh-h)(2nh-h)\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[(b-a)a^2+a(b-a)(b-a-h)+\frac{1}{6}(b-a)(b-a-h)(2(b-a)-h)\right]$$

$$= \left[(b-a)a^2+a(b-a)^2+\frac{2}{6}(b-a)^3\right]$$

$$= \frac{b-a}{3}\left[3a^2+3a(b-a)+(b-a)^2\right]$$

$$= \frac{b-a}{3}\left(3a^2+3ab-3a^2+b^2-2ab+a^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}(b-a)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(b^3-a^3\right).$$

(iv) নিজে চেষ্টা কৰক।

(v) ইয়াত $f(x)=ax+b$, $nh=1-0=1$

$$f(rh)=arh+b$$

$$\int_0^1 (ax+b)dx = \lim_{h\to 0}\sum_{r=1}^{n}(arh+b) \quad \text{where } nh=1$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[ah\sum_{r=1}^{n} r+b\sum_{r=1}^{n}1\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} h\left[\frac{ahn(n+1)}{2} + nb\right] \text{ where } \sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2} \text{ and } \sum_{r=1}^{n} 1 = n.$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{a.nh.(nh+h)}{2} + nhb\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{a.1.(1+h)}{2} + 1.b\right]$$

$$= \frac{a(1+0)}{2} + b$$

$$= \frac{a}{2} + b$$

$$= \frac{1}{2}(a+2b)$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) $\int_0^1 xe^x dx = \left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 1.e^x dx$

$$= \left(1.e^1 - 0.e^0\right) - \left[e^x\right]_0^1$$

$$= \left(e^1 - 0\right) - \left(e - e^0\right)$$

$$= 1 \cdot$$

(ii) নিজে চেষ্টা কৰক।

(iii) নিজে চেষ্টা কৰক।

(iv) ধৰা হ'ল $I = \int_0^1 xe^{x^2} dx$

ধৰা হ'ল $x^2 = t \Rightarrow 2xdx = dt$

$x = 0$ হ'লে $t = 0$ আৰু $x = 1$ হ'লে $t = 1$

$$\therefore I = \frac{1}{2}\int_0^1 e^t dt = \frac{1}{2}\left[e^t\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}[e-1]$$

(v) ধৰা হ'ল $I = \int_0^1 \sin^{-1} x dx = \int_0^1 \sin^{-1} x.1 dx$

খণ্ডশঃ অনুকলনৰ সহায়ত আমি পাওঁ

$$I = \left[\sin^{-1} x.x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} x dx$$

$$= \left[\sin^{-1} x.x\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(-2x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

ধৰা হ'ল $1-x^2 = t \Rightarrow -2xdx = dt$

যেতিয়া $x = 0, t = 1$ আৰু যেতিয়া $x = 1, t = 0$

$$I = \left[\sin^{-1} x.x\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_1^0 \frac{dt}{\sqrt{t}}$$

$$= \left[\sin^{-1} x.x\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[2\sqrt{t}\right]_1^0$$

$$= \sin^{-1}(1) + \left[-\sqrt{1}\right]$$

$$\therefore I = \frac{\pi}{2} - 1$$

(vi) নিজে চেষ্টা কৰক।

(vii) নিজে চেষ্টা কৰক।

(viii) নিজে চেষ্টা কৰক।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (iii) ধৰা হ'ল $x = a\tan\theta \Rightarrow dx = a\sec^2\theta d\theta$

আকৌ, $x = 0 \Rightarrow \theta = 0$ আৰু $x = a \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$$\therefore \int_0^a \frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{a\sec^2\theta d\theta}{\left(a^2+a^2\tan^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{a^2}\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 0\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}a^2}$$

(ix) ধৰা হ'ল $x - 1 = \frac{1}{z} \;\therefore dx = -\frac{1}{z^2} dz$

$$\therefore \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}} = \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{(x-1)^2-1}}$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{z^2}dz}{\frac{1}{z}\sqrt{\frac{1}{z^2}-1}}$$

$$= -\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

$$= -\sin^{-1} z$$

$$= -\sin^{-1}\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

$$\therefore \int_2^3 \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}} = \left[-\sin^{-1}\left(\frac{1}{x-1}\right)\right]_2^3$$

$$= -\sin^{-1}\frac{1}{2} + \sin^{-1} 1$$

$$= -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

(x) ধৰা হ'ল $\frac{1}{x(1+2x)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{1+2x} + \frac{C}{(1+2x)^2}$

$$\therefore 1 = A(1+4x+4x^2) + B(x+2x^2) + Cx \quad \text{... (1)}$$

(1) অত $x = 0$ বহুৱাই আমি পাওঁ $A = 1$

$x = -\frac{1}{2}$ বহুৱাই আমি পাওঁ $C = -2$.

উভয় পক্ষত x^2 অৰ সহগ তুলনা কৰি আমি পাওঁ $4A + 2B = 0$

$$\therefore B = -2$$

$$\therefore \int_1^2 \frac{dx}{x(1+2x)^2} = \int_1^2 \left[\frac{1}{x} - 2\frac{1}{1+2x} - 2\frac{1}{(1+2x)^2}\right]dx$$

$$= \left[\log x - \log(1+2x) + \frac{1}{1+2x}\right]_1^2$$

$$= \log 2 - \log 5 + \frac{1}{5} + \log 3 - \frac{1}{3}$$

$$= \log\frac{6}{5} - \frac{2}{15}$$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) ধৰা হ'ল $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin \pi}{4} \right) - (0+0) \right]$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{4}.$$

(ii) $\int_0^a \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} dx = \int_0^a 2 \tan^{-1} x dx = 2 \int_0^a \tan^{-1} x.1 dx$

এতিয়া $\int \tan^{-1} x.1 dx = \tan^{-1} x.x - \int \frac{1}{1+x^2}.x.dx$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$$= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \log(1+x^2)$$

$$\therefore \int_0^a \sin^{-1} \frac{2x}{1+x^2} dx = 2 \left[x \tan^{-1} x \right]_0^a - \frac{1}{2} \left[\log(1+x^2) \right]_0^a$$

$$= \left[2a \tan^{-1} a - 0. \tan^{-1} 0 \right] - \frac{1}{2} \left[\log(1+a^2) - \log 1 \right]$$

$$= 2a \tan^{-1} a - \frac{1}{2} \log(1+a^2).$$

$$= 2a \tan^{-1} a - \log \sqrt{1+a^2}$$

(iii) নিজে চেষ্টা কৰক।

(iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x \sin 2x dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\cos(2x-x) - \cos(2x+x)]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x dx$$

$$= \frac{1}{2}[\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\left[\frac{\sin 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{6}\sin\frac{3\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\times 1$$

$$= \frac{2}{3}$$

(v) নিজে চেষ্টা কৰক।

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) ইয়াত সাধাৰণ পদ অৰ্থাৎ r তম পদ $= \frac{1}{n+r}$ আৰু r ৰ মান 1 অৰ পৰা n অলৈ পৰিৱৰ্তিত হয়। আমি $\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n+r}$ উলিয়াব লাগে।

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n+r} = \lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{n\left\{1+\left(\frac{r}{n}\right)\right\}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{r}{n}\right)}$$

অনুকলনৰ নিম্ন সীমা = $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

অনুকলনৰ উচ্চ সীমা = $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n} = 1$

গতিকে, নিৰ্ণেয় সীমা $= \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\log(1+x)]_0^1 = \log 2$.

(ii) ইয়াত সাধাৰণ পদ অৰ্থাৎ r তম পদ $= \frac{n}{n^2+r^2}$ আৰু r অৰ মান 1 অৰ পৰা n অলৈ সলনি হৈ থাকে।

$\therefore$ 4 (i) অৰ দৰে, উলিয়াব লগীয়া সীমা $= \frac{\pi}{4}$.

(iii) ইয়াত সাধাৰণ পদ $= \frac{1}{\sqrt{(n^2 - r^2)}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{r}{n}\right)^2\right\}}}$, আৰু r অৰ মান 1 অৰ পৰা $(n-1)$ অলৈ সলনি হয়।

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া সীমা $= \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{r}{n}\right)^2\right\}}}$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= \left[\sin^{-1} x\right]_0^1$$

$$= \sin^{-1} 1 - \sin^{-1} 0$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

(iv) ইয়াত $\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{r^3}{r^4 + n^4} = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n^4} \left\{\frac{r^3}{\left(r/n\right)^4 + 1}\right\}$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n} \left\{\frac{\left(r/n\right)^3}{\left(r/n\right)^4 + 1}\right\}$$

$$= \int_0^1 \frac{x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4}\left[\log\left(1 + x^4\right)\right]_0^1 = \frac{1}{4}\log 2.$$

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$ ... (i)

গতিকে, $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}} dx$ $\quad \therefore \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx \quad \text{...(ii)}$$

(i) আৰু (ii) যোগ কৰি আমি পাওঁ

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1.dx$$

$$= [x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 0$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx$ ... (i)

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x dx \quad \text{... (ii)}$$

(i) আৰু (ii) যোগ কৰি আমি পাওঁ

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log \sin x + \log \cos x) dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin x \cos x) dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{2 \sin x \cos x}{2}\right) dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin 2x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 2 dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin 2x dx - \frac{\pi}{2}\log 2 \qquad \text{... (iii)}$$

ধৰা হ'ল $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin 2x dx$

$2x = t$ বহুৰাই আমি পাওঁ

$$I_1 = \int_0^{\pi} \log\sin t \frac{dt}{2}$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \log\sin t dt$$

$$\Rightarrow I_1 = \frac{1}{2}.2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin t dt$$

$$\Rightarrow I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin t dt = I$$

$\therefore$ (iii) ৰ পৰা আমি পাওঁ

$$2I = I - \frac{\pi}{2}\log 2$$

$$\Rightarrow I = -\frac{\pi}{2}\log 2$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\cos x dx = -\frac{\pi}{2}\log 2 = \frac{\pi}{2}\log 2^{-1} = \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}$$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত $I = \int_0^{\pi} \frac{x}{a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x} dx$ ... (1)

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)}{a^2 \cos^2(\pi - x) + b^2 \sin^2(\pi - x)} dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx \quad \text{... (2)}$$

(1) আৰু (2) যোগ কৰি আমি পাওঁ

$$2I = \int_0^{\pi} \frac{x + \pi - x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$$

$$\Rightarrow 2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$$

$$\Rightarrow 2I = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} dx$$

$$\Rightarrow 2I = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{a^2 + b^2 \tan^2 x} dx \quad \text{(হৰ আৰু লবক } \cos^2 x \text{ ৰে হৰণ কৰি)}$$

$$\Rightarrow I = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{a^2 + b^2 \tan^2 x} dx$$

ধৰা হ'ল $\tan x = t$, $\therefore \sec^2 x dx = dt$

আকৌ $x = 0 \Rightarrow t = \tan 0 = 0$ আৰু $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t \to \infty$

$$\therefore I = \pi \int_0^{\infty} \frac{dt}{a^2 + b^2 t^2}$$

$$= \frac{\pi}{b^2} \int_0^{\infty} \frac{dt}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + t^2}$$

$$= \frac{\pi}{b^2} \times \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)} \left[\tan^{-1} \frac{t}{\left(\frac{a}{b}\right)} \right]_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{ab} \left[\tan^{-1} \left(\frac{bt}{a} \right) \right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{\pi}{ab} \left[\tan^{-1} \infty - \tan^{-1} 0 \right]$$

$$= \frac{\pi}{ab}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right]$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi^2}{2ab}.$$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan\theta)d\theta$ ... (1)

$$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\tan\theta\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right]d\theta \quad \because \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\theta}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan\theta}\right]d\theta$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\frac{1-\tan\theta}{1+\tan\theta}\right]d\theta$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[\frac{2}{1+\tan\theta}\right]d\theta$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log 2\,d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan\theta)d\theta$$

$$\Rightarrow I = \log 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta - I$$

$$\Rightarrow 2I = \log 2[\theta]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow 2I = \log 2\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{8}\log 2.$$

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x\,dx$ ... (1)

$$\sin^9(-x) = (\sin(-x))^9 = (-\sin x)^9 = -\sin^9 x$$

আমি জানো যে যদি f এটা অযুগ্ম ফলন $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

$$\therefore I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x dx = 0$$

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x \sin x + 1} dx$ ... (1)

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 1} dx \quad \because \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x \cos x + 1} dx \quad \text{... (2)}$$

(1) আৰু (2) যোগ কৰি আমি পাওঁ

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{0}{\sin x \cos x + 1} dx$$

$$\Rightarrow I = 0.$$

৯ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\log\sin x - \log\sin 2x)dx$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{2\log\sin x - \log(2\sin x\cos x)\}dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \{2\log\sin x - \log\sin x - \log\cos x - \log 2\}dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log\sin x - \log\cos x - \log 2)dx \quad \text{... (1)}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\log\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \log\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \log 2\right\}dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\log\cos x - \log\sin x - \log 2)dx \quad \ldots (2)$$

(1) আৰু (2) যোগ কৰি আমি পাওঁ

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\log 2 - \log 2)dx$$

$$\Rightarrow 2I = -2\log 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

$$\Rightarrow 2I = -2\log 2.\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2}(-\log 2)$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\log\frac{1}{2}.$$

১০ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x\cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin^4\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos^4\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos x\sin x}{\cos^4 x + \sin^4 x}dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\sin x\cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx - I$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}dx$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan x \sec^2 x}{1+\tan^4 x}\,dx \qquad [\text{হৰ আৰু লবক } \cos^4 x \text{ ৰে হৰণ কৰি }]$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\tan x \sec^2 x}{1+\left(\tan^2 x\right)^2}\,dx$$

$$\therefore 2I = \frac{\pi}{4}\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt \quad \text{য'ত } t = \tan^2 x$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{4}\left[\tan^{-1} t\right]_0^{\infty}$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{4}\left[\tan^{-1}\infty - \tan^{-1} 0\right]$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2} - 0\right]$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi^2}{16}.$$

১১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $I = \int_0^p \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{p-x}}\,dx$ ... (1)

$$\Rightarrow I = \int_0^p \frac{\sqrt{p-x}}{\sqrt{p-x}+\sqrt{x}}\,dx \quad \text{... (2)}$$

(1) আৰু (2) যোগ কৰি আমি পাওঁ

$$2I = \int_0^p \frac{\sqrt{p-x}+\sqrt{x}}{\sqrt{p-x}+\sqrt{x}}\,dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^p 1.dx$$

$$\Rightarrow 2I = \left[x\right]_0^p = p$$

$$\Rightarrow I = \frac{p}{2}.$$

১২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

১৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a\cos^2 x + b\sin^2 x\right)dx$ ... (1)

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ a\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + b\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \right\} dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(a\sin^2 x + b\cos^2 x\right) dx \quad \ldots (2)$$

(1) আৰু (2) যোগ কৰি আমি পাওঁ

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ a\left(\cos^2 x + \sin^2 x\right) + b\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) \right\} dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a+b) dx$$

$$\Rightarrow 2I = (a+b)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I = (a+b)\frac{\pi}{4}.$$

১৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \log\tan x dx$ ... (1)

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \log\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \log\cot x dx \quad \ldots (2)$$

(1) আৰু (2) যোগ কৰি আমি পাওঁ

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x (\log\tan x + \log\cot x) dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \log(\tan x . \cot x) dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \log 1 dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x . 0 . dx$$

$$\Rightarrow I = 0 .$$

১৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $I = \int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \cos x} dx$ ... (1)

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\tan(\pi - x)}{\sec(\pi - x) + \cos(\pi - x)} dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} \frac{-(\pi - x)\tan x}{-\sec x - \cos x} dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)\tan x}{\sec x + \cos x} dx \quad \text{... (2)}$$

(1) আৰু (2) যোগ কৰি আমি পাওঁ

$$2I = \int_0^{\pi} \frac{\pi \tan x}{\sec x + \cos x} dx$$

$$\Rightarrow 2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\tan x}{\sec x + \cos x} dx$$

$$\Rightarrow 2I = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx$$

ধৰা হ'ল $\cos x = t \Rightarrow -\sin x dx = dt$

যেতিয়া $x = 0, t = 1$ আৰু যেতিয়া $x = \pi, t = -1$

$$\therefore 2I = \pi \int_1^{-1} \frac{-dt}{1 + t^2}$$

$$\Rightarrow 2I = -\pi \left[\tan^{-1} t\right]_1^{-1}$$

$$\Rightarrow 2I = -\pi \left[-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi^2}{4}.$$

১৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1 + \cos x + \sin x} dx$ ... (i)

$$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx \quad \text{... (ii)}$$

(i) আৰু (ii) যোগ কৰি আমি পাওঁ

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x + \sin x}{1 + \sin x + \cos x} dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x + \sin x - 1}{1 + \sin x + \cos x} dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{1 - \frac{1}{1 + \sin x + \cos x}\right\} dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} dx$$

$$\Rightarrow 2I = [x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}} + \frac{1 - \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2}}} dx$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \tan^2\frac{x}{2}}{1 + \tan^2\frac{x}{2} + 2\tan\frac{x}{2} + 1 - \tan^2\frac{x}{2}} dx$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2} - \int_0^1 \frac{2dt}{2 + 2t} \text{ where } t = \tan\frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2} - [\log(1 + t)]_0^1$$

$$\Rightarrow 2I = \frac{\pi}{2} - \log 2$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2 .$$

১৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{3 + 5\sin x}{3 + 5\cos x}\right) dx$ ... (1)

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left[\frac{3+5\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{3+5\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right]dx$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{3+5\cos x}{3+5\sin x}\right)dx \quad \text{... (2)}$$

(1) আৰু (2) যোগ কৰি আমি পাওঁ

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\log\left(\frac{3+5\sin x}{3+5\cos x}\right) + \log\left(\frac{3+5\cos x}{3+5\sin x}\right)\right\}dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\frac{3+5\sin x}{3+5\cos x}.\frac{3+5\cos x}{3+5\sin x}\right)dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log 1\,dx$$

$$\Rightarrow 2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0\,dx$$

$$\Rightarrow I = 0 \cdot$$

১৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $I = \int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{1+\sin x}$ ... (1)

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)dx}{1+\sin(\pi - x)}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - x)dx}{1+\sin x} \quad \text{... (2)}$$

(1) আৰু (2) যোগ কৰি আমি পাওঁ

$$2I = \int_0^{\pi} \frac{\pi dx}{1+\sin x}$$

$$\Rightarrow 2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{(1-\sin x)dx}{(1+\sin x)(1-\sin x)}$$

$$\Rightarrow 2I = \pi\int_0^{\pi} \frac{1-\sin x dx}{1-\sin^2 x}$$

$$\Rightarrow 2I = \pi\int_0^{\pi}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$\Rightarrow 2I = \pi\int_0^{\pi}\left(\sec^2 x - \tan x\sec x\right)dx$$

$$\Rightarrow 2I = \pi\left[\tan x - \sec x\right]_0^{\pi}$$

$$\Rightarrow 2I = \pi.2$$

$$\Rightarrow I = \pi\cdot$$

১৯নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল $I = \int_0^1 \frac{\log x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

ধৰা হ'ল $x = \sin\theta$, $dx = \cos\theta d\theta$

যেতিয়া $x = 0, \theta = 0$ আৰু যেতিয়া $x = 1, \theta = \frac{\pi}{2}$.

$$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log(\sin\theta)\cos\theta d\theta}{\cos\theta}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\log(\sin\theta)d\theta$$

$$= -\frac{\pi}{2}\log 2\,.$$



২.১১ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ প্ৰথম নিয়মৰ সহায়ত (অৰ্থাৎ সমষ্টি এটাৰ সীমা হিচাপে প্ৰকাশ কৰি) অধোলিখিতবোৰৰ মান উলিয়াওক।

(a) $\int_0^1 5dx$ (b) $\int_0^1 x^2dx$ (c) $\int_0^3(2x+1)dx$

প্ৰশ্ন ২ ঃ তলৰ অনুকলবোৰৰ মান উলিয়াওক।

(i) $\int_0^3 \frac{dx}{(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\sqrt[5]{\sin x}dx$

(iii) $\int_0^{\pi/2}\frac{\cos xdx}{(1+\sin x)(2+\sin x)}$ (iv) $\int_0^{\pi}\sin mx\cos nxdx$

(v) $\int_0^{\pi/2}x^2\sin xdx$ (vi) $\int_0^1\frac{dx}{e^x+e^{-x}}$

(vii) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a^2\cos^2 x + b^2 \sin^2 x}$ (viii) $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$

প্ৰশ্ন ৩ ঃ মান নিৰ্ণয় কৰক।

(i) $\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{n} + \frac{\sqrt{n^2-1^2}}{n^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\sqrt{n^2-(n-1)^2}}{n^2}\right\}$

(ii) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+m} + \frac{2}{n+2m} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n+nm}\right)$

(iii) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3n+1} + \frac{2}{3n+2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{3n+3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{3n+n}\right)$

(iv) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n} + \frac{n^2}{(n+1)^3} + \frac{n^2}{(n+2)^3} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{8n}\right]$

(v) $\lim_{n\to\infty}\sum_{r=0}^{n} \frac{n^2}{\left(n^2+r^2\right)^{3/2}}$

প্ৰশ্ন ৪ ঃ নিশ্চিত অনুকলৰ ধৰ্ম ব্যৱহাৰ কৰি মান নিৰ্ণয় কৰক।

(i) $\int_0^{\pi/2} \frac{x\,dx}{\sin x + \cos x}$ (ii) $\int_0^{\pi} \log(1+\cos x)\,dx$ (iii) $\int_0^{\pi} \cos^6 x\,dx$

(iv) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (v) $\int_{-1}^{1} \frac{x^2 \sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ (vi) $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \log\tan x\,dx$

(vii) $\int_0^{\pi} x \sin^6 x \cos^4 x\,dx$ (viii) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\tan x}$

প্ৰশ্ন ৫ ঃ দেখুওৱাক যে

(i) $\int_0^{\pi/2} \phi(\sin 2x)\sin x\,dx = \int_0^{\pi/2} \phi(\sin 2x)\cos x\,dx$

(ii) $\int_0^{\pi} \sin^n x \cos^{2n+1} x\,dx = 0$ (iii) $\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}(\pi - 2)$

(iv) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{5+4\cos x} = \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(1/3\right)$ (v) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{x\cos x\,dx}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x} = 0$

(vi) $\int_{-1}^{1} |x|\,dx = 1$ (vii) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^3 x + \cos^3 x} = \frac{\pi}{4}$

(viii) $\int_0^{\pi} x\cos^4 x\,dx = \frac{3\pi^2}{16}$

প্ৰশ্ন ৬ঃ যদি $f(x) = |x-2| + |x-3|$ দেখুওৱাক যে $\int_2^4 f(x)\,dx = 3.$

*** ***** ***