অধ্যায় ৬ ঃ পৰিক্ৰমজ ঘনৰ আয়তন আৰু পৃষ্ঠকালি

অধ্যায় গাঁথনি

৬.১ উদ্দেশ্য

৬.২ পৰিচয়

৬.৩ পৰিক্ৰমজ ঘনৰ আয়তন

৬.৪ পৰিক্ৰমজ ঘনৰ পৃষ্ঠ কালি

৬.৫ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৬.৬ অধিক জানিবলৈ

৬.৭ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৬.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

৬.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- পৰিক্ৰমজ ঘনৰ আয়তন উলিয়াব পাৰিব
- পৰিক্ৰমজ ঘনৰ পৃষ্ঠকালি উলিয়াব পাৰিব।

৬.২ পৰিচয়

আগৰ অধ্যায়বোৰত আমি সামতলিক বক্ৰই আওৰা অংশৰ কালি আৰু সামতলিক বক্ৰৰ চাপৰ দৈর্ঘ্য নিৰূপণ কৰিছো। এই অধ্যায়ত, আমি পৰিক্ৰমজ ঘনৰ আয়তন আৰু পৃষ্ঠকালিৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

৬.৫ পৰিভ্রমণৰ ঘনৰ আয়তন

সংজ্ঞা ঃ পৰিভ্রমণৰ ঘন ঃ যদি এটা সমতলীয় বক্ৰ বা সমতলীয় কালি নিজস্ত সমতলত এডাল নির্দিষ্ট ৰেখা সাপেক্ষে পৰিভ্রমণ কৰা হয়, তেনেহ'লে পৰিভ্রমণৰ দ্বাৰা সৃষ্ট পিণ্ডটোক পৰিভ্রমণৰ ঘন (solid of revolution) বুলি কোৱা হয়।

পৰিভ্রমণৰ পৃষ্ঠ ঃ যদি এটা সমতলীয় বক্ৰ নিজস্ব সমতলত এডাল নির্দিষ্ট ৰেখা সাপেক্ষে পৰিভ্রমণ কৰা হয়, তেন্তে বক্ৰটোৰ পৰিভ্রমণৰ দ্বাৰা সৃষ্ট পৃষ্ঠক পৰিভ্রমণৰ পৃষ্ঠ (surface of revolution) বুলি কোৱা হয়।

পৰিভ্রমণৰ অক্ষ ঃ ঘন বা পৃষ্ঠ গঠন কৰিবলৈ যি নির্দিষ্ট ৰেখা সাপেক্ষে কালি বা বক্ৰ পৰিভ্রমণ কৰোৱা হয়, সেই নির্দিষ্ট ৰেখাডালক পৰিভ্রমণৰ অক্ষ বা আৱর্তনৰ অক্ষ (axis of revolution বা axis of rotation) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণস্বৰূপে ABC সমকোণী ত্ৰিভুজৰ $\angle B = 90^0$.এতিয়া যদি ত্ৰিভুজটোক AB সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণ কৰা হয়, তেনেহ'লে ই এটা সমবৃত্তীয় শংকুৰ সৃষ্টি কৰিব। ত্ৰিভুজটোৰ কালিয়ে আয়তন উৎপন্ন কৰিব আৰু অতিভুজ AC য়ে শংকুৰ বক্ৰপৃষ্ঠৰ সৃষ্টি কৰিব।

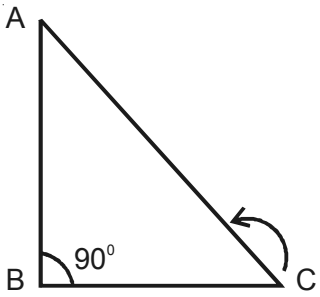


Fig. 6.1

$y = f(x)$ বক্ৰ, x-অক্ষ, আৰু কোটিয়ে আগুৰা অংশৰ কালিয়ে অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণৰ দ্বাৰা সৃষ্টি কৰা ঘনৰ আয়তন

ধৰা হ'ল AB এটা বক্ৰ আৰু ইয়াৰ সমীকৰণ $y = f(x)$. ধৰা হ'ল প্ৰদত্ত কোটিদ্বয় AL আৰু BM আৰু ইয়াৰ সমীকৰণ ক্ৰমে $x = a$ আৰু $x = b$. ধৰা হ'ল বক্ৰটোত $P(x, y)$ আৰু $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ দুটা ওচৰা উচৰি বিন্দু। P আৰু Q বিন্দুৰ পৰা x-অক্ষৰ ওপৰত টনা লম্ব দুডাল ক্ৰমে PC আৰু QD. আকৌ QD ৰ ওপৰত PS লম্ব আৰু বৰ্ধিত CP ৰ ওপৰত QR লম্ব।

ধৰা হ'ল, x-অক্ষ সাপেক্ষে ALCPA কালি আৰু ALDQPA কালিৰ পৰিভ্ৰমণৰ দ্বাৰা সৃষ্ট ঘনৰ আয়তন ক্ৰমে v আৰু $v + \delta v$ তেনেহ'লে x-অক্ষ সাপেক্ষে PCDQP কালিৰ পৰিভ্ৰমণৰ দ্বাৰা সৃষ্ট ঘনৰ আয়তন $\delta\upsilon$ ।

এতিয়া $PC = y$, $QD = y + \delta y$ আৰু $CD = \delta x$

$\therefore$ PCDS কালিৰ পৰিভ্ৰমণৰ দ্বাৰা সৃষ্ট ঘনৰ আয়তন $= \pi y^2 \delta x$, আৰু RCDQ কালিৰ পৰিভ্ৰমণৰ দ্বাৰা সৃষ্ট ঘনৰ আয়তন $= \pi(y + \delta y)^2 \delta x$.

আকৌ PCDQP কালিৰ পৰিভ্ৰমণৰ দ্বাৰা সৃষ্ট কালিৰ আয়তন $= \delta v$, য'ত $\pi y^2 \delta x$ আৰু $\pi(y + \delta y)^2 \delta x$.অৰ মাজত δv আছে

অৰ্থাৎ $\pi y^2 \delta x \le \delta v \le \pi(y + \delta y)^2 \delta x$

$$\Rightarrow \pi y^2 \le \frac{\delta v}{\delta x} \le \pi(y + \delta y)^2$$

এতিয়া বক্ৰটোত যদি $Q \to P$, তেনেহ'লে $\delta x \to o$ আকৌ $\delta y \to o$

গতিকে আমি পাওঁ

$$\lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta v}{\delta x} = \pi y^2$$

অৰ্থাৎ $\frac{dv}{dx} = \pi y^2$,

বা $dv = \pi y^2 dx$

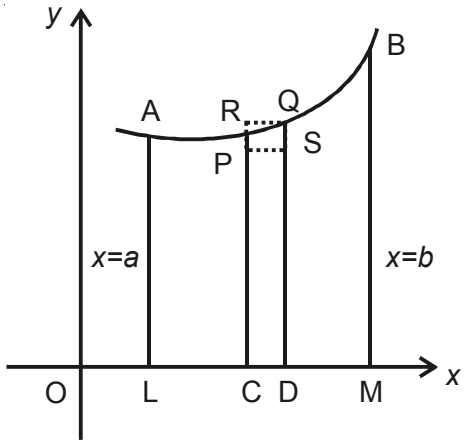


Fig. 6.2

অনুকলন কৰি আমি পাওঁ

$$\int_{x=a}^{b} dv = \int_{x=a}^{b} \pi y^2 dx$$

$$\Rightarrow [v]_a^b = \int_a^b \pi y^2 dx$$

$\Rightarrow$ ($x = b$ ত আয়তন v) $-$ ($x = a$ ত আয়তন v)= $\int_a^b \pi y^2 dx$

$\Rightarrow$ ($x = b$ ত আয়তন v) $- 0 = \int_a^b \pi y^2 dx$

$\Rightarrow$ ALMBA কালিৰ দ্বাৰা সৃষ্ট আয়তন $= \int_a^b \pi y^2 dx$

$\therefore$ গতিকে $y = f(x)$ বক্ৰ, x-অক্ষ, আৰু $x = a$, $x = b$ কোটিয়ে আগুৰা অংশৰ কালিয়ে x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণৰ দ্বাৰা সৃষ্টি কৰা ঘনৰ আয়তন $\int_a^b \pi y^2 dx$.

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ

উদাহৰণ 1 ঃ a ব্যাসার্ধৰ গোলকৰ আয়তন নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $x^2 + y^2 = a^2$ এটা বৃত্ত। ইয়াৰ কেন্দ্ৰ O(0, 0) আৰু ব্যাসার্ধ $OA = a$.

ইয়াত OAB হ'ল বৃত্তটোৰ প্ৰথম চোকত থকা অংশ। যদি বৃত্তটোৰ এইটো অংশ x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণ কৰোৱা হয়, তেনেহ'লে ই এটা অর্ধগোলক সৃষ্টি কৰিব।

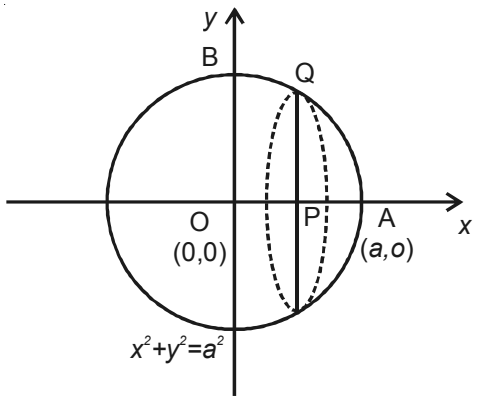


Fig. 6.3

$\therefore$ অর্ধগোলকটোৰ আয়তন $= \int_0^a \pi y^2 dx$

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া গোলকৰ আয়তন V

$$= 2\int_0^a \pi y^2 dx = 2\pi \int_0^a (a^2 - x^2) dx = 2\pi \left[a^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^a$$

$$= 2\pi \left(a^3 - \frac{a^3}{3} \right) = 2\pi . \frac{2a^3}{3} = \frac{4}{3}\pi a^3$$

উদাহৰণ 2 ঃ এটা সমকোণী ত্ৰিভুজৰ সমকোণ সংলগ্ন এটা বাহু সাপেক্ষে সমকোণী ত্ৰিভুজটোৰ পৰিভ্ৰমণৰ দ্বাৰা সৃষ্ট সমবৃত্তীয় শংকুৰ আয়তন নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ইয়াত সমকোণী ত্ৰিভুজটো হ'ল OAB আৰু $\angle A = 90^0$. ইয়াক OA বাহু সাপেক্ষে (অর্থাৎ x-অক্ষ সাপেক্ষে) পৰিভ্ৰমণ কৰোৱা হ'ল। গতিকে ত্ৰিভুজটোৱে এটা সমবৃত্তীয় শংকুৰ সৃষ্টি কৰিব।

ধৰা হ'ল OB ত $P(x, y)$ এটা বিন্দু আৰু ধৰা হ'ল $\angle BOA = \alpha$.

গতিকে ΔPOC ত্ৰিভুজৰ পৰা আমি পাওঁ $\tan\alpha = \frac{PC}{OC} = \frac{y}{x}$

$\therefore y = x\tan\alpha$ ...(i)

ই OB ৰেখাডালৰ সমীকৰণ (ΔOAB সমকোণী ত্ৰিভুজটোৰ অতিভুজ হ'ল OB)

এতিয়া ΔOAB ত্ৰিভুজৰ কালি OB ৰেখা, x-অক্ষ আৰু AB য়ে আগুৰি আছে। যদি এই কালি x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণ কৰোৱা হয়, তেনেহ'লে ই সম বৃত্তীয় শংকুটো সৃষ্টি কৰিব। ধৰা হ'ল শংকুটোৰ উচ্চতা OA=h আৰু বৃত্তীয় ভূমিৰ ব্যাসাৰ্ধ হ'ল AB=a.

$$\therefore \tan\alpha = \frac{a}{h} \quad ...(ii)$$

(i) অৰ পৰা $\tan\alpha$ ৰ মান (ii) ত বহুৱাই আমি পাওঁ $y = x\left(\frac{a}{h}\right)$.

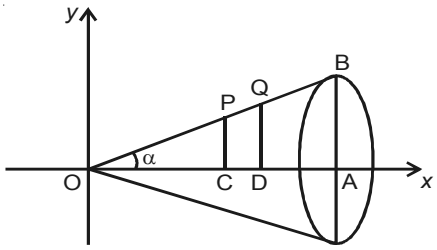


Fig. 6.4

ই OB ৰেখাডালৰ সমীকৰণ, a আৰু h অত প্ৰকাশ কৰা হৈছে।

∴সম বৃত্তীয় শংকুটোৰ আয়তন (V)

$$= \int_0^h \pi y^2 dx = \int_0^h \pi \frac{x^2 a^2}{h^2} dx = \frac{\pi a^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h$$

$$= \frac{\pi a^2}{h^2}\frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi a^2 h$$

উদাহৰণ 3 ঃ $y^2 = 4ax$ এটা অধিবৃত্ত। নাভিলম্বটোৱে অধিবৃত্তটোৰ এটা অংশ কাটে। বাকী থকা অংশ শীৰ্ষ বিন্দুত y অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণ কৰোৱা হ'ল। এনেদৰে সৃষ্ট ঘনৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তক LSL′ নাভিলম্বডালে কাটিছে। বাকী থকা অংশ হ'ল LOL′. ইয়াক y-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণ কৰোৱা হ'ল। O হ'ল শীৰ্ষ বিন্দু। এই পৰিভ্ৰমণে দুটা আয়তনৰ সৃষ্টি কৰিব, এটা x-অক্ষৰ ওপৰৰ পিনে আৰু আনটো x-অক্ষৰ তলৰ পিনে। দুয়োটা অংশই সমান। পৰিভ্ৰমণ কৰা অংশ LMO ক চাপ LO, y-অক্ষ আৰু LM এ আগুৰি আছে।

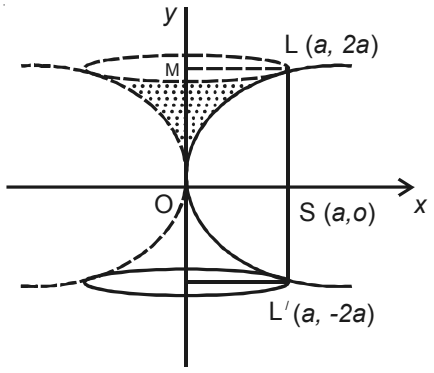


Fig. 6.5

∴ উলিয়াবলগীয়া আয়তন = 2 x y-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণ কৰোৱা OLM অংশৰ আয়তন

$$= 2\int_0^{2a} \pi x^2 dy = 2\pi \int_0^{2a} \left(\frac{y^2}{4a}\right)^2 dy$$

$$= 2\pi . \frac{1}{16a^2}\left[\frac{y^5}{5}\right]_0^{2a} = 2\pi . \frac{1}{16a^2} . \frac{32a^5}{5}$$

$$= \frac{4}{5}\pi a^3 .$$



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ১

প্ৰশ্ন নং ১ঃ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তৰ মুখ্য অক্ষ সাপেক্ষে আৱৰ্তনৰ দ্বাৰা সৃষ্ট ঘনৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২ ঃ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তৰ গৌণ অক্ষ সাপেক্ষে আৱৰ্তনৰ দ্বাৰা সৃষ্ট ঘনৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৩ ঃ x-অক্ষ সাপেক্ষে $y = \sin x$ বক্ৰৰ $x = 0$ ৰ পৰা $x = 2\pi$ লৈ পৰিভ্ৰমণৰ দ্বাৰা সৃষ্ট ঘনৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৪ ঃ এটা অৰ্ধগোলকৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৫ ঃ x-অক্ষ সাপেক্ষে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তৰ $x = 0$ ৰপৰা $x = h$ লৈ পৰিভ্ৰমণৰ দ্বাৰা সৃষ্ট অধিবৃত্তীয় ঘনৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ x-অক্ষ সাপেক্ষে $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ এছট্ৰইডটো পৰিভ্ৰমণ কৰোৱা হৈছে। এনেদৰে উৎপন্ন হোৱা ঘনৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৭ঃ $y = 5x - x^2$ বক্ৰ, $x = 5$ ৰেখা আৰু y-অক্ষই আগুৰা অংশটো x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণ কৰোৱা হ'ল। এনেদৰে উৎপন্ন হোৱা ঘনৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৮ ঃ $y^2 = 5x$ বক্ৰ, কোটিদ্বয় $x = 0$ আৰু $x = 9$এ আগুৰা অংশটো x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণ কৰোৱা হ'ল। এনেদৰে উৎপন্ন হোৱা ঘনৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰক।

৬.৪ পৰিক্ৰমজ ঘনৰ পৃষ্ঠকালি

ধৰা হ'ল $f(x)$ এটা অবিচ্ছিন্ন ফলন। $a \le x \le b$ অন্তৰালত ই চিন সলনি নকৰে। এতিয়া $y = f(x)$ বক্ৰ, কোটিদ্বয় $x = a$ আৰু $x = b$ আৰু x-অক্ষই আগুৰা অংশ x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণ কৰোৱা হ'ল। ইয়াৰ ফলত উৎপন্ন হোৱা ঘনৰ পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।

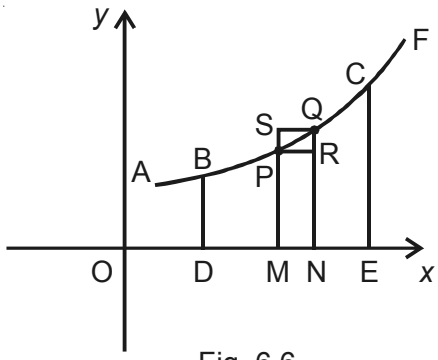


Fig. 6.6

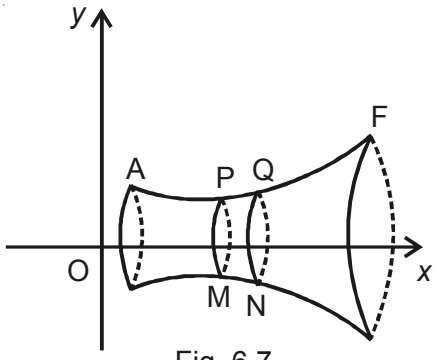


Fig. 6.7

ধৰা হ'ল $y = f(x)$ বক্ৰৰ $x = a$ আৰু $x = b$ ৰ মাজত থকা অংশটো BC. ইয়াত BD আৰু CE ৰেখাৰ সমীকৰণ ক্ৰমে $x = a$ আৰু $x = b$.

ধৰা হ'ল BCত $P(x, y)$ আৰু $Q(x + \delta x, y + \delta y)$ দুটা ওচৰা উচৰি বিন্দু। x-অক্ষৰ ওপৰত QN আৰু PM লম্ব টনা হ'ল। বৰ্ধিত MP ৰ ওপৰত QS লম্ব টনা হ'ল।

ধৰা হ'ল AP চাপৰ দৈর্ঘ্য = S আৰু PQ চাপৰ দৈর্ঘ্য = δS. ধৰা হ'ল BP চাপ আৰু BQ চাপক x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণ কৰাৰ ফলত উৎপন্ন হোৱা ঘনৰ পৃষ্ঠকালি ক্ৰমে A আৰু $A + \delta A$ গতিকে PQ চাপে x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণ কৰাৰ ফলত সৃষ্টি হোৱা ঘনৰ পৃষ্ঠকালি δA.

আকৌ PR আৰু QS ৰেখাদুডালে x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণ কৰাৰ ফলত দুটা বেলনৰ সৃষ্টি হ'ব আৰু এই বেলন দুটাৰ বক্ৰপৃষ্ঠৰ কালি $2\pi y\delta S$ আৰু $2\pi(y + \delta y).\delta S$, (যিহেতু Q বিন্দুটো P ৰ একেবাৰে ওচৰৰ, গতিকে PR, PQ আৰু SQ প্ৰায় সমান)।

গতিকে, PQ চাপে x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণ কৰাৰ ফলত সৃষ্টি হোৱা ঘনৰ পৃষ্ঠকালি $2\pi y\delta S$ আৰু $2\pi(y + \delta y)\delta S$. অৰ মাজত থাকিব।

$$\therefore 2\pi y\delta s \le \delta A \le 2\pi(y + \delta y)\delta S$$

$$\Rightarrow 2\pi y \le \frac{\delta A}{\delta S} \le 2\pi(y + \delta y)$$

এতিয়া বক্ৰটোত $Q \to P$ হ'লে, $\delta x \to 0$ আৰু $\delta y \to 0$.

গতিকে, $2\pi y \le \lim_{\delta S \to 0}\left(\frac{\delta A}{\delta S}\right) \le \lim_{\delta y \to 0} 2\pi(y + \delta y)$

$$\therefore \frac{dA}{dS} = 2\pi y$$

$$\Rightarrow dA = 2\pi y dS$$

অনুকলন কৰি, $\int_a^b dA = \int_a^b 2\pi y dS$

$$\Rightarrow [A]_a^b = 2\pi \int_a^b y ds$$

$\Rightarrow$ (যেতিয়া$x=b$, Aৰ মান) – (যেতিয়া $x=a$, Aৰ মান) $= 2\pi\int_a^b y ds$

$\Rightarrow$ BC চাপৰ x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণৰ ফলত উৎপন্ন হোৱা পৃষ্ঠৰ কালি

$= 2\pi\int_{x=a}^{x=b} y ds.$

কিন্তু আমি জানো যে $\left(\frac{dS}{dx}\right)^2 = 1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

$$\therefore dS = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

$\therefore$ BC চাপৰ x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণৰ ফলত উৎপন্ন হোৱা পৃষ্ঠৰ কালি $= 2\pi\int_a^b y dS$

$$= 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx\,.$$

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ

উদাহৰণ 1 ঃ a ব্যাসার্ধৰ এটা অর্ধগোলকৰ বক্ৰপৃষ্ঠৰ কালি নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল $x^2 + y^2 = a^2$ এটা বৃত্ত। ইয়াৰ কেন্দ্ৰ (0, 0) আৰু ব্যাসার্ধ a. এতিয়া যদি বৃত্তটোৰ AB চাপক (অর্থাৎ AB চোক) ব্যাসার্ধ OA (অর্থাৎ x-অক্ষ) সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণ কৰোৱা হয়, তেনেহ'লে ই চিত্ৰ 3.20 ত দেখুওৱাৰ দৰে এটা অর্ধগোলক উৎপন্ন কৰিব।

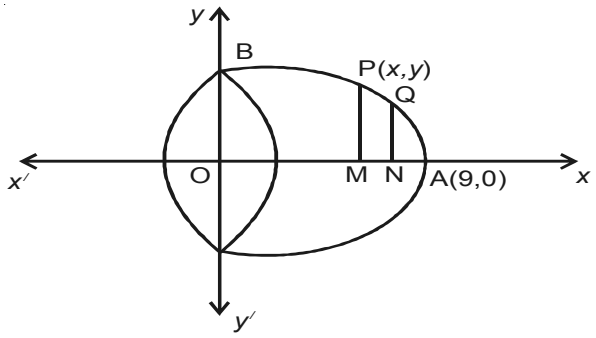


Fig. 6.8

দেখুওৱাৰ দৰে এটা অর্ধ গোলক উৎপন্ন কৰিব। $x^2 + y^2 = a^2$ অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

$$\therefore \frac{dS}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2}} = \sqrt{a^2/y^2} = a/y$$

$\therefore y dS = a dx$

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া পৃষ্ঠকালি $= 2\pi \int_{x=0}^{a} y dS = 2\pi \int_{x=0}^{a} a dx$

$$= 2\pi [ax]_0^a = 2\pi a^2$$

উদাহৰণ 2 ঃ $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তৰ শীৰ্ষ বিন্দু আৰু নাভিলম্বৰ এটা শীৰ্ষ বিন্দুৰ মাজৰ চাপটো x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণ কৰোৱাৰ ফলত সৃষ্টি হোৱা পৃষ্ঠৰ কালি নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ এই ক্ষেত্ৰত অধিবৃত্তটো হ'ল $y^2 = 4ax$

$$\therefore 2y\frac{dy}{dx} = 4a$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$$

$$\therefore \frac{dS}{dx} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{2a}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{y^2+4a^2}{y^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4ax+4a^2}{y^2}} = \frac{2}{y}\sqrt{a(x+a)}$$

এতিয়া শীৰ্ষবিন্দু আৰু নাভিলম্বৰ এটা মূৰৰ শীৰ্ষ বিন্দু ক্ৰমে (0,0) আৰু (a, $2a$)

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া পৃষ্ঠকালি

$$= \int_{x=0}^{x=a} 2\pi y \frac{dS}{dx} dx = \int_0^a 2\pi . y . \frac{2}{y}\sqrt{a(x+a)}dx$$

$$= 4\pi\sqrt{a}\int_0^a (x+a)^{1/2} dx = 4\pi\sqrt{a}\left[\frac{2}{3}(x+a)^{3/2}\right]_0^a$$

$$= 4\pi\sqrt{a}.\frac{2}{3}\left[(2a)^{3/2} - (a)^{3/2}\right] = \frac{8\pi\sqrt{a}}{3}a^{3/2}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

$$= \frac{8}{3}\pi a^2\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

উদাহৰণ 3 ঃ মুখ্য অক্ষ সাপেক্ষে $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ উপবৃত্ত পৰিভ্ৰমণ কৰোৱাৰ ফলত সৃষ্টি হোৱা ঘনৰ পৃষ্ঠ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ উপবৃত্তটো হ'ল $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$... ... ...(i)

$\therefore a = 6$ আৰু $b = 4$

(i) অক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ $\frac{2x}{36}+\frac{2y}{16}\frac{dy}{dx}=0$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{4x}{9y}$$

$$\therefore \frac{ds}{dx} = \sqrt{1+\frac{16x^2}{81y^2}} = \frac{\sqrt{81y^2+16x^2}}{9y} = \frac{1}{9y}\sqrt{81.\frac{4}{9}\left(36-x^2\right)+16x^2}$$

$$= \frac{1}{9y}\sqrt{36\left(36-x^2\right)+16x^2} = \frac{1}{9y}\sqrt{(36)^2-20x^2} \quad \ldots\ \ldots\ \ldots(ii)$$

প্ৰদত্ত উপবৃত্তটো দুয়োডাল অক্ষসাপেক্ষে প্ৰতিসম। প্ৰথম চোকত থকা উপবৃত্তটোৰ চাপটোৰ বাবে x অৰ মান 0 ৰপৰা 6 অলৈ সলনি হয়।

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া পৃষ্ঠকালি

$$= 2\times \int_{x=0}^{6} 2\pi y \frac{ds}{dx}dx = 2\int_0^6 2\pi y.\frac{1}{9y}\sqrt{(36)^2-20x^2}\,dx$$

$$= \frac{4\pi}{9}\int_0^6 \sqrt{(36)^2-20x^2}\,dx = \frac{4\pi}{9}\sqrt{20}\int_0^6 \sqrt{\frac{1296}{20}-x^2}\,dx$$

$$= \frac{8\sqrt{5}\pi}{9}\int_0^6 \sqrt{\left(\frac{18}{\sqrt{5}}\right)^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{8\sqrt{5}\pi}{9}\left[\frac{x}{2}\sqrt{\left(\frac{18}{\sqrt{5}}\right)^2-x^2}+\frac{1}{2}.\frac{324}{5}\sin^{-1}\left(\frac{x\sqrt{5}}{18}\right)\right]_0^6$$

$$= \frac{8\sqrt{5}\pi}{9}\left[\left(3\sqrt{\frac{324}{5}-36}+\frac{162}{5}\sin^{-1}\frac{6\sqrt{5}}{18}\right)-0\right]$$

$$= \frac{8\sqrt{5}\pi}{9}\left(3\sqrt{\frac{144}{5}}+\frac{162}{5}\sin^{-1}\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$$

$$= \frac{8\sqrt{5}\pi}{9}\left[\frac{36}{\sqrt{5}}+\frac{162}{5}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right]$$

$$= 8\sqrt{5}\pi\left[\frac{4}{\sqrt{5}}+\frac{18}{5}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right]$$

$$= 16\pi\left[2+\frac{9}{\sqrt{5}}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\right]$$



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৪

প্ৰশ্ন নং ১ ঃ a ব্যাসার্ধৰ এটা গোলকৰ পৃষ্ঠকালি নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২ ঃ $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্ত, কোটি $x = h$ আৰু x-অক্ষই আগুৰা অংশৰ কালি x- অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণ কৰোৱাৰ ফলত সৃষ্টি হোৱা ঘনৰ বক্ৰপৃষ্ঠৰ কালি নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৩ ঃ $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তৰ নাভিলম্বৰ মূৰ বিন্দুৰ মাজৰ অংশ x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণ কৰোৱাৰ ফলত সৃষ্টি হোৱা ঘনৰ পৃষ্ঠ কালি নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৪ ঃ h দূৰত্বত থকা দুখন সমান্তৰাল সমতলৰ মাজত থকা এটা গোলকৰ গোলকীয় অংশৰ পৰিক্ৰমণৰ ফলত সৃষ্টি হোৱা ঘনৰ পৃষ্ঠকালি $2\pi ah$ বুলি প্ৰমাণ কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৫ ঃ মুখ্য অক্ষ সাপেক্ষে $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ উপবৃত্তৰ পৰিভ্ৰমণৰ ফলত উৎপন্ন হোৱা ঘনৰ পৃষ্ঠকালি নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৬ ঃ $y = x^2$ বক্ৰৰ চাপ $x = 0$ আৰু $x = \sqrt{2}$ ৰ মাজত y-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণ কৰাৰ ফলত উৎপন্ন হোৱা ঘনৰ পৃষ্ঠৰ কালি নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৭ ঃ $x^2 + y^2 = a^2$ বক্ৰৰ x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণ কৰাৰ ফলত সৃষ্টি হোৱা গোলকৰ পৃষ্ঠকালি নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৮ ঃ $y^2 = 12x$ অধিবৃত্তৰ $x = 0$ আৰু $x = 3$ ৰ মাজৰ অংশৰ চাপ ইয়াৰ অক্ষসাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণ কৰোৱালে যি ঘনৰ উৎপন্ন হ'ব তাৰ পৃষ্ঠকালি নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৯ ঃ $y = \frac{1}{3}x^3$ বক্ৰৰ $x = 0$ আৰু $x = 3$ ৰ মাজৰ অংশৰ চাপ x অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণ কৰোৱালে যি ঘনৰ সৃষ্টি হ'ব তাৰ পৃষ্ঠকালি নির্ণয় কৰক।



৬.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

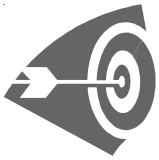
- $y = f(x)$ বক্ৰ, x-অক্ষ, আৰু $x = a$ আৰু $x = b$ কোটিয়ে আগুৰা অংশৰ কালিয়ে x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণৰ দ্বাৰা সৃষ্টি কৰা ঘনৰ আয়তন $V = \int_a^b \pi y^2 dx$.
- $y = f(x)$ বক্ৰ, x-অক্ষ, আৰু $x = a$ আৰু $x = b$ কোটিয়ে আগুৰা অংশৰ কালিয়ে x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণৰ দ্বাৰা সৃষ্টি কৰা ঘনৰ পৃষ্ঠকালি $2\pi\int_a^b yds$ বা

$$2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx.$$



৬.৬ অধিক জানিবলৈ

1) *Integral Calculus,* Kishan, Hari, Atlantic Publishers & Distributors. New Delhi -110027.
2) *Integral Calculus*, Dhami, H.S. New age International Publishers, New Delhi - 110002.
3) *Text book of Integral Calculus*, Sharma, A.K. Discovery Publishing House, New Delhi -110002.



৬.৭ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৩

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ উপবৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ল $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

উপবৃত্তটো x-অক্ষ আৰু y-অক্ষ সাপেক্ষে প্ৰতিসম আৰু প্ৰথম চোকত থকা বক্ৰটোৰ অংশৰ বাবে x, 0ৰ পৰা a লৈ সলনি হয়।

গতিকে উলিয়াবলগীয়া আয়তন $= 2\int_0^a y^2\,dx$

$$= 2\pi\int_0^a \frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)dx \quad \text{(1)অৰ পৰা}$$

$$= 2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$

$$= 2\pi\frac{b^2}{a^2}\left[a^3-\frac{1}{3}a^3\right]$$

$$= \frac{4}{3}\pi ab^3$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তটোৰ প্ৰথম চোকৰ অংশ x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিভ্ৰমণৰ ফলত অৰ্ধগোলকটো উৎপন্ন হৈছে। আয়তনৰ সীমা 0 ৰ পৰা a লৈ থাকিব।

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া অৰ্ধগোলকৰ আয়তন $= \int_0^a \pi y^2 dx$

$$= \int_0^a \pi\left(a^2 - x^2\right)dx$$

$$= \pi\left[a^2 x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^a$$

$$= \pi\left[a^3 - \frac{1}{3}a^3\right]$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3.$$

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্ৰদত্ত অধিবৃত্তটো হ'ল $y^2 = 4ax$

x-অক্ষ সাপেক্ষে ODC কালিৰ পৰিভ্ৰমণৰ ফলত অধিবৃত্তজটো উৎপন্ন হৈছে। ODC কালিৰ বাবে, $x = 0$ৰ পৰা $x = h$ অলৈ x সলনি হয়।

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া আয়তন $= \int_0^h \pi y^2 dx$

$$= \int_0^h \pi(4ax)dx$$

$$= 4\pi a\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^h$$

$$= 2\pi a h^2$$

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্ৰদত্ত বক্ৰটো হ'ল $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ... (1)

বক্ৰটো দুয়োডাল অক্ষসাপেক্ষে প্ৰতিসম। B ৰ স্থানাংক (0, a) আৰু A ৰ স্থানাংক (a, 0).

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া আয়তন $= 2\int_0^a \pi y^2 dx$, সমমিতিৰ পৰা

$$= 2\pi\int_0^a \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx$$

[$\therefore$ (1)অৰ পৰা $y^{\frac{2}{3}} = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right) \therefore y^2 = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)$]

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^6\theta . 3a\sin^2\theta\cos\theta d\theta$$

ধৰা হ'ল $x = a\sin^3\theta \quad \therefore dx = 3a\sin^2\theta\cos\theta d\theta$

$$= 6\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^7\theta d\theta$$

$$= 6\pi a^2 \frac{1.6.4.2}{9.7.5.3.1} = \frac{32\pi a^3}{105}.$$

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ৪

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল a ব্যাসাৰ্ধৰ এটা অৰ্ধবৃত্তক x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিক্ৰমণ কৰোৱাত গোলকটো সৃষ্টি হ'ল।

ধৰা হ'ল বৃত্তটোৰ সমীকৰণ $x^2 + y^2 = a^2$ ... (1)

ইয়াত কেন্দ্ৰ মূল বিন্দু।

আকৌ অৰ্ধবৃত্তটোৰ বাবে -a ৰ পৰা a লৈ x সলনি হয়।

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া পৃষ্ঠকালি $= 2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} y.\frac{a}{y}dx$$

$$= 2\pi \int_{-a}^{a} a dx$$

$$= 2\pi a[x]_{-a}^{a}$$

$$= 2\pi a(a+a)$$

$$= 4\pi a^2.$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্ৰদত্ত অধিবৃত্তটো হ'ল $y^2 = 4ax$ ... (1)

(1) অক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ $2y\left(\frac{dy}{dx}\right) = 4a$

বা $\frac{dy}{dx} = \frac{2a}{y}$

$\therefore \frac{ds}{dx} = \sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}} = \sqrt{\frac{y^2+4a^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{y^2+4a^2}}{y}$

$= \frac{\sqrt{4ax+4a^2}}{y}$, (1)ৰ পৰা

$= \frac{2\sqrt{a}\sqrt{x+a}}{y}$

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া বক্ৰপৃষ্ঠ $= \int_0^h 2\pi y \frac{ds}{dx} dx = 2\pi \int_0^h y. \frac{2\sqrt{a}\sqrt{x+a}}{y} dx$

$= 4\pi\sqrt{a}\int_0^h (x+a)^{\frac{1}{2}} dx$

$= 4\pi\sqrt{a}\left[\frac{(x+a)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^h$

$= \frac{8\pi}{3}\sqrt{a}\left[(h+a)^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{3}{2}}\right].$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল $x^2+y^2=a^2$ ... (1) বৃত্তটো x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিক্ৰমণ কৰাৰ ফলত গোলকটো উৎপন্ন হৈছে।

ধৰা হ'ল $x=b$ আৰু $x=b+h$ ৰেখা দুডালৰ পৰিক্ৰমণৰ ফলত গোলকীয় অঞ্চলটোক আগুৰাকৈ দুখন সমান্তৰাল সমতলৰ সৃষ্টি হৈছে।

AC চাপক x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিক্ৰমণৰ ফলত নিৰ্ণেয় পৃষ্ঠ উৎপন্ন হৈছে।

$\therefore$ নিৰ্ণেয় পৃষ্ঠ $= 2\pi\int_b^{b+h} y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$

$= 2\pi \int_b^{b+h} y.\frac{a}{y} dx$

$= 2\pi \int_b^{b+h} a dx$

$$= 2\pi a\left[x\right]_b^{b+h}$$
$$= 2\pi a\left(b+h-h\right)$$
$$= 2\pi ab$$

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্ৰদত্ত উপবৃত্তটো হ'ল $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$ ... (1)

উপবৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (1) অৰ লগত তুলনা কৰি আমি পাওঁ

a=4, b=2 মুখ্য অক্ষ হ'ল x-অক্ষ।

গতিকে আমি বক্ৰ (1) অক x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিক্ৰমণ কৰিব লাগিব।

(1) অক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ

$$2x+8y\frac{dy}{dx}=0$$

বা $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}$

$$\therefore \frac{ds}{dx}=\sqrt{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}}=\sqrt{\left\{1+\frac{x^2}{16y^2}\right\}}=\sqrt{\frac{16y^2+x^2}{16y^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{\left\{\left(64-4x^2\right)+x^2\right\}}}{4y}$$

$$=\frac{\sqrt{64-3x^2}}{4y} \quad \text{... (2)}$$

এতিয়া (1) উপবৃত্তটো দুয়োডাল অক্ষসাপেক্ষে প্ৰতিসম আৰু প্ৰথম চোকত থকা উপবৃত্তটোৰ চাপৰ বাবে, x , 0 ৰ পৰা 4 অলৈ সলনি হয়।

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া পৃষ্ঠ

= 2 $\times$ প্ৰথম চোকত চাপটোৰ পৰিক্ৰমণৰ ফলত উৎপন্ন হোৱা পৃষ্ঠ।

$$= 2\int_0^4 2\pi y\frac{ds}{dx}dx$$

$$= 4\pi\int_0^4 y.\frac{\sqrt{64-3x^2}}{4y}dx \text{ ,from (2)}$$

$$= \pi\int_0^4 \sqrt{64-3x^2}\,dx$$

$$= \pi\sqrt{3}\int_0^4 \sqrt{\left\{\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2 - x^2\right\}}dx$$

$$= \pi\sqrt{3}\left[\frac{x}{2}\sqrt{\left\{\left(\frac{8}{\sqrt{3}}\right)^2 - x^2\right\}} - x^2 + \frac{1}{2}.\frac{64}{3}\sin^{-1}\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)\right]_0^1$$

$$= \pi\sqrt{3}\left[2\sqrt{\left(\frac{64}{3} - 16\right)} + \frac{32}{3}\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$$

$$= \pi\sqrt{3}\left[\frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{32}{3}.\frac{\pi}{3}\right]$$

$$= 8\pi\left[1 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right]$$

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৯ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।



৬.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ $y = 4x^2$, $x = 0$ আৰু $y = 16$ এ আগুৰা সামতলিক অংশ y-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিক্ৰমণ কৰাৰ ফলত উৎপন্ন ঘনৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ২ ঃ $y^2 = 8x$ অধিবৃত্ত আৰু ইয়াৰ নাভিলম্বই আগুৰা অংশ y-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিক্ৰমণ কৰাৰ ফলত উৎপন্ন হোৱা ঘনৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ ঃ $y = 4x - x^2$ অধিবৃত্তৰ x-অক্ষই কটা অংশ $y = 6$ ৰেখা সাপেক্ষে পৰিক্ৰমণ কৰাৰ ফলত সৃষ্টি হোৱা ঘনৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ ঃ $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$, x-অক্ষ আৰু y-অক্ষই আগুৰা অংশ x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিক্ৰমণ কৰাৰ ফলত উৎপন্ন হোৱা ঘনৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৫ ঃ $y^2 = x^2(2 - x)$ বক্ৰ x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিক্ৰমণ কৰাৰ ফলত উৎপন্ন হোৱা ঘনৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৬ ঃ বক্ৰৰ $x = y^3$ আৰু $y = 0$ আৰু $y = 1$ অৰ মাজত থকা চাপ y-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিক্ৰমণ কৰাৰ ফলত উৎপন্ন হোৱা ঘনৰ পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৭ ঃ $x^2\left(a^2 - x^2\right) = 8a^2y^2$ বক্ৰৰ এটা চক্ৰৱৰ্তনী x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিক্ৰমণ কৰাৰ ফলত উৎপন্ন হোৱা পৰিক্ৰমজ পৃষ্ঠৰ কালি নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৮ ঃ $y = mx$ ৰেখাৰ $x = 0$ আৰু $x = 2$ ৰ মাজত থকা অংশ x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিক্ৰমণ কৰাৰ ফলত সৃষ্টি হোৱা ঘনৰ পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৯ ঃ $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তৰ নাভিলম্বই কটা অংশ শীৰ্ষবিন্দুত টনা স্পৰ্শক সাপেক্ষে পৰিক্ৰমণ হ'ল এনেদৰে সৃষ্টি হোৱা ঘনৰ বক্ৰপৃষ্ঠৰ কালি নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ১০ ঃ $y^2\left(a + x\right) = x^2\left(a - x\right)$ বক্ৰ x-অক্ষ সাপেক্ষে পৰিক্ৰমণ কৰাৰ ফলত সৃষ্টি হোৱা ঘনৰ পৃষ্ঠকালি নিৰ্ণয় কৰক।

*** ***** ***