অধ্যায় ১১ ঃ উচ্চতৰ ক্ৰমৰ ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ (LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF HIGHER ORDER)

অধ্যায় গাঁথনি

১১.১ উদ্দেশ্য

১১.২ পৰিচয়

১১.৩ ধ্ৰুৱক সহগবিশিষ্ট উচ্চতৰ ক্ৰমৰ ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ

১১.৩.১ পূৰক ফলন উলিওৱাৰ পদ্ধতি

১১.৩.২ বিশেষ অনুকল উলিওৱাৰ পদ্ধতি

১১.৬ অধ্যায়টোৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১১.৭ অধিক জানিবলৈ

১১.৮ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১১.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন

১১.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টো অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- ধ্ৰুৱক সহগবিশিষ্ট উচ্চতৰ মাত্ৰাৰ ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব

১১.২ পৰিচয়

দ্বাদশ অধ্যায়ত বিভিন্ন ধৰণৰ প্ৰথম ক্ৰম আৰু উচ্চতৰ মাত্ৰাৰ অৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ আৰু ইয়াৰ সমাধানৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিছোঁ। এই অধ্যায়ত আমি ধ্ৰুৱক সহগবিশিষ্ট উচ্চতৰ ক্ৰমৰ ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ সমাধানৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

১১.৩ ধ্ৰুৱক সহগবিশিষ্ট ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণ

ধ্ৰুৱক সহগবিশিষ্ট n তম ক্ৰমৰ এটা সাধাৰণ ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ আকাৰ এনেধৰণৰ

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + P_n y = X \quad \text{... (1)}$$

ইয়াত $P_1, P_2, \cdots, P_n$ ধ্ৰুৱক আৰু X এটা x অৰ ফলন বা ধ্ৰুৱক।

যদি $\frac{d^n y}{dx^n}$ অৰ সহগ 1 নহয়, তেনেহ'লে আমি সেই সহগটোৰে প্ৰতিটো পদক হৰণ কৰোঁ।

আমি সমীকৰণটোৰ দুটা আকাৰ বিবেচনা কৰোঁ, যথা, (i) X = 0, (ii) X এটা x অৰ ফলন বা সহগ।

উপপাদ্য ১১.৩.১ ঃ যদি $\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0$ ... (1)

সমীকৰণৰ $y = f(x)$ সাধাৰণ সমাধান হয়,

আৰু $\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = X$ ... (2)

সমীকৰণৰ $y = \phi(x)$ এটা সমাধান হয়, তেনেহ'লে (2) ৰ সাধাৰণ সমাধান হ'ল $y = f(x) + \phi(x)$.

প্ৰমাণ ঃ যিহেতু (1) অৰ $y = f(x)$ সাধাৰণ সমাধান,

$$\therefore \frac{d^n f}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} f}{dx^{n-2}} + \cdots + P_{n-1} \frac{df}{dx} + P_n f = 0$$

আকৌ, (2) ৰ $y = \phi(x)$ এটা সমাধান,

$$\therefore \frac{d^n \phi}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} \phi}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} \phi}{dx^{n-2}} + \cdots + P_{n-1} \frac{d\phi}{dx} + P_n \phi = X$$

এতিয়া, $\frac{d^n (f+\phi)}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} (f+\phi)}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} (f+\phi)}{dx^{n-2}} + \cdots + P_{n-1} \frac{d(f+\phi)}{dx} + P_n (f+\phi) = 0 + X = X$

$\therefore$ সমীকৰণ (2) ৰ $y = f(x) + \phi(x)$ এটা সমাধান।

উপপাদ্য ১১.৩.২ ঃ যদি $\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0$ ... (1)

সমীকৰণৰ $y = y_1, y = y_2, \ldots, y = y_n$ সমাধান হয়, তেনেহ'লে (1) সমীকৰণৰ $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$ এটা সমাধান। ইয়াত $C_1, C_2, \cdots, C_n$ স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক।

প্ৰমাণ ঃ আমি পাওঁ

$$C_1 \left(\frac{d^n y_1}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1} \frac{dy_1}{dx} + p_n y_1 \right) +$$

$$C_2\left(\frac{d^n y_2}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}+\cdots+P_{n-1}\frac{dy_2}{dx}+p_n y_2\right) +,\cdots,+$$

$$\left(\frac{d^n y_n}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}+\cdots+P_{n-1}\frac{dy_n}{dx}+p_n y_n\right)$$

$$= C_1\times 0 + C_2\times 0 +,\cdots,+C_n\times 0$$

$$= 0$$

$\therefore$ (1)অৰ $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$ এটা সমাধান।

এই সমাধানটোত nটা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক আছে। গতিকে ই সমীকৰণটোৰ সাধাৰণ বা সম্পূৰ্ণ সমাধান।

টোকা ঃ (1) ওপৰৰ ফল দুটাৰ পৰা এইটো কথা স্পষ্ট হৈ পৰিল যে (2) ৰ সম্পূৰ্ণ সমাধানত দুটা অংশ থাকে। প্ৰথম অংশ হ'ল (1) অৰ সাধাৰণ সমাধান। ইয়াক পূৰক ফলন (complementary function, সংক্ষেপে C.F) বুলি কোৱা হয়। ইয়াত n টা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক থাকে। দ্বিতীয় অংশ হ'ল (2)ৰ এটা সমাধান। ইয়াক বিশেষ অনুকল (particular integral, সংক্ষেপে P.I) বোলে। ইয়াত স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক নাথাকে।

গতিকে (2) ৰ সম্পূৰ্ণ বা সাধাৰণ সমাধান হ'ল

$$y = \text{C.F} + \text{P.I}$$

(2) এটা ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ $y_1(x)$ এটা সমাধান হ'লে, সমীকৰণটোৰ $Cy_1(x)$ ও এটা সমাধান।

এটা ৰৈখিক অৱকল সমীকৰণৰ $y_1(x)$ আৰু $y_2(x)$ দুটা সমাধান হ'লে, সমীকৰণটোৰ $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ ও এটা সমাধান।

সংকাৰক (Operator) D আৰু ইয়াৰ ধৰ্ম

ধৰা হ'ল $D=\frac{d}{dx}$ আৰু $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}(Dy)=D(Dy)=D^2y$ আৰু এইদৰে

$$\frac{d^n y}{dx^n}=D^n y.$$

গতিকে সমীকৰণ (2) ক এনেদৰে লিখিব পাৰি

$$\left(D^n+P_1D^{n-1}+\cdots+P_n\right)y=X.$$

m আৰু n ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হ'লে $D^mD^n=D^nD^m=D^{m+n}$.

নিগমন ৩ ঃ α আৰু β অধিক হ'লে

$$(D-\alpha)(D-\beta)y=(D-\beta)(D-\alpha)y=\left(D^2-(\alpha+\beta)D+\alpha\beta\right)y$$

প্ৰমাণ ঃ $(D-\alpha)(D-\beta)y=(D-\alpha)(Dy-\beta y)$

$$= D(Dy - \beta y) - \alpha(Dy - \beta y)$$
$$= D^2 y - \beta Dy - \alpha Dy + \alpha\beta y$$
$$= D^2 y - (\alpha + \beta)Dy + \alpha\beta y$$

সেইদৰে $(D-\beta)(D-\alpha)y = D^2 y - (\alpha+\beta)Dy + \alpha\beta y$
$$= (D^2 - (\alpha+\beta)D + \alpha\beta)y$$

১১.৩.১ পূৰক ফলন উলিওৱাৰ পদ্ধতি

$$\frac{d^n y}{dx^n} + k_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + k_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + k_n y = 0$$

ৰৈখিক সমীকৰণটো লোৱা হ'ল। ইয়াত $k_1, k_2, \cdots, k_n$ ধ্ৰুৱক আৰু সোঁহাতৰ ৰাশি $X = 0$ আৰু ইয়াক

$\frac{d^n y}{dx^n} + k_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + k_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + k_n y = X$ অৰ সহায়ক সমীকৰণ বুলি কোৱা হয়।

সংকাৰক D ৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে লিখিব পাৰি

$(D^n + k_1 D^{n-1} + \cdots + k_n)y = X$

ধৰা হ'ল $(D^n + k_1 D^{n-1} + \cdots + k_n)y = 0$ ... (3) সমীকৰণৰ $y = e^{mx}$ এটা সমাধান।

$\therefore Dy = me^{mx}, D^2 y = m^2 e^{mx}, \ldots, D^n y = m^n e^{mx}$ গতিকে, সমীকৰণ (3) হ'বগৈ $(m^n + k_1 m^{n-1} + k_2 m^{n-2} + \cdots + k_n)e^{mx} = 0$

$\Rightarrow m^n + k_1 m^{n-1} + k_2 m^{n-2} + \cdots + k_n = 0 \quad (\because e^{mx} \neq 0)$ ... (4)

প্ৰথম ক্ষেত্ৰ ঃ যদি $m_1, m_2, \cdots, m_n$ (4) অৰ বাস্তৱ আৰু পৃথক মূল হয়, তেনেহ'লে (3) ক এনেদৰে লিখিব পাৰি

$(D-m_1)(D-m_2)\cdots(D-m_n)y = 0$ ... (5)

$(D-m_n)y = 0$ য়ে (3) সিদ্ধ কৰিব।

$\frac{dy}{dx} = m_n y$ সমাধান কৰি আমি পাওঁ

বা $\frac{dy}{y} = m_n dx$

বা $\log y = m_n x + \log c$

বা $\log \frac{y}{c} = m_n x$

বা $y = e^{m_n x}$

যিহেতু (5) অৰ উৎপাদকবোৰৰ ক্ৰম সিহঁতৰ স্থানৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল নহয়, $(D - m_i)y = 0$, $1 \le i \le n$ ৰ সমাধানে (3) সিদ্ধ কৰিব,

অৰ্থাৎ $y = c_i e^{m_i x}$ $(1 \le i \le n)$

$\therefore$ (3) ৰ সাধাৰণ সমাধান অৰ্থাৎ পূৰক ফলন হ'ল

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$$

দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰ ঃ যদি দুটা মূল সমান হয়, ধৰা হ'ল $m_1 = m_2$, তেনেহ'লে (3)ৰ সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ব $y = (c_1 + c_2 x)e^{m_1 x} + c_3 e^{m_3 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$

সেইদৰে, যদি $m_1 = m_2 = m_3, m_4, m_5, \cdots, m_n$ মূল হয়, তেনেহ'লে সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ব $y = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2)e^{m_1 x} + c_4 e^{m_4 x} + c_5 e^{m_5 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$

তৃতীয় ক্ষেত্ৰ ঃ যদি এযোৰ মূল কাল্পনিক হয়, অৰ্থাৎ $m_1 = \alpha + i\beta$ আৰু $m_2 = \alpha - i\beta$ তেনেহ'লে, সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ব

$$y = c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x} + c_3 e^{m_3 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$$

$$y = e^{\alpha x}\left[c_1(\cos \beta x + i \sin \beta x) + c_2(\cos \beta x - i \sin \beta x)\right] + c_3 e^{m_3 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$$

$$= e^{\alpha x}\left[c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x\right] + c_3 e^{m_3 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$$

য'ত $C_1 = c_1 + c_2$ আৰু $C_2 = i(c_1 - c_2)$

চতুৰ্থ ক্ষেত্ৰ ঃ যদি কাল্পনিক মূলৰ দুযোৰ সমান হয়, অৰ্থাৎ, $m_1 = m_2 = \alpha + i\beta$, $m_3 = m_4 = \alpha - i\beta$, তেনেহ'লে দ্বিতীয় ক্ষেত্ৰৰ দৰে সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ব

$$y = e^{\alpha x}\left[(c_1 + c_2 x)\cos \beta x + (c_3 + c_4 x)\sin \beta x\right] + c_5 e^{m_5 x} + \cdots + c_n e^{m_n x}$$

উদাহৰণ 1 ঃ সমাধান কৰক (i) $2D^2 y + 9Dy - 18y = 0$

(ii) $\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{dy}{dx} = 0$

(iii) $(D^4 - 7D^2 + 6D)y = 0$

সমাধান ঃ (i) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $2m^2 + 9m - 18 = 0$

বা $2m^2 + 12m - 3m - 18 = 0$

বা $2m(m+6) - 3(m+6) = 0$

বা $(2m-3)(m+6) = 0$

বা $m = \frac{3}{2}, -6$

$\therefore$ $\frac{3}{2}$ আৰু - 6 পৃথক বাস্তৱ মূল। গতিকে সমাধান হ'ল

$y = Ae^{\frac{3}{2}x} + Be^{-6x}$.

(ii) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^3 - m = 0$

বা $m(m+1)(m-1) = 0$

বা $m = 0,-1,1$

গতিকে সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল $y = A + Be^{-x} + Ce^{x}$.

(iii) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^4 - 7m^2 + 6m = 0$

স্পষ্টতঃ $m = 0$ আৰু 1 দুটা মূল।

গতিকে, সমীকৰণটো এনেদৰে লিখিব পাৰি

$m(m^3 - 7m + 6) = 0$

বা $m(m-1)(m^2 + m - 6) = 0$

বা $m(m-1)(m+3)(m-2) = 0$

গতিকে, মূলকেইটা হ'ল m = 0, 1, 2, –3.

গতিকে সমাধান হ'ল $y = A + Be^{x} + Ce^{2x} + De^{-3x}$.

উদাহৰণ 2 ঃ সমাধান কৰক (i) $\frac{d^2x}{dt^2} + 6\frac{dx}{dt} + 9x = 0$

(ii) $(D^3 - 3mD^2 + 3m^2D - m^3)y = 0$

(iii) $\frac{d^4y}{dx^4} - 4\frac{d^3y}{dx^3} + 4\frac{d^2y}{dx^2} = 0$

(iv) $(D^5 - D^4 - 2D^3 + 2D^2 + D - 1)y = 0$

সমাধান ঃ (i) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2 + 6m + 9 = 0$

বা $(m+3)^2 = 0$

$\therefore \quad m = 3,-3$ সমান মূল

গতিকে, সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল $y = (Ax + B)e^{-3x}$.

(ii) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $u^3 - 3mu^2 + 3m^2u - u^3 = 0$

বা $(u - m)^3 = 0$

$\therefore$ সমীকৰণটোৰ মূলকেইটা হ'ল $u = m, m, m$

গতিকে সাধাৰণ সমাধান হ'ল $y = (Ax^2 + Bx + C)e^{mx}$.

(iii) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^4 - 4m^3 + 4m^2 = 0$

বা $m^2(m^2 - 4m + 4) = 0$

বা $m^2(m-2)^2=0$

$\therefore$ সমীকৰণটোৰ মূলকেইটা হ'ল $m=0,0$ আৰু 2, 2.

গতিকে সাধাৰণ সমাধান হ'ল

$$y=(Ax+B)e^{0.x}+(Cx+D)e^{2x}$$
$$=Ax+B+(Cx+D)e^{2x}$$

(iv) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^5-m^4-2m^3+2m^2+m-1=0$

স্পষ্টতঃ $m=\pm 1$ দুটা মূল আৰু সেয়ে (m^2-1) এটা উৎপাদক।

$$m^5-m^4-2m^3+2m^2+m-1=(m^2-1)(m^3-m^2-m+1)$$
$$=(m^2-1)\{m^2(m-1)-(m-1)\}$$
$$=(m^2-1)(m-1)(m^2-1)$$
$$=(m+1)(m-1)(m-1)(m+1)(m-1)$$
$$=(m+1)^3(m-1)^2$$

গতিকে সহায়ক সমীকৰণটোৰ 1, 1, 1, –1, –1 পাঁচটা মূল।

গতিকে সমীকৰণটোৰ সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল

$$y=(Ax^2+Bx+C)e^{x}+(Dx+E)e^{-x}.$$

উদাহৰণ 3 ঃ সমাধান কৰক (i) $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+10y=0$

(ii) $(D^2+n^2)y=0$

(iii) $D^3y+D^2y+Dy+y=0$

(iv) $(D^4+8D^2+16)y=0$

(v) $(D^3-8)y=0$

(vi) $D^2-2mD+(m^2+n^2)y=0$

(vii) $\frac{d^5y}{dx^5}+4\frac{d^2y}{dx^2}=0$

সমাধান ঃ (i) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2+2m+10=0$

গতিকে, $m=\frac{-2\pm i6}{2}=-1\pm 3i$

দুটা জটিল মূল। গতিকে সমীকৰণটোৰ সমাধান হ'ল

$$y=(A\cos 3x+B\sin 3x)e^{-x}$$

(ii) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2+n^2=0$

বা $m=0\pm in$ জটিল সংযুগ্মী মূল

গতিকে সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল $y = A\cos nx + B\sin nx$.

(iii) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^3 + m^2 + m + 1 = 0$

বা $m^2(m+1) + (m+1) = 0$

বা $(m^2+1)(m+1) = 0$

বা $m = -1, m = 0 \pm i$ মূল।

গতিকে সমাধান হ'ল $y = Ae^{-x} + B\cos x + C\sin x$.

(iv) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^4 + 8m^2 + 16 = 0$

বা $(m^2+4)^2 = 0$

বা $m = \pm 2i, \pm 2i$

গতিকে সমাধান হ'ল $y = (Ax+B)\cos 2x + (Cx+D)\sin 2x$.

(v) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^3 - 8 = 0$

বা $(m-2)(m^2+2m+4) = 0$

বা $m = 2, \dfrac{-2 \pm i2\sqrt{3}}{2}$

বা $m = 2, -1 \pm i\sqrt{3}$ সমীকৰণটোৰ মূল।

গতিকে সমাধান হ'ল $y = Ae^{2x} + \left(B\cos\sqrt{3}x + C\sin\sqrt{3}x\right)e^{-x}$.

(vi) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $t^2 - 2mt + (m^2 + n^2) = 0$

$\therefore\ t = \dfrac{2m \pm \sqrt{4m^2 - 4m^2 - 4n^2}}{2} = m \pm in$ জটিল সংযুগ্মী মূল।

গতিকে, সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল $y = e^{mx}(A\cos nx + B\sin nx)$.

(vii) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^5 + 4m^2 = 0$

বা $m^2\left(m^3 + \left(4^{\frac{1}{3}}\right)^3\right) = 0$

সমীকৰণটোৰ মূল হ'ল $m = 0,0,-4^{\frac{1}{3}}, \dfrac{1}{2}\left(4^{\frac{1}{3}} \pm \sqrt{4^{\frac{2}{3}} - 4.4^{\frac{2}{3}}}\right)$

অৰ্থাৎ, $m = 0,0,-4^{\frac{1}{3}}, 2^{-\frac{1}{3}}\left(1 \pm i\sqrt{3}\right)$

গতিকে, সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল

$$y = (Ax+b)e^{o.x} + Ce^{-4^{\frac{1}{3}}x} + e^{2^{-\frac{1}{3}}x}\left(D\cos(2^{-\frac{1}{3}}\sqrt{3})x + E\sin(2^{-\frac{1}{3}}\sqrt{3})x\right)$$

$$= Ax + B + Ce^{-\sqrt[3]{4}x} + e^{-\sqrt[3]{2}x}\left(D\cos\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}x + E\sin\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}x\right).$$



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ১

প্ৰশ্ন নং ১ ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(i) $\frac{d^3y}{dx^3} - 7\frac{dy}{dx} - 6y = 0$

(ii) $\frac{d^4y}{dx^4} + 13\frac{d^2y}{dx^2} + 36y = 0$

(iii) $\left(D^2+1\right)^2(D-1)y = 0$

(iv) $\left(D^4 - 2D^3 + 2D^2 - 2D + 1\right)y = 0$

(v) $\frac{d^3y}{dx^3} + 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} + 6y = 0$

(vi) $\left(D^3 + 3D^2 + 3D + 1\right)y = 0$

(vii) $\left(D^4 - 5D^2 + 4\right)y = 0$

(viii) $\left(D^4 - 81\right)y = 0$

(ix) $\left(D^6 - 1\right)y = 0$

(x) $\left(D^4 + 2D^3 + 3D^2 + 2D + 1\right)y = 0$

১১.৩.২ বিশেষ অনুকল উলিওৱাৰ পদ্ধতি

আমি ইতিমধ্যে আলোচনা কৰিছোঁ যে $\left(D^n + k_1D^{n-1} + k_2D^{n-2} + \cdots + k_n\right)y = X$ ... (1) সমীকৰণৰ সাধাৰণ সমাধানত দুটা অংশ থাকে, পূৰক ফলন (complementary function, C.F) আৰু বিশেষ অনুকল (particular integral, P.I)।

সাধাৰণ সমাধান (General solution, G.S) = C.F +P.I.

(I) অক এনেদৰে লিখিব পাৰি $f(D)y = X$ ... (2)

(2) ৰ বিশেষ অনুকলন $= \frac{1}{f(D)}X$

প্ৰথম ফল $\frac{1}{D}X = \int X dx$

ধৰা হ'ল $\frac{1}{D}X = v$ গতিকে $D\left(\frac{1}{D}\right)X = Dv$

বা $X = Dv = \frac{dv}{dx}$

সেয়ে, $\int Xdx = v = \frac{1}{D}X$

টোকা ঃ $\frac{1}{D^2}X = \frac{1}{D}\left(\frac{1}{D}X\right) = \frac{1}{D}\int Xdx = \int\left(\int Xdx\right)dx$

উদাহৰণ স্বৰূপে, $\frac{1}{D^2}(\sin x) = \frac{1}{D}(\int \sin x dx) = \frac{1}{D}(-\cos x) = -\sin x$.

দ্বিতীয় ফল ঃ $\frac{1}{D-a}(X) = e^{ax}\int Xe^{-ax}dx$

ধৰা হ'ল, $\frac{1}{D-a}(X) = y$

গতিকে, $(D-a)\frac{1}{D-a}(X) = (D-a)y$

বা $(D-a)y = X$

বা $\frac{dy}{dx} - ay = X$, এইটো এটা ৰৈখিক সমীকৰণ আৰু I.F $= e^{-ax}$.

গতিকে, ইয়াৰ সমাধান হ'ল $y = e^{ax}\int Xe^{-ax}dx$.

গতিকে, $\frac{1}{D-a}(X) = e^{ax}\int Xe^{-ax}dx$.

সেইদৰে, $\frac{1}{D+a}(X) = e^{-ax}\int Xe^{ax}dx$

এতিয়া আমি $X(x) = e^{ax}, \sin(ax+b), \cos(ax+b), x^m, e^{ax}v(x)$ অৰ বাবে P.I উলিওৱাৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। শেহত আমি x অৰ যিকোনো ফলনৰ বাবে P.I উলিওৱাৰ পদ্ধতি সম্পৰ্কে আলোচনা কৰিম।

ক্ষেত্ৰ I (a) যেতিয়া $X(x) = e^{ax}$, $\frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{e^{ax}}{f(a)}$ যদি $f(a) \neq 0$.

$$f(D) = \left(D^n + k_1D^{n-1} + k_2D^{n-2} + \cdots + k_{n-1} + k_n\right)e^{ax}$$

$$= a^ne^{ax} + k_1a^{n-1}e^{ax} + k_2a^{n-2}e^{ax} + \cdots + k_{n-1}ae^{ax} + k_ne^{ax}$$

$$= f(a)e^{ax}$$

গতিকে, $\frac{1}{f(D)}\left[f(D)e^{ax}\right] = \frac{1}{f(D)}\left[f(a)e^{ax}\right] = f(a)\frac{1}{f(D)}e^{ax}$

বা $e^{ax} = f(a)\frac{1}{f(D)}e^{ax}$

গতিকে, $\frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{e^{ax}}{f(a)}$ যদি $f(a) \neq 0$.

(b) যদি $f(a) = 0$, $\frac{1}{f(D)}e^{ax} = x\frac{1}{f'(a)}e^{ax}$

$f(a) = 0$ ৰ পৰা পোৱা যায় যে $f(D) = 0$ৰ $D - a$ এটা উৎপাদক।

গতিকে, $f(D) = (D-a)\phi(D)$ আৰু $\phi(a) \neq 0$.

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{1}{D-a}.\frac{1}{\phi(D)}e^{ax} = \frac{1}{D-a}.\frac{1}{\phi(a)}e^{ax}$$

$$= \frac{1}{\phi(a)}\frac{1}{D-a}e^{ax}$$

$$= \frac{1}{\phi(a)}e^{ax}\int e^{-ax}.e^{ax}dx \text{ (দ্বিতীয় ফল)}$$

$$= x\frac{1}{\phi(a)}e^{ax}$$

$f(D) = (D-a)\phi(D)$

অৱকলন কৰি, $f'(D) = \phi(D) + \phi'(D)(D-a)$

বা $f'(a) = \phi(a) + \phi'(a)(a-a)$

গতিকে, $f'(a) = \phi(a) + \phi'(a) \times 0$

$f'(a) = \phi(a)$

সেয়েহে, $\frac{1}{f(D)}e^{ax} = x\frac{1}{f'(a)}e^{ax}$ যদিহে $f'(a) \neq 0$.

টোকা ঃ যদি $f'(a) = 0$, তেনেদৰে দেখুৱাব পাৰি যে

$\frac{1}{f(D)}e^{ax} = x^2\frac{1}{f''(a)}e^{ax}$, যদিহে $f''(a) \neq 0$.

উদাহৰণ 1 ঃ $\frac{1}{(D-2)^3}e^{2x}$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে $\frac{1}{D-a}(X) = e^{ax}\int Xe^{-ax}dx$

$$\frac{1}{(D-2)}e^{2x} = e^{2x}\int e^{-2x}e^{2x}dx$$

$$= e^{2x}x$$

গতিকে, $\frac{1}{(D-2)^2}e^{2x} = \frac{1}{D-2}xe^{2x}$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\int xe^{2x}e^{-2x}dx$$

$$= \frac{e^{2x}x^2}{2}$$

আৰু $\frac{1}{(D-2)^3}e^{2x} = \frac{1}{2}\frac{1}{D-2}\left(x^2e^{2x}\right)$

$$= \frac{1}{2}e^{2x}\int\left(x^2e^{2x}\right)e^{-2x}dx$$

$$= \frac{x^3e^{2x}}{6}$$

উদাহৰণ 2 ঃ $\left(D^2+5D+6\right)y = e^x$ সমাধান কৰক।

সমাধান ঃ সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2+5m+6=0$

বা $(m+2)(m+3)=0$

বা $m=-2,-3$

পূৰক ফলন হ'ল $Ae^{-2x}+Be^{-3x}$

$$\text{P. I} = \frac{1}{D^2+5D+6}e^x$$

$$= \frac{1}{1+5+6}e^x = \frac{e^x}{12}$$

সাধাৰণ সমাধান হ'ল $y = \text{C.F} + \text{P.I} = Ae^{-2x}+Be^{-3x}+\frac{e^x}{12}$.

উদাহৰণ 3 ঃ $(D+2)(D-1)^2y = e^{-2x}+2\sinh x$ সমাধান কৰক।

সমাধান ঃ সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $(m+2)(m-1)^2=0$ আৰু ইয়াৰ মূল হ'ল—2, 1, 1.

C. F $= Ae^{-2x}+(Bx+C)e^x$

$$\text{P. I} = \frac{1}{(D+2)(D-1)^2}\left(e^{-2x}+2\sinh x\right)$$

$$= \frac{1}{(D+2)(D-1)^2}\left(e^{-2x}+e^x-e^{-x}\right)$$

$$= \frac{1}{(D+2)(D-1)^2}e^{-2x} + \frac{1}{(D+2)(D-1)^2}e^{x} - \frac{1}{(D+2)(D-1)^2}e^{-x}$$

$$= \frac{1}{9}\frac{1}{(D+2)}e^{-2x} + \frac{1}{3}\frac{1}{(D-1)^2}e^{x} - \frac{1}{4}e^{-x} \left[\frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{e^{ax}}{f(a)}\right.$$

যদি $f(a) \neq 0$]

$$= \frac{1}{9}xe^{-2x} + \frac{1}{3}\frac{x^2}{2!}e^{x} - \frac{1}{4}e^{-x} \qquad \left[\frac{1}{f(D)}e^{ax} = x\frac{1}{f'(a)}e^{ax}\right]$$

$$= \frac{x}{9}e^{-2x} + \frac{x^2}{6}e^{x} - \frac{1}{4}e^{-x}$$

সাধাৰণ সমাধান হ'ল $y = Ae^{-2x} + (Bx+C)e^{x} + \frac{x}{9}e^{-2x} + \frac{x^2}{6}e^{x} - \frac{1}{4}e^{-x}$.

উদাহৰণ 4 ঃ $(D^3 - 2D^2 + D)y = e^{-x}$ সমাধান কৰক

সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^3 - 2m^2 + m = 0$

বা $m(m^2 - 2m + 1) = 0$

বা $m(m-1)^2 = 0$

সমীকৰণটোৰ মূল হ'ল 0, 1, 1.

C.F $= Ae^{o.x} + (Bx+C)e^{x} = A + (Bx+C)e^{x}$

P. I $= \frac{1}{D(D-1)^2}e^{-x} = \frac{e^{-x}}{-1.4} = \frac{-1}{4}e^{-x}$

সাধাৰণ সমাধান হ'ল $y = A + (Bx+C)e^{x} - \frac{1}{4}e^{-x}$.

ক্ষেত্ৰ II যেতিয়া $X = \sin(ax+b)$ or $\cos(ax+b)$

$$\frac{1}{f(D^2)}\sin(ax+b) = \frac{1}{f(-a^2)}\sin(ax+b) \text{ if } f(-a^2) \neq 0$$

প্ৰমাণ ঃ

ধৰা হ'ল $f(D^2) = (D^2)^n + k_1(D^2)^{n-1} + k_2(D^2)^{n-2} + \cdots + k_{n-1}D^2 + k_n$

$D(\sin(ax+b)) = a\cos(ax+b)$ আৰু

$D^2(\sin(ax+b)) = (-a^2)\sin(ax+b)$

$D^3(\sin(ax+b)) = (-a^3)\cos(ax+b)$ আৰু

$D^4(\sin(ax+b)) = a^4\cos(ax+b) = (-a^2)^2\sin(ax+b)$

আৰু সাধাৰণভাৱে, $\left(D^2\right)^r\left(\sin\left(ax+b\right)\right)=\left(-a^2\right)^r\sin\left(ax+b\right)$

গতিকে, $f\left(D^2\right)\sin\left(ax+b\right)=f\left(-a^2\right)\left(\sin\left(ax+b\right)\right)$

যিহেতু, $\sin\left(ax+b\right)=f\left(-a^2\right)\frac{1}{f\left(D^2\right)}\sin\left(ax+b\right)$ গতিকে

$\frac{1}{f\left(D^2\right)}\sin\left(ax+b\right)=\frac{\sin\left(ax+b\right)}{f\left(-a^2\right)}$, যদি $f\left(-a^2\right)\neq 0$

সেইদৰে, $\frac{1}{f\left(D^2\right)}\cos\left(ax+b\right)=\frac{\cos\left(ax+b\right)}{f\left(-a^2\right)}$, যদি $f\left(-a^2\right)\neq 0$

যদি $f\left(-a^2\right)=0$, $f\left(D^2\right)=\left(D^2+a^2\right)\phi\left(D^2\right)$ আৰু

$$\frac{1}{f\left(D^2\right)}\sin\left(ax+b\right)=\frac{1}{D^2+a^2}\frac{1}{\phi\left(D^2\right)}\sin\left(ax+b\right)$$

$$=\frac{1}{\phi\left(-a^2\right)}\frac{1}{D^2+a^2}\sin\left(ax+b\right)$$

$$=\frac{1}{\phi\left(-a^2\right)}x\sin\left(ax+b\right)$$

$$=\frac{1}{f'\left(-a^2\right)}x\sin\left(ax+b\right)$$

আৰু $\frac{1}{f\left(D^2\right)}\cos\left(ax+b\right)=\frac{1}{f'\left(-a^2\right)}x\cos\left(ax+b\right)$ if $f'\left(-a^2\right)\neq 0$.

উদাহৰণ 5 ঃ সমাধান কৰক $\left(D^2+3D+2\right)y=4\cos^2 x$

সমাধান ঃ সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2+3m+2=0$ আৰু ইয়াৰ মূল $m=-1,-2$.

$$\text{C.F}=Ae^{-x}+Be^{x}$$

$$\text{P.I}=\frac{1}{D^2+3D+2}4\cos^2 x$$

$$=\frac{1}{D^2+3D+2}2\left(1+\cos 2x\right)$$

$$=\frac{1}{D^2+3D+2}2+\frac{1}{D^2+3D+2}2\cos 2x$$

$$=\left(\frac{1}{D+1}-\frac{1}{D+2}\right)2+2.\frac{D^2+2-3D}{\left(D^2+2\right)^2-9D^2}\cos 2x$$

$$= e^{-x}\int e^{x}\,2dx - e^{-2x}\int e^{2x}.2dx + \frac{1}{20}\left(-4\cos 2x + 6\sin 2x + 2\cos 2x\right)$$

$$\left[\ \frac{1}{D-a}(X) = e^{ax}\int Xe^{-ax}dx\ .\ \right]$$

$$= 2 - 1 + \frac{1}{10}\left(3\sin 2x - \cos 2x\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{10}\left(3\sin 2x - \cos 2x\right)$$

সাধাৰণ সমাধান হ'ল $y = Ae^{-x} + Be^{-2x} + 1 + \frac{1}{10}\left(3\sin 2x - \cos 2x\right)$

উদাহৰণ 6 ঃ সমাধান কৰক $\left(D^3 + 2D^2 + D\right)y = e^{2x} + \sin 2x$

সমাধান ঃ সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^3 + 2m^2 + m = 0$

বা $m\left(m^2 + 2m + 1\right) = 0$

বা $m = 0, -1, -1$

C.F $= A + \left(Bx + C\right)e^{-x}$

P.I $= \frac{1}{D^3 + 2D^2 + D}\left(e^{2x} + \sin 2x\right)$

$$= \frac{1}{D^3 + 2D^2 + D}e^{2x} + \frac{1}{D^3 + 2D^2 + D}\sin 2x$$

$$= \frac{1}{18}e^{2x} + \frac{1}{-2^2..D + 2\left(-2^2\right) + D}\sin 2x$$

$$= \frac{1}{18}e^{2x} + \frac{1}{-8 - 3D}\sin 2x$$

$$= \frac{1}{18}e^{2x} - \frac{3D - 8}{9D^2 - 64}\sin 2x$$

$$= \frac{1}{18}e^{2x} + \frac{1}{100}\left(6\cos 2x - 8\sin 2x\right)$$

সাধাৰণ সমাধান হ'ল $y =$ C.F +P.I

$$= A + \left(Bx + C\right)e^{-x} + \frac{1}{18}e^{2x} + \frac{1}{100}\left(6\cos 2x - 8\sin 2x\right).$$

উদাহৰণ 7 ঃ সমাধান কৰক $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 3x = \sin t$

সমাধান ঃ সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2 + 2m + 3 = 0$

$$\text{বা } m = \frac{1}{2}\left(-2 \pm \sqrt{-8}\right)$$

$$\text{বা } m = -1 \pm i\sqrt{2}$$

$$\text{C.F } = e^{-t}\left(A\cos\sqrt{2}t + B\sin\sqrt{2}t\right)$$

$$\text{P.I } = \frac{1}{D^2 + 2D + 3}\sin t$$

$$= \frac{1}{-1^2 + 2D + 3}\sin t$$

$$= \frac{2D - 2}{4D^2 - 4}\sin t$$

$$= -\frac{1}{8}\left(2\cos t - 2\sin t\right)$$

সাধাৰণ সমাধান হ'ল $x = e^{-t}\left(A\cos\sqrt{2}t + B\sin\sqrt{2}t\right) - \frac{1}{4}\left(\cos t - \sin t\right).$

ক্ষেত্ৰ III : যেতিয়া $X = x^m$, তেতিয়া $\text{P.I } = \frac{1}{f(D)}x^m = \left[f(D)\right]^{-1}x^m$

$$= \left[1 + \phi(D)\right]^{-1}x^m$$

D^m পদলৈ $\left[1 + \phi(D)\right]^{-1}$ প্ৰসাৰ কৰক D ৰ উচ্চতৰ ঘাতবোৰ পৰিহাৰ কৰক, কিয়নো $D^{m+i}\left(x^m\right) = 0$.

উদাহৰণ 8 ঃ সমাধান কৰক (i) $\left(D^3 + 3D^2 + 2D\right)y = x^2$

$$\text{(ii) } \frac{d^2y}{dx^2} + 4y = x^2 + \cos 2x$$

সমাধান ঃ (i) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^3 + 3m^2 + 2m = 0$

$$\text{বা } m\left(m^2 + 3m + 2\right) = 0$$

$$\text{বা } m(m+1)(m+2) = 0$$

$$\text{বা } m = 0, -1, -2$$

$$\text{C.F } = A + Be^{-x} + Ce^{-2x}$$

$$\text{P.I } = \frac{1}{D^3 + 3D^2 + 2D}x^2$$

$$= \frac{1}{2D}\cdot\frac{1}{\left(\frac{1}{2}D^2 + \frac{3}{2}D + 1\right)}x^2$$

$$= \frac{1}{2D}\left[1+\left(\frac{3}{2}D+\frac{1}{2}D^2\right)\right]^{-1}x^2$$

$$= \frac{1}{2D}\left[1-\left(\frac{3}{2}D+\frac{1}{2}D^2\right)+\left(\frac{3}{2}D+\frac{1}{2}D^2\right)^2-\cdots\right]x^2$$

$$= \frac{1}{2D}\left[1-\frac{3}{2}D+\left(\frac{9}{4}-\frac{1}{2}\right)D^2\right]x^2$$

$$= \frac{1}{2D}\left[x^2-3x+\frac{7}{4}\times 2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(x^2-3x+\frac{7}{2}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{6}-\frac{3x^2}{4}+\frac{7}{4}x$$

সাধাৰণ সমাধান হ'ল $y = A+Be^{-x}+Ce^{-2x}+\frac{x^3}{6}-\frac{3x^2}{4}+\frac{7}{4}x$.

(ii) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2+4=0$

বা $m=\pm 2i$

$$\text{C.F} = A\cos 2x + B\sin 2x$$

$$\text{P.I} = \frac{1}{D^2+4}\left(x^2+\cos 2x\right)$$

$$= \frac{1}{D^2+4}x^2+\frac{1}{D^2+4}\cos 2x \quad \text{... (i)}$$

$$\frac{1}{D^2+4}x^2 = \frac{1}{4}\left(1+\frac{D^2}{4}\right)^{-1}x^2 = \frac{1}{4}\left(1-\frac{D^2}{4}\right)x^2$$

$$= \frac{1}{4}x^2-\frac{1}{16}\times 2$$

$$= \frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}$$

ধৰা হ'ল $Y = \frac{1}{D^2+4}\cos 2x$ আৰু $Z = \frac{1}{D^2+4}\sin 2x$ গতিকে

$$Y+iZ = \frac{1}{D^2+4}\left(\cos 2x + i\sin 2x\right)$$

$$= \frac{1}{D^2+4}e^{2xi}$$

$$= \frac{1}{4i}\left[\frac{1}{D-2i} - \frac{1}{D+2i}\right]e^{2xi}$$

$$= \frac{1}{4i}\left[\frac{1}{D-2i}e^{2xi} - \frac{1}{D+2i}e^{2xi}\right]$$

$$= \frac{1}{4i}\left[\frac{1}{D-2i}e^{2xi} - \frac{e^{2xi}}{4i}\right] \quad \left(\frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{e^{ax}}{f(a)}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\left[e^{2xi}\int e^{-2xi}.e^{2xi}dx - \frac{e^{2xi}}{4i}\right]$$

$$\frac{1}{D-a}(X) = e^{ax}\int Xe^{-ax}dx$$

$$= \frac{1}{4i}\left[x(\cos 2x + i\sin 2x) - \frac{1}{4i}(\cos 2x + i\sin 2x)\right]$$

$$= -\frac{x}{4}i\cos 2x + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{16}\cos 2x - \frac{i}{16}\sin 2x$$

$$= \left(\frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{16}\cos 2x\right) + i\left(-\frac{1}{16}\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x\right)$$

বাস্তৱ আৰু কাল্পনিক অংশৰ সমতা স্থাপন কৰি আমি পাওঁ

$$Y = \frac{1}{D^2+4}\cos 2x = \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{16}\cos 2x$$

সাধাৰণ সমাধান হ'ল

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{8} + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{16}\cos 2x .$$

ক্ষেত্ৰ IV : যেতিয়া $X = e^{ax}V(x)$. যদি u এটা xৰ ফলন হ'লে

$$D(e^{ax}u) = e^{ax}Du + ae^{ax}u = e^{ax}(D+a)u$$

$$D^2(e^{ax}u) = (ae^{ax}Du + e^{ax}D^2u) + (ae^{ax}Du + a^2e^{ax}u)$$

$$= e^{ax}(D^2 + 2aDu + a^2u) = e^{ax}(D+a)^2u$$

গতিকে, $f(D)(e^{ax}u) = \{D^n + k_1D^{n-1} + k_2D^{n-2} + \cdots + k_0\}(e^{ax}u)$

$$= e^{ax}(D+a)^n u + k_1e^{ax}(D+a)^{n-2}u + \cdots + e^{ax}k_0u$$

$$= e^{ax}f(D+a)u$$

$$= e^{ax}V \quad \text{য'ত } V = f(D+a)u$$

আৰু $\frac{1}{f(D)}e^{ax}V = e^{ax}u = e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}V$

গতিকে $\frac{1}{f(D)}\left(e^{ax}V\right) = e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}V$.

উদাহৰণ 9 ঃ সমাধান কৰক $\left(D^2-2D+4\right)y = e^x\cos x$

সমাধান ঃ সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2-2m+4=0$

$$\text{বা } m = \frac{2\pm\sqrt{-12}}{2} = 1\pm i\sqrt{3}$$

$$\text{C.F } = e^x\left(A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x\right)$$

$$\text{P. I} = \frac{1}{D^2-2D+4}\left(e^x\cos x\right)$$

$$= e^x\frac{1}{(D+1)^2-2(D+1)+4}\cos x \quad \left(\frac{1}{f(D)}\left(e^{ax}V\right) = e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}V\right)$$

$$= e^x\frac{1}{D^2+3}\cos x$$

$$= e^x\frac{1}{-1^2+3}\cos x \quad \left(\frac{1}{f(D^2)}\cos(ax+b) = \frac{\cos(ax+b)}{f(-a^2)}\right)$$

$$= \frac{e^x}{2}\cos x$$

সাধাৰণ সমাধান হ'ল $y = e^x\left(A\cos\sqrt{3}x + B\sin\sqrt{3}x\right) + \frac{e^x}{2}\cos x$.

উদাহৰণ 10 ঃ সমাধান কৰক $\left(D^2-1\right)y = x\sin 3x + \cos x$

সমাধান ঃ সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2-1=0$

$$\text{বা } m = \pm 1$$

$$\text{C.F } = Ae^x + Be^{-x}$$

$$\text{P.I} = \frac{1}{D^2-1}\left(x\sin 3x + \cos x\right)$$

$$= \frac{1}{D^2-1}x\sin 3x + \frac{1}{D^2-1}\cos x$$

ধৰা হ'ল $Z = \frac{1}{D^2-1}x\sin 3x$ আৰু $Y = \frac{1}{D^2-1}x\cos 3x$

$$\therefore\ Y+iZ=\frac{1}{D^2-1}\left(xe^{i3x}\right)$$

$$=e^{i3x}\frac{1}{(D+i3)^2-1}x$$

$$=e^{i3x}\frac{1}{D^2+6iD-10}x$$

$$=\frac{e^{i3x}}{-10}\left(1-\frac{D^2+6iD}{10}\right)^{-1}x$$

$$=\frac{e^{i3x}}{-10}\left[1-\frac{1}{10}\left(D^2-6iD\right)\right]x$$

$$=\frac{e^{i3x}}{-10}\left(x+\frac{3}{5}i\right)$$

$$=\frac{1}{-10}(\cos 3x+i\sin 3x)\left(x+\frac{3}{5}i\right)$$

$$=\frac{1}{-10}(x\cos 3x+ix\sin 3x)+\frac{1}{-10}\left(\frac{3}{5}i\cos 3x+i^2\frac{3}{5}\sin 3x\right)$$

$$=\frac{1}{-10}(x\cos 3x-\frac{3}{5}\sin 3x)-i\frac{1}{10}(x\sin 3x+\frac{3}{5}\cos 3x)$$

বাস্তৱ আৰু কাল্পনিক অংশৰ সমতা স্থাপন কৰি আমি পাওঁ

$$Z=-\frac{1}{10}(x\sin 3x+\frac{3}{5}\cos 3x)$$

আৰু $\frac{1}{D^2-1}\cos x=-\frac{1}{2}\cos x$

সাধাৰণ সমাধান হ'ল

$$y=Ae^x+Be^{-x}-\frac{1}{10}(x\sin 3x+\frac{3}{5}\cos 3x)-\frac{1}{2}\cos x\ .$$

উদাহৰণ 11 ঃ সমাধান কৰক $\left(D^2-2D+1\right)y=xe^x\sin x$

সমাধান ঃ সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2-2m+1=0$

বা $(m-1)^2=0$

বা $m=1,1$

$$\text{C.F}=(Ax+B)e^x$$

$$\text{P.I} = \frac{1}{D^2 - 2D + 1} xe^x \sin x$$

$$= \frac{1}{(D-1)^2} xe^x \sin x$$

$$= e^x \frac{1}{(D+1-1)^2} x \sin x$$

$$= e^x \frac{1}{D^2} x \sin x$$

$$= e^x \frac{1}{D} \int x \sin x dx$$

$$= e^x \frac{1}{D} \left[-x \cos x + \int \cos x dx \right]$$

$$= e^x \frac{1}{D} \left[-x \cos x + \sin x \right]$$

$$= e^x \int \left[-x \cos x + \sin x \right] dx$$

$$= -e^x \int x \cos x dx - \int \sin x dx$$

$$= -e^x \left[x \sin x - 2 \int \sin x dx \right]$$

$$= -e^x (x \sin x + 2 \cos x)$$

সাধাৰণ সমাধান হ'ল $y = (Ax + B)e^x - e^x (x \sin x + 2 \cos x)$.

উদাহৰণ 12 ঃ সমাধান কৰক $(D^4 + 2D^2 + 1)y = x^2 \cos x$

সমাধান ঃ সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^4 + 2m^2 + 1 = 0$

বা $(m^2 + 1)^2 = 0$

বা $m = \pm i, \pm i$

$$\text{C.F} = (A + Bx)\cos x + (C + Dx)\sin x$$

$$\text{P.I} = \frac{1}{(D^2 + 1)^2} x^2 \cos x$$

ধৰা হ'ল $Y = \frac{1}{(D^2 + 1)^2} x^2 \cos x$ আৰু $Z = \frac{1}{(D^2 + 1)^2} x^2 \sin x$

এতিয়া $Y + iZ = \frac{1}{(D^2 + 1)^2} e^{ix} x^2$

$$= e^{ix}\frac{1}{\{(D+i)^2+1\}^2}x^2$$

$$= e^{ix}\frac{1}{(D^2+2iD)^2}x^2$$

$$= \frac{e^{ix}}{-4D^2}\left(1+\frac{D}{2i}\right)^{-2}x^2$$

$$= e^{ix}\frac{1}{-4D^2}\left(1+\frac{D}{i}+\frac{3D^2}{-4}\right)x^2$$

$$= \frac{e^{ix}}{-4}\frac{1}{D^2}\left(x^2+\frac{2x}{i}-\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{-4}(\cos x+i\sin x)\left(\frac{x^4}{12}-i\frac{x^3}{3}-\frac{3}{4}x^2\right)$$

$$= \frac{1}{-4}\left(\frac{x^4}{12}\cos x-i\frac{x^3}{3}\cos x-\frac{3}{4}x^2\cos x+i\frac{x^4\sin x}{12}+\frac{x^3}{3}\sin x-\frac{3}{4}ix^2\sin x\right)$$

গতিকে, Y = বাস্তৱ অংশ $= -\frac{x^4}{48}\cos x+\frac{3x^2}{16}\cos x-\frac{x^3}{12}\sin x$

$$= -\frac{1}{48}(x^4\cos x-9x^2\cos x+4x^3\sin x)$$

সাধাৰণ সমাধান হ'ল

$$y=(A+Bx)\cos x+(C+Dx)\sin x-\frac{1}{48}(x^4\cos x-9x^2\cos x+4x^3\sin x)$$

ক্ষেত্ৰ V : যেতিয়া X, x অৰ যিকোনো ফলন

$$\text{P.I} = \frac{1}{f(D)}X$$

ধৰা হ'ল $f(D)=(D-m_1)(D-m_2)(D-m_3)\cdots(D-m_n)$

আৰু $\frac{1}{f(D)}=\frac{A_1}{(D-m_1)}+\frac{A_2}{(D-m_2)}+\frac{A_3}{(D-m_3)}+\cdots+\frac{A_n}{(D-m_n)}$ ধৰা হ'ল, গতিকে

$$\frac{1}{f(D)}X = A_1\frac{1}{(D-m_1)}X+A_2\frac{1}{(D-m_2)}X+\cdots+A_n\frac{1}{(D-m_n)}X$$

$$= A_1e^{m_1x}\int e^{-m_1x}Xdx+A_2e^{m_2x}\int e^{-m_2x}Xdx+\cdots+A_ne^{m_nx}\int e^{-m_nx}Xdx$$

উদাহৰণ 13 ঃ সমাধান কৰক $\left(D^2+a^2\right)y=\tan ax$

সমাধান ঃ সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2+a^2=0$

বা $m=\pm ia$

$$\text{C.F} = A\cos ax + B\sin ax$$

$$\text{P.I} = \frac{1}{D^2+a^2}\tan ax$$

$$= \frac{1}{2ia}\left[\frac{1}{D-ia}-\frac{1}{D+ia}\right]\tan ax$$

$$= \frac{1}{2ia}\left[e^{iax}\int e^{-iax}\tan axdx - e^{-iax}\int e^{iax}\tan axdx\right]$$

$$= \frac{1}{2ai}\left[e^{aix}\int(\cos ax - i\sin ax)\frac{\sin ax}{\cos ax}dx - e^{-aix}\int(\cos ax + i\sin ax)\frac{\sin ax}{\cos ax}dx\right]$$

$$= \frac{1}{2ia}\left[e^{iax}\left(\int \sin axdx - i\int\frac{\sin^2 ax}{\cos ax}\right) - e^{-iax}\left(\int \sin axdx + i\int\frac{\sin^2 ax}{\cos ax}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2ai}[e^{aix}\left(\frac{-\cos ax}{a}\right) - e^{aix}i$$

$$\int(\sec ax - \cos ax)dx - e^{-aix}\left(\frac{-\cos ax}{a}\right) - e^{-aix}i\int(\sec ax - \cos ax)dx]$$

$$= \frac{1}{2a^2 i}(-\cos ax)\times 2i\sin ax - \frac{2\cos ax}{2a^2}\left[\log(\sec ax+\sin ax)+\sin ax\right]$$

$$= -\frac{1}{a^2}\sin 2ax - \frac{\cos ax}{a^2}\log(\sec ax+\tan ax) - \frac{\sin 2ax}{2a^2}$$

$$= -\frac{3}{2a^2}\sin 2ax - \frac{\cos ax}{a^2}\log(\sec ax+\tan ax)$$

সাধাৰণ সমাধান হ'ল

$$y = A\cos ax + B\sin ax - \frac{3}{2a^2}\sin 2ax - \frac{\cos ax}{a^2}\log(\sec ax+\tan ax).$$

Case VI : যেতিয়া $X = x\phi(x)$

$$\frac{1}{f(D)}x\phi(x) = \left\{x - \frac{1}{f(D)}f'(D)\right\}\frac{1}{f(D)}\varphi(x)$$

প্ৰমাণ ঃ আমি জানো $D(x\phi) = xD\phi + \phi$

$$D^2(x\phi) = D\phi + xD^2\phi + D\phi = xD^2\phi + 2D\phi$$

সেইদৰে $D^n(x\phi) = xD^n\phi + nD^{n-1}\phi = xD^n\phi + \left(\frac{dD^n}{dD}\right)\phi$

সেয়েহে $f(D)(x\phi) = xf(D)\phi + f'(D)\phi$

$f(D)\phi = \phi_1$ বহুওৱা হ'ল।

$\therefore \phi = \frac{1}{f(D)}\phi_1$

গতিকে আমি পালোঁ

$$f(D)\left\{x\frac{1}{f(D)}\phi_1\right\} = x\phi_1 + f'(D)\frac{1}{f(D)}\phi_1$$

আৰু $x\frac{1}{f(D)}\phi_1 = \frac{1}{f(D)}(x\phi_1) + \frac{1}{f(D)}f'(D)\frac{1}{f(D)}\phi_1$

গতিকে, $\frac{1}{f(D)}(x\phi_1) = x\frac{1}{f(D)}\phi_1 - \frac{1}{f(D)}f'(D)\frac{1}{f(D)}\phi_1$

ϕ_1 অৰ ঠাইত ϕ বহুৱাই আমি পালোঁ

$$\frac{1}{f(D)}x\phi(x) = \left\{x - \frac{1}{f(D)}f'(D)\right\}\frac{1}{f(D)}\varphi(x).$$

উদাহৰণ 14 ঃ সমাধান কৰক $(D^2-1)y = x\sin x + (1+x^2)e^x$

সমাধান ঃ সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2 - 1 = 0$

বা $m = \pm 1$

C.F $= Ae^x + Be^{-x}$

$$\text{P.I} = \frac{1}{D^2-1}\left[x\sin x + (1+x^2)e^x\right]$$

$$= \frac{1}{D^2-1}x\sin x + \frac{1}{D^2-1}(1+x^2)e^x$$

$$= \left[\left\{x - \frac{1}{D^2-1}.\frac{d}{dD}(D^2-1)\right\}\frac{1}{D^2-1}\sin x\right] + e^x\frac{1}{(D+1)^2-1}(1+x^2)$$

$$= \left\{x - \frac{1}{D^2-1}.2D\right\}\frac{1}{-1^2-1}\sin x + e^x\frac{1}{D^2+2D}(1+x^2)$$

$$= -\frac{x\sin x}{2} + \frac{1}{D^2-1}\cos x + e^x\frac{1}{2D}\left(1+\frac{D}{2}\right)^{-1}(1+x^2)$$

$$= -\frac{x\sin x}{2} + \frac{1}{D^2-1}\cos x + e^x \frac{1}{2D}\left(1 - \frac{D}{2} + \frac{D^2}{4}\right)\left(1+x^2\right)$$

$$= -\frac{x\sin x}{2} - \frac{1}{2}\cos x + e^x \frac{1}{2D}\left(1 + x^2 - \frac{1}{2}.2x + \frac{1}{4}.2\right)\left(1+x^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x\sin x + \cos x\right) + \frac{e^x}{2}\frac{1}{D}\left(x^2 - x + \frac{3}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x\sin x + \cos x\right) + \frac{e^x}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}x\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x\sin x + \cos x\right) + \frac{xe^x}{12}\left(2x^2 - 3x + 9\right)$$

সাধাৰণ সমাধান হ'ল

$$y = Ae^x + Be^{-x} - \frac{1}{2}\left(x\sin x + \cos x\right) + \frac{xe^x}{12}\left(2x^2 - 3x + 9\right).$$



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

প্ৰশ্ন নং ১ ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক ঃ

(a) $\left(4D^2 + 12D + 9\right)y = 144e^{-x}$

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = 6e^{3x} + 7e^{-2x} - \log 2$

প্ৰশ্ন নং ২ ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক ঃ

(a) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = \cos 2x$

(b) $\left(D^2 + 4\right)y = \sin^2 x$

প্ৰশ্ন নং ৩ ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক ঃ

(a) $\left(D^3 + 8\right)y = x^4 + 2x + 1$

(b) $(D-2)^2 y = 8\left(e^{2x} + \sin 2x + x^2\right)$

প্ৰশ্ন নং ৪ ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক ঃ

(a) $\left(D^2 - 2D + 1\right)y = x^2e^{3x}$

(b) $\left(D^2 - 3D + 2\right)y = xe^x + \sin 2x$

প্ৰশ্ন নং ৫ ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক ঃ

(a) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \tan 2x$

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sec^2 x$



১১.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- $\frac{d^n y}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots + P_n\frac{dy}{dx} = X$

বা $\left(D^n + P_1D^{n-1} + P_2D^{n-2} + \cdots + P_n\right)y = X$ সমীকৰণৰ সাধাৰণ সমাধানত দুটা অংশ আছে। প্ৰথম অংশটো হ'ল পূৰক ফলন (complementary function,C.F)।

$m^n + P_1m^{n-1} + P_2m^{n-2} + \cdots + P_n = 0$

সমীকৰণৰ মূলৰ প্ৰকৃতি অনুধাৱন কৰি এইটো উলিওৱা হয়। সমীকৰণটোক সহায়ক সমীকৰণ (auxiliary equation, A.E) বোলে।

- C.F উলিওৱাৰ পদ্ধতি ঃ

(i) যদি মূলকেইটা বাস্তৱ আৰু পৃথক, অৰ্থাৎ $m_1, m_2, \cdots, m_n$

তেনেহ'লে C.F $= C_1e^{m_1x} + C_2e^{m_2x} + \cdots + C_ne^{m_nx}$

(ii) n টা মূলৰ r টা বাস্তৱ আৰু সমান। ধৰা হ'ল এই r টা মূলৰ প্ৰত্যেকটোৱেই m আৰু বাকীকেইটা অসমান, অৰ্থাৎ, $m_{r+1}, m_{r+2}, \cdots, m_n$ তেনেহ'লে

$$\text{C.F} = \left(C_1x^r + C_2x^{r-1} + \cdots + C_{r-1}x + C_r\right)e^{mx} + C_{r+1}e^{m_{r+1}x} + C_{r+2}e^{m_{r+2}x} + \cdots + C_ne^{(m_r+n-r)x}.$$

উদাহৰণস্বৰূপে যদি মূলকেইটা $m, m, m, m_4, m_5, \cdots, m_{n-3}$, তেনেহ'লে

$\text{C.F} = e^{mx}\left(C_1 + C_2x + C_3x^2\right) + C_4e^{m_4x} + \cdots + C_{n-3}e^{m_{n-3}.x}$

(iii) যদি এযোৰ মূল কাল্পনিক আৰু বাকীবোৰ বাস্তৱ আৰু অসমান, অৰ্থাৎ, যদি

$\alpha + i\beta, \alpha - i\beta, m_3, m_4, \cdots, m_n$, তেনেহ'লে

$\text{C.F} = e^{\alpha x}\left(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x\right) + C_3e^{m_3x} + \cdots + C_ne^{m_nx}$

(iv) যদি দুযোৰ মূল জটিল আৰু সমান আৰু বাকীবোৰ পৃথক, অৰ্থাৎ যদি,

$\alpha \pm i\beta, \alpha \pm i\beta, m_5, m_6, \cdots, m_n$, তেনেহ'লে

C.F $= e^{\alpha x}\{(C_1 + C_2 x)\cos\beta x + (C_3 + C_4 x)\sin\beta x\} + C_5 e^{m_5 x} + \cdots + C_n e^{m_n x}$

(v) এযোৰ বাস্তৱ আৰু সমান, এযোৰ জটিল আৰু বাকীবোৰ বাস্তৱ আৰু পৃথক, যেনে,

$m_1, m_1, m_2 \pm im_3, m_5, m_6, \cdots, m_n$ তেনেহ'লে

C.F $= (C_1 + C_2 x)e^{m_1 x} + e^{m_2 x}(C_3 \cos m_3 x + C_4 \sin m_3 x) + C_5 e^{m_5 x} + \cdots + C_n e^{m_n x}$

- $(D^n + P_1 D^{n-1} + P_2 D^{n-2} + \cdots + P_n)y = X$ ... (*) অৰ সাধাৰণ সমাধানৰ দ্বিতীয় অংশ হ'ল বিশেষ সমাধান। ইয়াক বিশেষ অনুকল (particular integral, P.I) বুলি কোৱা হয়।

(*) অৰ সাধাৰণ সমাধান হ'ল y = C.F +P.I.

যদি (*) অৰ y এটা P.I, তেনেহ'লে $f(D)y = X$. ইয়াক এনেদৰে লিখা হয় $y = \frac{1}{f(D)}X$.

- P. I উলিওৱাৰ পদ্ধতি

(i) যদি $f(D) = \frac{1}{D-\alpha}$, P.I $= \frac{1}{D-\alpha}X = e^{\alpha x}\int e^{-\alpha x}X dx$.

আৰু $\frac{1}{D}X = \int X dx$

(ii) যদি $f(D) = (D-\alpha_1)(D-\alpha_2)\cdots(D-\alpha_n)$ আৰু $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ পৃথক তেনেহ'লে

$$\frac{1}{f(D)}X = \frac{1}{(D-\alpha_1)(D-\alpha_2)\cdots(D-\alpha_n)}(X)$$

$$= \left(\frac{A_1}{D-\alpha_1} + \frac{A_2}{D-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{D-\alpha_n}\right)(X) \text{ (আংশিক ভগ্নাংশত ভাঙি)}$$

$$= A_1 e^{\alpha_1 x}\int e^{-\alpha_1 x}X dx + \cdots + A_n e^{\alpha_n x}\int e^{-\alpha_n x}X dx$$

(iii) যদি $X = e^{ax}$ তেনেহ'লে $\frac{1}{f(D)}e^{ax} = \frac{1}{f(a)}e^{ax}$ যদি $f(a) \neq 0$

যদি $f(a) = 0$, $\frac{1}{f(D)}e^{ax} = x\frac{1}{f'(a)}e^{ax}$

যদি $f'(a) = 0$, তেনেদৰে দেখুৱাব পাৰি যে $\frac{1}{f(D)}e^{ax} = x^2\frac{1}{f''(a)}e^{ax}$ যদিহে $f''(a) \neq 0$ এইদৰে হৈ থাকিব।

(iv) যদি $X = \sin(ax+b)$ বা $\cos(ax+b)$

$$\frac{1}{f(D^2)}\sin(ax+b)=\frac{1}{f(-a^2)}\sin(ax+b) \text{ if } f(-a^2)\neq 0$$

সেইদৰে, $\frac{1}{f(D^2)}\cos(ax+b)=\frac{\cos(ax+b)}{f(-a^2)}$,if $f(-a^2)\neq 0$

যদি $f(-a^2)=0$, $\frac{1}{f(D^2)}\sin(ax+b)=\frac{1}{f'(-a^2)}x\sin(ax+b)$

আৰু $\frac{1}{f(D^2)}\cos(ax+b)=\frac{1}{f'(-a^2)}x\cos(ax+b)$ যদি $f'(-a^2)\neq 0$.

(v) যদি $X=e^{ax}\phi(x)$, তেনেহ'লে

$$\frac{1}{f(D)}e^{ax}\phi(x)=e^{ax}\frac{1}{f(D+a)}\phi(x)$$

(vi) যদি $X=x\phi(x)$, তেনেহ'লে

$$\frac{1}{f(D)}X=\left(x-\frac{1}{f(D)}.f'(D)\right)\frac{1}{f(D)}\phi(x)$$

(vii) যদি $X=x^m$, তেনেহ'লে

$$\frac{1}{f(D)}X=\frac{1}{D^n\left(1+P_1D+P_2D^2+\cdots\right)}X=\frac{1}{D^n}\left(1+P_1D+P_2D^2+\cdots\right)^{-1}X.$$



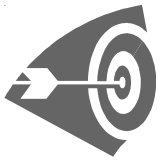
১১.৭ অধিক জানিবলৈ

1) Tenenbaum, Morris and Pollard, Harry. Ordinary Differential Equations, Dover Publications, Inc, N.Y 11501.

2) Differential Equations: An Introduction with Mathematica. Clay C.Ross, second Edition, Springer.

3) Differential Equations: Linear, Nonlinear, ordinary, partial. A.C. King, J.Billinggham and S. R. Otto, Cambridge-2003.

4) Differential equations with Application and Programs. S. Balachandra Rao and H.R. Anuradha, University Press (India) Limited 1996.



১১.৮ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (i) প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'ল $\left(D^3-7D-6\right)y=0$

সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^3-7m-6=0$

বা $(m+1)(m+2)(m-3)=0$

বা $m=-1,-2,3$

গতিকে, সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}+C_3e^{-2x}$.

(ii) প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'ল $\left(D^4+13D^2+36\right)y=0$

সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^4+13m^2+36=0$

বা $m^4+4m^2+9m^2+36=0$

বা $\left(m^2+4\right)\left(m^2+9\right)=0$

বা $m^2+4=0\,,\,m^2+9=0$

বা $m=\pm 2i\,,\,m=\pm 3i$

সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল

$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+C_3\cos 3x+C_4\sin 3x$.

(iii) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $\left(m^2+1\right)^2(m-1)=0$

বা $m=\pm i,\pm i,\,1$

সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল $y=\text{C.F}+\text{P.I}$

$y=\left(C_1+xC_2\right)\cos x+\left(C_3+xC_4\right)\sin x+C_5e^x$

য'ত C_1,C_2,C_3,C_4 আৰু C_5 are arbitrary constants.

(iv) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^4-2m^3+2m^2-2m+1=0$

বা $(m-1)^2\left(m^2+1\right)=0$

বা $m=1,1,\pm i$

সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল $y=\left(C_1+xC_2\right)+\left(C_3\cos x+C_4\sin x\right)$.

(v) প্ৰদত্ত সমীকৰণটোক এনেদৰে লিখিব পাৰি

$\left(D^3+6D^2+11D+6\right)y=0,$ য'ত $D=\dfrac{d}{dx}$.

সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^3+6m^2+11m+6=0$

বা $(m+1)(m+2)(m+3)=0$

বা $m=-1,-2,-3$

সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x}$.

(vi) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^3 + 3m^2 + 3m + 1 = 0$

বা $(m+1)^3 = 0$

বা $m = -1,-1,-1$

সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল $y = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{-x}$.

(vii) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^4 - 5m^2 + 4 = 0$

বা $(m^2 - 4)(m^2 - 1) = 0$

বা $m^2 = 4$ and $m^2 = 1$

বা $m = 2,-2,1-1$

সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{x} + C_4e^{-x}$.

(viii) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^4 - 81 = 0$

বা $(m^2 + 9)(m^2 - 9) = 0$

বা $(m+3i)(m-3i)(m+3)(m-3) = 0$

বা $m = \pm 3i, 3, -3$

সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + C_3\cos 3x + C_4\sin 3x$.

(ix) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^6 - 1 = 0$

বা $(m^2)^3 - (1)^3 = 0$

বা $(m^2 - 1)(m^4 + m^2 + 1) = 0$

বা $(m^2 - 1)\{(m^4 + 2m^2 + 1) - m^2\} = 0$

বা $(m-1)(m+1)\{(m^2+1)^2 - m^2\} = 0$

বা $(m-1)(m+1)(m^2 + 1 + m)(m^2 + 1 - m) = 0$

বা $m = 1,-1, \frac{-1 \pm (1-4)^{\frac{1}{2}}}{2}, \frac{1 \pm (1-4)^{\frac{1}{2}}}{2}$

$m = 1,-1, -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$

সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল

$$y = C_1e^{x} + C_2e^{-x} + e^{-\frac{x}{2}}\left[C_3\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_4\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right] + e\frac{x}{2}\left[C_5\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_6\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right].$$

(x) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^4 + 2m^3 + 3m^2 + 2m + 1 = 0$

বা $(m^4 + 2m^3 + m^2) + (2m^2 + 2m + 1) = 0$

বা $(m^2 + m)^2 + 2(m^2 + m) + 1 = 0$

বা $\left(m^2+m+1\right)^2=0$

বা $m^2+m+1=0$ (দুবাৰ)

বা $\therefore m=\dfrac{\left\{-1\pm\left(1-4\right)^{\frac{1}{2}}\right\}}{2}=-\left(\dfrac{1}{2}\right)\pm i\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (দুবাৰ)

সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল

$$y=e^{-\frac{x}{2}}\left[\left(C_1+C_2x\right)\cos\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)+\left(C_3+C_4x\right)\sin\left(\frac{\sqrt{3}x}{2}\right)\right]$$

অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (a) সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $\left(2m+3\right)^2=0$

বা $m=-\dfrac{3}{2},-\dfrac{3}{2}$

C.F $=\left(C_1+C_2x\right)e^{-\frac{3x}{2}}$

আৰু P.I $=\dfrac{1}{4D^2+12D+9}144e^{-3x}$

$=144\dfrac{1}{\left(2D+3\right)^2}e^{-3x}$

$=\dfrac{144}{\left(-6+3\right)^2}e^{-3x}$

$=16e^{-3x}$

গতিকে, সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল $y=\left(C_1+C_2x\right)e^{-\frac{3x}{2}}+16e^{-3x}$.

(b) প্ৰদত্ত সমীকৰণটোক এনেদৰে লিখিব পাৰি

$\left(D^2-6D+9\right)y=6e^{3x}+7e^{-2x}-\log 2$

সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2-6m+9=0$

বা $\left(m-3\right)^2=0$

বা $m=3,3$

C.F $=\left(C_1+C_2x\right)e^{3x}$

P.I $=\dfrac{1}{D^2-6D+9}\left(6e^{3x}+7e^{-2x}-\log 2\right)$

$$= \frac{1}{D^2-6D+9}6e^{3x} + \frac{1}{D^2-6D+9}7e^{-2x} - \frac{1}{D^2-6D+9}\log 2$$

$$= x\frac{1}{2D-6}6e^{3x} + \frac{1}{4+12+9}7e^{-2x} - \log 2\frac{1}{D^2-6D+9}e^{ox}$$

$$= x\frac{1}{2}6e^{3x} + \frac{7}{25}e^{-2x} - \log 2\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$= 3x^2e^{3x} + \frac{7}{25}e^{-2x} - \frac{1}{9}\log 2$$

সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল

$$y = (C_1 + C_2x)e^{3x} + 3x^2e^{3x} + \frac{7}{25}e^{-2x} - \frac{1}{9}\log 2\left(\frac{1}{9}\right)$$

Ans to Q No 2: (a) দিয়া আছে, $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = \cos 2x$

প্ৰদত্ত সমীকৰণটো এনেদৰে লিখিব পাৰি $(D^2 + D + 1)y = \cos 2x$ ...(1)

সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2 + m + 1 = 0$

বা $m = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

C.F $= e^{-\frac{x}{2}}\left[C_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]$

P.I $= \frac{1}{D^2+D+1}\cos 2x$

$$= \frac{1}{-2^2+D+1}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{D-3}\cos 2x$$

$$= \frac{D+3}{D^2-9}\cos 2x$$

$$= \frac{D+3}{-2^2-9}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{-13}(D+3)\cos 2x$$

$$= \frac{1}{-13}[D(\cos 2x) + 3\cos 2x]$$

$$= \frac{1}{-13}\left[-2\sin 2x + 3\cos 2x\right]$$

গতিকে, সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল

$$y = e^{-\frac{x}{2}}\left[C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right] + \frac{1}{13}\left[2\sin 2x - 3\cos 2x\right]$$

(b) দিয়া আছে, $\left(D^2+4\right)y = \sin^2 x$ ... (1)

সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2+4=0$ বা $m = \pm 2i$

গতিকে, নিৰ্ণেয় সমাধান হ'ল C.F $= C_1\cos 2x + C_2 \sin 2x$

P. I $= \frac{1}{D^2+4}\sin^2 x$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{D^2+4}\left(1-\cos 2x\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{D^2+4}e^{0.x} - \frac{1}{D^2+4}\cos 2x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{0+4}e^{0.x} - \left(\frac{x}{2\times 2}\right)\sin 2x\right]$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{8}x\sin 2x$$

গতিকে, নিৰ্ণেয় সমাধান হ'ল $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}x\sin 2x$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ (a) দিয়া আছে, $\left(D^3+8\right)y = x^4+2x+1$

সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^3+8=0$

বা $\left(m+2\right)\left(m^2-2m+4\right)=0$

বা $m = -2, 1\pm i\sqrt{3}$

C.F $= C_1e^{-2x} + e^x\left(C_2\cos x\sqrt{3} + C_3\sin x\sqrt{3}\right)$

P. I $= \frac{1}{D^3+8}\left(x^4+2x+1\right)$

$$= \frac{1}{8\left(1+\frac{1}{8}D^3\right)}\left(x^4+2x+1\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{8}D^3\right)^{-1}\left(x^4+2x+1\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{8}D^3 + \right)\left(x^4 + 2x + 1\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(x^4 + 2x + 1\right) - \frac{1}{8}D^3\left(x^4 + 2x + 1\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[\left(x^4 + 2x + 1\right) - 3x\right]$$

(b) দিয়া আছে, $(D-2)^2 y = 8\left(e^{2x} + \sin 2x + x^2\right)$ ... (1)

সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $(m-2)^2 = 0$

বা $m = 2,2$

C.F $= (C_1 + C_2 x)e^{2x}$

P. I $= \frac{1}{(D-2)^2}\left(e^{2x} + \sin 2x + x^2\right)$

$$= \frac{1}{(D-2)^2}e^{2x} + \frac{1}{(D-2)^2}\sin 2x + \frac{1}{(D-2)^2}x^2 \quad \text{... (2)}$$

এতিয়া, $\frac{1}{(D-2)^2}e^{2x} = x.\frac{1}{2(D-2)}e^{2x}$

$$= x^2.\frac{1}{2}e^{2x}$$

$$= \frac{x^2}{2}e^{2x}$$

$$\frac{1}{(D-2)^2}\sin 2x = \frac{1}{D^2 - 2D + 4}\sin 2x$$

$$= \frac{1}{-2^2 - 2D + 4}\sin 2x$$

$$= -\frac{1}{2D}\sin 2x$$

$$= -\frac{1}{4}\int \sin 2x dx$$

$$= -\frac{1}{4}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cos 2x$$

$$\frac{1}{(D-2)^2}x^2=\frac{1}{(2-D)^2}x^2=\frac{1}{4\left(1-\frac{D}{2}\right)^2}x^2=\frac{1}{4}\left(1-\frac{D}{2}\right)^{-2}x^2$$

$$=\frac{1}{4}\left[1-2\left(-\frac{D}{2}\right)+\frac{(-2)(-3)}{2}\left(\frac{D}{2}\right)^2-\cdots\right]x^2$$

$$=\frac{1}{4}\left[1+D+\frac{3}{4}D^2+\cdots\right]x^2$$

$$=\frac{1}{4}\left(x^2+2x+\frac{3}{2}\right)$$

(2)ৰ পৰা, P.I $=\frac{x^2}{2}e^{2x}+\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{1}{4}\left(x^2+2x+\frac{3}{2}\right)$

সেয়েহে নিৰ্ণেয় সমাধান হ'ল

$$y=(C_1+C_2x)e^{2x}+\frac{x^2}{2}e^{2x}+\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{1}{4}\left(x^2+2x+\frac{3}{2}\right).$$

৪ নং **প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ** (a) দিয়া আছে, $(D^2-2D+1)y=x^2e^{3x}$

সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2-2m+1=0$

বা $m=1,1$

C.F $=(C_1+C_2x)e^x$

P.I $=\frac{1}{D^2-2D+1}x^2e^{3x}$

$$=\frac{1}{(D-1)^2}x^2e^{3x}$$

$$=e^{3x}\frac{1}{(D+3-1)^2}x^2$$

$$=\frac{1}{4}e^{3x}\frac{1}{\left(1+\frac{D}{2}\right)^2}x^2$$

$$=\frac{1}{4}e^{3x}\left(1+\frac{D}{2}\right)^{-2}x^2$$

$$= \frac{1}{4}e^{3x}\left[1-2\left(\frac{D}{2}\right)+3\left(\frac{D}{2}\right)^2+\cdots\right]x^2$$

$$= \frac{1}{4}e^{3x}\left[x^2 - Dx^2 + \frac{3}{4}D^2x^2+\cdots\right]$$

$$= \frac{1}{4}e^{3x}\left[x^2-2x+\frac{3}{2}\right]$$

সেয়েহে নির্ণেয় সমাধান হ'ল

$$y = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{1}{4}e^{3x}\left[x^2-2x+\frac{3}{2}\right]$$

(b) দিয়া আছে, $(D^2-3D+2)y = xe^x + \sin 2x$ ... (1)

সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2-3m+2=0$

বা $m = 1,2$

C.F $= C_1e^x + C_2e^{2x}$

P. I $= \frac{1}{D^2-3D+2}(xe^x+\sin 2x)$

$$= \frac{1}{D^2-3D+2}xe^x + \frac{1}{D^2-3D+2}\sin 2x$$

$$= e^x\frac{1}{(D+1)^2-3(D+1)+2}x + \frac{1}{-2^2-3D+2}\sin 2x$$

$$= e^x\frac{1}{D^2-D}x - \frac{1}{3D+2}\sin 2x$$

$$= e^x\frac{1}{(-D)(1-D)}x - \frac{(3D-2)}{9D^2-4}\sin 2x$$

$$= -e^x\frac{1}{D}(1-D)^{-1}x - \frac{(3D-2)}{9(-2^2)-4}\sin 2x$$

$$= -e^x\frac{1}{D}[1+D+\cdots]x + \frac{1}{40}(3D\sin 2x - 2\sin 2x)$$

$$= -e^x\frac{1}{D}[x+1] + \frac{1}{40}(6\cos 2x - 2\sin 2x)$$

$$= -e^x\int(x+1)dx + \frac{1}{20}(3\cos 2x - \sin 2x)$$

$$= -e^x\left(\frac{x^2}{2}+x\right)+\frac{1}{20}(3\cos 2x-\sin 2x)$$

সেয়ে সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} - e^x\left(\frac{x^2}{2}+x\right)+\frac{1}{20}(3\cos 2x-\sin 2x).$$

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ (a) দিয়া আছে, $\frac{d^2y}{dx^2}+4y=\tan 2x$

সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2+4=0$

বা $m=\pm 2i$

$$\text{C.F} = A\cos 2x + B\sin 2x$$

$$\text{P.I} = \frac{1}{D^2+4}\tan 2x$$

$$= \frac{1}{4i}\left[\frac{1}{D-2i}-\frac{1}{D+2i}\right]\tan 2x$$

$$= \frac{1}{4i}\left[e^{2xi}\int e^{-2xi}\tan 2x dx - e^{-2xi}\int e^{2xi}\tan 2x dx\right]$$

$$= \frac{1}{4i}[(\cos 2x+i\sin 2x)\int(\cos 2x-i\sin 2x)\tan 2x dx -$$

$$(\cos 2x-i\sin 2x)\int(\cos 2x+i\sin 2x)\tan 2x dx]$$

$$= \frac{1}{4i}[(\cos 2x+i\sin 2x)\left\{-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\log(\sec 2x+\tan 2x)+\frac{1}{2}\sin 2x\right\}-$$

$$(\cos 2x-i\sin 2x)\left\{-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}\log\left(\sec 2x+\tan 2x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right\}]$$

$$= \frac{1}{4i}\left[\frac{1}{2}-\frac{i}{2}e^{2ix}\log(\sec 2x+\tan 2x)-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}e^{-2ix}\log(\sec 2x+\tan 2x)\right]$$

$$= \frac{1}{4i}\left[-\frac{i}{2}2\cos 2x\log(\sec 2x+\tan 2x)\right]$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x\log(\sec 2x+\tan 2x)$$

সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x \log(\sec 2x + \tan 2x).$$

(b) প্ৰদত্ত সমীকৰণটোক এনেদৰে লিখিব পাৰি $(D^2+1)y = \sec^2 x$

সহায়ক সমীকৰণ হ'ল $m^2 + 1 = 0$

বা $m = \pm i$

C.F $= C_1 \cos x + C_2 \sin x$

$$\text{P.I} = \frac{1}{D^2+1}\sec^2 x$$

$$= \frac{1}{(D-i)(D+i)}\sec^2 x$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{D-i} - \frac{1}{D+i}\right]\sec^2 x \quad ...(1)$$

এতিয়া, $\frac{1}{D-i}\sec^2 x = e^{ix}\int e^{-ix}\sec^2 x dx$

$$= e^{ix}\int \frac{\cos x - i\sin x}{\cos^2 x}dx$$

$$= e^{ix}\int (\sec x - i\sec x\tan x)dx$$

$$= e^{ix}\left[\log(\sec x + \tan x) - i\sec x\right] \quad ... (2)$$

i ৰ ঠাইত $-i$, বহুৰাই, আমি পাওঁ

$$\frac{1}{D+i}\sec^2 x = e^{-ix}\left[\log(\sec x + \tan x) + i\sec x\right] \quad ... (3)$$

(1), (2) আৰু (3)ৰ পৰা আমি পালোঁ

$$\text{P. I} = \frac{1}{2i}\left[e^{ix}\log(\sec x + \tan x) - ie^{ix}\sec x - e^{-ix}\log(\sec x + \tan x) - ie^{-ix}\sec x\right]$$

$$= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\log(\sec x + \tan x) - \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\sec x$$

$$= \sin x \log(\sec x + \tan x) - \cos x \sec x$$

$$= \sin x \log(\sec x + \tan x) - 1$$

সম্পূৰ্ণ সমাধান হ'ল

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \log(\sec x + \tan x) - 1$$



১১.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ অধোলিখিত অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(a) $\left(D^4-2D^3+5D^2-8D+4\right)y=0$

(b) $\left(D^5-13D^3+26D^2+82D+104\right)y=0$

প্ৰশ্ন ২ ঃ তলৰ অৱকল সমীকৰণবোৰ সমাধান কৰক।

(a) $\left(D^2+9\right)y=\sec 3x$

(b) $\left(D^2-9D+18\right)y=e^{e^{-3x}}$

(c) $\left(D^3-D^2-4D+4\right)y=e^{3x}$

(d) $\left(D^2-2kD+k^2\right)y=e^{kx}$

(e) $\left(D^2-a^2\right)y=\cos mx$

(f) $\left(D^2+1\right)y=\cos x\sin 3x$

(g) $\left(D^2+2D+1\right)y=2x+x^2$

(h) $\left(D^4-2D^3+5D^2-8D+4\right)y=x^2$

(i) $\left(D^3-7D-6\right)y=\left(x+1\right)e^{2x}$

(j) $\left(D^2-1\right)y=e^x\left(1+x^2\right)$

(k) $\left(D^2-5D+6\right)y=x\sin 3x$

(l) $\left(D^2+5D+6\right)y=e^{-2x}+5\sin 4x$

*** ***** ***