GMA S5-01

Exam. Code: MAP5A

স্থানাংক জ্যামিতি আৰু ভেক্টৰৰ বিশ্লেষণ

পঞ্চম ষাণ্মাসিক

গণিত

খণ্ড ঃ ১

কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

বিষয় বিশেষজ্ঞ মণ্ডলী

অধ্যাপক নন্দৰাম দাস, গণিত বিভাগ, গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়
ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা, গণিত বিভাগ, কটন মহাবিদ্যালয়

সমন্বয়ৰক্ষী ঃ হৰেকৃষ্ণ ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

প্রস্তুতি গোটৰ সদস্য

অধ্যায়	*অৱিহণা যোগাইছে*	*ভাষান্তৰকাৰী*
১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭ আৰু ৮	অধ্যাপক তৰুণ চৰকাৰ অৱসৰপ্রাপ্ত উপাধ্যক্ষ আৰু মুৰব্বী অধ্যাপক গণিত বিভাগ, কটন কলেজ, গুৱাহাটী	ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা (অধ্যায় ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭ আৰু ৮)

সম্পাদনা ঃ

বিষয়বস্তু সম্পাদনা ঃ ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা, প্রাক্তন মুৰব্বী, গণিত বিভাগ, কটন কলেজ
গাঁথনিক সম্পাদনা ঃ হৰেকৃষ্ণ ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

জুন, ২০১৯ ISBN: 978-93-89123-32-6

This Self Learning Material (SLM) of the Krishna Kanta Handiqui State University is made available under a Creative Commons Attribution-Non Commercial-ShareAlike4.0 License (International): http.//creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0.

কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ৰ হৈ পঞ্জীয়কৰ দ্বাৰা মুদ্রিত আৰু প্রকাশিত।

মুখ্য কার্যালয় ঃ পাটগাঁও, ৰাণী গেট, গুৱাহাটী-৭৮১ ০১৭; Web : www.kkhsou.in
উপ-মুখ্য কার্যালয় ঃ হাউচ্‌ফেড কমপ্লেক্স, দিচপুৰ, গুৱাহাটী-৭৮১ ০০৬

এই শিক্ষণ সামগ্রী প্রস্তুতিৰ বাবে আর্থিক অনুদান আগবঢ়োৱা
দূৰ শিক্ষা ব্যুৰো, বিশ্ববিদ্যালয় অনুদান আয়োগৰ ওচৰত বিশ্ববিদ্যালয় কৃতজ্ঞ।

বিষয়সূচী

পৃষ্ঠা নং

অধ্যায় ১ ঃ **সৰল ৰেখা** ৫ - ২৭

ৰেখাৰ প্ৰৱণতা, বিভিন্ন প্ৰামাণিক আকাৰত ৰেখাৰ সমীকৰণ, কেইটামান দৰকাৰী সিদ্ধান্ত

অধ্যায় ২ ঃ **স্থানাংক-অক্ষৰ ৰূপান্তৰণ** ২৮ - ৩৫

অক্ষৰ ৰূপান্তৰণ, মূল বিন্দু সাপেক্ষে অক্ষৰ ঘুৰ্নন

অধ্যায় ৩ ঃ **যুগ্ম সৰল ৰেখা** ৩৬ - ৫৫

যুগ্ম সৰল ৰেখা, মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা যুগ্ম সৰল ৰেখা, যুগ্ম সৰল ৰেখাৰ মাজৰ কোণ যুগ্ম সৰল ৰেখাৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ, দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ সাধাৰণ সমীকৰণে যুগ্ম সৰল ৰেখা বুজোৱাৰ চর্ত, কটাকটি কৰা যুগ্ম সৰল ৰেখা আৰু সমান্তৰাল যুগ্ম সৰল ৰেখা

অধ্যায় ৪ ঃ **বৃত্ত** ৫৬ - ৭৯

বৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ, বৃত্তৰ সাধাৰণ সমীকৰণ, ব্যাসৰ মূৰ বিন্দু দিয়া থাকিলে বৃত্তৰ সমীকৰণ স্পৰ্শক আৰু অভিলম্ব, কেইটামান প্ৰয়োজনীয় প্ৰমেয়

অধ্যায় ৫ ঃ **শাংকৰ ছেদ** ৮০ - ১১৩

অধিবৃত্ত আৰু ইয়াৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ, উপবৃত্ত আৰু ইয়াৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ, পৰাবৃত্ত আৰু ইয়াৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ সাধাৰণ সমীকৰণ

অধ্যায় ৬ ঃ **ত্ৰিমাত্ৰিক জ্যামিতি** ১১৪ - ১৩৬

ত্ৰিমাত্ৰাত আৱতীয় কার্টীয় স্থানাংক, মূল বিন্দুৰ পৰিৱর্তন, দুটা বিন্দুৰ মাজৰ দূৰত্ব, বিভাজন সূত্ৰ, ৰেখাৰ দিশাংক, ৰেখাৰ দিশানুপাত

অধ্যায় ৭ ঃ **সমতল** ১৩৭ - ১৫৬

সমতলৰ সাধাৰণ সমীকৰণ, তিনিটা নির্দিষ্ট বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা (একৰেখীয় নহয়) সমতলৰ সমীকৰণ

অধ্যায় ৮ ঃ **সৰল ৰেখা** ১৫৭ - ১৮০

সৰল ৰেখা, দুডাল ৰেখাৰ মাজৰ হ্ৰস্বতম দূৰত্ব

পাঠ্যবিষয়ৰ পৰিচয়

'স্থানাংক জ্যামিতি আৰু ভেক্টৰৰ বিশ্লেষণ' হ'ল স্নাতক (কলা) গণিত বিষয়ৰ পঞ্চম পাঠ্যবিষয়।। এই পাঠ্যবিষয়টি দুটা খণ্ডত ভাগ কৰা হৈছে। প্ৰথম খণ্ডটি আঠটা আৰু দ্বিতীয় খণ্ডটি সাতটা অধ্যায়েৰে গঠিত।

প্ৰথম খণ্ডত সৰল ৰেখা আৰু সুক্ষ্ম ৰেখাৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব।তদুপৰি,এই খণ্ডটিত বৃত্ত আৰু শাংকৰৰ বিভিন্ন ছেদৰ বিষয়ে বিশদভাৱে আলোকপাত কৰা হ'ব। শেষত, ত্ৰিমাত্ৰিক জ্যামিতিৰ বিষয়ে এই খণ্ডটিত আলোচনা কৰা হ'ব।

দ্বিতীয় খণ্ডটিত গোলক, শংকু আৰু বেলনৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব। এই খণ্ডটিত ভেক্টৰ বিষয়ে পৰিচয় কৰাই দিয়া হ'ব। ভেক্টৰ পূৰণৰ বিষয়েও এই খণ্ডটিত আলোচনা কৰা হ'ব। শেষত, ভেক্টৰ কলনগণিত সম্বন্ধে এই খণ্ডটিত জানিব পাৰিব।

খণ্ড পৰিচয়

এই খণ্ডটি 'স্থানাংক জ্যামিতি আৰু ভেক্টৰৰ বিশ্লেষণ' পাঠ্যবিষয়টিৰ প্ৰথম খণ্ড। এই খণ্ডটি সৰ্বমুঠ আঠটা অধ্যায়েৰে গঠিত।

এই খণ্ডটিৰ প্ৰথম অধ্যায়টিত সৰল ৰেখা আৰু বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ সৰল ৰেখাৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব।

দ্বিতীয় অধ্যায়টিত স্থানাংক অক্ষৰ ৰূপান্তৰণ বিষয়ে অৱগত কৰা হ'ব।

তৃতীয় অধ্যায়টিত যুগ্ম সৰল ৰেখাৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হৈছে। যুগ্ম সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণৰ বিষয়েও এই অধ্যায়টিত আলোচনা কৰা হ'ব।

চতুৰ্থ অধ্যায়টিত বৃত্ত, বৃত্তৰ সমীকৰণ আৰু কেইটামান প্ৰয়োজনীয় প্ৰমেয় বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব।

পঞ্চম অধ্যায়টিত শাংকৰৰ বিভিন্ন ছেদৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব। এই অধ্যায়টিত অধিবৃত্ত, উপবৃত্ত, পৰাবৃত্ত আৰু সিহঁতৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হৈছে।

ষষ্ঠ অধ্যায়টিত ত্ৰিমাত্ৰিক জ্যামিতিৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।

আকৌ এই খণ্ডটিৰ সপ্তম অধ্যায়টিত সমতলৰ বিষয়ে পৰিচয় কৰাই দিয়া হ'ব।

এই খণ্ডটিৰ অন্তিম তথা অষ্টম অধ্যায়টিত ত্ৰিমাত্ৰিক সৰল ৰেখাৰ বিষয়েও জানিব পাৰিব।

এই খণ্ডটি অধ্যয়ন কৰোঁতে মূল পাঠত 'জানি থোৱা ভাল' বাকচবোৰৰ মূল পাঠৰ সৈতে জড়িত কিছু গুৰুত্বপূৰ্ণ তথ্যৰ সম্ভেদ আছে। প্ৰতিটো অধ্যায়ত থকা 'অনুশীলন'সমূহে অধ্যয়ন অধিক সক্ৰিয় আৰু ফলপ্ৰসূ হোৱাত সহায় কৰিব। আকৌ, 'অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ' যোগে আগবঢ়োৱা প্ৰশ্নাৱলীয়ে অধ্যয়নৰ অগ্ৰগতি সম্পৰ্কে স্ব-পৰীক্ষণৰ সুবিধা দিব। অধ্যয়নৰ লগে লগে উক্ত প্ৰশ্নাৱলীৰ উত্তৰসমূহ লিখি শেষত দিয়া 'অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান'ৰ সৈতে ৰিজাই চোৱাটো অধিক লাভদায়ক হ'ব। অধ্যায়বোৰৰ শেষত 'আৰ্হি প্ৰশ্ন' হিচাপে কেইটিমান প্ৰশ্নৰ আৰ্হিও তুলি দিয়া হৈছে।

অধ্যায় ১ ঃ সৰল ৰেখা

অধ্যায় গাঁথনি

১.১ উদ্দেশ্য
১.২ পৰিচয়
১.৩ ৰেখাৰ প্ৰৱণতা
১.৪ বিভিন্ন প্ৰামাণিক আকাৰত ৰেখাৰ সমীকৰণ
১.৫ কেইটামান দৰকাৰী সিদ্ধান্ত
১.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১.৭ অধিক জানিবলৈ
১.৮ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান
১.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন

১.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

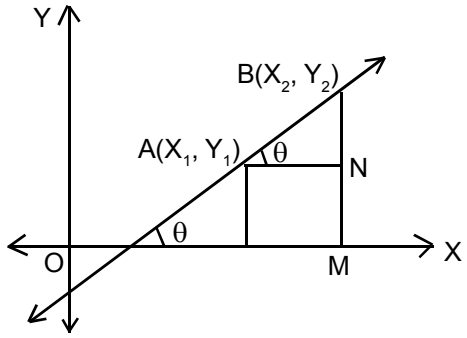
- ৰেখাৰ প্ৰৱণতা সম্বন্ধে জানিব
- ৰেখাৰ বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ সমীকৰণ উলিয়াব পাৰিব।

১.২ পৰিচয়

এই অধ্যায়ত আমি ৰেখাৰ প্ৰৱণতা, দুডাল ৰেখাৰ মাজৰ কোণ আৰু ৰেখাৰ বিভিন্ন আকাৰৰ সমীকৰণ সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম। আমি ৰেখাৰ সাধাৰণ সমীকৰণ সম্বন্ধেও আলোচনা কৰিম।

১.৩ ৰেখাৰ প্ৰৱণতা

a) **ৰেখাৰ প্ৰৱণতাৰ সংজ্ঞা আৰু ইয়াৰ সূত্ৰ ঃ** যদি এডাল x-অক্ষৰ ধনাত্মক দিশৰ লগত (ঘড়ীৰ কাঁটাৰ বিপৰীত দিশত জোখা হয়) θ কোণ কৰে, তেনেহ'লে $\tan\theta$ক ৰেখাৰ প্ৰৱণতা (Slope or Gradient) বুলি কোৱা হয় আৰু ইয়াক সাধাৰণতে mৰে বুজোৱা হয়।



চিত্ৰ ঃ ১.১

ধৰা হ'ল, ৰেখাডালৰ ওপৰত $A(x_1, y_1)$ আৰু $B(x_2, y_2)$ দুটা বিন্দু। x-অক্ষৰ ওপৰত AL, BM লম্ব টনা হ'ল আৰু BMৰ ওপৰত AN লম্ব টনা হ'ল।

ABN ত্ৰিভুজৰ পৰা, $\tan\theta = \frac{NB}{AN}$

এতিয়া, $NB = MB - MN = MB - LA = y_2 - y_1$

আৰু $AN = LM = OM - OL = x_2 - x_1$

$\therefore m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

গতিকে, (x_1, y_1) আৰু (x_2, y_2) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাৰ প্ৰৱণতা হ'ল,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

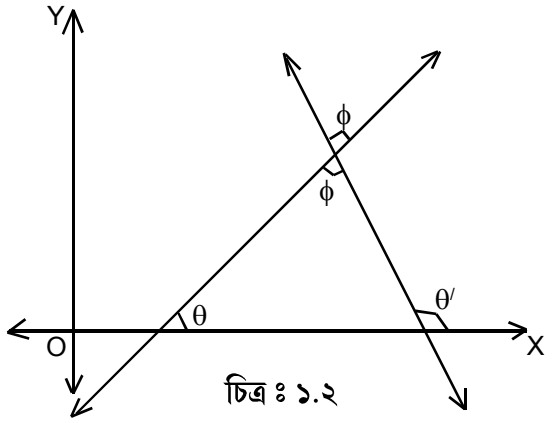
বিশেষ অৱস্থা হিচাপে যদি আমি মূল বিন্দু (0, 0) আৰু (x, y) বিন্দুদ্বয় সংযোগী ৰেখাডাল লওঁ, তেনেহ'লে, $m = \frac{y - 0}{x - 0} = \frac{y}{x}$

সকলো সমান্তৰাল ৰেখাই x-অক্ষৰ ধনাত্মক দিশৰ লগত একে কোণ কৰে আৰু সিহঁতৰ প্ৰৱণতা সমান।

x-অক্ষই নিজৰ লগত 0 কোণ কৰে আৰু সেইবাবে ইয়াৰ প্ৰৱণতা 0, সেয়ে x-অক্ষৰ সমান্তৰাল যিকোনো ৰেখাৰ প্ৰৱণতা 0।

y-অক্ষই x-অক্ষৰ লগত 90^0 কোণ কৰে আৰু ইয়াৰ প্ৰৱণতা $m = \tan 90^0$ আৰু ই সংজ্ঞাৱদ্ধ নহয়।অৱশ্যে সীমা অৰ্থত (Limiting Sense) আমি কেতিয়াবা y-অক্ষৰ প্ৰৱণতা অসীম বুলি কওঁ।এই মন্তব্য y-অক্ষৰ সমান্তৰাল সকলো ৰেখাৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰযোজ্য।

b) প্ৰদত্ত প্ৰৱণতাৰ দুডাল ৰেখাৰ মাজৰ কোণ ঃ ধৰা হ'ল, দুডাল ৰেখাই x-অক্ষৰ ধনাত্মক দিশৰ লগত ক্ৰমে θ আৰু θ' কোণ কৰে আৰু সিহঁতৰ মাজৰ কোণ ϕ।



চিত্ৰ ঃ ১.২

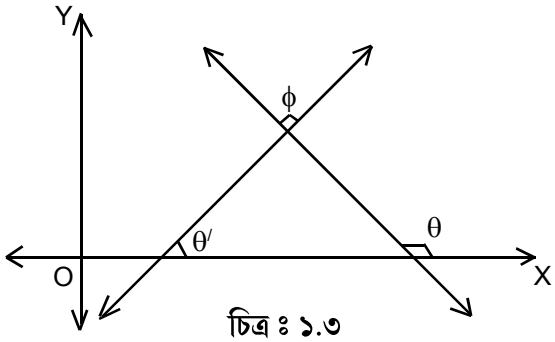
তেনেহ'লে, ওপৰৰ চিত্ৰৰ পৰা,

$$\phi = \theta' - \theta \Rightarrow \tan = \tan(\theta' - \theta) = \frac{\tan\theta' - \tan\theta}{1 + \tan\theta\tan\theta'}$$

যদি m আৰু m′ ক্ৰমে ওপৰৰ ৰেখা দুডালৰ প্ৰৱণতা হয়, তেনেহ'লে,

$$\tan\phi = \frac{m' - m}{1 + mm'}$$

ওপৰৰ চিত্ৰ অনুযায়ী এই ফলটো আমি পালোঁ। এই ক্ষেত্ৰত $\theta' > \theta$ অৰ্থাৎ $m' > m$। যদি $\theta' > \theta$ অৰ্থাৎ $m > m'$, তেনেহ'লে,



চিত্ৰ ঃ ১.৩

ওপৰৰ চিত্ৰৰ পৰা আমি পাওঁ,

$$\phi = \theta' - \theta \Rightarrow \tan\phi = \frac{m - m'}{1 + mm'}$$

গতিকে আমি পালোঁ, $\tan\phi = \dfrac{m \sim m'}{1 + mm'}$

যদি $\tan\phi$ৰ মান ধনাত্মক, ϕ হ'ল ৰেখা দুডালৰ মাজৰ সূক্ষ্ম কোণ। যদি $\tan\phi$ৰ মান ঋণাত্মক, ϕ হ'ল ৰেখা দুডালৰ মাজৰ স্থূল কোণ। ৰেখা দুডালৰ মাজৰ সূক্ষ্ম কোণ ϕ আমি তলৰ সূত্ৰটোৰ পৰা পাওঁ,

$$\tan\phi = \left|\frac{m' - m}{1 + mm'}\right| = \left|\frac{m - m'}{1 + mm'}\right|$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ

i) ৰেখা দুডাল সমান্তৰাল যদি $\phi = 0$ অর্থাৎ, যদি $\tan\phi = 0$ অর্থাৎ, যদি $m = m'$.

ii) ৰেখা দুডাল লম্ব যদি $\phi = 90^0$. অর্থাৎ, যদি $\cot\phi = 0$ অর্থাৎ, যদি $\frac{1 + mm'}{m - m'} = 0$ অর্থাৎ, যদি $mm' = -1$.

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ ঃ মূল বিন্দু আৰু $A\left(1, -\sqrt{3}\right)$ বিন্দুদ্বয় সংযোগী ৰেখাৰ প্ৰৱণতা কি? OA ৰেখাডাল x-অক্ষৰ লগত কৰা কোণটো কি?

সমাধান ঃ O(0, 0) আৰু $A\left(1, -\sqrt{3}\right)$ বিন্দুদ্বয় সংযোগী ৰেখাৰ প্ৰৱণতা,

$$= \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3}$$

OA ৰেখাডালে x-অক্ষৰ লগত কৰা কোণ θ হ'লে,

$\tan\theta = -\sqrt{3}$

$\Rightarrow \tan\theta = \tan 60^0 = \tan(180^0 - 60^0) = \tan 120^0$

$\Rightarrow \theta = 120^0$

উদাহৰণ ২ ঃ A(–1, 2), B(3, 4), C(0, –1) আৰু D(5, 1) বিন্দু চাৰিটা দিয়া আছে। AB আৰু CD ৰেখা দুডালৰ প্ৰৱণতা নিৰ্ণয় কৰক। লগতে ৰেখা দুডালৰ মাজৰ সূক্ষ্ম কোণটো নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $m = AB$ ৰেখাডালৰ প্ৰৱণতা $= \frac{4 - 2}{3 - (-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ আৰু

$m' = CD$ ৰেখাডালৰ প্ৰৱণতা $= \frac{1 - (-1)}{5 - 0} = \frac{2}{5}$

যদি AB আৰু CDৰ মাজৰ উলিয়াব লগীয়া সূক্ষ্ম কোণটো ϕ হয়, তেনেহ'লে,

$$\tan\phi = \left|\frac{m - m'}{1 + mm'}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2} - \frac{2}{5}}{1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}}\right| = \left|\frac{\frac{1}{10}}{\frac{6}{5}}\right| = \frac{1}{12}$$

$\therefore \phi = \tan^{-1}\frac{1}{12}$.

উদাহৰণ ৩ ঃ (1, –3) আৰু (–2, 4) বিন্দুদ্বয়ৰ সংযোগী ৰেখাৰ লম্ব ৰেখা এডালৰ প্ৰৱণতা নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ (1, –3) আৰু (–2, 4) বিন্দুদ্বয় সংযোগী ৰেখাৰ প্ৰৱণতা 'm' হ'লে,

$$m = \frac{4-(-3)}{-2-1} = -\frac{7}{3}$$

ওপৰৰ ৰেখাডালৰ লম্ব ৰেখা এডালৰ প্ৰৱণতা 'm′' হ'লে,

$$mm' = -1 \Rightarrow \left(-\frac{7}{3}\right)m' = -1$$

$$\Rightarrow m' = \frac{3}{7}$$

$\therefore$ নিৰ্ণেয় প্ৰৱণতা $\frac{3}{7}$.

উদাহৰণ ৪ ঃ A(5, 1), B(1, –1) আৰু C(x, 4) বিন্দু তিনিটা একৰেখীয় হ'লে, প্ৰৱণতাৰ সহায়ত x-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ যিহেতু A(5, 1), B (1, –1) আৰু C(x, 4) বিন্দু তিনিটা এক ৰেখীয়,

ABৰ প্ৰৱণতা = ACৰ প্ৰৱণতা, $\Rightarrow \frac{-1-1}{1-5} = \frac{4-1}{x-5}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{3}{x-5}$$

$$\Rightarrow x - 5 = 6$$

$$\Rightarrow x = 1$$

উদাহৰণ ৫ ঃ দুডাল ৰেখাৰ মাজৰ কোণ 45^0 হ'লে, আৰু তাৰে এডালৰ প্ৰৱণতা $\frac{1}{3}$ হ'লে, আনডাল ৰেখাৰ প্ৰৱণতা নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, আনডাল ৰেখাৰ প্ৰৱণতা m। $\frac{1}{3}$ আৰু m প্ৰৱণতাবিশিষ্ট ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণ 45^0।গতিকে আমি পালোঁ,

$$\left|\frac{m-\frac{1}{3}}{1+m.\frac{1}{3}}\right| = \tan 45^0 \Rightarrow \left|\frac{3m-1}{3+m}\right| = 1 \Rightarrow \frac{3m-1}{3+m} = \pm 1$$

$$\Rightarrow \frac{3m-1}{3+m} = 1 \text{ or, } \frac{3m-1}{3+m} = -1$$

$$\Rightarrow 3m - 1 = 3 + m \text{ or, } 3m - 1 = -3 - m$$

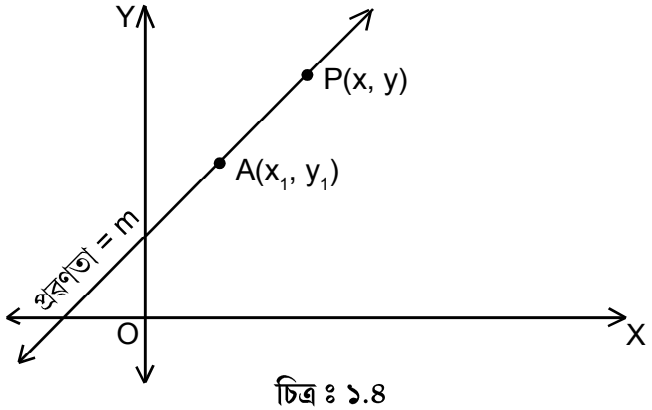
$$\Rightarrow 2m = 4 \text{ or, } 4m = -2$$

$$\Rightarrow m = 2 \text{ or, } m = -\frac{1}{2}$$

$\therefore$ আনডাল ৰেখাৰ প্ৰৱণতা 2 বা, $-\frac{1}{2}$.

১.৪ বিভিন্ন প্ৰামাণিক আকাৰত ৰেখাৰ সমীকৰণ

i) বিন্দু-প্ৰৱণতা আকাৰ ঃ এডাল ৰেখা A (x_1, y_1) বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু ৰেখাডালৰ প্ৰৱণতা m। ৰেখাডালৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।



চিত্ৰ ঃ ১.৪

ধৰা হ'ল, ৰেখাডালত P(x, y) যিকোনো এটা বিন্দু। এতিয়া A(x_1, y_1) আৰু P(x, y) হ'ল ৰেখাডালৰ ওপৰৰ দুটা বিন্দু। গতিকে প্ৰৱণতা m হ'বগৈ, $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

অৰ্থাৎ, $y - y_1 = m(x - x_1)$

যিহেতু ৰেখাডালৰ ওপৰত থকা প্ৰত্যেক বিন্দু Pৰ স্থানাংক (x, y)য়ে এই সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰিব। গতিকে এইটোৱেই ৰেখাডালৰ সমীকৰণ।

গতিকে (x_1, y_1) বিন্দুৰে যোৱা m প্ৰৱণতা বিশিষ্ট ৰেখাৰ সমীকৰণ হ'ল,

$y - y_1 = m(x - x_1)$।

যদি ৰেখাডাল মূল বিন্দু (0, 0)ৰ মাজেৰে যায় আৰু ইয়াৰ প্ৰৱণতা m, ইয়াৰ সমীকৰণ হ'ব $y = mx$।

ii) দ্বি বিন্দু আকাৰ ঃ দুটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) আৰু (x_2, y_2)ৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।

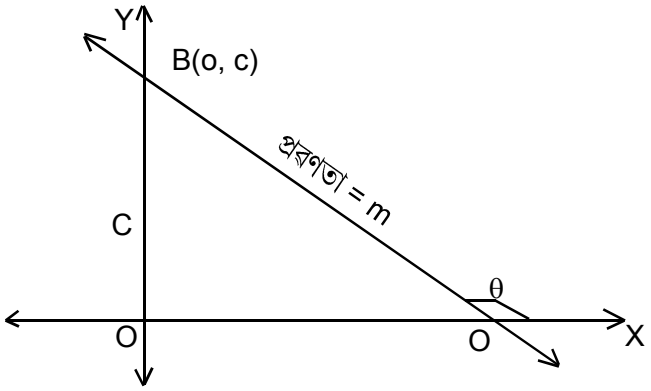
ধৰা হ'ল, ৰেখাডালৰ প্ৰৱণতা = m। যিহেতু ৰেখাডাল (x_1, y_1) আৰু (x_2, y_2) বিন্দু দুটাৰ মাজেৰে যায়, গতিকে, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

যিহেতু ৰেখাডালৰ প্ৰৱণতা m আৰু ৰেখাডাল (x_1, y_1) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, গতিকে ৰেখাডালৰ সমীকৰণ হ'ব, $y - y_1 = m(x - x_1)$।

$$\text{অৰ্থাৎ, } y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

ইয়াক এনেধৰণেও প্ৰকাশ কৰিব পাৰি, $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

iii) প্ৰৱণতা ছেদাংশ আকাৰঃ এডাল ৰেখাৰ প্ৰৱণতা 'm' আৰু ৰেখাডালৰ y-অক্ষৰ ছেদাংশ 'c' ৰেখাডালৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।



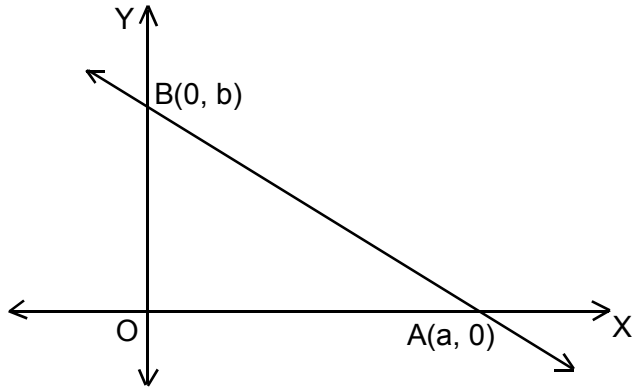
চিত্ৰ ঃ ১.৫

ধৰা হ'ল, AB ৰেখাডালৰ প্ৰৱণতা m আৰু ৰেখাডালৰ y-অক্ষৰ ছেদাংশ OB = c. স্পষ্টতা, B ৰ স্থানাংক (o, c). গতিকে AB ৰেখাডালৰ প্ৰৱণতা m আৰু ই B(o. c) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়। গতিকে AB ৰেখাডালৰ সমীকৰণ হ'ল, $y - c = m(x-o)$

অৰ্থাৎ, $y = mx + c$.

যদি ৰেখাডাল মূল বিন্দু O (0, 0)ৰ মাজেৰে যায়, c = o আৰু ৰেখাডালৰ সমীকৰণ হ'বগৈ $y = mx$।

iv) ছেদাংশ আকাৰ ঃ এডাল ৰেখাৰ অক্ষ দুডালৰ ছেদাংশ ক্ৰমে a আৰু b ৰেখাডালৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।



চিত্ৰ ঃ ১.৬

ধৰা হ'ল, AB ৰেখাডালৰ x-অক্ষৰ ছেদাংশ OA = a আৰু y-অক্ষৰ ছেদাংশ OB = b. স্পষ্টতঃ, ৰেখাডাল A(a, 0) আৰু B(0, b) বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু সেয়ে ৰেখাডালৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}$$

অর্থাৎ, $b(x-a) = -ay$

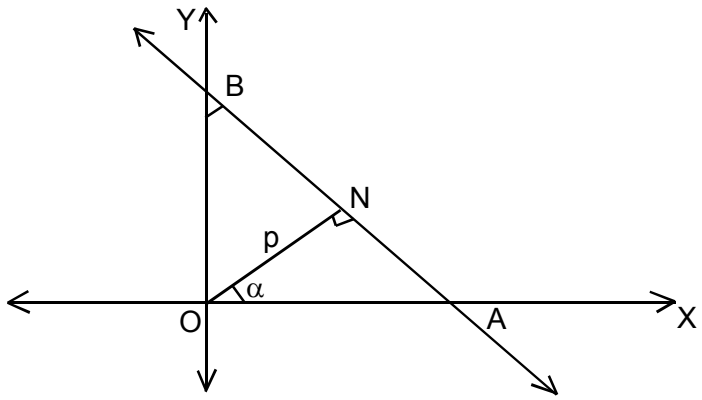
অর্থাৎ, $bx + ay = ab$

অর্থাৎ, $\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab}$

অর্থাৎ, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

গতিকে এডাল ৰেখা x-অক্ষ আৰু y-অক্ষৰ ছেদাংশ ক্ৰমে a আৰু b হ'লে, ৰেখাডালৰ সমীকৰণ হ'ল, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

v) অভিলম্ব আকাৰ ঃ মূল বিন্দুৰ পৰা এডাল ৰেখাৰ ওপৰত টনা লম্বৰ দৈর্ঘ্য দিয়া আছে। লগতে লম্বডালে x-অক্ষৰ ধনাত্মক দিশৰ লগত কৰা কোণ (ঘড়ীৰ কাঁটাৰ বিপৰীত দিশত জোখা) দিয়া আছে। ৰেখাডালৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰিব লাগে।



চিত্ৰ ঃ ১.৭

ধৰা হ'ল, মূল বিন্দুৰ পৰা ৰেখাডালৰ ওপৰত টনা লম্ব ON. ইয়াত ON = p আৰু $\angle XON = \alpha$ দিয়া আছে। ৰেখাডালৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰিব লাগে। ধৰা হ'ল ৰেখাডালে x-অক্ষক A বিন্দুত আৰু y-অক্ষৰ B বিন্দুত কাটে।

গতিকে, $\frac{OA}{ON} = \sec\alpha \Rightarrow OA = p\sec\alpha$

আৰু $\frac{OB}{ON} = \operatorname{cosec}\alpha \Rightarrow OB = p\operatorname{cosec}\alpha$

এতিয়া ৰেখাডালৰ x-অক্ষৰ ছেদাংশ $OA = p\sec\alpha$ আৰু y-অক্ষৰ ছেদাংশ $OB = p\operatorname{cosec}\alpha$. গতিকে ৰেখাডালৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$\frac{x}{p\sec\alpha} + \frac{y}{p\operatorname{cosec}\alpha} = 1$$

অর্থাৎ, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

১.৫ কেইটামান দৰকাৰী সিদ্ধান্ত

শিক্ষার্থীসকলে তলৰ সিদ্ধান্তকেইটা জনা দৰকাৰ। যেতিয়া প্ৰয়োজন হয়, তেতিয়া প্ৰয়োগ কৰিলেই হ'ল।

i) x আৰু yৰ প্ৰথম মাত্ৰাৰ সমীকৰণে সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায়। ৰেখাৰ সাধাৰণ সমীকৰণটো হ'ল, $Ax + By + C = O$ য'ত, A, B আৰু C স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক আৰু A আৰু Bৰ অন্ততঃ এটা শূন্যৰ সমান নহয়। এই সমীকৰণটোক বিভিন্ন প্ৰামাণিক আকাৰলৈ নিব পাৰি।

$Ax + By + C = O$ ... ...(1)

(1)ক এনেধৰণেও লিখিব পাৰি, $y = \left(-\frac{A}{B}\right)x + \left(-\frac{C}{B}\right)$, যদি $B \neq 0$.

গতিকে, যদি $B \neq 0$,

(1)এ বুজোৱা সৰল ৰেখাডালৰ প্ৰৱণতা = $-\frac{A}{B}$ আৰু y-অক্ষৰ ছেদাংশ = $-\frac{C}{B}$.

যদি $B = 0$, (1) হ'বগৈ $Ax + C = 0$, অৰ্থাৎ, $x = -\frac{C}{A}$ ইয়ে y-অক্ষৰ সমান্তৰাল এডাল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায়।

(1)ক এনেধৰণেও প্ৰকাশ কৰিব পাৰি, $Ax + By = -C$

অৰ্থাৎ, $\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1$ $(A \neq 0, B \neq 0)$

এইটো (1) ৰেখাডালৰ ছেদাংশ আকাৰৰ সমীকৰণ।

(1)ক অভিলম্ব আকাৰলৈ (Normal Form) নিবলৈ হ'লে, আমি এনেদৰে লিখোঁ।

$Ax + By = -C$, যদি $C < 0$ (অৰ্থাৎ, যদি $-C > 0$)

বা, $(-A)x + (-B)y = C$, যদি $C > 0$

দুয়োটা ক্ষেত্ৰতেই উভয় পক্ষক $\sqrt{A^2 + B^2}$ ৰে হৰণ কৰি, আমি পাওঁ,

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ (যদি, } C < 0)$$

$$\frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}y = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ (যদি, } C > 0)$$

এয়া $Ax + By + C = 0$ ৰেখাডালৰ অভিলম্ব আকাৰ।

ii) $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ আৰু $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ৰেখাদুডাল সমান্তৰাল যদি $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$, আৰু ৰেখা দুডাল লম্ব যদি $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$।

iii) $Ax + By + C = 0$ ৰেখাডালৰ যিকোনো লম্ব ৰেখাৰ সমীকৰণ হ'ল, $Bx - Ay + K = 0$ য'ত, K এটা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক।

iv) $Ax + By + C = 0$ ৰেখাডালৰ যিকোনো সমান্তৰাল ৰেখাৰ সমীকৰণ হ'ল, $Ax + By + K = 0$ য'ত, K এটা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক।

v) $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ আৰু $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ৰেখা দুডালৰ ছেদ বিন্দুৰে যোৱা ৰেখাডালৰ সমীকৰণ হ'ল, $A_1x + B_1y + C_1 + k(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ য'ত, k এটা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক।

vi) (x_1, y_1) বিন্দুৰ পৰা $Ax + By + C = 0$ ৰেখাৰ ওপৰত টনা লম্বৰ দৈর্ঘ্য হ'ল,

$$\left|\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right|.$$

vii) $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ আৰু $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ হ'ল, $\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

viii) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ আৰু $a_3x + b_3y + c_3 = 0$ ৰেখা তিনিডাল এক বিন্দুগামী হ'ব যদি, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ ঃ

i) (1, –2) আৰু (2, 3)ৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাডালৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

ii) ৰেখা দুডালে অক্ষ দুডালৰ লগত কৰা ছেদাংশ কি?

iii) ৰেখাডালৰ অভিলম্ব আকাৰৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ

i) (x_1, y_1) আৰু (x_2, y_2) বিন্দু দুটাৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

এই ক্ষেত্ৰত বিন্দু দুটা হ'ল, $(x_1, y_1) \equiv (1, -2)$ আৰু $(x_2, y_2) \equiv (2, 3)$.

গতিকে, ৰেখাডালৰ উলিয়াবলগীয়া সমীকৰণ হ'ল,

$$\frac{x - 1}{2 - 1} = \frac{y - (-2)}{3 - (-2)}$$

অর্থাৎ, $\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{5}$

অর্থাৎ, $5x - 5 = y + 2$

অর্থাৎ, $5x - y = 7$

ii) ৰেখাডালৰ সমীকৰণ হ'ল, $5x - y = 7$, অর্থাৎ, $\frac{5x-y}{7} = 1$,

অর্থাৎ, $\frac{5x}{7}-\frac{y}{7} = 1$, অর্থাৎ, $\frac{x}{7/5}+\frac{y}{-7} = 1$

এইটো ছেদাংশ আকাৰৰ সমীকৰণ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

$\therefore$ x-অক্ষৰ ছেদাংশ = $a = \frac{7}{5}$ আৰু y-অক্ষৰ ছেদাংশ = $b = -7$.

iii) ৰেখাডালৰ সমীকৰণ হ'ল, $5x - y = 7$

[মন কৰিবলগীয়া যে ধ্ৰুৱকটো সোঁপক্ষত আছে আৰু ই ধনাত্মক।]

উভয় পক্ষক $\sqrt{5^2+(-1)^2}$ অর্থাৎ, $\sqrt{26}$ ৰে হৰণ কৰি, আমি পাওঁ,

$$\frac{5}{\sqrt{26}}x+\frac{-1}{\sqrt{26}}y=\frac{7}{\sqrt{26}}$$

এইটোৱেই ৰেখাডালৰ অভিলম্ব আকাৰ।

উদাহৰণ ২ ঃ

i) এডাল ৰেখাই x-অক্ষৰ ধনাত্মক দিশৰ লগত $\frac{\pi}{4}$ কোণ কৰে আৰু y-অক্ষৰ ছেদাংশ 2।

ৰেখাডালৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

ii) ৰেখাডালৰ সমীকৰণক অভিলম্ব আকাৰত প্ৰকাশ কৰক। মূল বিন্দুৰ পৰা ৰেখাডালৰ ওপৰত টনা অবিলম্বডালে x-অক্ষৰ লগত কৰা কোণটো কি? মূল বিন্দুৰ পৰা ৰেখাডালৰ দূৰত্ব কিমান?

সমাধান ঃ

i) ৰেখাডালৰ প্ৰৱণতা, $m = \tan\frac{\pi}{4} = 1$, y-অক্ষৰ ছেদাংশ $c = 2$.

$\therefore$ ৰেখাডালৰ সমীকৰণ হ'ল, $y = mx + c$

অর্থাৎ, $y = x + 2$; অর্থাৎ, $x - y + 2 = 0$

ii) $\therefore$ ৰেখাডালৰ সমীকৰণ হ'ল, $x - y + 2 = 0$

অর্থাৎ, $x - y = -2$; অর্থাৎ, $-x + y = 2$

[মন কৰিব যে ধ্ৰুৱকটো সোঁপক্ষত আছে আৰু ধনাত্মক কৰি লোৱা হৈছে।]

উভয় পক্ষক $\sqrt{(-1)^2+1^2}$ অর্থাৎ, $\sqrt{2}$ ৰে হৰণ কৰি, আমি পাওঁ,

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x+\frac{1}{\sqrt{2}}y=\sqrt{2}$$

এইটোৱেই অভিলম্ব আকাৰৰ সমীকৰণ।

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

এই ক্ষেত্ৰত $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $p = \sqrt{2}$

এতিয়া, $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -1$

$\Rightarrow \tan\alpha = -1$

$\Rightarrow \alpha = \frac{3\pi}{4}$ বা, $\frac{7\pi}{4}$

যিহেতু $\cos\alpha < 0$ আৰু $\sin\alpha > 0$, α দ্বিতীয় চোকত আছে। গতিকে, $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

গতিকে, ৰেখাডালৰ অভিলম্বই x-অক্ষৰ লগত $\frac{3\pi}{4}$ (অর্থাৎ, 135^0) কোণ কৰে।

মূল বিন্দুৰ পৰা ৰেখাডালৰ দূৰত্ব = $p = \sqrt{2}$.

উদাহৰণ ৩ ঃ (3, –1) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু $3x - 4y = 1$ ৰেখাডালৰ সমান্তৰাল আৰু লম্ব হোৱা ৰেখাৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $3x - 4y = 1$ ৰেখাৰ সমান্তৰাল যিকোনো ৰেখাৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$3x - 4y = k \quad \ldots\ \ldots\ \ldots(1)$$

যিহেতু ৰেখাডাল (3, –1) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, গতিকে

$3.3 - 4.(-1) = k \Rightarrow k = 13$

গতিকে (1) সমীকৰণটো হ'বগৈ $3x - 4y = 13$

এইটোৱেই (3, –1) বিন্দুৰে যোৱা প্ৰদত্ত ৰেখাডালৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ সমীকৰণ।

আকৌ $3x - 4y = 1$ ৰেখাৰ যিকোনো লম্ব ৰেখাৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$4x + 3y = k' \quad \ldots\ \ldots\ \ldots(2)$$

যিহেতু ৰেখাডাল (3, –1), বিন্দুৰ মাজেৰে যায়,

গতিকে, $4.3 + 3(-1) = k' \Rightarrow k' = 9$

গতিকে, (2) সমীকৰণটো হ'বগৈ $4x + 3y = 9$. এইটোৱেই (3, –1) বিন্দুৰে যোৱা প্ৰদত্ত ৰেখাডালৰ লম্ববেখাৰ সমীকৰণ।

উদাহৰণ ৪ ঃ (–3, –1) বিন্দুৰ পৰা $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}. = -1$ ৰেখাৰ ওপৰত টনা লম্বৰ দৈর্ঘ্য নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ৰেখাডাল হ'ল, $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=-1$

অর্থাৎ, $3x - 2y = -6$

অর্থাৎ, $3x - 2y + 6 = 0$

(–3, –1) বিন্দুৰ পৰা ৰেখাডালৰ ওপৰত লম্বৰ দৈর্ঘ্য,

$$= \left|\frac{3.(-3)-2.(-1)+6}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{-1}{\sqrt{13}}\right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{13}}$$

উদাহৰণ ৫ ঃ মূল বিন্দুৰ পৰা $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ৰেখাৰ ওপৰত টনা লম্বৰ দৈর্ঘ্য p হ'লে, প্রমাণ কৰক যে $\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

সমাধান ঃ $p = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{p} = \sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

উদাহৰণ ৬ ঃ $2x - y - 1 = 0$ আৰু $x - 3y + 2 = 0$ ৰেখা দুডালৰ ছেদ বিন্দুৰ পৰা (2, –5) বিন্দুৰ দূৰত্ব নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ৰেখা দুডাল হ'ল,

$2x - y - 1 = 0$ ... ...(1)

$x - 3y + 2 = 0$ ... ...(2)

(1) আৰু (2) সমাধান কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{x}{-2-3} = \frac{y}{-1-4} = \frac{1}{-6+1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-5} = \frac{y}{-5} = \frac{1}{-5}$$

$\Rightarrow x = 1, y = 1$

$\therefore$ (1) আৰু (2) ৰেখা দুডালৰ ছেদ বিন্দুৰ স্থানাংক হ'ল (1, 1)..

গতিকে ছেদ বিন্দু (1, 1)ৰ পৰা (2, –5) বিন্দুৰ দূৰত্ব,

$= \sqrt{(1-2)^2+(1+5)^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$

উদাহৰণ ৭ ঃ $x + 2y + 3 = 3$ আৰু $3x + 4y + 7 = 0$ ৰেখা দুডালৰ ছেদ বিন্দুৰ মাজেৰে এডাল ৰেখা যায় আৰু এই ৰেখাডাল $y – x = 8$ ৰেখাডালৰ ওপৰত লম্ব। ৰেখাডালৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $x + 2y + 3 = 0$ আৰু $3x + 4y + 7 = 0$ ৰেখা দুডালৰ ছেদ বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাৰ সমীকৰণ হ'ল

$$x + 2y + 3 + k(3x + 4y + 7) = 0$$

অর্থাৎ, $(1 + 3k)x + (2 + 4k)y + (3 + 7k) = 0$ ... ...(1)

এই ৰেখাডাল $y – x = 8$, অর্থাৎ, $x – y + 8 = 0$ ৰেখাৰ লম্ব হ'ব যদি,

$(1 + 3k) + (–1)(2 + 4k) = 0$ (চর্ত ঃ $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$)

অর্থাৎ, $1 + 3k –2 – 4k = 0$; অর্থাৎ, $–k – 1 = 0$; অর্থাৎ, $k = –1$

(1)ত $k = –1$ বহুৰাই আমি পাওঁ, $–2x – 2y – 4 = 0$; অর্থাৎ, $x + y + 2 = 0$,

এইটোৱেই ৰেখাডালৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।

উদাহৰণ ৮ ঃ mৰ কি মানৰ বাবে $y = 3x –1$, $2y = x + 3$ আৰু $3y = mx + 4$ ৰেখা তিনিডাল এক বিন্দুগামী হ'ব?

সমাধান ঃ প্রদত্ত ৰেখা তিনিডাল হ'ল, $y = 3x – 1$, $2y = x + 3$, $3y = mx + 4$

অর্থাৎ, $3x – y – 1 = 0$, $x – 2y + 3 = 0$, $mx – 3y + 4 = 0$.

ৰেখা তিনিডাল এক বিন্দুগামী হ'বলৈ হ'লে,

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ m & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow 3(–8 + 9) + 1(4 – 3m) + (–1)(–3 + 2m) = 0$

$\Rightarrow 3 + 4 – 3m + 3 – 2m = 0$

$\Rightarrow –5m = –10$

$\Rightarrow m = 2$

উদাহৰণ ৯ঃ এডাল ৰেখা (4, –7) বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু ৰেখাডাল মূল বিন্দুৰ পৰা 8 একক দূৰত থাকে। ৰেখাডালৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ (4, –7) বিন্দুৰে যোৱা যিকোনো ৰেখাৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$y – (–7) = m(x – 4)$$

অর্থাৎ, $mx – y – (4m + 7) = 0$ ... ...(1)

যিহেতু ৰেখাডাল মূল বিন্দুৰ পৰা 8 একক দূৰত আছে। গতিকে মূল বিন্দুৰ পৰা ৰেখাডালৰ ওপৰত টনা লম্বৰ দৈর্ঘ্য 8. তেনেহ'লে,

$$\frac{|-(4m+7)|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 8$$

$\Rightarrow |4m+7| = 8\sqrt{m^2+1}$

$\Rightarrow (4m+7)^2 = 64(m^2+1)$

(বৰ্গ কৰি, মন কৰিবলগীয়া যে $|p|^2 = (\pm p)^2 = p^2$)

$\Rightarrow 16m^2 + 56m + 49 = 64m^2 + 64$

$\Rightarrow 48m^2 - 56m + 15 = 0$

$$\Rightarrow m = \frac{-(-56) \pm \sqrt{(-56)^2 - 4.48.15}}{2\times 48}$$

$$= \frac{56 \pm \sqrt{8^2\times 7^2 - 8^2\times 3\times 15}}{2\times 48}$$

$$= \frac{56 \pm 8\sqrt{49-45}}{2\times 48}$$

$$= \frac{56 \pm 8\times 2}{2\times 48}$$

$$= \frac{72}{2\times 48} \text{ বা, } \frac{40}{2\times 48}$$

$$\Rightarrow m = \frac{3}{4} \text{ বা, } \frac{5}{12}$$

$m = \frac{3}{4}$ ৰ বাবে, (1) হ'বগৈ, $\frac{3}{4}x - y - 10 = 0$, অর্থাৎ, $3x - 4y - 40 = 0$

$m = \frac{5}{12}$ ৰ বাবে, (1) হ'বগৈ, $\frac{5}{12}x - \frac{26}{3}y - = 0$, অর্থাৎ, $5x - 12y - 104 = 0$

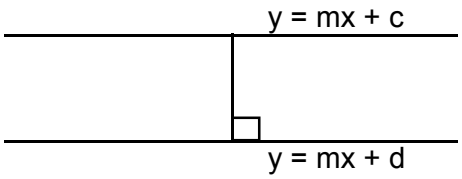
$\therefore$ ৰেখাডালৰ নির্ণেয় সমীকৰণ,

$3x - 4y - 40 = 0$ বা, $5x - 12y - 104 = 0$

মন্তব্য ঃ দুটা উত্তৰ পোৱাৰ কাৰণ এয়ে যে (4, –7) বিন্দুৰে যোৱা, আৰু মূল বিন্দুৰ পৰা 8 একক দূৰৈত থকা ৰেখা দুডাল আছে।

উদাহৰণ ১০ ঃ $y = mx + c$ আৰু $y = mx + d$ $(c > d)$ সমান্তৰাল ৰেখা দুডালৰ মাজৰ দূৰত্ব নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দুডাল সমান্তৰাল ৰেখাৰ মাজৰ দূৰত্ব হ'ল ৰেখা দুডালৰ যিকোনো এডালৰ এটা বিন্দুৰ পৰা আনডালৰ ওপৰত টনা লম্বৰ দৈর্ঘ্য।



চিত্ৰ ঃ ১.৮

$y = mx + c$ত $x = 0$ বহুৰাই আমি পাওঁ, $y = c$, গতিকে, $y = mx + c$ ৰেখাডালত $(0, c)$ এটা বিন্দু। $(0, c)$ বিন্দুৰ পৰা আনডাল ৰেখা অর্থাৎ $y = mx + d$, অর্থাৎ $mx - y + d = 0$ৰ ওপৰত টনা লম্বৰ দৈর্ঘ্য হ'ল,

$$\frac{|m.0 - c + d|}{\sqrt{m^2 + (-1)^2}} = \frac{|d - c|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{c - d}{\sqrt{m^2 + 1}} \quad (c > d)$$

$\therefore$ সমান্তৰাল ৰেখা দুডালৰ মাজৰ নির্ণেয় দূৰত্ব = $\frac{c - d}{\sqrt{m^2 + 1}}$

উদাহৰণ ১১ ঃ $3x - 4y - 5 = 0$ আৰু $12x + 5y + 1 = 0$ দুডালৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ৰেখা দুডাল হ'ল,

$3x - 4y - 5 = 0$ আৰু $12x + 5y + 1 = 0$

অর্থাৎ, $-3x + 4y + 5 = 0$ আৰু $12x + 5y + 1 = 0$

(দুয়োটা সমীকৰণৰে ধ্রুৱক পদ দুটা ধনাত্মক কৰা হৈছে।)

ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণৰ (য'ত মূল বিন্দুটো থাকে) সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$\frac{-3x + 4y + 5}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = \frac{12x + 5y + 1}{\sqrt{12^2 + 5^2}}$$

অর্থাৎ, $5(12x + 5y + 1) = 13(-3x + 4y + 5)$

অর্থাৎ, $99x - 27y - 60 = 0$,

অর্থাৎ, $33x - 9y - 20 = 0$

আনডাল সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$\frac{-3x + 4y + 5}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2}} = -\frac{12x + 5y + 1}{\sqrt{12^2 + 5^2}}$$

অর্থাৎ, $-39x + 52y + 65 = -60x - 25y - 5$

অর্থাৎ, $21x + 77y + 70 = 0$,

অর্থাৎ, $3x + 11y + 10 = 0$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ ঃ এডাল ৰেখা (3, –1) বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু ৰেখাডালে অক্ষদ্বয়ৰ লগত সমান ছেদাংশ কৰে। ৰেখাডালৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ ঃ $3x + 4y = 1$ ৰেখাডালৰ প্রৱণতা কিমান? (2, –3) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু এই ৰেখাডালৰ সমান্তৰাল হোৱা আৰু লম্ব হোৱা ৰেখা দুডালৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ ঃ $3x – 4y – 6 = 0$ আৰু $2x + y + 7 = 0$ ৰেখা দুডালৰ ছেদ বিন্দু নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ ঃ $5x – y = 9$ আৰু $x + 6y = 8$ ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ ঃ $2x + 3y = 6$ আৰু $6x + 9y = 5$ সমান্তৰাল ৰেখা দুডালৰ মাজৰ দূৰত্ব নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৬ ঃ প্রমাণ কৰক যে $5x + 3y = 7$, $3x – 4y = 10$ আৰু $x + 2y = 0$ ৰেখা তিনিডালে এটা বিন্দুত কটাকটি কৰে। বিন্দুটো কি?

প্রশ্ন নং ৭ ঃ এডাল ৰেখা $5x + 3y = 7$ আৰু $3x – 4y = 10$ ৰেখা দুডালৰ ছেদ বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু $3x – 2y = 0$ ৰেখাডালৰ সমান্তৰাল। ৰেখাডালৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৮ ঃ $3x – 4y + 7 = 0$ আৰু $12x – 5y – 8 = 0$ ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।



১.৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- যদি এডাল ৰেখা (x_1, y_1) আৰু (x_2, y_2), বিন্দু দুটাৰ মাজেৰে যায়, তেনেহ'লে ইয়াৰ প্রৱণতা হ'ল m হ'ল, $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$
- মূল বিন্দু আৰু (x, y) বিন্দু সংযোগী ৰেখাৰ প্রৱণতা m হ'ল, $m = \frac{y}{x}$
- m আৰু m′ প্রৱণতা বিশিষ্ট দুডাল ৰেখাৰ মাজৰ কোণ ϕ হ'লে, $\tan\phi = \frac{m \sim m'}{1 + mm'}$
- m আৰু m′ প্রৱণতা বিশিষ্ট দুডাল ৰেখা সমান্তৰাল হ'ব যদি $m = m'$.
- m আৰু m′ প্রৱণতাবিশিষ্ট দুডাল ৰেখা লম্ব হ'ব $mm' = –1$.

- এডাল ৰেখা (x_1, y_1) বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু ৰেখাডালৰ প্ৰৱণতা 'm' ৰেখাডালৰ সমীকৰণ হ'ল, $y - y_1 = m(x-x_1)$ (বিন্দু-প্ৰৱণতা আকাৰ)
- (x_1, y_1) আৰু (x_2, y_2) বিন্দু দুটাৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$ (দ্বি-বিন্দু আকাৰ)

- এডাল ৰেখাৰ প্ৰৱমতা 'm' আৰু ৰেখাডালৰ y-আক্ষৰ ছেদাংশ 'c' ৰেখাডালৰ সমীকৰণ হ'ল, $y = mx+c$ (প্ৰৱণতা-ছেদাংশ আকাৰ)
- এডাল ৰেখাৰ x-অক্ষ আৰু y-অক্ষৰ ছেদাংশ ক্ৰমে a আৰু b. ৰেখাডালৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$ (ছেদাংশ আকাৰ)

- মূল বিন্দুৰ পৰা এডাল ৰেখাৰ ওপৰত টনা লম্বৰ দৈৰ্ঘৰ p হ'লে আৰু লম্বডালে x-অক্ষৰ লগত α কোণ কৰিলে, ৰেখাডালৰ সমীকৰণ হ'ব, $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ (অতিলম্ব আকাৰ)



১.৮ অধিক জানিবলৈ

ইংৰাজী গ্ৰন্থ ঃ

1) Jain, P. K. and Ahmhad, K. *Textbook of Analytical Geometry of Three Dimensions*. New Delhi: New Age International (P) Ltd.
2) Kishan, Hari. *Coordinate Geometry of Two dimensions*. New Delhi: Atlantic Publishers & Distributors.
3) Pal, Sat and Pal, Harbans. *A Textbook of Two Dimensional Geometry*. New Age International Publishers.
4) Sharma, G. C. and Jain, Madhu. *Coordinate Geometry (2D and 3D)*. New Delhi: Galgotia Publications Pvt Ltd.
5) Sharma, A. K. *Coordinate Geometry (2D)*. New Delhi: Discovery Publishing House.



১.৯ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ৰেখাডালে অক্ষদ্বয়ৰ লগত সমান ছেদাংশ কৰে। ধৰা হ'ল, ছেদাংশ a আৰু a। গতিকে, ইয়াৰ সমীকৰণ হ'ল, $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 1$

অৰ্থাৎ, $x + y = a$

যিহেতু ৰেখাডাল (3, – 1) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়,

$\therefore$ 3 + (–1) = a; গতিকে a = 2

$\therefore$ ৰেখাডালৰ নির্ণেয় সমীকৰণ x + y = 2

২নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্রদত্ত ৰেখাডালৰ সমীকৰণ, 3x + 4y = 1

অর্থাৎ, 4y = –3x + 1

অর্থাৎ, $y = \left(-\frac{3}{4}\right)x + \frac{1}{4}$

ই y = mx + c আকাৰৰ।

$\therefore$ ৰেখাডালৰ প্রৱণতা = $m = -\frac{3}{4}$

প্রদত্ত ৰেখাডালৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ প্রৱণতা = $m = -\frac{3}{4}$.

গতিকে (2, –3) বিন্দুৰে যোৱা প্রদত্ত ৰেখাডালৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ সমীকৰণ হ'ব,

$$y - (-3) = \left(-\frac{3}{4}\right)(x-2)$$

অর্থাৎ, 4(y + 3) = –3(x – 2)

অর্থাৎ, 3x + 4y + 6 = 0

প্রদত্ত ৰেখাডালৰ লম্ব ৰেখাৰ প্রৱণতা m' হ'লে,

$mm' = -1$

$$\Rightarrow m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

গতিকে (2, –3) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা প্রদত্ত ৰেখাডালৰ লম্ব ৰেখাৰ সমীকৰণ,

$$y - (-3) = \left(-\frac{3}{4}\right)(x-2)$$

অর্থাৎ, 3y + 9 = 4x – 8

অর্থাৎ, 4x – 3y – 17 = 0

৩নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ 3x – 4y – 6 = 0 আৰু 2x + y + 7 = 0, সমীকৰণ দুটা সমাধান কৰিলে ছেদ বিন্দুৰ স্থানাংক পোৱা যায়। বজ্রগুণনৰ সহায়ত আমি পাওঁ,

$$\frac{x}{-28+6} = \frac{y}{-12-21} = \frac{1}{3+8}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-22} = \frac{y}{-33} = \frac{1}{11}$$

$\Rightarrow$ x = –2, y = –3.

$\therefore$ নির্ণেয় ছেদ বিন্দুৰ স্থানাংক (–2, –3).

৪নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $5x - y = 9$ অৰ্থাৎ, $y = 5x - 9$ ৰেখাডালৰ প্ৰৱণতা $m = 5$, আৰু $x + 6y = 8$ অৰ্থাৎ, $y = -\frac{1}{6}x + \frac{8}{6}$ ৰেখাৰ প্ৰৱণতা $m' = -\frac{1}{6}$. ৰেখা দুডালৰ মাজৰ সূক্ষ্ম কোণ ϕ হ'লে,

$$\tan\phi = \left|\frac{m - m'}{1 + mm'}\right| = \left|\frac{5 + \frac{1}{6}}{1 - 5.\frac{1}{6}}\right| = \left|\frac{31/6}{1/6}\right| = 31$$

$\Rightarrow \phi = \tan^{-1}31$

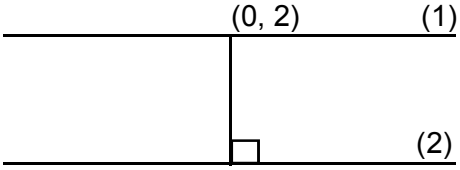
৫নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ সমান্তৰাল ৰেখা দুডাল হ'ল,

$2x + 3y = 6$; অৰ্থাৎ, $2x + 3y - 6 = 0$ ... ...(1)

আৰু $6x + 9y = 5$; অৰ্থাৎ, $6x + 9y - 5 = 0$ ... ...(2)

(1)ত $x = 0$ বহুৱাই, আমি পাওঁ, $y = 2$. গতিকে, (1) ৰেখাডালত (0, 2) এটা বিন্দু।

(1) আৰু (2) সমান্তৰাল ৰেখা দুডালৰ মাজৰ দূ�ৰত্ব,



চিত্ৰ ঃ ১.৯

= (1) নম্বৰ ৰেখাডালত থকা (0, 2) বিন্দুৰ পৰা (2) নম্বৰ ৰেখাডালৰ ওপৰত টনা লম্বৰ দৈর্ঘ্য

$$= \left|\frac{6.0 + 9.2 - 5}{\sqrt{6^2 + 9^2}}\right| = \frac{13}{\sqrt{36 + 81}} = \frac{13}{3\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{13}{3}}$$

৬নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $5x + 3y = 7$ ... ...(1)

$3x - 4y = 10$ ... ...(2)

$x + 2y = 0$ ... ...(3)

ক্ৰেমাৰৰ বিধিৰ সহায়ত (1) আৰু (2)ৰ পৰা আমি পালোঁ,

$$\frac{x}{\begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 10 & -4 \end{vmatrix}} = \frac{y}{\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 10 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-28 - 30} = \frac{y}{50 - 21} = \frac{1}{-20 - 9}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-58} = \frac{y}{29} = \frac{1}{-29}$$

$\Rightarrow x = 2,\ y = -1.$

$\therefore$ (1) আৰু (2) ৰেখাদুডালৰ ছেদ বিন্দুৰ স্থানাংক (2, –1).

যেতিয়া, $x = 2$ আৰু $y = -1$,

(3)ৰ বাঁওপক্ষ = $2 + 2.(-1) = 2 - 2 = 0$

$\therefore$ (3) নম্বৰ ৰেখাডাল (2, –1) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়।

যিহেতু তিনিওডাল ৰেখাই (2, –1) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, তিনিও ডালে কটাকটি কৰে।

বিন্দুটো হ'ল (2, –1).

৭নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $5x + 3y = 7$ আৰু $3x - 4y = 10$, অৰ্থাৎ, $5x + 3y - 7 = 0$ আৰু $3x - 4y - 10 = 0$ ৰেখা দুডালৰ ছেদ বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা যিকোনো ৰেখাৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$5x + 3y - 7 + \lambda(3x - 4y - 10) = 0$$

অৰ্থাৎ, $(5 + 3\lambda)x + (3 - 4\lambda)y - (7 + 10\lambda) = 0$ ... ...(1)

এই ৰেখাডাল $3x - 2y = 0$ ৰেখাৰ সমান্তৰাল হ'ব যদি,

$$\frac{5+3\lambda}{3} = \frac{3-4\lambda}{-2}$$

$\Rightarrow -10 - 6\lambda = 9 - 12\lambda$

$\Rightarrow 6\lambda = 19$

$\Rightarrow \lambda = \frac{19}{6}$

(1)ত $\lambda = \frac{19}{6}$ বহুৱাই আমি পাওঁ,

$$\left(5+\frac{57}{6}\right)x + \left(3-\frac{76}{6}\right)y - \left(7+\frac{190}{6}\right) = 0$$

অৰ্থাৎ, $87x - 58y - 232 = 0$

অৰ্থাৎ, $29(3x - 2y - 8) = 0$

অৰ্থাৎ, $3x - 2y - 8 = 0$

এইটোৱেই ৰেখাডালৰ নিৰ্ণেয় সমীকৰণ।

৮নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $3x - 4y + 7 = 0$ আৰু $12x - 5y - 8 = 0$ ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$\frac{3x-4y+7}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = \pm\frac{12x-5y-8}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}$$

অৰ্থাৎ, $\frac{3x-4y+7}{5} = \pm\frac{12x-5y-8}{13}$

+ চিন লৈ, আমি পাওঁ, $39x - 52y + 91 = 60x - 25y - 40$

অৰ্থাৎ, $21x + 27y - 131 = 0$,

– চিন লৈ, আমি পাওঁ, $39x – 52y + 91 = – (60x – 25y – 40)$

অর্থাৎ, $99x – 77y + 51 = 0$.

গতিকে, ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ হ'ল,

$21x + 27y – 131 = 0$ আৰু $99x – 77y + 51 = 0$.



১.১০ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ এডাল ৰেখাৰ y-অক্ষৰ ছেদাংশ 5 আৰু ৰেখাডালে x-অক্ষৰ লগত 30^0 কোণ কৰে। ৰেখাডালৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ২ ঃ ABC ত্ৰিভুজৰ শীৰ্ষ বিন্দু তিনিটা হ'ল A(3, 3); B(–3, –5) আৰু C(–1, 6)। মাধ্যিকী তিনিডালৰ প্ৰৱণতা নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ ঃ এডাল ৰেখা (4, 6) বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু ৰেখাডালৰ অক্ষদ্বয়ৰ ছেদাংশ সাংখ্যিকভাৱে সমান, কিন্তু বিপৰীত চিহ্নৰ। ৰেখাডালৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ ঃ এডাল ৰেখা (4, 5) বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু ৰেখাডালৰ অক্ষদ্বয়ৰ মাজত থকা অংশটো এই বিন্দুটোত সমদ্বিখণ্ডিত হয়। ৰেখাডালৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৫ ঃ এডাল ৰেখা এনেভাৱে চলাচল কৰে যে দুডাল পৰস্পৰ লম্বৰেখাৰ ওপৰত ইয়াৰ ছেদাংশৰ প্ৰতিক্ৰমৰ যোগফল এটা ধ্ৰুৱক। দেখুওৱাক যে ৰেখাডাল এটা নির্দিষ্ট বিন্দুৰ মাজেৰে যায়।

প্ৰশ্ন ৬ ঃ মূল বিন্দুৰ পৰা এডাল ৰেখাৰ ওপৰত টনা লম্বৰ দৈর্ঘ্য $4\sqrt{2}$ একক, আৰু এই লম্বডালে x-অক্ষৰ লগত $\tan^{-1}1$ কোণ কৰে। ৰেখাডালৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৭ ঃ (2, 3) আৰু (–1, 4) বিন্দুদ্বয় সংযোগী ৰেখাখণ্ডক $x + y + 1 = 0$ ৰেখাডালে কি অনুপাতত ভাগ কৰিব?

প্ৰশ্ন ৮ ঃ (2, 3) বিন্দুৰ পৰা $2x – 3y + 9 = 0$ ৰেখাডালে x-অক্ষৰ লগত 45^0 কোণ কৰে। ৰেখাডালৰ দূৰত্ব নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৯ ঃ তলৰ ৰেখাবোৰৰ মাজৰ কোণ নির্ণয় কৰক।

i) $2x – y + 3 = 0$ আৰু $x + y = 0$

ii) $x + 2y + 9 = 0$ আৰু $3x + y – 7 = 0$.

প্ৰশ্ন ১০ ঃ (4, 5) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু $2x – y + 7 = 0$ ৰেখাৰ লগত 45^0 কোণ কৰা ৰেখা দুডালৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ১১ ঃ $x + 2y + 3 = 0$ আৰু $3x + 4y + 7 = 0$ ৰেখা দুডালৰ ছেদ বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু $y – x = 9$ ৰেখাডালৰ লম্ব হোৱা ৰেখাৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ১২ ঃ এটা ত্ৰিভুজৰ শীৰ্ষ বিন্দু তিনিটা (0, 0), (1, –1), (3, 2) ত্ৰিভুজৰ শীৰ্ষ বিন্দু তিনিটাৰ পৰা বিপৰীত বাহুৰ ওপৰত টনা লম্বৰ দৈৰ্ঘ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ১৩ ঃ তলৰ সমান্তৰাল ৰেখাযোৰৰ মাজৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰক।

i) $9x + 40y – 20 = 0, 9x + 40y + 103 = 0$

ii) $5x + 12y – 7 = 0, 5x + 12y + 45 = 0.$

প্ৰশ্ন ১৪ ঃ (0, 1) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাৰ ওপৰত (2, 2) বিন্দুৰ পৰা টনা লম্বৰ দৈৰ্ঘ এক একক। তেনে ৰেখাৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

*** ***** ***

অধ্যায় ২ ঃ স্থানাংক অক্ষৰ ৰূপান্তৰণ

অধ্যায় গাঁথনি

২.১ উদ্দেশ্য
২.২ পৰিচয়
২.৩ স্থানাংক-অক্ষৰ ৰূপান্তৰণ
২.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
২.৫ অধিক জানিবলৈ
২.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
২.৭ আৰ্হি প্রশ্ন

২.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

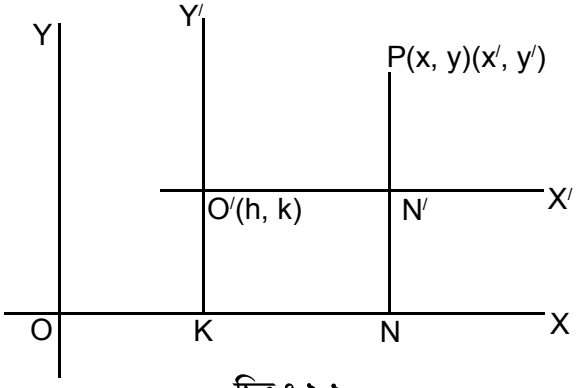
- স্থানাংক-অক্ষৰ ৰূপান্তৰণ সম্বন্ধে জানিব।

২.২ পৰিচয়

এই অধ্যায়ত আমি স্থানাংক-অক্ষৰ ৰূপান্তৰণ সম্বন্ধেও আলোচনা কৰিম।

২.৩ স্থানাংক-অক্ষৰ ৰূপান্তৰণ

a) অক্ষ দুডালৰ দিশৰ পৰিৱর্তন নকৰাকৈ মূলবিন্দুৰ পৰিৱর্তন (অক্ষৰ স্থানান্তৰণ) ঃ



চিত্র ঃ ২.১

ধৰা হ'ল, OX আৰু OY স্থানাংক অক্ষ সাপেক্ষে O′ৰ স্থানাংক (h, k). এতিয়া পুৰণি অক্ষদ্বয়ৰ সমান্তৰালকৈ O′X′ আৰু O′Y′নতুন স্থানাংক-অক্ষদ্বয় লোৱা হ'ল। O′ হ'ল নতুন মূল বিন্দু।

ধৰা হ'ল, সমতলখনত P যিকোনো এটা বিন্দু। ধৰা হ'ল, পুৰণি অক্ষ সাপেক্ষে ইয়াৰ স্থানাংক (x, y) আৰু নতুন অক্ষ সাপেক্ষে ইয়াৰ স্থানাংক (x′, y′). OXৰ ওপৰত PN

লম্ব টনা হ'ল আৰু ই $O'X'$ অক N' বিন্দুত লম্বভাৱে ছেদ কৰিছে। $O'Y'$এ OXক K বিন্দুত লম্বভাৱে ছেদ কৰিছে। স্পষ্টতঃ

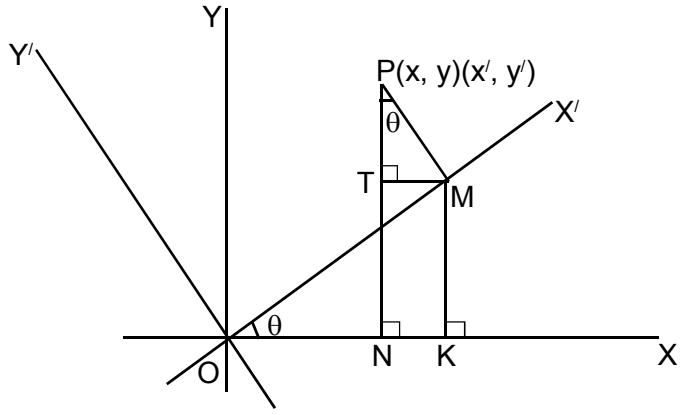
$$x = ON = OK + KN = OK + O'N' = h + x'$$

আৰু $y = NP = NN' + N'P = k + y'$

গতিকে আমি দেখিলোঁ যে অক্ষৰ দিশ সলনি নকৰাকৈ যদি মূল বিন্দুটো (h, k) বিন্দুলৈ স্থানান্তৰিত কৰা হয়, তেনেহ'লে ৰূপান্তৰণ সূত্ৰ হ'ব এনেধৰণৰ—

$x = x' + h$ আৰু $y = y' + k$.

b) মূল বিন্দু পৰিৱৰ্তন নকৰাকৈ অক্ষৰ দিশৰ পৰিৱৰ্তন (মূল বিন্দু সাপেক্ষে অক্ষৰ ঘূৰ্ণন) ঃ



চিত্ৰ ঃ ২.২

ধৰা হ'ল, OX আৰু OY অক্ষ দুডাল θ কোণকৈ ঘূৰোৱা হ'ল আৰু সিহঁতৰ নতুন অৱস্থান হ'ল OX' আৰু OY'. ধৰা হ'ল, সমতলখনত P যিকোনো এটা বিন্দু।

ধৰা হ'ল, মূল অক্ষ OX, OY সাপেক্ষে Pৰ স্থানাংক (x, y), আৰু নতুন অক্ষ OX', OY' সাপেক্ষে Pৰ স্থানাংক (x', y') দুয়োটা ক্ষেত্ৰতে মূল বিন্দু হ'ল O। গতিকে চিত্ৰৰ পৰা আমি পালোঁ,

$$x = ON = OK - NK = OK - TM$$
$$= OM\cos\theta - MP\sin\theta = x'\cos\theta - y'\sin\theta$$

আৰু $y = NP = NT + TP = KM + TP$

$$= OM\sin\theta + MP\cos\theta = x'\sin\theta + y'\cos\theta.$$

গতিকে আমি দেখিলো যে যদি মূল বিন্দু পৰিৱৰ্তন নকৰাকৈ অক্ষ দুডাল θ কোণকৈ ঘূৰোৱা হয়, তেনেহ'লে ৰূপান্তৰণ সূত্ৰ হ'ব এনেধৰণৰ—

$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$

আৰু $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$.

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ ঃ $y^2 = 4x - 2y - 7$ বক্ৰৰ ৰূপান্তৰিত সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক, যদি (2, –1) বিন্দুলৈ মূল বিন্দু স্থানান্তৰিত কৰা হয়।

সমাধান ঃ যেতিয়া (2, –1) বিন্দুলৈ মূল বিন্দু স্থানান্তৰিত কৰা হয়,

নতুন স্থানাংক (x', y') হ'ব এনেধৰণৰ, $x = x' + 2,\ y = y' - 1$.

গতিকে, $y^2 = 4x - 2y - 7$ সমীকৰণটো হ'বগৈ,

$$(y'-1)^2 = 4(x' + 2) - 2(y' - 1) - 7$$

অর্থাৎ, $y'^2 - 2y' + 1 = 4x' + 8 - 2y' + 2 - 7$

অর্থাৎ, $y'^2 = 4x' + 2$

এতিয়া, যদি নতুন স্থানাংক (x, y)ৰে বুজোৱা হয়, ৰূপান্তৰিত সমীকৰণটো হ'বগৈ,

$y^2 = 4x + 2$.

উদাহৰণ ২ ঃ $x^2 + 3y^2 + 4x + 18y + 30 = 0$ বক্ৰক ৰূপান্তৰিত সমীকৰণ নির্ণয় কৰক, যদি (–2, –3) বিন্দুলৈ মূল বিন্দু স্থানান্তৰিত কৰা হয়।

সমাধান ঃ যেতিয়া (–2, –3), বিন্দুলৈ মূল বিন্দু স্থানান্তৰিত কৰা হয়, নতুন স্থানাংক (x', y') হ'ব এনেধৰণৰ, $x = x' - 2,\ y = y' - 3$.

গতিকে, $x^2 + 3y^2 + 4x + 18y + 30 = 0$ সমীকৰণটো হ'বগৈ,

$$(x' - 2)^2 + 3(y' - 3)^2 + 4(x' - 2) + 18(y' - 3) + 30 = 0$$

অর্থাৎ, $x'^2 + 3y'^2 = 1$

এতিয়া যদি নতুন স্থানাংক (x, y)ৰে বুজোৱা হয়, ৰূপান্তৰিত সমীকৰণটো হ'বগৈ,

$x^2 + 3y^2 = 1$.

উদাহৰণ ৩ ঃ $x^2 - y^2 = a^2$ সমীকৰণটো ৰূপান্তৰিত কৰক, যেতিয়া অক্ষদ্বয়ে মূল অক্ষ দুডালৰ লগত 45^0 কৈ কোণ কৰে।

সমাধান ঃ পুৰণি অক্ষ সাপেক্ষে যিটো বিন্দুৰ স্থানাংক (x, y), সেই বিন্দুটোৰ নতুন স্থানাংক (x', y') বুলি ধৰা হ'ল।

$$x = x'\cos 45^0 - y'\sin 45^0 = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

আৰু $y = x'\sin 45^0 + y'\cos 45^0 = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$

গতিকে $x^2 - y^2 = a^2$ সমীকৰণটো হ'বগৈ,

$$\left(\frac{x' - y'}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2$$

অর্থাৎ, $-2x'y' = a^2$, অর্থাৎ, $2x'y' + a^2 = 0$

এতিয়া, যদি নতুন স্থানাংক (x, y)ৰে বুজোৱা হয়, ৰূপান্তৰিত সমীকৰণটো হ'বগৈ,

$2xy + a^2 = 0$

উদাহৰণ ৪ ঃ $x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy = 2a^2$ সমীকৰণটো ৰূপান্তৰিত কৰক, যেতিয়া অক্ষদ্বয়ে মূল অক্ষ দুডালৰ লগত 30^0 কৈ কোণ কৰে।

সমাধান ঃ পুৰণি অক্ষ সাপেক্ষে যিটো বিন্দুৰ স্থানাংক (x, y), সেই বিন্দুটোৰ নতুন স্থানাংক (x′, y′), বুলি ধৰা হ'ল।

$$x = x'\cos 30^0 - y'\sin 30^0 = x'\frac{\sqrt{3}}{2} - y'.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}x' - y'}{2}$$

আৰু $x = x'\sin 30^0 + y'\cos 30^0 = x'\frac{1}{2} + y'.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x' + \sqrt{3}y'}{2}$

গতিকে, $x^2 - y^2 + 2\sqrt{3}xy = 2a^2$ সমীকৰণটো হ'বগৈ,

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}x' - y'}{2}\right)^2 - \left(\frac{x' + \sqrt{3}y'}{2}\right)^2 + 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}x' - y'}{2}\right)\left(\frac{x' + \sqrt{3}y'}{2}\right) = 2a^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3x'^2 - 2\sqrt{3}x'y' + y'^2}{4}\right) - \left(\frac{x'^2 + 2\sqrt{3}x'y' + 3y'^2}{4}\right) + 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}x'^2 + 3x'y' - x'y' - \sqrt{3}y'^2}{4}\right) = 2a^2$$

$$\Rightarrow \frac{3x'^2 - 2\sqrt{3}x'y' + y'^2 - x'^2 - 2\sqrt{3}x'y' - 3y'^2 + 2\sqrt{3}\left(\sqrt{3}x'^2 + 2x'y' - \sqrt{3}y'^2\right)}{4} = 2a^2$$

$$\Rightarrow 3x'^2 - 2\sqrt{3}x'y' + y'^2 - x'^2 - 2\sqrt{3}x'y' - 3y'^2 + 6x'^2 + 4\sqrt{3}x'y' - 6y'^2 = 8a^2$$

$$\Rightarrow 8x'^2 - 8y'^2 = 8a^2$$

$$\Rightarrow x'^2 - y'^2 = a^2$$

এতিয়া, যদি নতুন স্থানাংক (x, y)ৰে বুজোৱা হয়, ৰূপান্তৰিত সমীকৰণটো হ'বগৈ,

$x^2 - y^2 = a^2$.

উদাহৰণ 5 ঃ মূল বিন্দু একে ৰাশি যদি এটা আয়তীয় অক্ষ প্ৰণালী আন এটালৈ ৰূপান্তৰিত কৰা হয়, দেখুওৱাক যে এটা প্ৰথম মাত্ৰাৰ সুষম ৰাশি ax + by আন এটা প্ৰথম মাত্ৰাৰ সুষম ৰাশিলৈ পৰিৱৰ্তিত হ'ব। লগতে দেখুওৱাক যে এই ৰূপান্তৰণত $a^2 + b^2$ এটা অক্ৰমনীয় (Invariant)।

সমাধান ঃ ৰূপান্তৰণ সূত্ৰৰ সহায়ত, আমি জানো,

$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$ and $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$ we get,

$ax + by = a(x'\cos\theta - y'\sin\theta) + b(x'\sin\theta + y'\cos\theta)$

$= (a\cos\theta + b\sin\theta)x' + (b\cos\theta - a\sin\theta)y'$

$= a'x' + b'y'$

য'ত, $a' = a\cos\theta + b\sin\theta$

আৰু $b' = b\cos\theta - a\sin\theta$.

যিহেতু $a'x' + b'y'$ এটা x' আৰু y'ৰ প্ৰথম মাত্ৰাৰ সুষম ৰাশি, আমি দেখিলোঁ যে এটা প্ৰথম মাত্ৰাৰ সুষম ৰাশি $ax + by$. আন এটা প্ৰথম মাত্ৰাৰ সুষম ৰাশি $a'x' + b'y'$লৈ ৰূপান্তৰিত হয়। এতিয়া,

$$a'^2 + b'^2 = (a\cos\theta + b\sin\theta)^2 + (b\cos\theta - a\sin\theta)^2$$
$$= (a^2\cos\theta + b^2\sin^2\theta + 2ab\sin\theta\cos\theta) +$$
$$(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta - 2ab\sin\theta\cos\theta$$
$$= a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)$$
$$= a^2 + b^2$$

ইয়াৰ পৰা দেখা গ'ল যে $ax + by$ ৰাশিটোৰ বাবে, মূল বিন্দু একে ৰাখি কৰা আয়তীয় ৰূপান্তৰণত $a^2 + b^2$ এটা অক্ৰমণীয় (Invariant).



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১ ঃ নতুন মূলবিন্দু (2, –1)ৰ মাজেৰে যোৱা সমান্তৰাল অক্ষ সাপেক্ষে তলৰ সমীকৰণ দুটা ৰূপান্তৰিত কৰক।

i) $5x + 3y = 3$ ii) $x^2 + y^2 = 6$

প্ৰশ্ন নং ২ ঃ $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ সমীকৰণটো ৰূপান্তৰিত কৰক, যেতিয়া একে মূল বিন্দু সাপেক্ষে অক্ষদ্বয়ে মূল অক্ষ দুডালৰ লগত $\frac{\pi}{4}$ কৈ কোণ কৰে।

প্ৰশ্ন নং ৩ ঃ যদি মূল বিন্দু পৰিৱৰ্তন নকৰাকৈ অক্ষৰ দিশৰ পৰিৱৰ্তন কৰিলে $ax^2 + 2hxy + by^2$ বক্ৰ হয়গৈ $ax'^2 + 2hx'y' + by'^2$. প্ৰমাণ কৰক যে,

i) $a + b = a' + b'$ ii) $ab - h = a'b' - h'$

iii) $(a-b)^2 + 4h^2 = (a'-b')^2 + 4h'^2$



২.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- অক্ষৰ দিশ সলনি নকৰাকৈ যদি মূল বিন্দুটো (h, k) বিন্দুলৈ স্থানান্তৰিত কৰা হয়, তেনেহ'লে ৰূপান্তৰণ সূত্ৰ হ'ব এনেধৰণৰ $x = x' + h$, $y = y' + k$; য'ত, একেটা বিন্দুৰ পুৰণি স্থানাংক হ'ল (x, y), আৰু নতুন স্থানাংক হ'ল (x', y').
- যদি মূল বিন্দু পৰিৱৰ্তন নকৰাকৈ অক্ষ দুডাল θ কোণকৈ ঘূৰোৱা হয়, তেনেহ'লে ৰূপান্তৰণ সূত্ৰ হ'ব এনেধৰণৰ, $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$, $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$.



২.৫ অধিক জানিবলৈ

ইংৰাজী গ্ৰন্থ ঃ

1) Jain, P. K. and Ahmhad, K. *Textbook of Analytical Geometry of Three Dimensions*. New Delhi: New Age International (P) Ltd.

2) Kishan, Hari. *Coordinate Geometry of Two dimensions*. New Delhi: Atlantic Publishers & Distributors.
3) Pal, Sat and Pal, Harbans. *A Textbook of Two Dimensional Geometry*. New Age International Publishers.
4) Sharma, G. C. and Jain, Madhu. *Coordinate Geometry (2D and 3D)*. New Delhi: Galgotia Publications Pvt Ltd.
5) Sharma, A. K. *Coordinate Geometry (2D)*. New Delhi: Discovery Publishing House.



২.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নতুন মূল বিন্দুটো (2, –1), নতুন অক্ষ, পুৰণি অক্ষৰ সমান্তৰাল। ৰূপান্তৰিত সমীকৰণটো পাবলৈ xৰ ঠাইত x + 2 আৰু yৰ ঠাইত y – 1 বহুৰাব লাগিব

($\because x = x' + h$ আৰু $y = y' + k$).

i) $5x + 3y = 3$ সমীকৰণৰ ৰূপান্তৰিত সমীকৰণ হ'ব $5(x+2) + 3(y–1) = 3$
অর্থাৎ, $5x + 3y + 4 = 0$

ii) $x^2 + y^2 = 6$ সমীকৰণৰ ৰূপান্তৰিত সমীকৰণ হ'ব $(x + 2)^2 + (y – 1)^2 = 6$
অর্থাৎ, $x^2 + y^2 + 4x – 2y – 1 = 0$.

২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ যদি অক্ষ দুডাল $\theta = \frac{\pi}{4}$ কোণকৈ ঘূৰোৱা হয়,

$$x = x'\cos\theta – y'\sin\theta = x'\cos\frac{\pi}{4} – y'\sin\frac{\pi}{4} = \frac{x' – y'}{\sqrt{2}}$$

আৰু $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta = x'\sin\frac{\pi}{4} + y'\cos\frac{\pi}{4} = \frac{x' – y'}{\sqrt{2}}$

ইয়াত (x, y) হ'ল বিন্দুটোৰ পুৰণি স্থানাংক আৰু (x′, y′) হ'ল বিন্দুটোৰ নতুন স্থানাংক।

গতিকে, $3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1$ সমীকৰণৰ ৰূপান্তৰিত সমীকৰণ হ'ব,

$$3\left(\frac{x' – y'}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{x' – y'}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right) + 3\left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1$$

অর্থাৎ, $\frac{3}{2}\left[\left(x' – y'\right)^2 + \left(x' + y'\right)^2\right] + \left(x' – y'\right)\left(x' + y'\right) = 1$

অর্থাৎ, $\frac{3}{2}.2\left(x'^2 + y'^2\right) + x'^2 – y'^2 = 1$

অর্থাৎ, $4x'^2 + 2y'^2 = 1$

নতুন স্থানাংকক (x, y)ৰে বুজালে ৰূপান্তৰিত সমীকৰণটো হ'ব $4x^2 + 2y^2 = 1$.

৩নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, অক্ষদ্বয় θ কোণকৈ ঘূৰোৱা হ'ল। ৰূপান্তৰণ সূত্ৰৰ সহায়ত আমি জানো, $x = x'\cos\theta - y'\sin\theta$ and $y = x'\sin\theta + y'\cos\theta$

সুষম ৰাশি $ax^2 + 2hxy + by^2$ হ'বগৈ,

$a(x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + 2h(x'\cos\theta - y'\sin\theta)(x'\sin\theta + y'\cos\theta) +$

$b(x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 = a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2$

$\Rightarrow a(x'^2\cos^2\theta - 2x'y'\cos\theta\sin\theta + y'^2\sin^2\theta) +$

$2h(x'^2\cos\theta\sin\theta + x'y'\cos^2\theta - x'y'\sin^2\theta + y'^2\sin\theta\cos\theta) +$

$b(x'^2\sin^2\theta + 2x'y'\sin\theta\cos\theta + y'^2\cos^2\theta) = a'x'^2 + 2h'x'y' + b'y'^2$

উভয় পক্ষ তুলনা কৰি,

$a' = a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta$

$b' = a\sin^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta + b\cos^2\theta$

$h' = h(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - (a-b)\sin\theta\cos\theta$

এতিয়া,

i) $a' + b' = a(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + b(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = a + b$

ii) $2a' = a(2\cos^2\theta) + 2h(2\sin\theta\cos\theta) + b(2\sin^2\theta)$

$= a(1+\cos2\theta) + 2h\sin2\theta + b(1-\cos2\theta)$

$= (a+b) + [2h\sin2\theta + (a-b)\cos2\theta]$

একেদৰে, $2b' = (a+b) + [2h\sin2\theta + (a-b)\cos2\theta]$

আৰু $2h' = 2h\cos2\theta - -(a-b)\sin2\theta$

$\therefore 4(a'b' - h'^2 = 2a'.2b' - (2h')^2$

$= [(a+b) + \{2h\sin2\theta + (a-b)\cos2\theta\}][(a+b) - \{2h\sin2\theta + (a-b)\cos2\theta\}]$

$-[2h\cos2\theta - (a-b\sin2\theta)]^2$

$= (a+b)^2 - [2h\sin2\theta + (a-b)\cos2\theta)]^2 - [2h\cos2\theta - (a-b)\sin2\theta]^2$

$= (a+b)^2 - 4h^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - (a-b)^2(\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta)$

$= (a+b)^2 - 4h^2 - (a-b)^2$

$= 4ab - 4h^2$

$= 4(ab-h^2)$

$\therefore a'b' - h'^2 = 4(ab-h^2)$

iii) $(a-b)^2 + 4h^2 = (a+b)^2 - 4ab + 4h'^2$

$= (a+b)^2 - 4(ab-h^2)$

$= (a'+b')^2 - 4(a'b' - h'^2)$ একেদৰে (i) আৰু (ii)

$= (a' - b')^2 + 4h'^2$



২.৭ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}$ = 1 ৰেখাডালৰ ৰূপান্তৰিত সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক। যেতিয়া (a, b) বিন্দুলৈ মূল বিন্দু সলনি কৰা হয়।

প্ৰশ্ন ২ ঃ $17x^2 – 16xy + 17y^2 = 225$ সমীকৰণটো ৰূপান্তৰিত কৰক, যেতিয়া অক্ষদ্বয়ে মূল অক্ষ দুডালৰ লগত 60^0কৈ কোণ কৰে।

*** ***** ***

অধ্যায় ৩ ঃ যুগ্ম সৰল ৰেখা

অধ্যায় গাঁথনি

৩.১ উদ্দেশ্য

৩.২ পৰিচয়

৩.৩ যুগ্ম সৰল ৰেখা

৩.৩.১ মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা যুগ্ম সৰল ৰেখা

৩.৩.২ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ যুগ্ম সৰল ৰেখাৰ মাজৰ কোণ

৩.৩.৩ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ যুগ্ম সৰল ৰেখাৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ

৩.৪ দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ সাধাৰণ সমীকৰণে যুগ্ম সৰল ৰেখা বুজোৱাৰ চর্ত

৩.৫ কটাকটি কৰা যুগ্ম সৰল ৰেখা আৰু সমান্তৰাল যুগ্ম সৰল ৰেখা

৩.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৩.৭ অধিক জানিবলৈ

৩.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৩.৯ আৰ্হি প্রশ্ন

৩.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- যুগ্ম সৰল ৰেখা সম্বন্ধে জানিব
- যুগ্ম সৰল ৰেখাৰ মাজৰ কোণ উলিয়াব পাৰিব
- যুগ্ম সৰল ৰেখাৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক উলিয়াব পাৰিব
- কটাকটি কৰা যুগ্ম সৰল ৰেখাআৰু সমান্তৰাল যুগ্ম সৰল ৰেখা সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

৩.২ পৰিচয়

প্রথম অধ্যায়ত আমি সৰল ৰেখা আৰু ইয়াৰ বিভিন্ন আকাৰ সম্বন্ধে আলোচন কৰিছোঁ। এই অধ্যায়ত আমি যুগ্ম সৰল ৰেখা, যুগ্ম সৰল ৰেখাৰ মাজৰ কোণ আৰু যুগ্ম সৰল ৰেখা বুজোৱাৰ চর্ত সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম। আমি কটাকটি কৰা যুগ্ম সৰল ৰেখা আৰু সমান্তৰাল যুগ্ম সৰল ৰেখা সম্বন্ধেও এই অধ্যায়ত আলোচনা কৰিম।

৩.৩ যুগ্ম সৰল ৰেখা

$x^2 + 2xy + y^2 - 4 = 0$ সমীকৰণটো লোৱা হ'ল। এইটো এটা x আৰু yৰ দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ সমীকৰণ। সমীকৰণটোক এনেদৰেও লিখিব পাৰি,

$(x + y)^2 - 4 = 0$

অৰ্থাৎ, $(x + y + 2)(x + y - 2) = 0$

প্ৰদত্ত সমীকৰণ, $x^2 + 2xy + y^2 - 4 = 0$ ... ...(1)

সিদ্ধ হয় যদি, $x + y + 2 = 0$ ... ...(2)

বা, $x + y - 2 = 0$ ... ...(3)

জ্যামিতীয়ভাৱে ইয়াৰ অৰ্থ এইটোৱে যে যিটো বিন্দু (2) বা (3)ৰ কক্ষপথত থাকে, সেই বিন্দুটো (1)ৰ কক্ষপথটো থাকিব। বিপৰীতক্ৰমেও কথাটো সত্য হ'ব। কিন্তু (2) আৰু (3) হ'ল x আৰু yৰ প্ৰথম মাত্ৰাৰ সমীকৰণ। সেয়ে ই সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায়। সেয়ে (1) সমীকৰণে যুগ্ম সৰল ৰেখাৰ (Pair of Straight Lines) সমীকৰণ বুজায় আৰু ইয়াৰ পৃথক সমীকৰণ হ'ল (2) আৰু (3).

আমি দেখিলো যে এক বিশেষ দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ সমীকৰণে যুগ্ম সৰল ৰেখা বুজায়।

৩.৩.১ মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা যুগ্ম সৰল ৰেখা

x আৰু yৰ দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ সাধাৰণ সুষম সমীকৰণ হ'ল,

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ... ...(1)

এতিয়া, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$

অৰ্থাৎ, $b\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2h\left(\frac{y}{x}\right) + a = 0$ ... ...(2)

এইটো $\frac{y}{x}$ৰ দ্বিঘাত সমীকৰণ। ধৰা হ'ল, ইয়াৰ মূল দুটা m_1 আৰু m_2.

গতিকে আমি পালোঁ, $m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}$ আৰু $m_1m_2 = \frac{a}{b}$.

গতিকে (2)ক এনেদৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি,

$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{2h}{b}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{a}{b}, = 0\ b \neq 0$

অৰ্থাৎ, $\left(\frac{y}{x}\right)^2 - (m_1 + m_2)\left(\frac{y}{x}\right) + m_1m_2 = 0$

অৰ্থাৎ, $\left(\frac{y}{x} - m_1\right) - \left(\frac{y}{x} - m_2\right) = 0$

অৰ্থাৎ, $(y - m_1x)(y - m_2x) = 0$ ... ...(3)

(1) হ'ল (3)ৰ সমাৰ্থক। স্পষ্টতঃ (3)এ মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা $y - m_1x = 0$ আৰু $y - m_2x = 0$ সৰল ৰেখা যোৰ বুজায়। সেয়ে (1)এ মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা যুগ্ম সৰল ৰেখা বুজায়।

ইয়াৰ পৃথক সমীকৰণ দুটা হ'ল, $y - m_1x = 0$ আৰু $y - m_2x = 0$.

৩.৩.২ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ যুগ্ম সৰল ৰেখাৰ মাজৰ কোণ

ধৰা হ'ল, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকৰণে বুজোৱা যুগ্ম সৰল ৰেখাৰ পৃথক সমীকৰণ দুটা হ'ল $y = m_1x$ আৰু $y = m_2x$. গতিকে আমি পালোঁ,

$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}$ আৰু $m_1m_2 = \frac{a}{b}$.

যদি ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণ θ হয়, তেনেহ'লে,

$$\tan\theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$$

$$= \frac{\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1m_2}}{1 + m_1m_2}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(-\frac{2h}{b}\right)^2 - 4.\frac{a}{b}}}{1 + \frac{a}{b}}$$

$$= \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}$$

(1) যদি $h^2 = ab$, তেনেহ'লে, $\tan\theta = 0$ অর্থাৎ $\theta = 0$. গতিকে ৰেখা দুডাল সংপাতী অর্থাৎ মিলি যায়।

(2) যদি $a + b = 0$, তেনেহ'লে, $\cot\theta = \frac{a + b}{2\sqrt{h^2 - ab}} = 0$. গতিকে $\theta = \frac{\pi}{2}$.

গতিকে ৰেখা দুডাল পৰস্পৰ লম্ব।

৩.৩.৩ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ যুগ্ম সৰল ৰেখাৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ

ধৰা হ'ল, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকৰণে বুজোৱা যুগ্ম সৰল ৰেখাৰ পৃথক সমীকৰণ দুটা হ'ল $y - m_1x = 0$ আৰু $y - m_2x = 0$.

$\therefore m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}$ আৰু $m_1m_2 = \frac{a}{b}$.

ওপৰৰ ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক দুডালৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$\frac{y - m_1x}{\sqrt{1 + m_1^2}} = \pm\frac{y - m_2x}{\sqrt{1 + m_2^2}}$$

এই সমীকৰণ দুটাক এটা সমীকৰণ হিচাপে তলত দিয়াৰ দৰে সন্মিলিত কৰিব পাৰি,

$$\frac{(y-m_1x)^2}{1+m_1^2}=\frac{(y-m_2x)^2}{1+m_2^2}$$

অর্থাৎ, $(1+m^2_2)(y^2+m^2_1x^2-2m_1xy)=(1+m^2_1)(y^2+m_2^2x^2-2m_2xy)$

অর্থাৎ, $\{(1+m_2^2)m^2_1-(1+m_1^2)m_2^2)\}x^2-2\{(1+m_2^2)m_1-(1+m_1^2)m_2\}xy$
$+\{(1+m_2^2)-(1+m_1^2)\}y^2=0$

অর্থাৎ, $(m_1^2-m^2_2)x^2-2\{(m_1-m_2)-m_1m_2(m_1-m_2)\}xy-(m_1^2-m_2^2)y^2=0$

অর্থাৎ, $(m_1^2-m^2_2)(x^2-y^2)=2(m_1-m_2)(1-m_1m_2)xy$

অর্থাৎ, $(m_1+m_2)(x^2-y^2)=2(1-m_1m_2)xy$

অর্থাৎ, $-\frac{2h}{b}(x^2-y^2)=2\left(1-\frac{a}{b}\right)xy=-\frac{2(a-b)xy}{b}$

অর্থাৎ, $\frac{x^2-y^2}{a-b}=\frac{xy}{h}$

এইটোৱেই সমদ্বিখণ্ডক দুডালৰ সন্মিলিত সমীকৰণ।

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ ঃ যিটো সমীকৰণে $4x+y=0$ আৰু $3x=2y$ সৰল ৰেখা দুডাল বুজায়, সেই সমীকৰণটো গঠন কৰক।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ৰেখা দুডাল হ'ল,

$4x+y=0$ আৰু $3x=2y$

অর্থাৎ, $4x+y=0$ আৰু $3x-2y=0$

এই সমীকৰণ দুডালে বুজোৱা ৰেখাৰ সন্মিলিত সমীকৰণ হ'ল,

$(4x+y)(3x-2y)=0$

অর্থাৎ, $12x^2-5xy-2y^2=0$

উদাহৰণ ২ ঃ $x^2+xy-6y^2=0$ সমীকৰণে বুজোৱা কক্ষপথ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $x^2+xy-6y^2=0$ এটা দ্বিতীয় মাত্রাৰ সুষম সমীকৰণ। গতিকে ই মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা যুগ্ম সৰল ৰেখা বুজায়। প্রদত্ত সমীকৰণটো হ'ল,

$x^2+xy-6y^2=0$

অর্থাৎ, $(x-2y)(x+3y)=0$

গতিকে ৰেখা দুডালৰ পৃথক সমীকৰণ হ'ল, $x-2y=0$ আৰু $x+3y=0$

উদাহৰণ ৩ ঃ $2x^2-7xy+3y^2=0$ যুগ্ম সৰল ৰেখাৰ মাজৰ কোণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ প্রদত্ত সমীকৰণ $2x^2-7xy+3y^2=0$ক $ax^2+2hxy+by^2=0$ৰ সৈতে তুলনা কৰি আমি পাওঁ, $a=2$, $h=-\frac{7}{2}$, $b=3$.

$2x^2 - 7xy + 3y^2 = 0$ সমীকৰণে বুজোৱা সৰলৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণ θ হ'লে,

$$\tan\theta = \frac{2\sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2 - 2.3}}{2+3} = \frac{2\sqrt{\frac{25}{4}}}{5} = 1$$

$\therefore \theta = 45^0$, এইটোৱেই নির্ণেয় কোণ।

উদাহৰণ ৪ ঃ kৰ কি মানৰ বাবে $3x^2 + xy + ky^2 = 0$ ৰেখা দুডাল পৰস্পৰ লম্ব হ'ব?

সমাধান ঃ $3x^2 + xy + ky^2 = 0$ ৰেখা দুডাল পৰস্পৰ লম্ব হ'বলৈ হ'লে,

$3 + k = 0 \Rightarrow k = -3.$

উদাহৰণ ৫ ঃ $5x^2 + xy - 6y^2 = 0$ সৰল ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ৰ লগত তুলনা কৰি আমি পাওঁ, $a = 5$, $h = \frac{1}{2}$, $b = -6$.

গতিকে সমদ্বিখণ্ডকৰ নির্ণেয়সমীকৰণ হ'ল, $\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}$

অর্থাৎ, $\frac{x^2 - y^2}{5 + 6} = \frac{xy}{\frac{1}{2}}$

অর্থাৎ, $x^2 - y^2 = 22xy$

অর্থাৎ, $x^2 - 22xy - y^2 = 0$

উদাহৰণ 6 ঃ $x^2 - 2pxy - y^2 = 0$ আৰু $x^2 - 2qxy - y^2 = 0$ দুযোৰ যুগ্ম সৰল ৰেখা এনেকুৱা যে এযোৰে আনযোৰৰ মাজৰ কোণক সমদ্বিখণ্ডত কৰে। প্ৰমাণ কৰক যে $pq = -1$.

সমাধান ঃ $x^2 - 2pxy - y^2 = 0$ যুগ্ম সৰল ৰেখাৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ হ'ল, $\frac{x^2 - y^2}{1 - (-1)} = \frac{xy}{-p}$

অর্থাৎ, $px^2 - py^2 = -2xy$

অর্থাৎ, $px^2 + 2xy - py^2 = 0$ ... ...(1)

প্ৰশ্নমতে সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ হ'ল,

$x^2 - 2qxy - y^2 = 0$ ... ...(2)

গতিকে (1) আৰু (2) সমাৰ্থক। সেয়েহে, $\frac{p}{1} = \frac{2}{-2q} = \frac{-p}{-1}$

$\Rightarrow pq = -1.$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ ঃ $3x - y = 0$ আৰু $x + 2y = 1$ সৰল ৰেখাযোৰৰ সম্মিলিত সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ ঃ তলৰ যুগ্ম সৰল ৰেখাবোৰৰ মাজৰ কোণ নির্ণয় কৰক।

i) $8x^2 + 10xy + 3y^2 = 0$ ii) $x^2 - 2xy\sec\alpha + y^2 = 0$

প্রশ্ন নং ৩ ঃ λৰ কি মানৰ বাবে $3x^2 - 8xy + \lambda y^2 = 0$ ৰেখা দুডাল,

i) পৰস্পৰ লম্ব হ'ব? ii) সংপাতী হ'ব?

প্রশ্ন নং ৪ ঃ তলৰ যুগ্ম সৰল ৰেখাবোৰৰ মাজৰ কোমৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

i) $15x^2 - xy - 6y^2 = 0$ ii) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$

প্রশ্ন নং ৫ ঃ যদি $x^2 + 4xy - y^2 = 0$ সৰল ৰেখাযোৰে $x^2 + 2kxy - y^2 = 0$ সৰল ৰেখাযোৰৰ মাজৰ কোণক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে, kৰ মান নির্ণয় কৰক।

৩.৪ দ্বিতীয় মাত্রাৰ সাধাৰণ সমীকৰণে যুগ্ম সৰল ৰেখা বুজোৱাৰ চর্ত

x আৰু yৰ দ্বিতীয় মাত্রাৰ সাধাৰণ সমীকৰণ হ'ল,

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... ...(1)

(1)ক xৰ দ্বিঘাত সমীকৰণ ৰূপে প্রকাশ কৰি আমি পাওঁ,

$ax^2 + 2(hy + g)x + (by^2 + 2fy + c) = 0$

$$\therefore\ x = \frac{-(hy+g) \pm \sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2+2fy+c)}}{a}$$

অর্থাৎ, $$x = \frac{-(hy+g) \pm \sqrt{(h^2+ab)y^2 + 2(gh-af)y + (g^2-ac)}}{a} \quad (a \neq 0)$$

... ...(2)

(1)এ এযোৰ সৰল ৰেখা বুজাব যদি ইয়াৰ বাঁওপক্ষক x আৰু yৰ দুটা ৰৈখিক উৎপাদকৰ পূৰণফল হিচাপে প্রকাশ কৰিব পাৰি। এইটো সম্ভৱ হ'ব যদি (2)ৰ সোঁপক্ষৰ মূল চিহ্নৰ তলত থকা ৰাশিটো অর্থাৎ, $(h^2 - ab)y^2 + 2(gh - af)y + (g^2 - ac)$ এটা পূর্ণ বর্গ হয়। তাৰ বাবে,

$(gh - af)^2 - (h^2 - ab)(g^2 - ae) = 0$

$\Rightarrow (g^2h^2 - 2afgh + a^2f^2) - (g^2h^2 - abg^2 - ach^2 + a^2bc) = 0$

$\Rightarrow -2afgh - a^2bc + a^2f^2 + abg^2 + ach^2 = 0$

$\Rightarrow -a(abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2) = 0$

$\Rightarrow abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

$\therefore$ সমীকৰণে এযোৰ সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজোৱাৰ চর্ত হ'ল,

$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0.$

টোকা ঃ

i) যিহেতু, $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

গতিকে উপৰিউক্ত চর্তটোক এনেধৰণে প্রকাশ কৰিব পাৰি, $\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$

ii) যুগ্ম সৰল ৰেখাৰ বাবে উপৰিউক্ত চর্তটো উলিয়াওঁতে $a \neq 0$ বুলি ধৰা হৈছে। $a = 0$ৰ বাবেও ই প্রযোজ্য।

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ ঃ $6x^2 - 12xy - 6x^2 + 14x + 8y + 4 = 0$ সমীকৰণে যুগ্ম সৰলৰেখা বুজাবনে?

সমাধান ঃ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ৰ লগত প্রদত্ত সমীকৰণ,

$6x^2 - 12xy - 6y^2 + 14x + 8y + 4 = 0$ ... ...(1)

তুলনা কৰি আমি পাওঁ, $a = 6, h = -6, b = -6, g = 7, f = 4, c = 4.$

$\therefore abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$= 6.(-6).4 + 2.4.7.(-6) - 6.4^2 - (-6).7^2 - 4.(-6)^2$

$= -144 - 336 - 96 + 294 - 144$

$= -720 + 294$

$= -426 \neq 0$

(1) সমীকৰণে এযোৰ সৰল ৰেখা নুবুজায়।

উদাহৰণ 2 ঃ λৰ কি মানৰ বাবে $x^2 + 2\lambda xy + y^2 + 6x + 2y + 9 = 0$ সমীকৰণে এযোৰ সৰল ৰেখা বুজাব?

সমাধান ঃ $x^2 + 2\lambda xy + y^2 + 6x + 2y + 9 = 0$ সমীকৰণে এযোৰ সৰল ৰেখা বুজাব, যদি, $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

ইয়াত, $a = 1, h = \lambda, b = 1, g = 3, f = 1, c = 9$

অর্থাৎ, $1.1.9 + 2.1.3\lambda - 1.1^2 - 1.3^2 - 9.\lambda^2 = 0$

অর্থাৎ, $9 + 6\lambda - 1 - 9 - 9\lambda^2 = 0$

অর্থাৎ, $-9\lambda^2 + 6\lambda - 1 = 0$

অর্থাৎ, $9\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$

অর্থাৎ, $(3\lambda - 1)^2 = 0$

অর্থাৎ, $3\lambda - 1 = 0$

অর্থাৎ, $3\lambda = 1$

অর্থাৎ, $\lambda = \frac{1}{3}$

৩.৫ কটাকটি কৰা যুগ্ম সৰল ৰেখা আৰু সমান্তৰাল যুগ্ম সৰল ৰেখা

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... ...(1)

ধৰা হ'ল, $\Delta \equiv abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

যাতে (1)এ এযোৰ সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায়। এই ক্ষেত্ৰত,

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c \equiv (lx + my + n)(l'x + m'y + n')$ ... ...(2)

য'ত (1)এ বুজোৱা সৰল ৰেখাযোৰৰ পৃথক সমীকৰণ হ'ল,

$lx + my + n = 0$ ... ...(3)

আৰু $l'x + m'y + n' = 0$ ... ...(4)

$(lm' - l'm \neq 0)$

এতিয়া, (2)ৰ পৰা, $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c \equiv$

$ll'x^2 + (lm' + l'm)xy + mm'y^2 + (nl' + n'l)x + (nm' + m'n)y + nn';$

সহগ তুলনা কৰি আমি পাওঁ,

$ll' = a,\ mm' = b,\ nn' = c,\ lm' + l'm = 2h,\ nl' + n'l = 2g,\ mn' + m'n = 2f.$

(3) আৰু (4)ৰ মাজৰ কোণ ϕ হ'লে,

$$\tan\phi = \frac{lm' - l'm}{ll' + mm'}$$

$$= \frac{\sqrt{(lm' + l'm)^2 - 4ll'mm'}}{ll' + mm'}$$

$$= \frac{\sqrt{(2h)^2 - 4ab}}{a + b}$$

$$= \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}$$

A) কটাকটি কৰা যুগ্ম সৰল ৰেখা ঃ যদি $h^2 \neq ab$, তেনেহ'লে $\tan\phi \neq 0$ অর্থাৎ $\phi \neq 0$. এই ক্ষেত্ৰত (3) আৰু (4) ৰেখা দুডাল কটাকটি কৰা ৰেখা। গতিকে, যদি $\Delta = 0$, আৰু $h^2 \neq ab$, তেনেহ'লে, (1)এ এযোৰ কটাকটি কৰা সৰল ৰেখা বুজায়।

যদি $a + b = 0$, তেনেহ'লে, $\phi = 90^0$আৰু এই ক্ষেত্ৰত ৰেখা দুডালে লম্বভাৱে কটাকটি কৰে। গতিকে, যদি $\Delta = 0$ আৰু $a + b = 0$, তেনেহ'লে, (1)এ এযোৰ পৰস্পৰ লম্ব সৰল ৰেখা বুজায়।

B) সমান্তৰাল যুগ্ম সৰল ৰেখা ঃ যদি $h^2 = ab$, তেনেহ'লে $\tan\phi = 0$. $\therefore \phi = 0$ আৰু সেয়ে (3) আৰু (4) ৰেখা দুডাল সমান্তৰাল। গতিকে, যদি $\Delta = 0$ আৰু $h^2 = ab$, (1)এ এযোৰ সমান্তৰাল সৰল ৰেখা বুজায় (ৰেখা দুডাল সংপাতীও হ'ব পাৰে)।

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $6x^2 - 5xy - 6y^2 + 14x + 5y + 4 = 0$ সমীকৰণে এযোৰ পৰস্পৰ লম্ব সৰল ৰেখা বুজায়।

সমাধান ঃ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকৰণৰ সৈতে প্ৰদত্ত সমীকৰণ,

$6x^2 - 5xy - 6y^2 + 14x + 5y + 4 = 0$ ... ...(1)

তুলনা কৰি আমি পাওঁ, $a = 6, h = -\frac{5}{2}, b = -6, g = 7, f = \frac{5}{2}, c = 4,$

$\therefore abc + 2fgh - af^2 - bh^2 - ch^2$

$= 6.(-6).4 + 2.\frac{5}{2}.7.\left(-\frac{5}{2}\right) - 6.\left(\frac{5}{2}\right)^2 - (-6).7^2 - 4.\left(-\frac{5}{2}\right)^2$

$= -144 - \frac{175}{2} - \frac{75}{2} + 294 - 25$

$= -144 - 125 + 269 = 0$

$\therefore$ (1)এ এযোৰ সৰল ৰেখা বুজায়।

আকৌ, $a + b = 6 + (-6) = 0$

গতিকে, (1)এ এযোৰ পৰস্পৰ লম্ব সৰল ৰেখা বুজায়।

উদাহৰণ ২ ঃ দেখুওৱাক যে $4x^2 + 5xy + y^2 + 3y - 4 = 0$ সমীকৰণে এযোৰ সৰল ৰেখা বুজায়। লগতে ৰেখাযোৰৰ মাজৰ কোণ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $4x^2 + 5xy + y^2 + 3y - 4 = 0$ ... ...(1)

ইয়াত, $a = 4, h = \frac{5}{2}, b = 1, g = 0, f = \frac{3}{2}, c = -4.$

এতিয়া, $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 _ ch^2$

$= 4.1.(-4) + 2.\frac{3}{2}.0.\frac{5}{2} - 4.\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 1.0^2 - (-4).\left(\frac{5}{2}\right)^2$

$= -16 - 9 + 25 = 0$

$\therefore$ (1)সমীকৰণে এযোৰ সৰল ৰেখা বুজায়।

যদি (1)সমীকৰণে বুজোৱা ৰেখাযোৰৰ মাজৰ কোণ ϕ হয়, তেনেহ'লে,

$$\tan\phi = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b} = \frac{2\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4.1}}{4 + 1} = \frac{2 \times \frac{3}{2}}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow \phi = \tan^{-1}\frac{3}{5}$$

উদাহৰণ ৩ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $2x^2 + xy - 6y^2 - 6x + 23y - 20 = 0$ সমীকৰণে এযোৰ সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায়। সিহঁতৰ ছেদ বিন্দুৰ স্থানাংক আৰু ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $2x^2 + xy - 6y^2 - 6x + 23y - 20 = 0$ ... ...(1)

$$\Rightarrow 2x^2 + (y-6)x + (23y - 20 - 6y^2) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(y-6) \pm \sqrt{(y-6)^2 - 4.2.(23y - 20 - 6y^2)}}{2.2}$$

$$= \frac{(-y+6) \pm \sqrt{(y^2 - 12y + 36) - (184y - 160 - 48y^2)}}{4}$$

$$= \frac{(-y+6) \pm \sqrt{(49y^2 - 196y + 196)}}{4}$$

$$= \frac{(-y+6) \pm 7\sqrt{y^2 - 4y + 4}}{4}$$

$$= \frac{(-y+6) \pm 7\sqrt{(y-2)^2}}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{(-y+6) \pm 7(y-2)}{4}$$

+ চিন বিবেচনা কৰি আমি পাওঁ,

$$x = \frac{(-y+6) + 7(y-2)}{4} = \frac{6y-8}{4} = \frac{3y-4}{2}$$

অৰ্থাৎ, $2x - 3y + 4 = 0$;

– চিন বিবেচনা কৰি আমি পাওঁ,

$$x = \frac{(-y+6) - 7(y-2)}{4} = \frac{-8y+20}{4} = -2y + 5$$

অৰ্থাৎ, $x + 2y - 5 = 0$

$\therefore$ প্ৰদত্ত সমীকৰণ (1)এ এযোৰ সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায় আৰু ইয়াৰ পৃথক সমীকৰণ দুটা হ'ল, $2x - 3y + 4 = 0$ ... ...(2)

আৰু $x + 2y - 5 = 0$ ... ...(3)

(2) আৰু (3) ৰ পৰা, $\frac{x}{15-8} = \frac{y}{4+10} = \frac{1}{4+3}$

$$\Rightarrow \frac{x}{7} = \frac{y}{14} = \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow x = 1, y = 2$$

$\therefore$ (1)এ বুজোৱা ৰেখা দুডালৰ ছেদ বিন্দুৰ স্থানাংক (1, 2).

(2) ৰেখা ডালৰ প্ৰৱণতা = $m = \frac{2}{3}$, আৰু (3) ৰেখা ডালৰ প্ৰৱণতা = $m' = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ ৰেখা দুডালৰ মাজৰ উলিয়াবলগীয়া কোণ $= \tan^{-1}\frac{m-m'}{1+mm'}$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}{1+\frac{2}{3}.\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\frac{7}{6}}{\frac{2}{3}} = \tan^{-1}\frac{7}{4}$$

উদাহৰণ ৪ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $9x^2 - 12xy + 4y^2 - 15x + 10y + 6 = 0$ সমীকৰণে এযোৰ সমান্তৰাল সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায়।

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'ল,

$9x^2 - 12xy + 4y^2 - 15x + 10y + 6 = 0$ ... ...(1)

ইয়াত, $a = 9, h = -6, b = 4, g = -\frac{15}{2}, f = 5, c = 6,$

এতিয়া, $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$$= 9.4.6 + 2.5.\left(-\frac{15}{2}\right).(-6) - 9.5^2 - 4.\left(-\frac{15}{2}\right)^2 - 6.(-6)^2$$

$$= 216 + 450 - 225 - 225 - 216 = 0$$

আৰু $h^2 - ab = (-6)^2 - 9.4 = 36 - 36 = 0$

$\therefore$ প্ৰদত্ত সমীকৰণ (1)এ এযোৰ সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায়।

বিকল্প উপায় ঃ

$9x^2 - 12xy + 4y^2 - 15x + 10y + 6 = 0$ ... ...(1)

অৰ্থাৎ, $(3x - 2y)^2 - 5(3x - 2y) + 6 = 0$

অৰ্থাৎ, $u^2 - 5u + 6 = 0$ (যাতে $u = 3x - 2y$)

অৰ্থাৎ, $(u - 2)(u - 3) = 0$

অৰ্থাৎ, $(3x - 2y - 2)(3x - 2y - 3) = 0$

$\therefore$ প্ৰদত্ত সমীকৰণ (1)এ এযোৰ সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায় আৰু ইয়াৰ পৃথক সমীকৰণ দুটা হ'ল, $3x - 2y - 2 = 0$ আৰু $3x - 2y - 3 = 0$

স্পষ্টতঃ ৰেখা দুডাল পৰস্পৰ সমান্তৰাল, কিয়নো এই ক্ষেত্ৰত $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$.

উদাহৰণ ৫ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$ সমীকৰণে এযোৰ সমান্তৰাল সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায়। লগতে ৰেখা দুডালৰ মাজৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $x^2 - 2xy + y^2 - 4x + 4y + 3 = 0$ ... ...(1)

অৰ্থাৎ, $(x - y)^2 - 4(x - y) + 3 = 0$

অৰ্থাৎ, $u^2 - 4u + 3 = 0$ (যাতে $u = x - y$)

অৰ্থাৎ, $(u - 1)(u - 3) = 0$

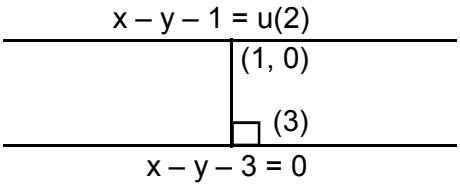
অৰ্থাৎ, $(x - y - 1)(x - y - 3) = 0$

$\therefore$ প্ৰদত্ত সমীকৰণ (1) এযোৰ সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায় আৰু ইয়াৰ পৃথক সমীকৰণ দুটা হ'ল, $x - y - 1 = 0$ ... ...(2)

আৰু $x - y - 3 = 0$ ... ...(3)

যিহেতু সমীকৰণ দুটাৰ পাৰ্থক্য ধ্ৰুৱক পদতহে, গতিকে সিহঁতে সমান্তৰাল সৰল ৰেখা বুজায়। গতিকে (1) সমীকৰণে এযোৰ সমান্তৰাল সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায় যাৰ পৃথক সমীকৰণ দুটা হ'ল (2) আৰু (3).

(2) $y = 0$ বহুৰাই আমি পাওঁ $x = 1$. গতিকে (2) নম্বৰ ৰেখাডালত (1, 0) এটা বিন্দু।



চিত্ৰ ঃ ৩.১

(2) আৰু (3) সমান্তৰাল ৰেখা দুডালৰ মাজৰ দূৰত্ব

= (1, 0) বিন্দুৰ পৰা (3) ৰেখা ডালত টনা লম্বৰ দৈর্ঘ্য

$$= \left|\frac{1-0-3}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right| = \left|\frac{-2}{\sqrt{2}}\right| = \sqrt{2}$$



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ৬ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $2x^2 - 7xy + 3y^2 + x + 7y - 6 = 0$ সমীকৰণে এযোৰ ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায় আৰু ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণ 45^0.

প্ৰশ্ন নং ৭ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y - 5 = 0$ সমীকৰণে এযোৰ সমান্তৰাল সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায়। লগতে ৰেখা দুডালৰ মাজৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৮ ঃ kৰ কি মানৰ বাবে $6x^2 + xy - 12y^2 + 2x + ky - 20 = 0$ সমীকৰণে এযোৰ সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজাব ?

প্ৰশ্ন নং ৯ ঃ λৰ কি মানৰ বাবে $\lambda x^2 + 3xy - 5y^2 + 7x + 14y + 3 = 0$ সমীকৰণে এযোৰ সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজাব ?

প্ৰশ্ন নং ১০ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $2x^2 - 5xy + 3y^2 - 2x + 3y = 0$ সমীকৰণে এযোৰ সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায়। সিহঁতৰ ছেদ বিন্দুৰ স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰক। লগতে ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণটোৰো উলিয়াওক।



৩.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ সুষম সমীকৰণে মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা এযোৰ সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায়।
- মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ যুগ্ম সৰল ৰেখাৰ পৃথক সমীকৰণ হ'ল,

  $y - m_1x = 0$ আৰু $y - m_2x = 0$

  অৰ্থাৎ, $y = m_1x$ আৰু $y = m_2x$

  য'ত $m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}$ আৰু $m_1m_2 = \frac{a}{b}$.
- $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকৰণে বুজোৱা সৰল ৰেখাযোৰৰ মাজৰ কোণ θ হ'লে,

  $\tan\theta = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}$

  i) ওপৰৰ ৰেখা দুডাল সংপাতী যদি $h^2 = ab$.

  ii) ৰেখা দুডাল লম্ব যদি $a + b = 0$.
- $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সমীকৰণে বুজোৱা ৰেখাযোৰৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডক দুডালৰ সমীকৰণ হ'ল, $\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}$
- দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ সাধাৰণ সমীকৰণ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$এ এযোৰ সৰল ৰেখা বুজোৱাৰ চৰ্তটো হ'ল, $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$
- যদি $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকৰণে এযোৰ সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায়, তেনেহ'লে ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণ ϕ তলৰ সম্বন্ধটোৰ পৰা পোৱা যাব,

  $\tan\phi = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}$
- $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকৰণে,

  a) এযোৰ কটাকটি কৰা সৰল ৰেখা বুজায়, যদি $\Delta = 0$ আৰু $h^2 \neq ab$,

  b) এযোৰ সমান্তৰাল সৰল ৰেখা বুজায়, যদি $\Delta = 0$ আৰু $h^2 = ab$,

c) এযোৰ লম্ব ৰেখা বুজায়, যদি $\Delta = 0$ আৰু $a + b = 0$,
য'ত $\Delta = abc + 2fgh - af^2 - by^2 - ch^2$.



৩.৭ অধিক জানিবলৈ

ইংৰাজী গ্ৰন্থ ঃ

1) Jain, P. K. and Ahmhad, K. *Textbook of Analytical Geometry of Three Dimensions*. New Delhi: New Age International (P) Ltd.
2) Kishan, Hari. *Coordinate Geometry of Two dimensions*. New Delhi: Atlantic Publishers & Distributors.
3) Pal, Sat and Pal, Harbans. *A Textbook of Two Dimensional Geometry*. New Age International Publishers.
4) Sharma, G. C. and Jain, Madhu. *Coordinate Geometry (2D and 3D)*. New Delhi: Galgotia Publications Pvt Ltd.
5) Sharma, A. K. *Coordinate Geometry (2D)*. New Delhi: Discovery Publishing House.



৩.৮ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিৰ্ণেয় সমীকৰণ হ'ল, $(3x - y)(x + 2y - 1) = 0$

অৰ্থাৎ, $3x^2 + 5xy - 2y^2 - 3x + y = 0$

২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ i) সৰল ৰেখাযোৰ হ'ল, $8x^2 + 10xy + 3y^2 = 0$

ইয়াত, $a = 8, h = 5, b = 3$.

সৰল ৰেখাযোৰৰ মাজৰ কোণ,

$$\tan^{-1}\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\sqrt{5^2 - 8.3}}{8 + 3}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2}{11}$$

ii) সৰল ৰেখাযোৰ হ'ল, $x^2 - 2xy\sec\alpha + y^2 = 0$.

ইয়াত, $a = 1, h = -\sec\alpha, b = 1$

সৰল ৰেখাযোৰৰ মাজৰ কোণ,

$= \tan^{-1}\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$

$= \tan^{-1}\frac{2\sqrt{\sec^2\alpha-1}}{1+1}$

$= \tan^{-1}(\tan\alpha) = \alpha$

৩নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ i) $3x^2 - 8xy + \lambda y^2 = 0$ সৰল ৰেখাযোৰ পৰস্পৰ লম্ব হ'বলৈ হ'লে,

$3 + \lambda = 0$ (চৰ্ত, $a + b = 0$)

$\Rightarrow \lambda = -3$

ii) $3x^2 - 8xy + \lambda y^2 = 0$ সৰল ৰেখাযোৰ সংপাতী হ'বলৈ হ'লে,

$(-4)^2 = 3.\lambda$ (চৰ্ত, $h^2 = ab$)

$\Rightarrow \lambda = \frac{16}{3}$

৪নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ সৰল ৰেখাযোৰৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ, $\frac{x^2-y^2}{a-b} = \frac{xy}{h}$, গতিকে,

i) $15x^2 - xy - 6y^2 = 0$ সৰল ৰেখাযোৰৰ মাজৰ কোণৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$\frac{x^2-y^2}{15-(-6)} = \frac{xy}{-\frac{1}{2}}$$ (ইয়াত, $a = 15$, $h = -\frac{1}{2}$, $b = -6$)

অৰ্থাৎ, $\frac{x^2-y^2}{21} = -2xy$

অৰ্থাৎ, $x^2 - y^2 = -42xy$

অৰ্থাৎ, $x^2 + 42xy - y^2 = 0$

ii) $x^2 - 3xy + 2y^2 = 0$ সৰল ৰেখাযোৰৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$\frac{x^2-y^2}{1-2} = \frac{xy}{-\frac{3}{2}}$$ (ইয়াত, $a = 1$, $h = -\frac{3}{2}$, $b = 2$)

অৰ্থাৎ, $x^2 - y^2 = \frac{2xy}{3}$

অৰ্থাৎ, $3x^2 - 2xy - 3y^2 = 0$.

৫নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে যে $x^2 + 2kxy - y^2 = 0$ সৰল ৰেখাযোৰৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ $x^2 + 4xy - y^2 = 0$ ... ...(i) কিন্তু ওপৰৰ সৰল ৰেখাযোৰৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখমডকৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$\frac{x^2-y^2}{1-(-1)}=\frac{xy}{k}$$

অৰ্থাৎ, $kx^2 - ky^2 = 2xy$

অৰ্থাৎ, $kx^2 - 2xy - ky^2 = 0$ ... ...(ii)

গতিকে, সমীকৰণ (i) আৰু (ii) সমাৰ্থক। গতিকে,

$$\frac{k}{1}=\frac{-2}{4}=\frac{-k}{-1} \Rightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

৬নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $2x^2 - 7xy + 3y^2 + x + 7y - 6 = 0$ ... ...(i)

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ৰ সৈতে তুলনা কৰি আমি পাওঁ,

$a = 2, h = -\frac{7}{2}, b = 3, g = \frac{1}{2}, f = \frac{7}{2}, c = -6.$

এতিয়া, $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$$= 2.3(-6) + 2.\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 3.\left(\frac{1}{2}\right)^2 - (-6)\left(-\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= -36 - \frac{49}{4} - \frac{49}{2} - \frac{3}{4} + \frac{147}{2}$$

$$= -36 - \frac{52}{4} + \frac{98}{2}$$

$= -36 - 13 + 49$

$= 0$

$\therefore$ প্ৰদত্ত সমীকৰণ (i)এ এযোৰ সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায়।

আকৌ ওপৰৰ ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণ,

$$= \tan^{-1}\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2\sqrt{\left(-\frac{7}{2}\right)^2-2.3}}{2+3}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\sqrt{49-24}}{5}$$

$$= \tan^{-1}\frac{\sqrt{25}}{5}$$

$= \tan^{-1}1$

$= 45^0$

৭নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $x^2 + 6xy + 9y^2 + 4x + 12y - 5 = 0$ ... ...(i)

অৰ্থাৎ, $(x + 3y)^2 + 4(x+3y) - 5 = 0$

অৰ্থাৎ, $u^2 + 4u - 5 = 0$ (য'ত $u = x + 3y$)

অৰ্থাৎ, $u^2 + 5u - u - 5 = 0$

অৰ্থাৎ, $u(u + 5) - 1 (u + 5) = 0$

অৰ্থাৎ, $(u + 5) (u - 1) = 0$

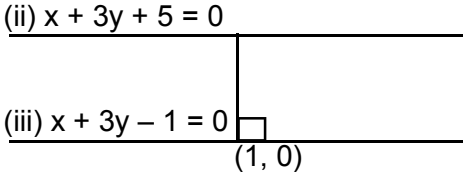
অৰ্থাৎ, $(x + 3y + 5) (x + 3y - 1) = 0$.

গতিকে, (i)এ এযোৰ সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায় যাৰ পৃথক সমীকৰণ হ'ল,

$x + 3y + 5 = 0$ ... ...(ii)

আৰু $x + 3y - 1 = 0$ ... ...(iii)

যিহেতু প্ৰথম মাত্ৰাৰ এই সমীকৰণ দুটাৰ পাৰ্থক্য অকল ধ্ৰুৱক পদতহে, গতিকে এই সমীকৰণ দুটাই সমান্তৰাল সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায়।গতিকে প্ৰদত্ত সমীকৰণ (i)এ এযোৰ সমান্তৰাল সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায়, যাৰ পৃথক সমীকৰণ হ'ল (ii) আৰু (iii).



চিত্ৰ ঃ ৩.২

(iii)ত $y = 0$ বহুৰাই আমি পাওঁ $x = 1$. গতিকে (iii) ৰেখাডালত (1, 0) এটা বিন্দু। সমান্তৰাল ৰেখা (ii) আৰু (iii) ৰ মাজৰ নিৰ্ণেয় দূৰত্ব

= (1, 0) বিন্দুৰ পৰা (ii) ৰেখাডালত টনা লম্বৰ দৈৰ্ঘ্য

$$= \left|\frac{1+3.0+5}{\sqrt{1^2+3^2}}\right|$$

$$= \frac{6}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

৮নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $6x^2 + xy - 12y^2 + 2x + ky - 20 = 0$ সমীকৰণে এযোৰ ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজাবলৈ হ'লে,

$$6.(-12).(-20) + 2.\frac{k}{2}.1.\frac{1}{2} - 6.\left(\frac{k}{2}\right)^2 - (-12).1^2 - (-20).\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 1440 + \frac{k}{2} - \frac{3k^2}{2} + 12 + 5 = 0$$

$\Rightarrow 2880 + k - 3k^2 + 34 = 0$

$\Rightarrow 3k^2 - k - 2914 = 0$

$\Rightarrow k = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4.3.(-2914)}}{2 \times 3}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 34968}}{6}$

$= \frac{1 \pm \sqrt{34969}}{6}$

$= \frac{1 \pm 187}{6}$

$= \frac{188}{6}$ বা, $\frac{-186}{6}$

$= \frac{94}{3}$ বা, -31

$\therefore$ kৰ নির্ণেয় মান -31 বা, $\frac{94}{3}$.

৯নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ যদি $\lambda x^2 + 3xy - 5y^2 + 7x + 14y + 3 = 0$ সমীকৰণে এযোৰ সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজালে,

$$\lambda.(-5).3 + 2.7.\left(\frac{7}{2}\right).\left(\frac{3}{2}\right) - \lambda.7^2 - (-5).\left(\frac{7}{2}\right)^2 - 3.\left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

$$\Rightarrow -15\lambda + \frac{147}{2} - 49\lambda + \frac{245}{4} - \frac{27}{4} = 0$$

$$\Rightarrow -64\lambda + \frac{294 + 245 - 27}{4} = 0$$

$$\Rightarrow -64\lambda + \frac{512}{4} = 0$$

$\Rightarrow -64\lambda + 128 = 0$

$\Rightarrow -64\lambda = -128$

$\Rightarrow \lambda = 2$

$\therefore$ λৰ নির্ণেয় মান 2.

১০নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $2x^2 - 5xy + 3y^2 - 2x + 3y = 0$ ... ...(i)

$\Rightarrow 2x^2 - (5y + 2)x + (3y^2 + 3y) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{(5y + 2) \pm \sqrt{(5y + 2)^2 - 8(3y^2 + 3y)}}{2.2}$

$$= \frac{(5y+2) \pm \sqrt{y^2 - 4y + 4}}{4}$$

$$= \frac{(5y+2) \pm \sqrt{(y-2)^2}}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{(5y+2) \pm (y-2)}{4}$$

+ চিন লৈ আমি পাওঁ, $x = \frac{(5y+2)+(y-2)}{4} = \frac{6y}{4} = \frac{3y}{2}$

অৰ্থাৎ, $2x = 3y$

অৰ্থাৎ, $2x - 3y = 0$;

– চিন লৈ আমি পাওঁ, $x = \frac{(5y+2)-(y-2)}{4} = \frac{4y+4}{4}$

অৰ্থাৎ, $x = y + 1$

অৰ্থাৎ, $x - y - 1 = 0$

গতিকে প্ৰদত্ত সমীকৰণ (i)এ এযোৰ সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায় যাৰ পৃথক সমীকৰণ হ'ল, $2x - 3y = 0$ ... ...(ii)

আৰু $x - y - 1 = 0$ ... ...(iii)

ছেদ বিন্দুৰ স্থানাংক উলিয়াবলৈ হ'লে আমি (ii) আৰু (iii) সমাধান কৰিব লাগিব। (ii)ৰ পৰা $y = \frac{2x}{3}$ আৰু yৰ এই মান (iii)ত বহুৱাই আমি পাওঁ,

$$x - \frac{2x}{3} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 2x - 3 = 0$$

$$\Rightarrow x = 3$$

সেয়েহে, $y = \frac{2x}{3} = \frac{2 \times 3}{3} = 2$

$\therefore$ (i)এ বুজোৱা সৰল ৰেখাযোৰৰ ছেদ বিন্দুৰ স্থানাংক (3, 2).

(ii) নম্বৰ ৰেখাডালৰ অৰ্থাৎ, $y = \frac{2}{3}x$ ৰেখাডালৰ প্ৰৱণতা $m_1 = \frac{2}{3}$ আৰু (iii) নম্বৰ ৰেখাডালৰ অৰ্থাৎ, $y = x - 1$ ৰেখাডালৰ প্ৰৱণতা $m_2 = 1$; সিহঁতৰ মাজৰ কোণ ϕ তলৰ সম্বন্ধটোৰ পৰা পোৱা যাব,

$$\tan\phi = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{\frac{2}{3} - 1}{1 + \frac{2}{3}.1}\right| = \left|\frac{-1/3}{5/3}\right| = \left|-\frac{1}{5}\right| = \frac{1}{5} \Rightarrow \phi = \tan^{-1}\frac{1}{5}.$$



৩.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ অধোলিখিত সমীকৰণবোৰে বুজোৱা যুগ্ম সৰল ৰেখাৰ পৃথক সমীকৰণবোৰ নিৰ্ণয় কৰক।

i) $x^2 + 2xy\cos\alpha + y^2 = 0$ ii) $x^2 + 2xy\cot\theta + y^2 = 0$

প্ৰশ্ন ২ ঃ মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু $3x^2 - 8xy + 5y^2 = 0$ ৰেখাৰ লম্ব হোৱা সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ ঃ (2, 3) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু $3x^2 - 8xy + 5y^2 = 0$ ৰেখাৰ লম্ব হোৱা ৰেখাৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ ঃ অক্ষদ্বয়ৰ মাজৰ কোণৰ সমদ্বিখণ্ডকৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৫ ঃ $x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - y^3 = 0$ সমীকৰণে বুজোৱা ৰেখাকেইডাল নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৬ ঃ $ax^2 + 2hxy - ay^2 = 0$ আৰু $bx^2 + 2gxy - by^2 = 0$ সমীকৰণে বুজোৱা যুগ্ম সৰল ৰেখা এনেধৰণৰ যে এযোৰে আনযোৰৰ মাজৰ কোণক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে। প্ৰমাণ কৰক যে $hg + ab = 0$.

প্ৰশ্ন ৭ ঃ kৰ কি মানৰ বাবে $12x^2 + 2kxy + ky^2 + 11x - 5y + 2 = 0$ সমীকৰণে এযোৰ সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজাব?

প্ৰশ্ন ৮ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $6x^2 + 17xy + 12y^2 + 22x + 31y + 20 = 0$ সমীকৰণে এযোৰ সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায়। সিহঁতৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

*** ***** ***

অধ্যায় ৪ ঃ বৃত্ত

অধ্যায় গাঁথনি

৪.১ উদ্দেশ্য
৪.২ পৰিচয়
৪.৩ বৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ
৪.৪ বৃত্তৰ সাধাৰণ সমীকৰণ
৪.৫ ব্যাসৰ মূৰ বিন্দু দিয়া থাকিলে বৃত্তৰ সমীকৰণ
৪.৬ স্পৰ্শক আৰু অভিলম্ব
৪.৭ কেইটামান প্ৰয়োজনীয় প্ৰমেয়
৪.৮ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
৪.৯ অধিক জানিবলৈ
৪.১০ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান
৪.১১ আৰ্হি প্ৰশ্ন

৪.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- বৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ উলিয়াব পাৰিব
- বৃত্তৰ সাধাৰণ সমীকৰণ উলিয়াব পাৰিব
- ব্যাসৰ মূৰ বিন্দু দিয়া থাকিলে বৃত্তৰ সমীকৰণ উলিয়াব পাৰিব
- বৃত্তৰ স্পৰ্শক আৰু অভিলম্ব সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

৪.২ পৰিচয়

যিবোৰ বিন্দুৰে এখন সমতলত এনেদৰে চলাচল কৰে যে এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ পৰা ইয়াৰ দূৰত্ব সদায় স্থিৰ, সেই বিন্দুবোৰৰ সংহতিয়েই বৃত্ত। এই অধ্যায়ত আমি বিভিন্ন আকাৰত বৃত্তৰ সমীকৰণ উলিয়াম। লগতে আমি বৃত্তৰ স্পৰ্শক আৰু অভিলম্ব সম্বন্ধেও আলোচনা কৰিম।

৪.৩ বৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ

ধৰা হ'ল, বৃত্তটোত (x, y) যিকোনো এটা বিন্দু। কেন্দ্ৰ (h, k)ৰ পৰা ইয়াৰ দূৰত্ব a, অৰ্থাৎ, a হ'ল ব্যাসাৰ্ধ। গতিকে আমি পালোঁ, $\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2} = a$

অৰ্থাৎ, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ এইটোৱে বৃত্তটোৰ সমীকৰণ।

ইয়াৰ পৰা আমি পাম যে যদি কেন্দ্ৰ মূল বিন্দু আৰু ব্যাসার্ধ a হয়, তেনেহ'লে বৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ব $x^2 + y^2 = a^2$. এইটোৱেই বৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ।

উদাহৰণ স্বৰূপে, এটা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰ (2, –3) আৰু ব্যাসার্ধ 7 হ'লে, বৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ব,

$$(x – 2)^2 + (y + 3)^2 = 7^2$$

অর্থাৎ, $x^2 – 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 49$

অর্থাৎ, $x^2 + y^2 – 4x + 6y – 36 = 0$

টোকা ঃ কেন্দ্ৰক মূল বিন্দু হিচাপে ল'লে, বৃত্তৰ সমীকৰণ হ'ল $x^2 + y^2 = a^2$, এইটোৱেই বৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ।

৪.৪ বৃত্তৰ সাধাৰণ সমীকৰণ

দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ সমীকৰণ, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fx + c = 0$ ... ...(1)

লোৱা হ'ল। ইয়াত g, f আৰু c ধ্ৰুৱক।

এতিয়া সমীকৰণটোক এনেদৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

$$(x^2 + 2gx + g^2) + (y^2 + 2fy + f^2) = g^2 + f^2 – c$$

অর্থাৎ, $(x + g)^2 + (y + f)^2 = g^2 + f^2 – c$

অর্থাৎ, $\{x – (–g)\}^2 + \{y – (–1)\}^2 = \left(\sqrt{g^2 + f^2 – c}\right)^2$

এইটোৱেই এটা বৃত্তৰ সমীকৰণ বুজায়। ইয়াৰ কেন্দ্ৰ হ'ল (–g, –f) আৰু ব্যাসার্ধ, $\sqrt{g^2 + f^2 – c}$.

(1) হ'ল বৃত্তৰ সাধাৰণ সমীকৰণ। এই বৃত্তটো এটা বাস্তৱ বৃত্ত যদি $g^2 + f^2 – c > 0$ এটা বিন্দু বৃত্ত যদি $g^2 + f^2 – c > 0$, এটা কাল্পনিক বৃত্ত যদি $g^2 + f^2 – c > 0$.

গতিকে, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ সমীকৰণে এটা বৃত্তৰ সমীকৰণ বুজায়, ইয়াৰ কেন্দ্ৰ (–g, –f) আৰু ব্যাসার্ধ $\sqrt{g^2 + f^2 – c}$.

টোকা ঃ x আৰু yৰ দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ সাধাৰণ সমীকৰণ হ'ল,

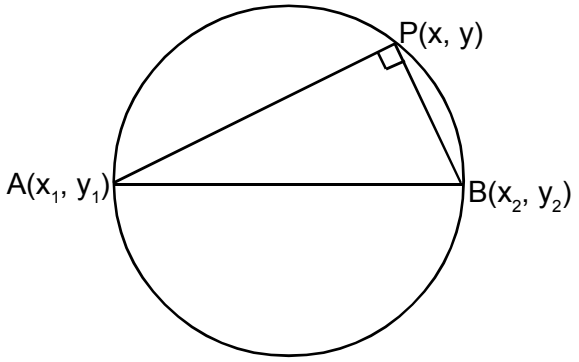
$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$

এইটোৱে এটা বৃত্তৰ সমীকৰণ বুজাব যদি (i) a = b আৰু (ii) h = 0.

অর্থাৎ (i) x^2 আৰু y^2ৰ সহগ সমান, আৰু (ii) সমীকৰণটোত পূৰণ পদ xy নাথাকে।

৪.৫ ব্যাসৰ মূৰ বিন্দু দিয়া থাকিলে বৃত্তৰ সমীকৰণ

ধৰা হ'ল, এটা বৃত্তৰ ব্যাসৰ মূৰ বিন্দু দুটা $A(x_1, y_1)$ আৰু $B(x_2, y_2)$। ধৰা হ'ল বৃত্তটোত P(x, y) যিকোনো এটা বিন্দু। ∠APB অর্ধবৃত্তস্থ কোণ। গতিকে ∠APB এটা সমকোণ, অর্থাৎ AP, BPৰ ওপৰত লম্ব।



চিত্র ঃ ৪.১

এতিয়া PA ৰেখাডালৰ প্ৰৱণতা $\frac{y-y_1}{x-x_1}$, আৰু PB ৰেখাডালৰ প্ৰৱণতা $\frac{y-y_2}{x-x_2}$.

যিহেতু AP $\perp$ BP, গতিকে $\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right)\left(\frac{y-y_2}{x-x_2}\right) = -1$

অৰ্থাৎ, $(y-y_1)(y-y_2) = -(x-x_1)(x-x_2)$

অৰ্থাৎ, $(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0$

এইটোৱেই বৃত্তটোৰ সমীকৰণ।

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ ঃ তলৰ প্ৰতিটো সমীকৰণে বৃত্তৰ সমীকৰণ বুজায় নে নাই পৰীক্ষা কৰক। যদি বুজায়, কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰক।

i) $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$

ii) $x^2 + y^2 - 4xy + 2x + 3y - 5 = 0$

সমাধান ঃ

i) সমীকৰণটো হ'ল, $2x^2 + 2y^2 - 4x + 6y + 1 = 0$

অৰ্থাৎ, $x^2 + y^2 - 2x + 3y + \frac{1}{2} = 0$

এইটো $x^2 + y^2 + 2gx + 2fx + c = 0$ আকাৰৰ।

ইয়াত $2g = -2$, $2f = 3$ আৰু $c = \frac{1}{2}$.

গতিকে ই এটা বৃত্তৰ সমীকৰণ বুজায়। ইয়াৰ কেন্দ্ৰ $(-g, -f)$, অৰ্থাৎ, $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ আৰু

ব্যাসাৰ্ধ = $\sqrt{g^2+f^2-c} = \sqrt{1+\frac{9}{4}-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{11}{4}}$.

ii) দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ সমীকৰণটো হ'ল, $x^2 + y^2 - 4xy + 2x + 3y - 5 = 0$

ইয়াত $h = -2 \neq 0$ (যদিও $a = b$); গতিকে ই বৃত্তৰ সমীকৰণ নুবুজায়।

উদাহৰণ ২ ঃ

i) এটা বৃত্তৰ এডাল ব্যাসৰ মূৰ বিন্দু দুটা (0, –1) আৰু (2, 3) বৃত্তটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

ii) ওপৰৰ বৃত্তটোৰ ঐককেন্দ্রিক আৰু 5 ব্যাসার্ধৰ বৃত্তৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ

i) এডাল ব্যাসৰ মূৰ বিন্দু দুটা হ'ল (0, –1) আৰু (2, 3). গতিকে বৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ল,

$(x–0)(x–2) + (y+1)(y–3) = 0$

অর্থাৎ, $x^2 + y^2 – 2x – 2y – 3 = 0$

ii) এটা বৃত্ত আৰু তাৰ ঐককেন্দ্রিক বৃত্তৰ সমীকৰণৰ পার্থক্য মাত্র ধ্রুৱক পদটোত। ধৰা হ'ল,

$x^2 + y^2 – 2x – 2y – 3 = 0$, বৃত্তৰ ঐককেন্দ্রিক বৃত্তৰ সমীকৰণ,

$x^2 + y^2 – 2x – 2y – c = 0$;

ইয়াৰ ব্যাসার্ধ = $\sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 - c} = \sqrt{2 - c}$.

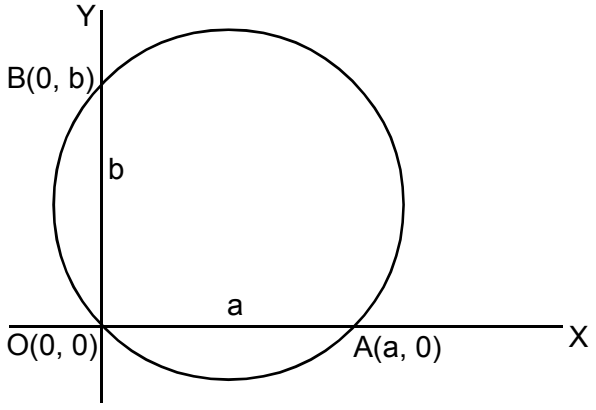
উলিয়াবলগীয়া ঐককেন্দ্রিক বৃত্তৰ ব্যাসার্ধ হ'ল 5.

গতিকে, $\sqrt{2 - c} = 5 \Rightarrow 2 – c = 25 \Rightarrow c = –23$

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া বৃত্তৰ সমীকৰণ, $x^2 + y^2 – 2x – 2y – 23 = 0$.

উদাহৰণ ৩ ঃ এটা বৃত্ত মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যায়। বৃত্তটোৰ x আৰু y অক্ষৰ ছেদাংশ ক্রমে a আৰু b. বৃত্তটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক। লগতে বৃত্তটোৰ কেন্দ্র আৰু ব্যাসার্ধ উলিয়াওক।

সমাধান ঃ



চিত্র ঃ ৪.২

দিয়া আছে, বৃত্তটো মূল বিন্দু Oৰ মাজেৰে যায়, x-অক্ষৰ ছেদাংশ OA = a, আৰু y-অক্ষৰ ছেদাংশ OB = b. গতিকে, বৃত্তটো O(0, 0), A(a, 0) আৰু B(0, b) বিন্দু তিনিটাৰ মাজেৰে যায়। ধৰা হ'ল বৃত্তটোৰ সমীকৰণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... ...(1)

যিহেতু ই O(0, 0), A(a, 0) আৰু B(0, b) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, গতিকে,

$c = 0$ ... ...(2)

$a^2 + 2ga + c = 0$ ... ...(3)

আৰু $b^2 + 2fb + c = 0$ ... ...(4)

(2), (3) আৰু (4)ৰ পৰা, আমি পালোঁ, $2ga = -a^2 \Rightarrow g = -\frac{a}{2}$

আৰু $2fb = -b^2 \Rightarrow f = -\frac{b}{2}$

গতিকে, $g = -\frac{a}{2}$, $f = -\frac{b}{2}$ আৰু $c = 0$

g, f আৰু cৰ মান (1)ত বহুৱাই আমি পাওঁ, $x^2 + y^2 - ax - by = 0$

এইটোৱেই বৃত্তৰ উলিয়াবলগীয়া সমীকৰণ।

বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ (–g, –f), অৰ্থাৎ, $\left(a/2, b/2\right)$ আৰু ইয়াৰ ব্যাসাৰ্ধ,

$$= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}\right)^2 - 0}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}\ .$$

উদাহৰণ ৪ ঃ এটা বৃত্তৰ এডাল ব্যাসৰ মূৰ বিন্দু দুটা (2, –3) আৰু (1, 0). বৃত্তটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক। ইয়াৰ ব্যাসাৰ্ধ কিমান?

সমাধান ঃ বৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$(x - 2)(x - 1) + \{y - (-3)\}(y - 0) = 0$$

অৰ্থাৎ, $(x - 2)(x - 1) + y(y + 3) = 0$

অৰ্থাৎ, $x^2 - 3x + 2 + y^2 + 3y = 0$

অৰ্থাৎ, $x^2 + y^2 - 3x + 3y + 2 = 0$

ইয়াৰ ব্যাসাৰ্ধ $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$$= \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}$$

$$= \sqrt{\frac{9 + 9 - 8}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{10}{4}}$$

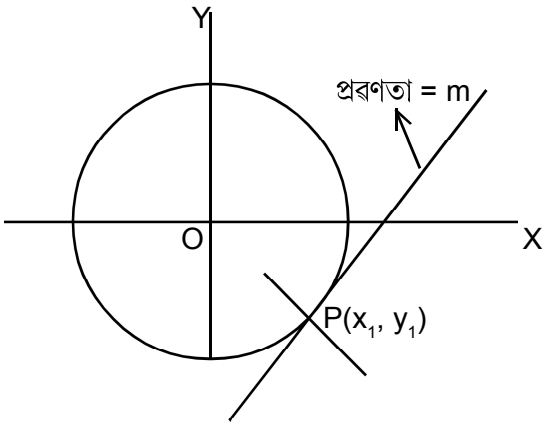
$$= \frac{1}{2}\sqrt{10}$$

৩.৬ স্পর্শক আৰু অভিলম্ব

a) বৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণটো লোৱা হ'ল,

$x^2 + y^2 = a^2$ ... ...(1)

ধৰা হ'ল, বৃত্তটোত $P(x_1, y_1)$ এটা বিন্দু। (1)ক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,



চিত্ৰ ঃ ৪.৩

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -2x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

অৱকলন গণিতৰ পৰা আমি জানো যে $P(x_1, y_1)$ বিন্দুত (1) বৃত্তটোৰ স্পর্শকৰ প্ৰৱণতা,

$$m = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1,y_1)} = -\frac{x_1}{y_1}$$

P বিন্দুত টনা স্পর্শক ডালৰ প্ৰৱণতা 'm' আৰু ই $P(x_1, y_1)$, বিন্দুৰ মাজেৰে যায়।

গতিকে ইয়াৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

অর্থাৎ, $y - y_1 = \left(-\frac{x_1}{y_1}\right)(x - x_1)$

অর্থাৎ, $yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$

অর্থাৎ, $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$

কিন্তু $P(x_1, y_1)$ বিন্দুটো (1) বৃত্তটোত আছে। গতিকে $x_1^2 + y_1^2 = a^2$;

গতিকে $P(x_1, y_1)$ বিন্দুত টনা স্পর্শকৰ সমীকৰণ $xx_1 + yy_1 = a^2$.

$P(x_1, y_1)$ বিন্দুত টনা অভিলম্ব ডাল $P(x_1, y_1)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু ই P বিন্দুত টনা স্পর্শক ডালৰ ওপৰ লম্ব। গতিকে P বিন্দুত টনা অভিলম্ব ডালৰ প্রৱণতা $-\frac{1}{m}$.

গতিকে (1) বৃত্তটোৰ $P(x_1, y_1)$ বিন্দুত টনা অভিলম্বৰ সমীকৰণ,

$$y - y_1 = \left(-\frac{1}{m}\right)(x - x_1)$$

অর্থাৎ, $y - y_1 = \left(-\frac{1}{-\frac{x_1}{y_1}}\right)(x - x_1) = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1)$

অর্থাৎ, $\frac{x - x_1}{x_1} = \frac{y - y_1}{y_1}$

অর্থাৎ, $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}$

টোকা ঃ স্পষ্টতঃ (0, 0) বিন্দুৱে $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}$ সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে। গতিকে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তৰ (x_1, y_1) বিন্দুত টনা অভিলম্বডাল বৃত্তৰ কেন্দ্র অর্থাৎ মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যায়। যিহেতু বৃত্তৰ যিকোনো সমীকৰণক, কেন্দ্রক মূল বিন্দু হিচাপে লৈ তাৰ মাজেৰে টনা আয়তীয় স্থানাংক-অক্ষ সাপেক্ষে, $x^2 + y^2 = a^2$ আকাৰত প্রকাশ কৰিব পাৰি, গতিকে বৃত্তৰ যিকোনো অভিলম্ব ইয়াৰ কেন্দ্রৰ মাজেৰে যায়।

b) দ্বিতীয়তে বৃত্তৰ সাধাৰণ সমীকৰণটো লোৱা হ'ল,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... ...(2)

(2)ৰ উভয় পক্ষক x সাপেক্ষে অৱকলন কৰি আমি পাওঁ,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2g + 2f\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow 2(y + f)\frac{dy}{dx} = -2(x + g)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x + g}{y + f}.$$

ধৰা হ'ল, বৃত্তটোত (x_1, y_1) যিকোনো এটা বিন্দু আৰু (x_1, y_1) বিন্দুত টনা স্পর্শকডালৰ প্রৱণতা m. তেনেহ'লে,

$$m = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{(x_1, y_1)} = -\frac{x_1 + g}{y_1 + f},$$

(x_1, y_1) বিন্দুত স্পর্শকৰ সমীকৰণ,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

অর্থাৎ, $y - y_1 = -\left(\frac{x_1 + g}{y_1 + f}\right)(x - x_1)$

অর্থাৎ, $(x - x_1)(x_1 + g) = -(y - y_1)(y_1 + f)$

অর্থাৎ, $(xx_1 + gx - x_1^2 - gx_1) + (yy_1 + fy - y_1^2 - fx_1) = 0$

অর্থাৎ, $xx_1 + yy_1 + gx + fy = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1$ ... ...(3)

কিন্তু (x_1, y_1) বিন্দুটো (2) বৃত্তটোত আছে। গতিকে,

$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$

ইয়াৰ পৰা, $x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1 = -gx_1 - fy_1 - c.$

(3)ৰ সোঁপক্ষত বহুৰাই আমি পাওঁ,

$$xx_1 + yy_1 + gx + fy = -gx_1 - fy_1 - c$$

অর্থাৎ, $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0.$

এইটোৱেই (2) নম্বৰ বৃত্তৰ (x_1, y_1) বিন্দুত টনা স্পর্শকৰ সমীকৰণ।

(2) নম্বৰ বৃত্তৰ (x_1, y_1) বিন্দুত টনা অভিলম্বৰ প্রৱণতা m' হ'লে,

$$m' = -\frac{1}{m} = \frac{y_1 + f}{x_1 + g} \quad (\because \text{ অভিলম্ব স্পর্শকৰ ওপৰত লম্ব}),$$

গতিকে (x_1, y_1) বিন্দুত টনা অভিলম্বৰ সমীকৰণ,

$$y - y_1 = m'(x - x_1)$$

অর্থাৎ, $y - y_1 = \frac{y_1 + f}{x_1 + g}(x - x_1)$

অর্থাৎ, $\frac{x - x_1}{g + x_1} = \frac{y - y_1}{f + y_1}$

উদাহৰণ ১ ঃ $x^2 + y^2 = 5$ বৃত্তৰ (1, –2) বিন্দুত টনা স্পর্শক আৰু অভিলম্বৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ (1, –2) বিন্দুত টনা স্পর্শকৰ সমীকৰণ, $x.1 + y.(-2) = 5$

অর্থাৎ, $x - 2y = 5$

(1, –2) বিন্দুত টনা অভিলম্বৰ সমীকৰণ, $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2}$

অর্থাৎ, $2x + y = 0.$

উদাহৰণ ২ ঃ দেখুওৱাক যে (3, 2) বিন্দুটো $x^2 + y^2 - x + 4y - 18 = 0$ বৃত্তটোত আছে। (3, 2) বিন্দুত টনা স্পর্শকৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক। সত্যাপন কৰক যে (3, 2) বিন্দুত টনা অভিলম্বডাল বৃত্তটোৰ কেন্দ্রৰ মাজেৰে যায়।

সমাধান ঃ $x = 3$ আৰু $y = 2$ হ'লে,

$x^2 + y^2 - x + 4y - 18 = 9 + 4 - 3 + 8 - 18 = 0$;

গতিকে (3, 2) বিন্দুটো $x^2 + y^2 - x + 4y - 18 = 0$ ... ...(1) বৃত্তটোত আছে।

ইয়াত, $2g = -1$, $2f = 4$, $c = -18$

$$\Rightarrow g = -\frac{1}{2},\ f = 2,\ c = -18$$

আকৌ, $(x_1, y_1) \equiv (3, 2)$, অর্থাৎ, $x_1 = 3$, $y_1 = 2$

বৃত্তটোৰ (3, 2) বিন্দুত টনা অভিলম্বৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

অর্থাৎ, $x.3 + y.2 + \left(-\frac{1}{2}\right)(x + 3) + 2(y + 2) - 18 = 0$

অর্থাৎ, $6x + 4y - x - 3 + 4y + 8 - 36 = 0$

অর্থাৎ, $5x + 8y - 31 = 0$

বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ (3, 2) বিন্দুত টনা অভিলম্বৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$\frac{x - x_1}{g + x_1} = \frac{y - y_1}{f + y_1}$$

অর্থাৎ, $\frac{x - 3}{-\frac{1}{2} + 3} = \frac{y - 2}{2 + 2}$

অর্থাৎ, $\frac{2(x - 3)}{5} = \frac{y - 2}{4}$

অর্থাৎ, $8x - 24 = 5y - 10$

অর্থাৎ, $8x - 5y - 14 = 0$

বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ $(-g, -f)$ অর্থাৎ, $\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ আৰু ই উপৰিউক্ত সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে।

গতিকে দেখা গ'ল যে (3, 2) বিন্দুত টনা অভিলম্বডাল বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰৰ মাজেৰে যায়।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ ঃ এটা বৃত্ত (4, 3) আৰু (–2, 5), বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু $2x - 3y = 4$ ৰেখাডাল বৃত্তটোৰ এডাল ব্যাস। বৃত্তটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ ঃ k ৰ মান নির্ণয় কৰক যাতে $16x^2 + 25y^2 - 1 = k(x - 2)^2$ সমীকৰণে এটা বৃত্তৰ সমীকৰণ বুজায়।

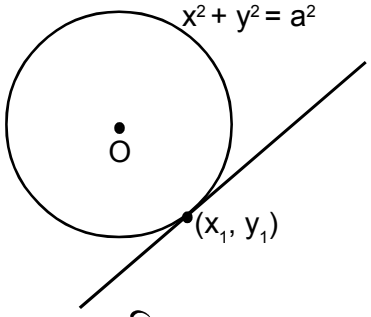
প্রশ্ন নং ৩ ঃ এটা বৃত্তৰ এডাল ব্যাসৰ মূৰ বিন্দু দুটা (5, 1) আৰু (7, 5). এই বৃত্তটোৰ ঐককেন্দ্রিক বৃত্তৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক, যাতে বৃত্তটোৰ ব্যাসার্ধ 10.

প্রশ্ন নং ৪ ঃ (–1, 1), (–2, 1), (4, 3) বিন্দু তিনিটাৰ মাজেৰে যোৱা বৃত্তৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ ঃ প্রমাণ কৰক যে $2x + y = 4$ ৰেখাডাল $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 29 = 0$ বৃত্তটোৰ এডাল স্পর্শক। লগতে স্পর্শ বিন্দুৰ স্থানাংক নির্ণয় কৰক।

৪.৭ কেইটামান প্রয়োজনীয় প্রমেয়

a) $lx + my + n = 0$ ৰেখাডাল $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তৰ স্পর্শক হোৱাৰ চর্ত নির্ণয় কৰিব লাগে।



চিত্র ঃ ৪.৪

ধৰা হ'ল, $lx + my + n = 0$ ... ...(i)

ৰেখাডাল $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তটোৰ (x_1, y_1) বিন্দুত স্পর্শকৰ সমীকৰণ হ'ল। কিন্তু (x_1, y_1) বিন্দুত স্পর্শকৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$xx_1 + yy_1 = a^2$$

অর্থাৎ, $xx_1 + yy_1 - a^2 = 0$ ... ...(ii)

(i) আৰু (ii) সমীকৰণ দুটা সমার্থক। সমীকৰণ দুটা তুলনা কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{x_1}{l} = \frac{y_1}{m} = \frac{-a^2}{n}$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{a^2 l}{n}, y_1 = -\frac{a^2 m}{n}$$

যিহেতু (x_1, y_1) বিন্দুটো $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তটোত আছে, গতিকে,

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{a^2 l}{n}\right)^2 + \left(-\frac{a^2 m}{n}\right) = a^2$$

$\Rightarrow a^2(l^2 + m^2) = n^2$,

এইটোৱেই নির্ণয় চর্ত।

টোকা ঃ

i) যেতিয়া এই চর্তটো সিদ্ধ হয়, তেতিয়া $lx + my + n = 0$ ৰেখাডালে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তটোক স্পর্শ কৰে আৰু এই ক্ষেত্রত স্পর্শ বিন্দুৰ স্থানাংক হ'ল,

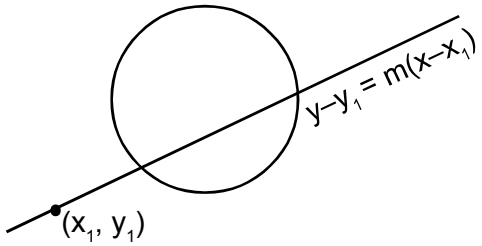
$$\left(-\frac{a^2l}{n}, -\frac{a^2m}{n}\right)$$

ii) $y = mx + c$ অর্থাৎ $mx - y + c = 0$ ৰেখাডাল $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তৰ স্পর্শক হোৱাৰ চর্ত হ'ল, $a^2\{m^2 + (-1)^2\} = c^2$

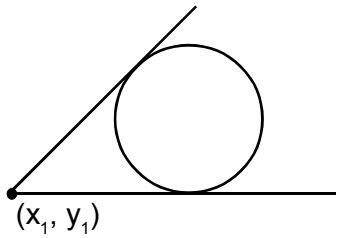
অর্থাৎ, $c^2 = a^2(1 + m^2)$.

গতিকে $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ সমান্তৰাল সৰল ৰেখা দুডালে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তটোক স্পর্শ কৰে। প্রতিডাল স্পর্শকৰ প্রৱণতা m.

b) প্রমাণ কৰিব লাগে যে এটা নির্দিষ্ট বিন্দুৰ পৰা এটা নির্দিষ্ট বৃত্তলৈ দুডাল স্পর্শক টানিব পাৰি। ধৰা হ'ল, নির্দিষ্ট বৃত্তটো $x^2 + y^2 = a^2$ আৰু নির্দিষ্ট বিন্দুটো (x_1, y_1)



চিত্র ঃ ৪.৫



চিত্র ঃ ৪.৬

(x_1, y_1) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা যিকোনো ৰেখাৰ সমীকৰণ হ'ল,

অর্থাৎ, $y = mx + (y_1 - mx_1)$

ই $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তৰ এডাল স্পর্শক হ'ব যদি,

$(y_1 - mx_1)^2 = a^2(1+m^2)$ [চর্ত $c^2 = a^2(1+m^2)$]

অর্থাৎ, $(x_1^2 - a^2)m^2 - 2x_1y_1m + (y_1^2 - a^2) = 0$.

এইটো এটা mৰ দ্বিঘাত সমীকৰণ। ইয়াৰ পৰা mৰ দুটা মান পোৱা যাব। প্রতিটো মানৰ পৰা এডাল স্পর্শকৰ সমীকৰণ পোৱা যাব। গতিকে দেখা গ'ল যে (x_1, y_1) নির্দিষ্ট বিন্দুটোৰ পৰা নির্দিষ্ট বৃত্তটোলৈ দুডাল স্পর্শক টানিব পাৰি।

টোকা ঃ

i) স্পর্শক দুডাল বাস্তৱ আৰু পৃথক হ'ব যদি ওপৰৰ mৰ দ্বিঘাত সমীকৰণটোৰ মূল দুটা বাস্তৱ আৰু পৃথক হয়, অর্থাৎ, যদি $(-2x_1y_1)^2 - 4(x_1^2 - a^2)(y_1^2 - a^2) \gtreqless 0$,

অর্থাৎ, যদি $x_1^2 + y_1^2 \gtreqless a^2$,

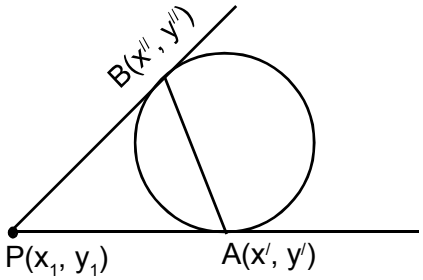
অর্থাৎ, যদি (x_1, y_1) বিন্দুটো বৃত্তটোৰ বাহিৰত থাকে।

স্পর্শক দুডাল বাস্তৱ আৰু সংপাতী হ'ব যদি দ্বিঘাত সমীকৰণটোৰ মূল দুটা বাস্তৱ আৰু সমান হয়, অর্থাৎ, যদি $(-2x_1y_1)^2 - 4(x_1^2 - a^2)(y_1^2 - a^2) = 0$ হয়, অর্থাৎ, যদি $x_1^2 + y_1^2 = a^2$ হয়, অর্থাৎ, যদি (x_1, y_1) বিন্দুটো বৃত্তটোৰ ওপৰত থাকে।

স্পর্শক দুডাল কাল্পনিক হ'ব, যদি দ্বিঘাত সমীকৰণটোৰ মূল দুটা কাল্পনিক হয়, অর্থাৎ, যদি $(-2x_1y_1)^2 - 4(x_1^2 - a^2)(y_1^2 - a^2) < 0$ হয় অর্থাৎ যদি $x_1^2 + y_1^2 < a^2$ হয় অর্থাৎ যদি (x_1, y_1) বিন্দুটো বৃত্তটোৰ ভিতৰত থাকে।

ii) দেখুৱাব পাৰি যে (x_1, y_1) বিন্দুৰ পৰা $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তলৈ টনা স্পর্শক দুডালৰ সম্মিলিত সমীকৰণ হ'ল, $SS_1 = T^2$ য'ত, $S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c$, $S_1 \equiv x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$ আৰু $T \equiv xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$.

c) স্পর্শ জ্যা ঃ



চিত্র ঃ ৪.৭

ধৰা হ'ল এটা নির্দিষ্ট বৃত্তৰ বাহিৰত P এটা নির্দিষ্ট বিন্দু। গতিকে P বিন্দুৰ পৰা বৃত্তটোলৈ দুডাল বাস্তৱ স্পর্শক টানিব পাৰি। যদি এই স্পর্শক দুডালে বৃত্তটোক A আৰু B বিন্দুত স্পর্শ কৰে, তেনেহ'লে স্পর্শ বিন্দু দুটা সংলগ্নকাৰী AB ৰেখাখণ্ড ডালক স্পর্শক দুডালৰ স্পর্শ জ্যা (Chord of Contact) বুলি কোৱা হয়।

ধৰা হ'ল, বৃত্তটোৰ সমীকৰণ $x^2 + y^2 = a^2$ আৰু বৃত্তটোৰ বাহিৰত থকা P বিন্দুটোৰ স্থানাংক (x_1, y_1)। ধৰা হ'ল, $P(x_1, y_1)$ বিন্দুটোৰ পৰা বৃত্তটোলৈ টনা স্পর্শক দুডালৰ স্পর্শ বিন্দুৰ স্থানাংক $A(x', y')$ আৰু $B(x'', y'')$।

$A(x', y')$ বিন্দুত টনা স্পর্শকৰ সমীকৰণ হ'ল, $xx' + yy' = a^2$

আৰু $B(x'', y'')$ বিন্দুত টনা স্পর্শকৰ সমীকৰণ হ'ল, $xx'' + yy'' = a^2$.

যিহেতু এই স্পর্শক দুডাল $P(x_1, y_1)$, বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, গতিকে $x'x_1 + y'y_1 = a^2$ আৰু $x'' x_1 + y''y_1 = a^2$, দেখা গ'ল যে A আৰু B ৰ স্থানাংকই $xx_1 + yy_1 = a^2$ সমীকৰণ সিদ্ধ কৰে। এইটো এটা ৰেখাৰ সমীকৰণ।

গতিকে, এইডালেই A আৰু B ৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখা।

গতিকে, $P(x_1, y_1)$ বিন্দুৰ পৰা $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তলৈ টনা স্পর্শক দুডালৰ স্পর্শ জ্যা ABৰ সমীকৰণ হ'ল $xx_1 + yy_1 = a^2$.

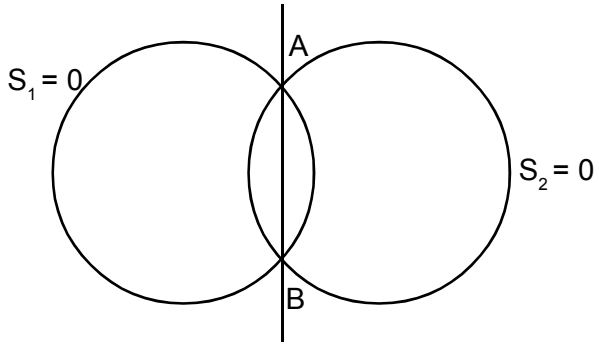
টোকা ঃ দেখুৱাব পাৰি যে (x_1, y_1) বিন্দুৰ পৰা $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তলৈ টনা স্পর্শক দুডালৰ স্পর্শ জ্যাৰ সমীকৰণ হ'ল,

$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0.$

d) দুটা বৃত্তৰ উমৈহতীয়া জ্যা ঃ

তলৰ বৃত্ত দুটা লোৱা হ'ল, $S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$

আৰু $S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0.$



চিত্ৰ ঃ ৪.৮

AB বৃত্ত দুটাৰ উমৈহতীয়া জ্যা।

সমীকৰণটো বিবেচনা কৰা হ'ল, $S_1 - S_2 = 0$

অর্থাৎ, $2(g_1 - g_2)x + 2(f_1 - f_2)y + (c_1 - c_2) = 0$

এইটো x আৰু y ৰ প্রথম মাত্রাৰ সমীকৰণ। গতিকে ই সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায়। এতিয়া A ৰ স্থানাংকই $S_1 = 0$ আৰু $S_2 = 0$ সমীকৰণ দুটা সিদ্ধ কৰে আৰু সেয়ে, $S_1 - S_2 = 0$ সমীকৰণ সিদ্ধ কৰে। গতিকে A বিন্দুটো $S_1 - S_2 = 0$ ৰেখাডালত আছে। সেইদৰে B বিন্দুটো $S_1 - S_2 = 0$ ৰেখাডালত আছে। গতিকে, $S_1 - S_2 = 0$ ৰেখাডাল A আৰু B বিন্দু দুটাৰ মাজেৰে যায়। গতিকে, AB ৰেখাখণ্ড ডালেই $S_1 = 0$ আৰু $S_2 = 0$ বৃত্তৰ উমৈহতীয়া জ্যা আৰু ইয়াৰ সমীকৰণ $S_1 - S_2 = 0$.

মন কৰিবলগীয়া এই যে $S_1 = 0$ আৰু $S_2 = 0$ সমীকৰণৰ প্রত্যেকৰ ক্ষেত্রত x^2 আৰু y^2ৰ সহগ এক।

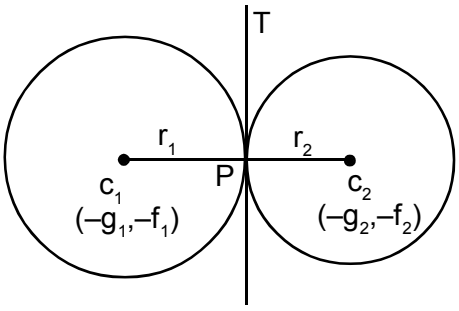
বৃত্ত দুটাৰ উমৈহতীয়া জ্যাক মূলাক্ষ (Radical Axis)।

e) দুটা বৃত্তই পৰস্পৰ স্পর্শ কৰা চর্ত ঃ

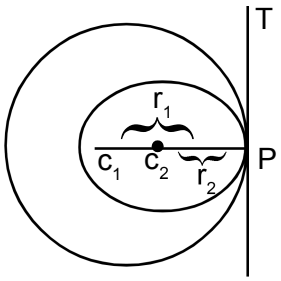
তলৰ বৃত্ত দুটা লোৱা হ'ল,

$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$

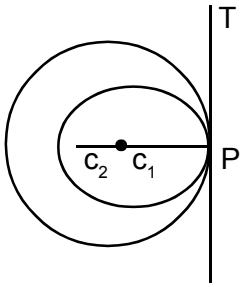
আৰু $x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0$



চিত্র ঃ ৪.৯



চিত্র ঃ ৪.১০



চিত্র ঃ ৪.১১

প্ৰথম বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ হ'ল, $C_1(-g_1, -f_1)$ আৰু ইয়াৰ ব্যাসার্ধ $r_1 = \sqrt{g_1^2 + f_1^2 - c_1}$

আৰু দ্বিতীয় বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ $C_2(-g_2, -f_2)$ আৰু ইয়াৰ ব্যাসার্ধ হ'ল,

$r_2 = \sqrt{g_2^2 + f_2^2 - c_2}$. যেতিয়া এই বৃত্ত দুটাই পৰস্পৰে P বিন্দুত স্পৰ্শ কৰে, তেতিয়া P বিন্দুতবৃত্ত দুটাৰ এডাল উমৈহতীয়া স্পৰ্শক PT থাকে। PT ৰ ওপৰত C_1P আৰু C_2P উভয়ে লম্ব। সেয়েহে C_1, P, C_2 এডাল সৰল ৰেখাত থাকে। যদি বৃত্ত দুটাই P বিন্দুত বহিঃস্থভাৱে স্পৰ্শ কৰে, তেনেহ'লে, $C_1C_2 = C_1P + C_2P = r_1 + r_2$

অর্থাৎ, কেন্দ্ৰ দুটাৰ মাজৰ দূৰত্ব, বৃত্ত দুটাৰ ব্যাসার্ধৰ যোগফলৰ সমান। যদি বৃত্ত দুটাই P বিন্দুত অন্তঃস্থভাৱে স্পৰ্শ কৰে, তেনেহ'লে,

$C_1C_2 = C_1P - C_2P$ বা, $C_1C_2 = C_2P - C_1P$

$= r_1 - r_2$ $= r_2 - r_1$

অর্থাৎ, $C_1C_2 = r_1 \sim r_2$

অর্থাৎ, কেন্দ্ৰ দুটাৰ মাজৰ দূৰত্ব, বৃত্ত দুটাৰ ব্যাসার্ধৰ পৰম পার্থক্যৰ সমান। এই দুয়োটা চর্ত এনেদৰে লিখিব পাৰি, $C_1C_2^2 = (r_1 \pm r_2)^2$

অর্থাৎ, $(g_2 - g_1)^2 + (f_2 - f_1)^2 = \left(\sqrt{g_1^2 + f_1^2 - c_1} \pm \sqrt{g_2^2 + f_2^2 - c_2}\right)^2$

উদাহৰণ ১ ঃ $x^2 + y^2 = 4$ বৃত্তৰ দুডাল স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক যাতে স্পৰ্শক দুডালৰ প্ৰত্যেকে x-অক্ষৰ লগত 60^0 কোণ কৰে।

সমাধান ঃ আমি জানো যে $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তৰ m প্ৰৱণতাবিশিষ্ট স্পৰ্শক দুডালৰ সমীকৰণ,

$y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$.

এই ক্ষেত্ৰত প্ৰদত্ত বৃত্তটো হ'ল $x^2 + y^2 = 4$. গতিকে $a = 2$ আৰু প্ৰতিডাল স্পৰ্শকৰ প্ৰৱণতা, $m = \tan 60^0 = \sqrt{3}$.

গতিকে উলিয়াবলগীয়া স্পৰ্শক দুডালৰ সমীকৰণ,

$y = \sqrt{3}x \pm 2\sqrt{1+3}$, অর্থাৎ, $y = \sqrt{3}x \pm 4$.

উদাহৰণ ২ ঃ দেখুওৱাক যে $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ আৰু $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 14 = 0$ বৃত্ত দুটাই বহিঃস্থভাৱে স্পৰ্শ কৰে।

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ $C_1(2, -3)$ আৰু ইয়াৰ ব্যাসার্ধ

$r_1 = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 - 8} = \sqrt{5}$.

$x^2 + y^2 - 10x - 6y + 14 = 0$ বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ $C_2(5, 3)$ আৰু ইয়াৰ ব্যাসার্ধ

$r_2 = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2 - 14} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

কেন্দ্ৰদ্বয়ৰ মাজৰ দূৰত্ব,

$= C_1C_2 = \sqrt{(5-2)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{9+36}$

$= \sqrt{45} = 3\sqrt{5} = \sqrt{5} + 2\sqrt{5}$

$= r_1 + r_2$

= ব্যাসার্ধ দুটাৰ যোগফল।

$\therefore$ বৃত্ত দুটাই পৰস্পৰে বহিঃস্থভাৱে স্পৰ্শ কৰে।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ৬ ঃ λৰ কি মানৰ বাবে $4x + \lambda y + 7 = 0$ ৰেখাডালে $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$? বৃত্তক স্পৰ্শ কৰিব ?

প্ৰশ্ন নং ৭ ঃ যদি $x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$ আৰু $x^2 + y^2 + 2by + c = 0$ বৃত্ত দুটাই স্পৰ্শ কৰে, দেখুওৱাক যে $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$.

প্ৰশ্ন নং ৮ ঃ $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$ আৰু $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ বৃত্ত দুটাৰ উমৈহতীয়া জ্যা এটা বৃত্তৰ ব্যাস হ'লে, বৃত্তটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৯ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে (1, 2) বিন্দুৰ পৰা $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ বৃত্তলৈ টনা স্পৰ্শক দুডাল পৰস্পৰ লম্ব।

প্ৰশ্ন নং ১০ ঃ $x^2 + y^2 - 3x + 12y + 6 = 0$ বৃত্ত সাপেক্ষে (4, 3) বিন্দুৰ স্পৰ্শ জ্যাৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।



৪.৮ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- যদি এটা বৃত্তৰ এডাল ব্যাসৰ মূৰ বিন্দু দুটাৰ স্থানাংক (x_1, y_1) আৰু (x_2, y_2) হয়, তেনেহ'লে, বৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ব $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0$
- $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তৰ (x_1, y_1) বিন্দুত টনা স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ হ'ল $xx_1 + yy_1 = a^2$ আৰু (x_1, y_1) বিন্দুত টনা অভিলম্বৰ সমীকৰণ হ'ল, $\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1}$.

- $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্তৰ (x_1, y_1) বিন্দুত টনা স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ,
  $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$ আৰু
  (x_1, y_1) বিন্দুত টনা অভিলম্বৰ সমীকৰণ, $\frac{x - x_1}{g + x_1} = \frac{y - y_1}{f + y_1}$.



৪.৯ অধিক জানিবলৈ

ইংৰাজী গ্ৰন্থ ঃ

1) Jain, P. K. and Ahmhad, K. *Textbook of Analytical Geometry of Three Dimensions*. New Delhi: New Age International (P) Ltd.
2) Kishan, Hari. *Coordinate Geometry of Two dimensions*. New Delhi: Atlantic Publishers & Distributors.
3) Pal, Sat and Pal, Harbans. *A Textbook of Two Dimensional Geometry*. New Age International Publishers.
4) Sharma, G. C. and Jain, Madhu. *Coordinate Geometry (2D and 3D)*. New Delhi: Galgotia Publications Pvt Ltd.
5) Sharma, A. K. *Coordinate Geometry (2D)*. New Delhi: Discovery Publishing House.



৪.১০ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, বৃত্তটোৰ সমীকৰণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... ...(1)

যিহেতু ই (4, 3) আৰু (–2, 5) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, গতিকে,

$4^2 + 3^2 + 2g.4 + 2f.3 + c = 0$ আৰু $(–2)^2 + 5^2 + 2g.(–2) + 2f.5 + c = 0$

অৰ্থাৎ, $8g + 6f + c + 25 = 0$ ... ...(2)

আৰু $– 4g + 10f + c + 29 = 0$ ... ...(3)

আকৌ $2x – 3y = 4$ ৰেখাডাল বৃত্তটোৰ এডাল ব্যাস। গতিকে এই ৰেখাডাল (1) বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ $(–g, –f)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যায়। গতিকে

$2(–g) – 3(–f) = 4$

অৰ্থাৎ, $–2g + 3f – 4 = 0$ ... ...(4)

এতিয়া, (2), (3) আৰু (4) সমাধান কৰি g, f, cৰ মান পোৱা যাব। (2)ৰ পৰা (3)ৰ মান পোৱা যাব।

$12g - 4f - 4 = 0$

$\Rightarrow 3g - f - 1 = 0$ ... ...(5)

(5)ক 3ৰে পূৰণ কৰি, $9g - 3f - 3 = 0$ ... ...(6)

(4) আৰু (6) যোগ কৰি, $7g - 7 = 0 \Rightarrow 7g = 7 \Rightarrow g = 1$.

গতিকে (5)ৰ পৰা, $3.1 - f - 1 = 0 \Rightarrow f = 2$.

(2)ৰ পৰা, $8.1 + 6.2 + c + 25 = 0 \Rightarrow c = -45$.

গতিকে, $g = 1, f = 2, c = -45$.

g, f, cৰ এই মান (1)ত বহুৱাই আমি পাওঁ,

$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 45 = 0$ এইটোৱেই বৃত্তটোৰ উলিয়াবলগীয়া সমীকৰণ।

বিকল্প উপায় ঃ ধৰা হ'ল, বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ (h, k) আৰু ইয়াৰ ব্যাসার্ধ a. যিহেতু বৃত্তটো (4, 3) আৰু (–2, 5) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, গতিকে, $(h - 4)^2 + (k - 3)^2 = a^2$

আৰু $(h + 2)^2 + (k - 5)^2 = a^2$

অর্থাৎ, $h^2 + k^2 - 8h - 6k + 25 = a^2$ ... ...(1)

আৰু $h^2 + k^2 + 4h - 10k + 29 = a^2$ ... ...(2).

(2)ৰ পৰা (1) বিয়োগ কৰি, আমি পাওঁ,

$12h - 4k + 4 = 0$

$\Rightarrow 3h - k + 1 = 0$ ... ...(3)

আকৌ, যিহেতু $2x - 3y = 4$ ৰেখাডাল বৃত্তটোৰ এডাল ব্যাস, গতিকে ৰেখাডাল বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ (h, k)ৰ মাজেৰে যায়। গতিকে,

$2h - 3k - 4 = 0$ ... ...(4)

গতিকে (3) আৰু (4) হ'ল, $\left.\begin{matrix} 3h - k + 1 = 0 \\ 2h - 3k - 4 = 0 \end{matrix}\right\}$

বজ্ৰগুণন কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{h}{4+3} = \frac{k}{2+12} = \frac{1}{-9+2}$$

$$\Rightarrow \frac{h}{7} = \frac{k}{14} = \frac{1}{-7}$$

$\Rightarrow h = -1, \ k = -2.$

গতিকে, $a^2 = (h - 4)^2 + (k - 3)^2$

$= (-5)^2 + (-5)^2 = 50$

$\Rightarrow a = \sqrt{50}$

গতিকে বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ হ'ল (h, k) অর্থাৎ (–1, –2) আৰু ইয়াৰ ব্যাসার্ধ হ'ল, $a = \sqrt{50}$. গতিকে বৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ল,

$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = \left(\sqrt{50}\right)^2$

অর্থাৎ, $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 45 = 0$

২নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ বৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ল, $16x^2 + 25y^2 - 1 = k(x - 2)^2$

অর্থাৎ, $(16 - k)x^2 + 25y^2 + 4kx - (4k + 1) = 0.$

এইটো x আৰু yৰ এটা দ্বিতীয় মাত্রাৰ সমীকৰণ আৰু xy পদটো ইয়াত নাই। এইটোৱে এটা বৃত্তৰ সমীকৰণ বুজাব যদি x^2 আৰু y^2ৰ সহগ সমান।

অর্থাৎ, যদি, $16 - k = 25$, অর্থাৎ, $k = -9$.

$\therefore$ kৰ নির্ণেয় মান –9

৩নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্রদত্ত বৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ল, $(x - 5)(x - 7) + (y - 1)(y - 5) = 0$

অর্থাৎ, $(x^2 - 12x + 35) + (y^2 - 6y + 5) = 0$

অর্থাৎ, $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 40 = 0.$

উলিয়াবলগীয়া বৃত্তটো প্রদত্ত বৃত্তটোৰ ঐককেন্দ্রিক আৰু সেয়ে ইয়াৰ সমীকৰণৰ আকাৰ হ'ব এনেধৰণৰ, $x^2 + y^2 - 12x - 6y + c = 0.$

যিহেতু ইয়াৰ ব্যাসার্ধ 10, গতিকে, $\sqrt{(-6)^2 + (-3)^2 - c} = 10$

$\Rightarrow \sqrt{45 - c} = 10$

$\Rightarrow 45 - c = 100$

$\Rightarrow c = -55$

গতিকে বৃত্তটোৰ নির্ণেয় সমীকৰণ হ'ল, $x^2 + y^2 - 12x - 6y - 55 = 0.$

৪নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল বৃত্তটোৰ সমীকৰণ,

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... ...(1)

যিহেতু বৃত্তটো (–1, 1), (–2, 1) আৰু (4, 3) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, গতিকে,

$$\left.\begin{aligned} 1 + 1 - 2g + 2f + c = 0 &\Rightarrow -2g + 2f + c = -2 \\ 4 + 1 - 4g + 2f + c = 0 &\Rightarrow -4g + 2f + c = -5 \\ 16 + 9 - 8g + 6f + c = 0 &\Rightarrow -8g + 6f + c = -25 \end{aligned}\right\}$$

ক্রেমাৰৰ বিধি অনুযায়ী, $g = \frac{D_1}{D},\ f = \frac{D_2}{D},\ c = \frac{D_3}{D}$

য'ত, $D = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -12 & -4 & 0 \\ 8 & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} R_1' = R_1 - R_2, \\ R_2' = R_2 - R_3 \end{pmatrix} = -8,$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \\ -25 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 20 & -4 & 0 \\ -25 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 1 \\ 8 & -25 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -12 & 20 & 0 \\ 8 & -25 & 1 \end{vmatrix} = 40 + 36 = 76,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -25 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -2 & -3 & -5 \\ 14 & -19 & -25 \end{vmatrix} (C_1' = C_1 + C_2, C_2' = C_2 + C_3)$$

$= -2(3 + 42) = -160.$

$$\therefore g = \frac{D_1}{D} = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2},$$

$$f = \frac{D_2}{D} = \frac{76}{-8} = -\frac{19}{2},$$

$$c = \frac{D_3}{D} = \frac{-160}{-8} = 20.$$

$$\therefore (1)\text{ৰ পৰা, } x^2 + y^2 + 2.\frac{3}{2}x + 2.\left(-\frac{19}{2}\right)y + 20 = 0$$

অৰ্থাৎ, $x^2 + y^2 + 3x - 19y + 20 = 0$

৫নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্ৰদত্ত ৰেখাডাল হ'ল, $2x + y = 4$

অৰ্থাৎ, $2x + y - 4 = 0$ ... ...(1)

আৰু প্ৰদত্ত বৃত্তটো হ'ল, $x^2 + y^2 + 6x - 10y + 29 = 0$ ... ...(2)

আৰু ইয়াৰ কেন্দ্ৰ C(–g, –f), অৰ্থাৎ, C(–3, 5)

আৰু ব্যাসাৰ্ধ = $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$

$= \sqrt{3^2 + (-5)^2 - 29}$

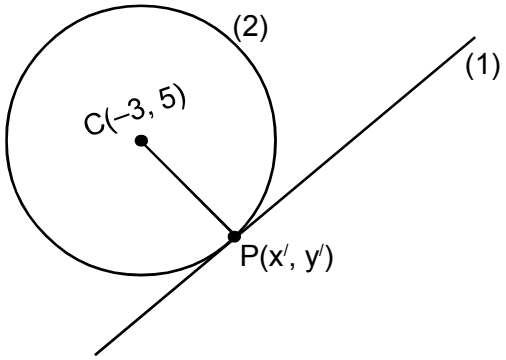
$= \sqrt{5}$

(2) নম্বৰ বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ C(–3, 5)ৰ পৰা (1) নম্বৰ ৰেখাডালৰ ওপৰত টনা লম্বৰ দৈৰ্ঘ্য

$$= \left|\frac{2.(-3) + 5 - 4}{\sqrt{2^2 + 1^2}}\right| = \left|\frac{-5}{\sqrt{5}}\right|$$

$= \sqrt{5}$ = বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্ধ

$\therefore$ (1) নম্বৰ ৰেখাডাল (2) নম্বৰ বৃত্তটোৰ এডাল স্পৰ্শক।



চিত্র ঃ ৪.১২

ধৰা হ'ল, স্পর্শ বিন্দু $P(x', y')$. গতিকে CP ৰেখাখণ্ডডাল (1) নম্বৰ স্পর্শক ৰেখাৰ ওপৰত লম্ব।

এতিয়া, m = ৰেখাৰ প্ৰৱণতা $CP = \frac{y' - 5}{x' + 3}$

আৰু m' = (1) নম্বৰ ৰেখাডালৰ প্ৰৱণতা = –2.

যিহেতু উপৰিউক্ত ৰেখা দুডাল পৰস্পৰ লম্ব, গতিকে,

$mm' = -1$

$$\Rightarrow \left(\frac{y' - 5}{x' + 3}\right)(-2) = -1$$

$\Rightarrow x' + 3 = 2y' - 10$

$\Rightarrow x' - 2y' + 13 = 0$

আকৌ $P(x', y')$ বিন্দুটো (1) নম্বৰ ৰেখাডালত আছে। গতিকে, $2x' + y' - 4 = 0$

আৰু $\left.\begin{matrix} x' - 2y' + 13 = 0 \\ 2x' + y' - 4 = 0 \end{matrix}\right\}$

সমীকৰণ দুটা সমাধান কৰি আমি পাওঁ, $\frac{x'}{8 - 13} = \frac{y'}{26 + 4} = \frac{1}{1 + 4}$

$$\Rightarrow \frac{x'}{-5} = \frac{y'}{30} = \frac{1}{5}$$

$\Rightarrow x' = -1,\ y' = 6$

$\therefore$ স্পর্শ বিন্দুটো হ'ল (–1, 6).

৬নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ বৃত্তটো হ'ল, $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$; ইয়াৰ কেন্দ্ৰ হ'ল, (3, –2)

আৰু ব্যাসার্ধ = $\sqrt{9 + 4 - (-12)} = \sqrt{25} = 5$.

যদি $4x + \lambda y + 7 = 0$ ৰেখাডালে ওপৰৰ বৃত্তটোক স্পর্শ কৰে, কেন্দ্ৰ (3, –2)ৰ পৰা ওপৰৰ ৰেখাডালৰ ওপৰত টনা লম্বৰ দৈর্ঘ্য বৃত্তটোৰ ব্যাসার্ধৰ সমান। গতিকে,

$$\left|\frac{4.3+\lambda.(-2)+7}{\sqrt{4^2+\lambda^2}}\right| = 5$$

$$\Rightarrow \left|\frac{19-2\lambda}{\sqrt{16+\lambda^2}}\right| = 5$$

$$\Rightarrow \frac{19-2\lambda}{\sqrt{16+\lambda^2}} = \pm 5$$

$$\Rightarrow \left(\frac{19-2\lambda}{\sqrt{16+\lambda^2}}\right)^2 = 25$$

$$\Rightarrow 361 - 76\lambda + 4\lambda^2 = 400 + 25\lambda^2$$

$$\Rightarrow 21\lambda^2 + 76\lambda + 39 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{-76 \pm \sqrt{(76)^2 - 4.21.39}}{2.21} = \frac{-76 \pm \sqrt{5776-3276}}{42}$$

$$= \frac{-76 \pm \sqrt{2500}}{42} = \frac{-76 \pm 50}{42}$$

$$= \frac{-126}{42} \text{ বা, } \frac{-26}{42} = -3 \text{ বা, } -\frac{13}{21}$$

$\therefore$ λৰ নিৰ্ণেয় মান -3 বা, $-\frac{13}{21}$

৭নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$ বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ $(-a, 0)$ আৰু ইয়াৰ ব্যাসাৰ্ধ = $\sqrt{a^2-c}$; $x^2 + y^2 + 2by + c = 0$ বৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ $(0, -b)$ আৰু ইয়াৰ ব্যাসাৰ্ধ = $\sqrt{b^2-c}$. যিহেতু বৃত্ত দুটাই পৰস্পৰ স্পৰ্শ কৰে, বৃত্ত দুটাৰ কেন্দ্ৰৰ মাজৰ দূৰত্ব সিহঁতৰ ব্যাসাৰ্ধৰ যোগফল বা পাৰ্থক্যৰ সমান। গতিকে আমি পালোঁ,

$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2-c^2} \pm \sqrt{b^2-c^2}$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 = \left(\sqrt{a^2-c} \pm \sqrt{b^2-c}\right)^2$$

[মন কৰিবলগীয়া যে $(p \sim q)^2 = |p-q|^2 = (p-q)^2$]

$$\Rightarrow a^2+b^2 = (a^2-c)+(b^2-c) \pm 2\sqrt{(a^2-c)(b^2-c)}$$

$$\Rightarrow \pm 2\sqrt{(a^2-c)(b^2-c)} = 2c$$

$$\Rightarrow \pm \sqrt{(a^2-c)(b^2-c)} = c$$

$\Rightarrow (a^2 - c)(b^2 - c) = c^2$ (বৰ্গ কৰি)

$\Rightarrow a^2b^2 - a^2c - b^2c + c^2 = c^2$

$\Rightarrow c(a^2 + b^2) = a^2b^2$

$\Rightarrow \frac{b^2 + a^2}{a^2b^2} = \frac{1}{c}$

$\Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$

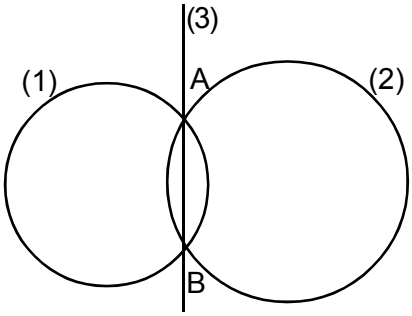
৮নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্ৰদত্ত বৃত্ত দুটা হ'ল,

$S \equiv x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$ ... ...(1)

আৰু $S' \equiv x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ ... ...(2)

সিহঁতৰ উমৈহতীয়া জ্যাৰ সমীকৰণ হ'ল, $S - S' = 0$

অৰ্থাৎ, $-2x - 1 = 0$, অৰ্থাৎ, $2x + 1 = 0$ ... ...(3)



চিত্ৰ ঃ ৪.১৩

চিত্ৰত (3) সমীকৰণে বুজোৱা উমৈহতীয়া জ্যাডাল হ'ল, AB. (1) আৰু (3) সমাধান কৰি আমি A আৰু Bৰ স্থানাংক পাম।

(3) $\Rightarrow x = -\frac{1}{2}$, (1)ত বহুৰাই আমি পাম,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + 2.\left(-\frac{1}{2}\right) + 3y + 1 = 0$$

$\Rightarrow y^2 + 3y + \frac{1}{4} = 0$

$\Rightarrow 4y^2 + 12y + 1 = 0$

$\Rightarrow y = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 16}}{2.4}$

$= \frac{-12 \pm \sqrt{128}}{8}$

$= \frac{-12 \pm 8\sqrt{2}}{8}$

$= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{2}$

$\therefore$ A আৰু Bৰ স্থানাংক হ'ল ক্ৰমে $\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$ আৰু $\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$

$\therefore$ গতিকে, নিৰ্ণেয় বৃত্তটোৰ (যাৰ ব্যাস হ'ল উমৈহতীয়া জ্যা AB) সমীকৰণ,

$$\left\{x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}\left\{x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}+\left\{y-\left(-\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)\right\}\left\{y-\left(-\frac{3}{2}-\sqrt{2}\right)\right\}=0$$

অৰ্থাৎ, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left\{\left(y+\frac{3}{2}\right)-\sqrt{2}\right\}\left\{\left(y+\frac{3}{2}\right)+\sqrt{2}\right\}=0$

অৰ্থাৎ, $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2=0$

অৰ্থাৎ, $x^2+x+\frac{1}{4}+y^2+3y+\frac{9}{4}-2=0$

অৰ্থাৎ, $x^2 + y^2 + x + 3y + \frac{1}{2} = 0$

অৰ্থাৎ, $2x^2 + 2y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$

৯নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ (1, 2) বিন্দুৰ পৰা $x^2 + y^2 – 4x + 2y = 0$ বৃত্তলৈ টনা স্পৰ্শক দুডালৰ সমীকৰণ হ'ল, $SS_1 = T^2$

য'ত, $S \equiv x^2 + y^2 – 4x + 2y$,

$S_1 \equiv S(1, 2) = 1^2 + 2^2 – 4.1 + 2.2 = 5$

$T \equiv x.1 + y.2 – 2(x+1) + 1(y+2)$

$= x + 2y – 2x – 2 + y + 2$

$= 3y – x.$

(1, 2) বিন্দুৰ পৰা টনা স্পৰ্শক দুডালৰ সমীকৰণ হ'ল,

$(x^2 + y^2 – 4x + 2y).5 = (3y – x)^2$

অৰ্থাৎ, $5x^2 + 5y^2 – 20x + 10y = 9y^2 – 6xy + x^2$

অৰ্থাৎ, $4x^2 + 6xy – 4y^2 – 20x + 10y = 0$

এযোৰ সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজোৱাএইটো এটা দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ সমীকৰণ, আৰু x^2 আৰু y^2ৰ সহগৰ যোগফল = 4 + (–4) = 0;

গতিকে (1, 2) বিন্দুৰ পৰা বৃত্তটোলৈ টনা সম্পৰ্শক দুডাল পৰস্পৰ লম্ব।

১০নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ আমি জানো যে $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ বৃত্ত সাপেক্ষে (x_1, y_1) বিন্দুৰ স্পৰ্শ জ্যাৰ সমীকৰণ হ'ল, $xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c = 0.$

গতিকে, $x^2 + y^2 – 3x + 12y + 6 = 0$ সমীকৰণৰ (4, 3) বিন্দু সাপেক্ষে স্পৰ্শ জ্যাৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$x.4 + y.3 - \frac{3}{2}(x+4) + \frac{12}{2}(y+3) + 6 = 0$$

অর্থাৎ, $8x + 6y - 3x - 12 + 12y + 36 + 12 = 0$

অর্থাৎ, $5x + 18y + 36 = 0$.



৪.১১ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ এটা বৃত্তৰ কেন্দ্ৰ (4, –6) আৰু ব্যাসাৰ্ধ 7। বৃত্তটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ২ ঃ $x^2 + y^2 + 4x - 6y = 0$ বৃত্তৰ কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ ঃ (1, 0), (–1, 0) আৰু (0, 1) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা বৃত্তৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ ঃ তলৰ বৃত্তকেইটাৰ নিৰ্দিষ্ট বিন্দুত স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

a) $x^2 + y^2 = 25$; (–3, –4)

b) $x^2 + y^2 - 2x - 10y + 1 = 0$; (–3, 2)

প্ৰশ্ন ৫ ঃ $x^2 + y^2 - 3x + 10y = 15$ বৃত্তৰ (4, –11) বিন্দুত টনা অভিলম্বৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৬ ঃ $x^2 + y^2 - 26x + 12y + 105 = 0$ বৃত্তৰ (7, 2) বিন্দুত টনা স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৭ ঃ $2x^2 + 2y^2 + 3x - 4y + 1 = 0$ বৃত্তৰ (–1, 2) বিন্দুত টনা স্পৰ্শক আৰু অভিলম্বৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৮ ঃ (7, –11) বিন্দুটো $x^2 + y^2 = 10x$ বৃত্তটোৰ ভিতৰত নে বাহিৰত আছে?

প্ৰশ্ন ৯ ঃ (0, 1) বিন্দুৰ পৰা $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ বৃত্তলৈ টনা স্পৰ্শকৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ১০ ঃ $x^2 + y^2 - 10x + y + 21 = 0$ বৃত্ত সাপেক্ষে (4, 1) বিন্দুৰ স্পৰ্শজ্যাৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

*** ***** ***

অধ্যায় ৫ ঃ শাংকৰ ছেদ

অধ্যায় গাঁথনি

৫.১ উদ্দেশ্য
৫.২ পৰিচয়
৫.৩ অধিবৃত্ত আৰু ইয়াৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ
৫.৪ উপবৃত্ত আৰু ইয়াৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ
৫.৫ পৰাবৃত্ত আৰু ইয়াৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ
৫.৬ দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ সাধাৰণ সমীকৰণ
৫.৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
৫.৮ অধিক জানিবলৈ
৫.৯ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান
৫.১০ আৰ্হি প্ৰশ্ন

৫.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

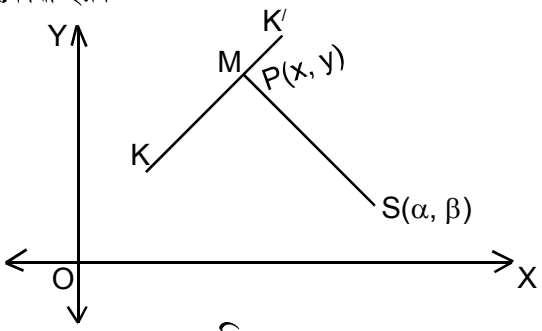
- অধিবৃত্ত আৰু ইয়াৰ সমীকৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- উপবৃত্ত আৰু ইয়াৰ সমীকৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- পৰাবৃত্ত আৰু ইয়াৰ সমীকৰণ
- দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ সাধাৰণ সমীকৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

৫.২ পৰিচয়

যদি এটা বিন্দুৰে সমতল এখনত এনেদৰে চলাচল কৰে যে সমতলখনৰ এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ পৰা ইয়াৰ দূৰত্ব আৰু সমতলখনৰ এডাল নিৰ্দিষ্ট ৰেখাৰ পৰা (নিৰ্দিষ্ট বিন্দুটোৰ মাজেৰে নোযোৱা) ইয়াৰ (লম্ব) দূৰত্বৰ অনুপাত সদায় এটা ধ্ৰুৱক হয়, তেনেহ'লে চলন্ত বিন্দুটোৰ কক্ষপথক এটা শাংকৰ ছেদ বা সংক্ষেপে শাংকৰ বুলি কোৱা হয়। নিৰ্দিষ্ট বিন্দুটোক নাভি (Focus), নিৰ্দিষ্ট ৰেখাডালক নিয়ামিকা (Directrix) আৰু ধ্ৰুৱক অনুপাতটোক উৎকেন্দ্ৰতা (Eccentricity) বুলি কোৱা হয়। উৎকেন্দ্ৰতাক সাধাৰণতে e আখৰটোৰে বুজোৱা হয়। e হ'ল দুটা দৈর্ঘ্যৰ অনুপাত। গতিকে e এটা ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা।

e = 1 হ'লে শাংকৰটোক অধিবৃত্ত (Parabola), e < 1 হ'লে উপবৃত্ত (Ellipse) আৰু e > 1 হ'লে পৰাবৃত্ত (Hyperbola) বুলি কোৱা হয়। এই বক্ৰবোৰক শাংকৰ ছেদ বুলি এইবাবেই কোৱা হয় যে ইহঁতক এটা দ্বিসম চক্ৰীয় শংকুৰ এখন সমতলৰ দ্বাৰা ছেদন হিচাপে

দেখুৱাব পাৰি। এনে শংকুৰ সমতল ছেদ বৃত্ত বা এযোৰ সৰলৰেখাও হ'ব পাৰে। এইবোৰক অপ্রকৃত শংকু বুলি কোৱা হয়।



চিত্র ঃ ৫.১

স্বেচ্ছভাৱে লোৱা এযোৰ আয়তীয় স্থানাংক অক্ষ সাপেক্ষে, নাভি Sৰ স্থানাংক (α, β) বুলি লোৱা হ'ল। ধৰা হ'ল, KK/ ৰেখাডাল : $Ax + By + C = 0$ নিয়ামিকা। ধৰা হ'ল, উৎকেন্দ্রতা e ধৰা হ'ল, শাংকৰটোত P(x, y) যিকোনো এটা বিন্দু। আৰু $PM \perp KK'$ শাংকৰৰ সংজ্ঞা অনুযায়ী, আমি পালোঁ,

$$\frac{PS}{PM} = e$$

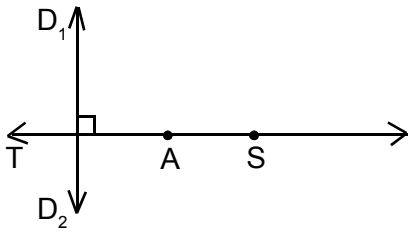
$$\Rightarrow PS^2 = e^2.PM^2$$

$$\Rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = e^2\left(\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2$$

যিহেতু শাংকৰটোত থকা প্রতিটো বিন্দু P(x, y)এ সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে, এইটোৱেই শাংকৰটোৰ সমীকৰণ। সৰল কৰাৰ পাছত সমীকৰণটোৰ আকাৰ $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ হ'বগৈ। এইটোৱেই x আৰু yৰ দ্বিতীয় মাত্রাৰ সাধাৰণ সমীকৰণ।

৫.৩ অধিবৃত্ত আৰু ইয়াৰ প্রামাণিক সমীকৰণ

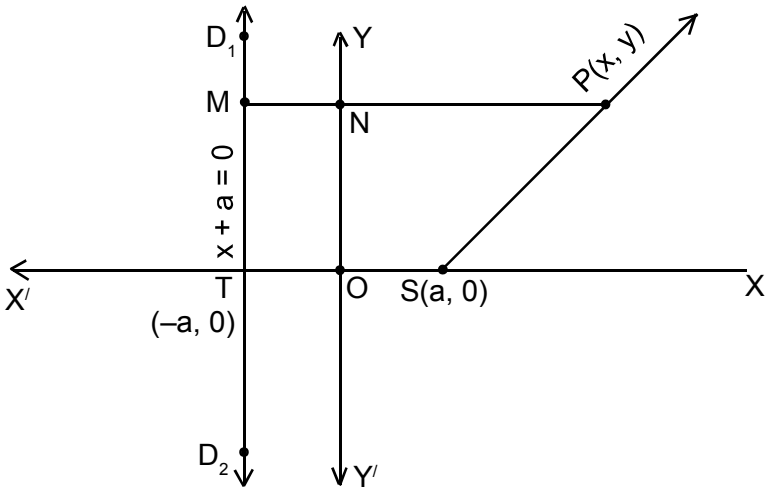
a) অধিবৃত্ত ঃ যিবোৰ শাংকৰৰ উৎকেন্দ্রতা 1, তেনে শাংকৰক অধিবৃত্ত বুলি কোৱা হয়। গতিকে অধিবৃত্ত হ'ল এনে এটা বিন্দুৰ কক্ষপথ যিটো বিন্দুৱে সমতল এখনত এনেদৰে চলাচল কৰে যে সমতলখনৰ এটা নির্দিষ্ট বিন্দুৰ পৰা (নাভি) ইয়াৰ দূৰত্ব, আৰু এডাল নির্দিষ্ট ৰেখাৰ পৰা (নিয়ামিকা) ইয়াৰ দূৰত্ব সমান।



চিত্র ঃ ৫.২

ধৰা হ'ল, অধিবৃত্তটোৰ S নাভি, আৰু D_1D_2 নিয়ামিকা। নাভি Sৰ মাজেৰে যোৱা নিয়ামিকা D_1D_2ৰ লম্বৰেখা ডালক অধিবৃত্তৰ অক্ষ (Axis) বুলি কোৱা হয়। ধৰা হ'ল, অক্ষডালে নিয়ামিকাক T বিন্দুত কাটে। গতিকে TS ৰেখাখণ্ডৰ A মধ্যবিন্দু হ'লে, AS = AT, অর্থাৎ, A বিন্দুটো নাভি আৰু নিয়ামিকাৰ পৰা সমদূৰৱৰ্তী। গতিকে A বিন্দুটো অধিবৃত্তটোত আছে। অধিবৃত্তটোৰ অক্ষত থকা এই বিশেষ বিন্দু Aক অধিবৃত্তটোৰ শীর্ষ বিন্দু (Vertex) বুলি কোৱা হয়।

b) অধিবৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ ঃ



চিত্ৰ ঃ ৫.৩

ধৰা হ'ল, এটা অধিবৃত্তৰ S নাভি আৰু D_1D_2 নিয়ামিকা। নিয়ামিকা D_1D_2ৰ ওপৰত ST লম্ব টনা হ'ল। ধৰা হ'ল, TSৰ মধ্যবিন্দু O। যিহেতু OS = OT, অধিবৃত্তটোত O থাকিব। সংজ্ঞা অনুযায়ী, TS ৰেখাডাল অধিবৃত্তটোৰ অক্ষ আৰু O শীর্ষবিন্দু।

Oক মূল বিন্দু হিচাপে লোৱা হ'ল, OS ৰেখাডালক x-অক্ষ হিচাপে লোৱা হ'ল আৰু চিত্ৰত দেখুওৱাৰ দৰে Oৰ মাজেৰে যোৱা OSৰ লম্বডালক y-অক্ষ হিচাপে লোৱা হ'ল। ধৰা হ'ল, OS = OT = a, a এটা ধনাত্মক ধ্ৰুৱক। গতিকে Sৰ স্থানাংক (a, 0), Tৰ স্থানাংক (–a, 0). T(–a, 0)ৰ মাজেৰে যোৱা y-অক্ষৰ সমান্তৰাল নিয়ামিকা D_1D_2ৰ সমীকৰণ হ'ল, x = –a, অর্থাৎ x + a = 0.

ধৰা হ'ল অধিবৃত্তটোত P(x, y) এটা বিন্দু আৰু নিয়ামিকা D_1D_2ৰ ওপৰত PM এডাল লম্ব। গতিকে, অধিবৃত্তৰ সংজ্ঞা অনুযায়ী PS = PM.

এতিয়া, PS = $\sqrt{(x-a)^2+y^2}$,

আৰু যদি PMএ y-অক্ষক N বিন্দুত কাটে, তেনেহ'লে,

PM = PN + NM = PN + OT = x + a.

গতিকে আমি পালোঁ, $\sqrt{(x-a)^2+y^2}$ = x + a,

উভয়পক্ষক বর্গ কৰি আমি পালোঁ,

$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$

অর্থাৎ, $y^2 = (x+a)^2 - (x-a)^2$

অর্থাৎ, $y^2 = 4ax$.

এইটোৱেই অধিবৃত্তটোৰ সমীকৰণ। ইয়াক অধিবৃত্তৰ প্রামাণিক সমীকৰণ বুলি কোৱা হয়।

মন্তব্য ঃ যথোপযুক্ত আয়তীৰ স্থানাংক অক্ষ লৈ অধিবৃত্তৰ সমীকৰণক সবাতোকৈ সৰল প্রামাাণিক সমীকৰণ $y^2 = 4ax$ত $(a > 0)$ প্রকাশ কৰিব পাৰি। এই সমীকৰণত শীর্ষ বিন্দুক মূল বিন্দু হিচাপে আৰু অধিবৃত্তৰ অক্ষক x-অক্ষ হিচাপে লোৱা হৈছে।

c) অধিবৃত্তৰ আকাৰ ঃ অধিবৃত্তৰ প্রামাণিক সমীকৰণ $y^2 = 4ax$ $(a > 0)$ বিবেচনা কৰিলে, তলৰ কথাবোৰ আমাৰ দৃষ্টি গোচৰ হয়।

i) বক্রটো মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যায়।

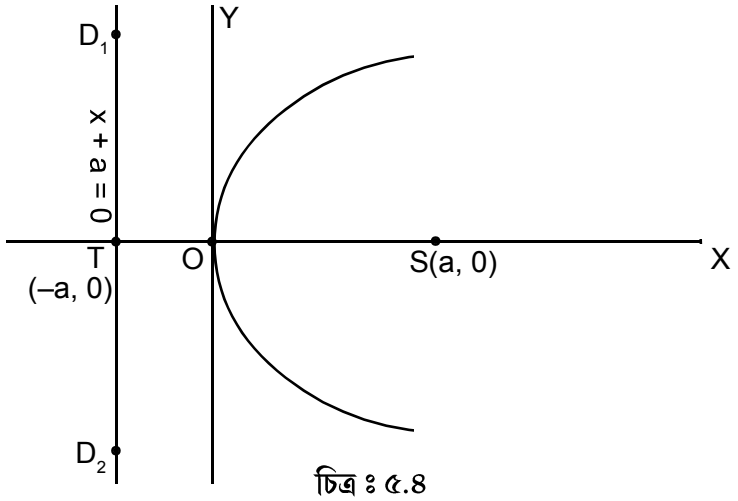
ii) যদি $x < 0$, yৰ অনুৰূপ মানবোৰ কাল্পনিক হয়। গতিকে বক্রটোৰ কোনো অংশই y-অক্ষৰ বাঁওপিনে থাকিব নোৱাৰে।

iii) প্রত্যেক $x > 0$ৰ বাবে, yৰ দুটা সাংখ্যিকভাৱে সমান, কিন্তু বিপৰীত চিনৰ মান আছে, $y = \pm 2\sqrt{ax}$. গতিকে বক্রটো অক্ষ সাপেক্ষে প্রতিসম।

iv) $x = 0$ৰ বাবে $y^2 = 0 \Rightarrow y = 0, 0$. গতিকে y-অক্ষই $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তক মূল বিন্দুত মিলি যোৱা দুটা বিন্দুত মিলে, অর্থাৎ y-অক্ষডাল $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তৰ মূল বিন্দুত এডাল স্পর্শক।

v) যদি x বাঢ়ে, $y = \pm 2\sqrt{ax}$ সাংখ্যিকভাৱে বাঢ়ে আৰু $x \to \infty$ হ'লে, $|y| \to \infty$ গতিকে অধিবৃত্তটো বন্ধ বক্র নহয় আৰু ই y-অক্ষৰ সোঁহাতে, x-অক্ষৰ উপৰ আৰু তলপিনে অসমীলৈ বিস্তৃত হয়।

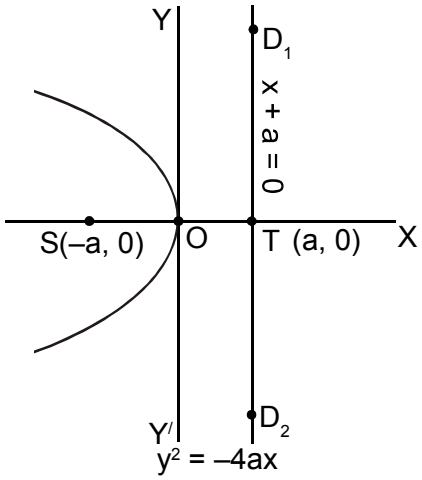
উপৰিউক্ত কথাবোৰ বিবেচনা কৰি $y^2 = 4ax$ $(a > 0)$ অধিবৃত্তটো অংকন কৰি তলৰ আকৃতিটো পোৱা যাব,



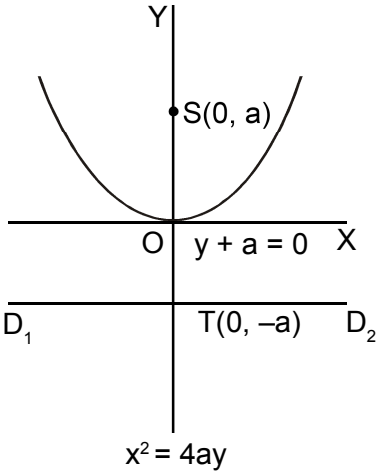
চিত্র ঃ ৫.৪

এই অধিবৃত্তটো সোঁপিনে মুক্ত।

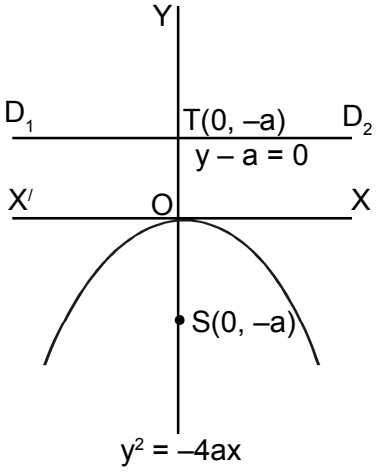
d) $y^2 = -4ax$, $x^2 = 4ay$ আৰু $x^2 = -4ay$, $(a > 0)$এ বুজোৱা অধিবৃত্ত ঃ $y^2 = -4ax$, $(a > 0)$ সমীকৰণে এটা অধিবৃত্ত বুজায়। ইয়াৰ শীৰ্ষ বিন্দু হ'ল মূল বিন্দু, নাভি $(-a, 0)$, আৰু নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ $x - a = 0$. ইয়াৰ অক্ষ হ'ল x-অক্ষ আৰু ই বাঁওপিনে মুক্ত। $x^2 = 4ay$ $(a > 0)$ সমীকৰণে এটা অধিবৃত্ত বুজায়। ইয়াৰ শীৰ্ষ বিন্দু হ'ল মূল বিন্দু, নাভি $(0, a)$, নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ $y + a = 0$; ই ওপৰৰ পিনে মুক্ত। আকৌ $x^2 = -4ay$, $(a > 0)$, সমীকৰণে এটা অধিবৃত্ত বুজায়। ইয়াৰ শীৰ্ষ বিন্দু হ'ল মূল বিন্দু, নাভি $(0, -a)$ নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ হ'ল $y - a = 0$. উভয় ক্ষেত্ৰতে অধিবৃত্তটোৰ অক্ষ হ'ল y-অক্ষ। $x^2 = 4ay$ অধিবৃত্তটো ওপৰৰ পিনে মুক্ত, $x^2 = -4ay$ অধিবৃত্তটো তলৰ পিনে মুক্ত। এই অধিবৃত্তকেইটা তলত দেখুওৱা হ'ল,



চিত্ৰ ঃ ৫.৫



চিত্ৰ ঃ ৫.৬



চিত্ৰ ঃ ৫.৭

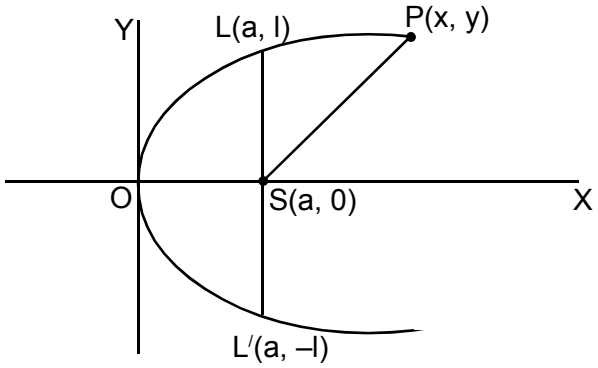
e) নাভি দূৰত্ব, নাভি জ্যা আৰু নাভি লম্ব ঃ অধিবৃত্তৰ ওপৰত থকা কোনো বিন্দুৰ নাভিৰ পৰা দূৰত্বক বিন্দুটোৰ নাভি দূৰত্ব (Focal Distance) বোলে।

নাভিৰ মাজেৰে যোৱা অধিবৃত্তৰ যিকোনো জ্যাক নাভি জ্যা (Focal Chord) বোলে। অধিবৃত্তটোৰ যিডাল নাভি জ্যা অক্ষৰ ওপৰত লম্ব, তাক অধিবৃত্তটোৰ নাভি লম্ব (Latus Rectum) বোলে। আন কথাত, নাভিৰ মাজেৰে যোৱা যিডাল জ্যা নিয়ামিকাৰ সমান্তৰাল (অৰ্থাৎ অক্ষৰ ওপৰত লম্ব), তাক অধিবৃত্তটোৰ নাভি লম্ব (Latus Rectum) বোলে। $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তটো লোৱা হ'ল। চিত্ৰত S অধিবৃত্তটোৰ নাভি আৰু LSL' ইয়াৰ নাভি লম্ব। যিহেতু অধিবৃত্তটো x-অক্ষ সাপেক্ষে প্ৰতিসম, SL আৰু SL'ৰ দৈৰ্ঘ্য সমান। ধৰা হ'ল দৈৰ্ঘ্য = l. গতিকে L আৰু L' বিন্দুৰ স্থানাংক ক্ৰমে (a, l) আৰু $(a, -l)$. যিহেতু $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তত L (a, l) এটা বিন্দু।

গতিকে, $l^2 = 4a.a = 4a^2$

$\Rightarrow l = 2a.$

$\therefore$ নাভি লম্বৰ দৈৰ্ঘ্য $LSL' = 2SL = 2l = 4a.$



চিত্ৰ ঃ ৫.৮

নাভি লম্বৰ মূৰ বিন্দু দুটা হ'ল L(a, 2a) আৰু L′ (a, –2a).

নাভি লম্বডাল y-অক্ষৰ সমান্তৰাল আৰু ই S(a,o) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়। গতিকে ইয়াৰ সমীকৰণ হ'ল x = a.

যদি অধিবৃত্তটোত P(x, y) যিকোনো বিন্দু হয়, তেনেহ'লে P বিন্দুৰ নাভি দূৰত্ব,

= PS = $\sqrt{(x-a)^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x-a)^2+y^2}$

= $\sqrt{(x-a)^2+4ax} = \sqrt{(x+a)^2}$ = x + a.

এইটো সহজে দেখুৱাব পাৰি যে $y^2 = -4ax$, $x^2 = 4ay$ আৰু $x^2 = -4ay$ (a > 0)

প্ৰতিটো অধিবৃত্তৰ নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য 4a.

৫.৩ত পোৱা মূল সিদ্ধান্তকেইটা তলত থূলমূলকৈ দিয়া হ'ল (a > 0).

অধিবৃত্তৰ সমীকৰণ	নাভি	শীর্ষ বিন্দু	নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ	অক্ষৰ সমীকৰণ	নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য	নাভিলম্বৰ সমীকৰণ
$y^2 = 4ax$	(a, 0)	(0, 0)	x+a = 0	y=0 (x-অক্ষৰ)	4a	x–a = 0
$y^2 = -4ax$	(–a, 0)	(0, 0)	x–a = 0	y = 0 (x-অক্ষৰ)	4a	x+a = 0
$y^2 = 4ay$	(0, a)	(0, 0)	y+a = 0	x = 0 (y-অক্ষৰ)	4a	y–a = 0
$x^2 = -4ay$	(0, –a)	(0, 0)	y–a = 0	x = 0 (y-অক্ষৰ)	4a	y+a = 0

উদাহৰণ ১ ঃ তলৰ অধিবৃত্ত দুটাৰ শীর্ষ বিন্দু, নাভি, নিয়ামিকা আৰু নাভি লম্বৰ দৈর্ঘ্য নির্ণয় কৰক।

(i) $y^2 = 10x$, (ii) $5x^2 + 24y = 0$

সমাধান ঃ

i) অধিবৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ল $y^2 = 10x$ ই $y^2 = 4ax$ আকাৰৰ। ইয়াত $4a = 10$ অর্থাৎ, $a = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$. শীর্ষ বিন্দু (0, 0), নাভি (a, 0) অর্থাৎ, $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ $x + a = 0$, অর্থাৎ, $x + \frac{5}{2} = 0$, আৰু নাভি লম্বৰ দৈর্ঘ্য $= 4a = 4 \times \frac{5}{2} = 10$.

ii) অধিবৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ল $5x^2 + 24y = 0$, অর্থাৎ $5x^2 = -24y$, অর্থাৎ, $x^2 = -\frac{24}{5}y$. ই $x^2 = -4ay$ আকাৰৰ। ইয়াত $4a = \frac{24}{5}$ অর্থাৎ, $a = \frac{6}{5}$.

শীর্ষ বিন্দু (0, 0), নাভি (0, –a), অর্থাৎ $\left(0, -\frac{6}{5}\right)$, নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ হ'ল $y–a = 0$ অর্থাৎ, $y - \frac{6}{5} = 0$ অর্থাৎ, $5y – 6 = 0$, আৰু নাভি লম্বৰ দৈর্ঘ্য $= 4a = \frac{24}{5}$.

উদাহৰণ ২ ঃ দেখুওৱাক যে $4y^2 – 20x – 8y + 39 = 0$ সমীকৰণে অধিবৃত্তৰ সমীকৰণ বুজায়। ইয়াৰ শীর্ষ বিন্দু, নাভি, অক্ষ আৰু নাভি লম্ব নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $4y^2 – 20x –8 y + 39 = 0$

$\Rightarrow 4y^2 –8y = 20x – 39$

$\Rightarrow y^2 – 2y = 5x – \frac{39}{4}$

$\Rightarrow y^2 – 2y + 1 = 5x + 1 – \frac{39}{4} = 5x – \frac{35}{4}$

$\Rightarrow (y – 1)^2 = 5\left(x – \frac{7}{4}\right)$

$\left(\frac{7}{4}, 1\right)$ বিন্দুলৈ মূল বিন্দুটো স্থানান্তৰ কৰিলে, সমীকৰণটো হ'বগৈ $Y^2 = 5X$ ইয়ে এটা অধিবৃত্তৰ সমীকৰণ বুজায়। গতিকে প্রদত্ত সমীকৰণ $4y^2 – 20x – 8y + 39 = 0$এ এটা অধিবৃত্ত বুজায়।

নতুন মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা সমান্তৰাল অক্ষ অনুযায়ী অধিবৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ল $Y^2 = 5X$ আৰু ইয়াৰ শীর্ষ বিন্দু (0, 0), নাভি $\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ ($\because 4a = 5$) আৰু অক্ষ হ'ল $Y = 0$ (নতুন x-অক্ষ)। গতিকে মূল অক্ষ অনুযায়ী, শীর্ষ বিন্দু হ'ব $\left(\frac{7}{4}, 1\right)$, নাভি হ'ব (3, 1). $\left(\because x = X + \frac{7}{4},\ y = Y + 1\right)$, আৰু অক্ষৰ সমীকৰণ $y = 1$.

অধিবৃত্তটোৰ নাভি লম্বৰ দৈর্ঘ্য $= 4a = 5$.

টোকা ঃ $y^2 + ax + by + c = 0$ আৰু $x^2 + ax + by + c = 0$ আকাৰৰ সমীকৰণৰ ক্ষেত্রত এই উপায়টো প্রয়োগ কৰিব পাৰি।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ তলৰ প্রতিটো অধিবৃত্তৰ নাভি আৰু শীর্ষ বিন্দুৰ স্থানাংক, নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ, অক্ষৰ সমীকৰণ আৰু নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য নির্ণয় কৰক।

i) $3y^2 = 8x$ ii) $y^2 = -8x$ iii) $x^2 = 10y$

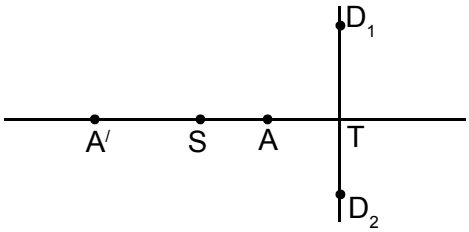
iv) $x^2 = -8y$ v) $x^2 - 6x + 4y + 1 = 0$

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা অধিবৃত্তৰ নাভি (4, 0) আৰু নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ $x = -4$. অধিবৃত্তটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ এটা অধিবৃত্তৰ শীর্ষ বিন্দুটো হ'ল মূল বিন্দু, y-অক্ষৰ ধনাত্মক পক্ষত নাভিটো আছে আৰু নাভি লম্বৰ দৈর্ঘ্য 20। অধিবৃত্তটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

৫.৪ উপবৃত্ত আৰু ইয়াৰ প্রামাণিক সমীকৰণ

a) উপবৃত্ত ঃ যিবোৰ শাংকৰৰ উৎকেন্দ্রতা 1তকৈ সৰু, তেনেবোৰ শাংকৰেই উপবৃত্ত। গতিকে উপবৃত্ত হ'ল এনে এটা বিন্দুৰ কক্ষপথ যিটো বিন্দুৰে সমতল এখনত এনেদৰে চলাচল কৰে যে সমতলখনৰ এটা নির্দিষ্ট বিন্দুৰ পৰা ইয়াৰ দূৰত্ব আৰু এডাল নির্দিষ্ট ৰেখাৰ পৰা ইয়াৰ দূৰত্বৰ অনুপাত $e < 1$ নির্দিষ্ট বিন্দুটোক নাভি, নির্দিষ্ট ৰেখাডালক নিয়ামিকা আৰু নির্দিষ্ট অনুপাত eক $e < 1$ উপবৃত্তৰ উৎকেন্দ্রতা বুলি কয়।



চিত্র ঃ ৫.৯

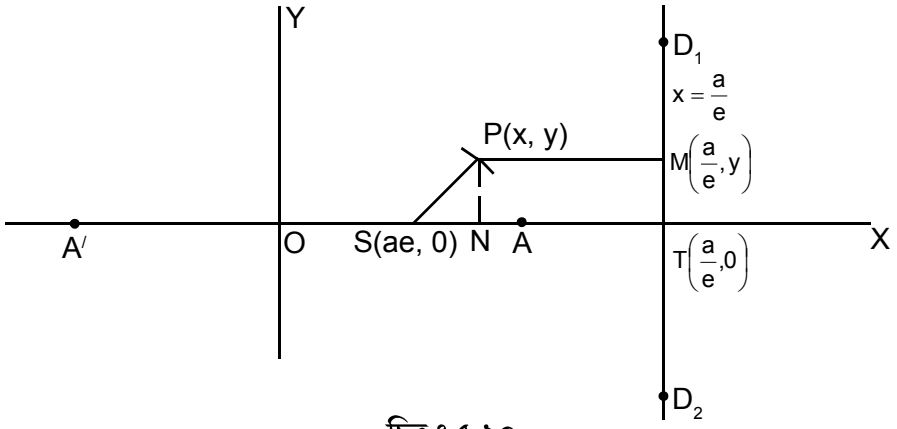
ধৰা হ'ল, উপবৃত্তটোৰ S নাভি, D_1D_2 নিয়ামিকা আৰু $e(< 1)$ উৎকেন্দ্রতা। ধৰা হ'ল, Sৰ পৰা D_1D_2ত টনা লম্বডালে ইয়াক T বিন্দুত কাটে। S আৰু Tৰ মাজত STত আমি এটা বিন্দু A উলিয়াব লাগে, যাতে AS : AT = e : 1. স্পষ্টতঃ A বিন্দুটো উপবৃত্তটোত আছে। আকৌ $AS = e.\ AT < AT$, যিহেতু $e < 1$.

যিহেতু $e < 1$, বর্ধিত TSত আন এটা বিন্দু A/ আছে যাতে A/S : A/T = e : 1 সেয়ে A/ বিন্দুটোৱো উপবৃত্তটোত থাকিব।

গতিকে দেখা গ'ল যে উপবৃত্তটোৰ নাভিৰ মাজেৰে নিয়ামিকালৈ টনা লম্বডালত দুটা বিন্দু আছে যিয়ে নাভি আৰু নিয়ামিকাৰ মাজৰ অংশক একে অনুপাত e : 1ত অন্তঃবিভক্ত

আৰু বৰ্হিবিভক্ত কৰে। উপবৃত্তটোৰ এই দুটা বিশেষ বিন্দুক শীৰ্ষবিন্দু (Vertices) বুলি কোৱা হয় আৰু বিন্দু দুটা সংযোগী ৰেখাখণ্ডক উপবৃত্তটোৰ মুখ্য অক্ষ (Major Axis) বুলি কোৱা হয়।

b) উপবৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ ঃ



চিত্ৰ ঃ ৫.১০

ধৰা হ'ল, উপবৃত্তটোৰ S নাভি, D_1D_2 নিয়ামিকা আৰু e(< 1) উৎকেন্দ্ৰতা। ধৰা হ'ল, Sৰ মাজেৰে D_1D_2ৰ ওপৰত টনা লম্বডালে ইয়াক T বিন্দুত কাটে। তেতিয়া এই ৰেখাডালত A আৰু A′ দুটা বিন্দু আছে, যিয়ে ST ৰেখাখণ্ডক একে অনুপাত e : 1ত অন্তঃবিভক্ত আৰু বৰ্হিবিভক্ত কৰে। যিহেতু A′S / A′T = e, A আৰু A′ উপবৃত্তটোৰ ওপৰত দুটা বিন্দু। ধৰা হ'ল, A′Aৰ মধ্য বিন্দু O, আৰু ধৰা হ'ল, A′O = OA = a. গতিকে A′A = 2a.

এতিয়া, AS + A′S = e(AT + A′T)

$\Rightarrow$ A′A = e(OT – OA + A′O + OT)

$\Rightarrow$ 2a = e(OT – a + a + OT) = e.20T

$\Rightarrow OT = \frac{a}{e}$

আৰু A′S – AS = e(A′T– AT)

$\Rightarrow$ (A′O + OS) – (OA – OS) = e.A′A

$\Rightarrow$ 20S = e.2a $\Rightarrow$ OS = ae.

গতিকে, OS = ae আৰু $OT = \frac{a}{e}$

ওপৰৰ চিত্ৰত দেখুওৱাৰ দৰে Oক মূল বিন্দু, OAক x-অক্ষ আৰু Oৰ মাজেৰে টনা AA′ৰ লম্বক y-অক্ষ (অৰ্থাৎ, নিয়ামিকা D_1D_2ৰ সমান্তৰাল) হিচাপে লোৱা হ'ল। গতিকে নাভি Sৰ স্থানাংক (ae, o) আৰু নিয়ামিকা D_1D_2ৰ সমীকৰণ $x = \frac{a}{e}$। নিয়ামিকাডাল y-অক্ষৰ সমান্তৰাল আৰু ই $T\left(\frac{a}{e}, 0\right)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যায়।

ধৰা হ'ল, উপবৃত্তটোত P(x, y) যিকোনো বিন্দু। PS সংযোগ কৰা হ'ল। নিয়ামিকা D_1D_2ৰ ওপৰত PM লম্ব টনা হ'ল,আৰু x-অক্ষৰ ওপৰত PN লম্ব টনা হ'ল। তেনেহ'লে,

$TM = NP = y$

গতিকে, M বিন্দুৰ স্থানাংক $\left(\frac{a}{e}, y\right)$.

এতিয়া উপবৃত্তৰ সংজ্ঞা অনুযায়ী,

$$\frac{PS}{PM} = e$$

$\Rightarrow PS^2 = e^2 \cdot PM^2$

$$\Rightarrow (x-ae)^2 + y^2 = e^2\left[\left(\frac{a}{e}-x\right)^2 + (y-y)^2\right]$$

$\Rightarrow x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = a^2 - 2aex + e^2x^2$

$\Rightarrow (1 - e^2)x^2 + y^2 = a^2(1-e^2)$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$$

যিহেতু $0 < e < 1$, $a^2(1-e^2)$ এটা ধনাত্মক ধ্ৰুৱক। ইয়াক b^2ৰে বুজোৱা হ'ল, bক ধনাত্মক হিচাপে লোৱা হৈছে। গতিকে ওপৰৰ সম্বন্ধটো হ'বগৈ, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

এইটোৱেই উপবৃত্তটোৰ নির্ণেয় সমীকৰণ। এইটোৱেই প্ৰামাণিক সমীকৰণ।

মন কৰিবলগীয়া যে $b^2 = a^2(1-e^2) < a^2$, অর্থাৎ, $0 < b < a$

c) উপবৃত্তৰ আকাৰ, দ্বিতীয় নাভি আৰু দ্বিতীয় নিয়ামিকাৰ অস্তিত্ব ঃ উপবৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণটো লোৱা হ'ল, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$.

আমি তলৰ কথাকেইটালৈ মন কৰোঁ,

i) যদি (x, y) বিন্দুটো বক্ৰটোত থাকে, তেনেহ'লে (–x, y), (x, –y) আৰু (–x, –y) বিন্দুকেইটাও বক্ৰটোত থাকিব। গতিকে বক্ৰটো অক্ষদ্বয় সাপেক্ষে আৰু মূল বিন্দু সাপেক্ষে প্ৰতিসম।

ii) বক্ৰটোৱে x-অক্ষক A(a, o) আৰু A′(–a, o) বিন্দুত আৰু y-অক্ষক B(o, b) আৰু B′(0 – b) বিন্দুত মিলে।

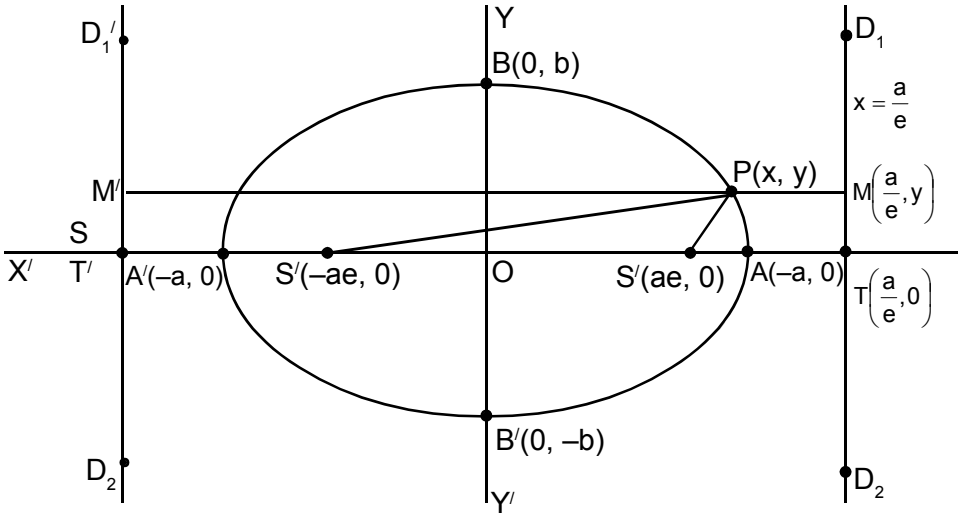
iii) উপবৃত্তৰ সমীকৰণৰ পৰা আমি পালোঁ,

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$$

স্পষ্টতঃ y বাস্তৱ যদি আৰু যদিহে $-a \le x \le a$, আৰু x বাস্তৱ যদি আৰু যদিহে $-b \le y \le b$. গতিকে বক্ৰটো এটা বন্ধ বক্ৰ আৰু ই সম্পূৰ্ণৰূপে $x = -a$, $x = a$, $y = b$, $y = -b$ ৰেখাৰ দ্বাৰা গঠিত আয়ত ক্ষেত্ৰৰ ভিতৰত থাকে।

$x = a$ আৰু $x = -a$ ৰেখা দুডাল ক্ৰমে A(a, 0) আৰু A′(–a, 0) বিন্দুত বক্ৰটোৰ স্পৰ্শক, আৰু এই স্পৰ্শক দুডাল y-অক্ষৰ সমান্তৰাল। আকৌ $y = b$ আৰু $y = -b$ ৰেখা দুডাল ক্ৰমে B(0, b) আৰু B′(0, –b) বিন্দুত বক্ৰটোৰ স্পৰ্শক, আৰু এই স্পৰ্শক দুডাল x-অক্ষৰ সমান্তৰাল।

ওপৰৰ কথাবোৰ বিবেচনা কৰি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b > 0)$ বক্ৰটোৰ আকাৰ এনেদৰে পোৱা গ'ল,



চিত্ৰ ঃ ৫.১১

A আৰু A′ বিন্দু দুটাৰ উপবৃত্তটোৰ শীৰ্ষবিন্দু বুলি কোৱা হয়। AA′ ৰেখাখণ্ড ডালক মুখ্য অক্ষ (Major Axis) আৰু BB′ ৰেখাখণ্ডডালক গৌণ অক্ষ (Minor Axis) বুলি কোৱা হয়। সিহঁতৰ ছেদ বিন্দু স্থানাংক O ক উপবৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ (Centre) বুলি কোৱা হয়। উপবৃত্তটোৰ প্ৰতি ডাল অক্ষৰে ই মধ্য বিন্দু।ইয়াৰ মাজেৰে যোৱা প্ৰতিডাল জ্যাক ই সমদ্বিখণ্ডিত কৰে। ওপৰৰ উপবৃত্তটোৰ মুখ্য অক্ষৰ দৈৰ্ঘ্য হ'ল 2a আৰু গৌণ অক্ষৰ দৈৰ্ঘ্য 2b.

x-অক্ষৰ ঋণাত্মক ফালত S′ আৰু T′ বিন্দু দুটা এনেদৰে লোৱা হ'ল, যাতে OS′ = OS আৰু OT′ = OT; গতিকে S′ আৰু T′ৰ স্থানাংক ক্ৰমে (–ae, o) আৰু $\left(-\frac{a}{e}, 0\right)$. T′ৰ মাজেৰে x-অক্ষৰ লম্ব হোৱাকৈ $D_1'D_2'$ ৰেখা টনা হ'ল। গতিকে $D_1'D_2'$ ৰেখাডালৰ সমীকৰণ $x = -\frac{a}{e}$. ধৰা হ'ল, উপবৃত্তটোত P(x, y) যিকোনো এটা বিন্দু, উপবৃত্তটোৰ

নাভি S(ae, o) আৰু নিয়ামিকা D_1D_2. P বিন্দুৰ মাজেৰে x-অক্ষৰ অর্থাৎ মুখ্য অক্ষৰ সমান্তৰালকৈ এডাল ৰেখা টনা হ'ল। ই D_1D_2 ক M বিন্দুত আৰু $D_1'D_2'$ অক M′ বিন্দুত কাটে। স্পষ্টতঃ M, M′ আৰু P বিন্দুৰ কোটি y. গতিকে M আৰু M′ বিন্দুৰ স্থানাংক ক্ৰমে $\left(\frac{a}{e}, y\right)$ আৰু $\left(-\frac{a}{e}, y\right)$ উপবৃত্তৰ সংজ্ঞাৰ পৰা আমি পালোঁ,

$$\frac{PS}{PM} = e$$

$\Rightarrow PS^2 = e^2.PM^2$

$$\Rightarrow (x-ae)^2 + (y-o)^2 = e^2\left[\left(x-\frac{a}{e}\right)^2 + (y-y)^2\right]$$

$\Rightarrow (x-ae)^2 + y^2 = (ex-a)^2$

$\Rightarrow (x+ae)^2 - 4aex + y^2 = (ex+a)^2 - 4aex$

$$\Rightarrow (x+ae)^2 + y^2 = (ex+a)^2 = e^2\left(x+\frac{a}{e}\right)^2$$

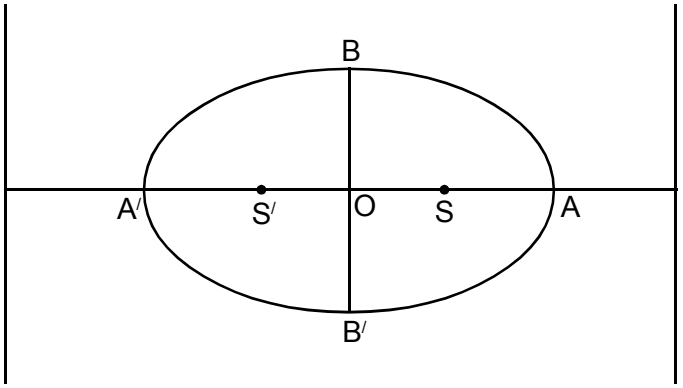
$$\Rightarrow (x+ae)^2 + (y-o)^2 = e^2\left[\left(x+\frac{a}{e}\right)^2 + (y-y)^2\right]$$

$\Rightarrow PS'^2 = e^2.\ PM'^2$

$$\Rightarrow \frac{PS'}{PM'} = e$$

গতিকে P বিন্দুৰে একেটা উপবৃত্তই গঠন কৰিব যদি S′(–ae, 0) বিন্দুক নাভি হিচাপে লোৱা হয় আৰু $D_1'D_2'$ ৰেখাডালক অর্থাৎ, $x = \frac{a}{e}$ ৰেখাডালক নিয়ামিকা হিচাপে লোৱা হয়। গতিকে উপবৃত্তটোৰ এটা দ্বিতীয় নাভি S′(–ae, 0) আৰু দ্বিতীয় নিয়ামিকা $D_1'D_2'$ আছে। এই দ্বিতীয় নিয়ামিকা ডালৰ সমীকৰণ $x = -\frac{a}{e}$.

মন কৰিবলগীয়াঃ উপবৃত্তটোৰ প্ৰামাণিক ৰূপ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ বিবেচনা কৰি আমি শীৰ্ষ বিন্দু, মুখ্য অক্ষ, গৌণ অক্ষ আৰু উপবৃত্তৰ কেন্দ্ৰৰ ধাৰণাৰ অৱতাৰণা কৰিছোঁ। সুবিধাৰ বাবে এইটো কৰা হৈছে। কোনো বিশেষ স্থানাংক প্ৰণালীৰ লগত ইয়াৰ সম্পৰ্ক নাই। যিকোনো স্থানাংক প্ৰণালী সাপেক্ষে আমি এইটো সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰিব পাৰোঁ। তলত তাকেই দেখুওৱা হৈছে।



চিত্র ঃ ৫.১২

i) নাভিদ্বয় S আৰু S′ৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাডাল উপবৃত্তটোৰ দুয়োডাল নিয়ামিকাৰ ওপৰত লম্ব আৰু ই উপবৃত্তটোক দুটা বিন্দুত কাটে। ধৰা হ'ল, বিন্দু দুটা A আৰু A′.A′A ৰেখাখণ্ডডালক উপবৃত্তটোৰ মুখ্য অক্ষ (Major Axis) বুলি কয়। মুখ্য অক্ষৰ মূল বিন্দু দুটাক উপবৃত্তটোৰ শীৰ্ষ বিন্দু বুলি কোৱা হয়।

ii) মুখ্য অক্ষৰ মধ্য বিন্দু Oৰ মাজেৰে যোৱা মুখ্য অক্ষৰ লম্বডালে উপবৃত্তটোক দুটা বিন্দুত কাটে। ধৰা হ'ল, বিন্দু দুটা B আৰু B′. B′B ৰেখাখণ্ড ডালক উপবৃত্তটোৰ গৌণ অক্ষ (Minor Axis) বোলে। BB′ অৰ মধ্য বিন্দুও O.

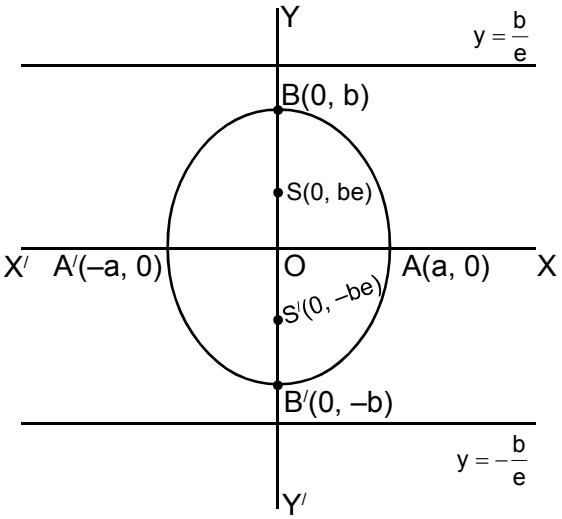
iii) মুখ্য অক্ষ আৰু গৌণ অক্ষৰ কটাকটি কৰা বিন্দু Oক উপবৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ (Centre) বুলি কয়। ই মুখ্য অক্ষৰো মধ্য বিন্দু, গৌণ অক্ষৰো মধ্য বিন্দু। কেন্দ্ৰৰ মাজেৰে যোৱা উপবৃত্তটোৰ জ্যা সেই বিন্দুত সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

মন কৰিবলগীয়া যে প্ৰামাণিক ৰূপৰ উপবৃত্তৰ সমীকৰণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(a > b > 0)$ৰ ক্ষেত্ৰত মূল বিন্দুক কেন্দ্ৰৰূপে লোৱা হয়। মুখ্য অক্ষৰ ৰেখাত x-অক্ষ, আৰু গৌণ অক্ষৰ ৰেখাত y-অক্ষ লোৱা হয়। মুখ্য অক্ষৰ দৈর্ঘ্য 2a আৰু গৌণ অক্ষৰ দৈর্ঘ্য 2b. a হ'ল উপ মুখ্য অক্ষৰ দৈর্ঘ্য, আৰু b হ'ল উপ গৌণ অক্ষৰ দৈর্ঘ্য। উৎকেন্দ্ৰতা e, আৰু a, b, eৰ মাজৰ সম্বন্ধটো হ'ল $b^2 = a^2(1 – e^2)$.

ইয়াৰ পৰা $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{c}{a}$, 2c হ'ল নাভিদ্বয়ৰ মাজৰ দূৰত্ব।

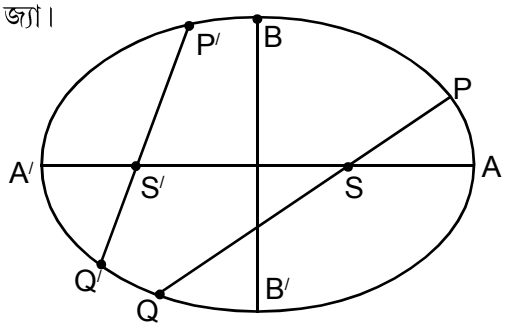
চিত্ৰ ৫.১৩ত দেখুওৱাৰ দৰে দেখুৱাব পাৰি যে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ য'ত $b > a > 0$ সমীকৰণে এটা উপবৃত্তৰ সমীকৰণ বুজায়। ইয়াৰ শীৰ্ষ বিন্দু হ'ল B(0, b) আৰু B′(0, –b), নাভিদ্বয় S(0, be) আৰু S′(0, –be), মুখ্য অক্ষ BB′ = 2b হ'ল y-অক্ষত, গৌণ অক্ষ AA′ = 2a হ'ল x-অক্ষত, আৰু কেন্দ্ৰ হ'ল মূল বিন্দু। উপবৃত্তটোৰ উৎকেন্দ্ৰতা e, উপ মুখ্য অক্ষ a আৰু উপ গৌণ অক্ষ bৰ মাজৰ সম্বন্ধটো হ'ল $a^2 = b^2 (1 – e^2)$.

ইয়াৰ পৰা $e=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}=\frac{c}{b}$, 2c হ'ল নাভিদ্বয়ৰ মাজৰ দূৰত্ব।



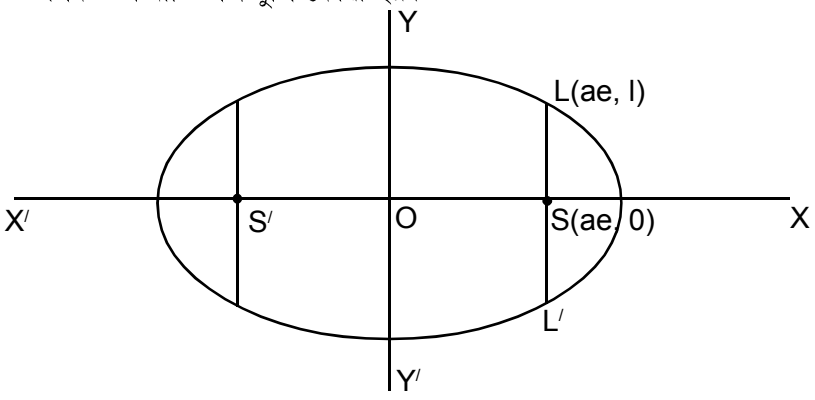
চিত্র ঃ ৫.১৩

d) নাভি জ্যা আৰু নাভিলম্ব ঃ উপবৃত্তৰ যি জ্যা এটা নাভিৰ মাজেৰে যায়, তেনে জ্যাক **নাভি জ্যা** (Focal Chord) বোলে। তলৰ চিত্রত PSQ আৰু P′ S′ Q′ উপবৃত্তটোৰ দুডাল নাভি জ্যা।



চিত্র ঃ ৫.১৪

মুখ্য অক্ষৰ লম্ব হোৱা নাভি জ্যাক **নাভি লম্ব (Latus Rectum)** বুলি কোৱা হয়। স্পষ্টতঃ উপবৃত্তটোৰ নাভি দুটাৰ মাজেৰে দুডাল নাভি লম্ব আছে আৰু দুয়োডালৰে দৈর্ঘ্য সমান। প্রতিডাল নাভি লম্বই অনুৰূপ নাভিত সমদ্বিখণ্ডিত হয় আৰু প্রতিটো ভাগক উপ নাভি লম্ব বুলি কোৱা হয়।



চিত্র ঃ ৫.১৫

তলৰ উপবৃত্তটো লোৱা হ'ল $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b>0$. ধৰা হ'ল LSL′ নাভিলম্ব, S(ae, o) নাভি আৰু SL = l. এতিয়া L(ae, l) বিন্দুটো উপবৃত্তটোত আছে। গতিকে,

$$\frac{(ae)^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow \frac{l^2}{b^2}=1-e^2=\frac{1}{a^2}.a^2\left(1-e^2\right)=\frac{b^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow l^2=\frac{b^4}{a^2}.$$

$$\Rightarrow l=\frac{b^2}{a}$$

উপ নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য = $l=\frac{b^2}{a}$ আৰু নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য = $2l=\frac{2b^2}{a}$

নাভিলম্ব দুডালৰ সমীকৰণ, x = ±ae

সেইদৰে $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (b > a > 0), উপবৃত্তৰ ক্ষেত্রত মুখ্য অক্ষডাল y-অক্ষত আছে আৰু ইয়াৰ দৈর্ঘ্য 2b, উপ নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য $\frac{a^2}{b}$, নাভিলম্বৰদৈর্ঘ্য $\frac{2a^2}{b}$ আৰু নাভিলম্বৰ সমীকৰণ y = ±be.

সাৰাংশ ঃ

উপবৃত্তৰ সমীকৰণ	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ a>b>0$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ b>a>0$
কেন্দ্র	(0, 0)	(0, 0)
শীর্ষ বিন্দু	(±a, 0)	(0, ±b)
উৎকেন্দ্রতা	$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$	$e=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$
নাভি	(±ae, 0)	(0, ±be)
নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ	$x=\pm\frac{a}{e}$	$y=\pm\frac{b}{e}$
মুখ্য অক্ষৰ দৈর্ঘ্য	2a	2b
গৌণ অক্ষৰ দৈর্ঘ্য	2b	2a
মুখ্য অক্ষৰ সমীকৰণ	y = 0 (x-অক্ষ)	x = 0 (y-অক্ষ)
গৌণ অক্ষৰ সমীকৰণ	x = 0 (y-অক্ষ)	y = 0 (x-অক্ষ)
নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$
নাভি লম্বৰ সমীকৰণ	x = ±ae	y = ±be

উদাহৰণ ১ ঃ এটা উপবৃত্তৰ উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{4}$, আৰু নাভিদ্বয় $\left(\pm\sqrt{2}, 0\right)$, স্থানাংক অক্ষ দুডাল অক্ষ হ'লে উপবৃত্তটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল উপবৃত্তটোৰ সমীকৰণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

প্রশ্নমতে উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{4}$ আৰু নাভিদ্বয়ৰ স্থানাংক $(\pm\sqrt{21}, 0)$,

$\therefore\ e=\frac{1}{4}$ আৰু $ae=\sqrt{2}$.

$\therefore\ a=\frac{ae}{e}=\frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{4}}=4\sqrt{2}$

আৰু $b = a\sqrt{1-e^2}=4\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2}$

$= 4\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{15}}{4}=\sqrt{30}$

$\therefore$ উপবৃত্তটোৰ নির্ণেয় সমীকৰণ $\frac{x^2}{\left(4\sqrt{2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\sqrt{30}\right)^2}=1$

অর্থাৎ, $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{30}=1$

উদাহৰণ ২ ঃ $25x^2 + 4y^2 = 100$ উপবৃত্তৰ নাভি, নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ আৰু নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ প্রদত্ত উপবৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ল, $25x^2 + 4y^2 = 100$

অর্থাৎ, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$

অর্থাৎ, $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$

ই $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ আকাৰৰ। ইয়াত $a = 2$, আৰু $b = 5$, যিহেতু $b > a$, মুখ্য অক্ষডাল y-অক্ষত আছে, আৰু গৌণ অক্ষডাল x-অক্ষত আছে।

$\therefore\ e=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}=\frac{\sqrt{5^2-2^2}}{5}=\frac{\sqrt{21}}{5}$.

$\therefore$নাভিদ্বয়ৰ স্থানাংক $(0, \pm be)$, অর্থাৎ $(0, \pm\sqrt{21})$ আৰু নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ হ'ল,

$y=\pm\frac{b}{e}$, অর্থাৎ, $y=\pm\frac{25}{\sqrt{21}}$.

আকৌ, নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য = $\frac{2a^2}{b} = \frac{2\times 2^2}{5} = \frac{8}{5}$

উদাহৰণ ৩ ঃ প্রমাণ কৰক যে $3x^2 + 4y^2 + 6x - 8y = 5$ সমীকৰণে এটা উপবৃত্তৰ সমীকৰণ বুজায়। ইয়াৰ কেন্দ্র, উৎকেন্দ্রতা আৰু নাভিলম্ব নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $3x^2 + 4y^2 + 6x - 8y = 5$

$\Rightarrow 3(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 2y) = 5$

$\Rightarrow 3(x^2 + 2x + 1) + 4(y^2 - 2y + 1) = 5 + 3 + 4$

$\Rightarrow 3(x + 1)^2 + 4(y - 1)^2 = 12$

$\Rightarrow \frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{3} = 1$

অক্ষৰ দিশ সলনি নকৰাকৈ মূল বিন্দু (–1, 1) বিন্দুলৈ নিলে ওপৰৰ সমীকৰণটো হ'বগৈ

$\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1.$

ইয়ে এটা উপবৃত্তৰ সমীকৰণ বুজায়। ইয়াৰ কেন্দ্র হ'ল নতুন মূল বিন্দু, অর্থাৎ পুৰণি স্থানাংক অনুসৰি (–1, 1).

ইয়াত, a = 2, b = $\sqrt{3}$, আৰু a > b.

$\therefore\ e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{4-3}}{2} = \frac{1}{2}$

নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য = $\frac{2b^2}{a} = \frac{2\times 3}{2} = 3$

গতিকে, প্রদত্ত সমীকৰণে এটা উপবৃত্তৰ সমীকৰণ বুজায়। ইয়াৰ কেন্দ্র (–1, 1), উৎকেন্দ্রতা $\frac{1}{2}$ আৰু নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য 3.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৪ ঃ তলৰ উপবৃত্ত দুটাৰ বাবে অক্ষদ্বয়ৰ দৈর্ঘ্য, উৎকেন্দ্রতা, শীর্ষ বিন্দুৰ স্থানাংক, নাভিৰ স্থানাংক, নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য আৰু নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

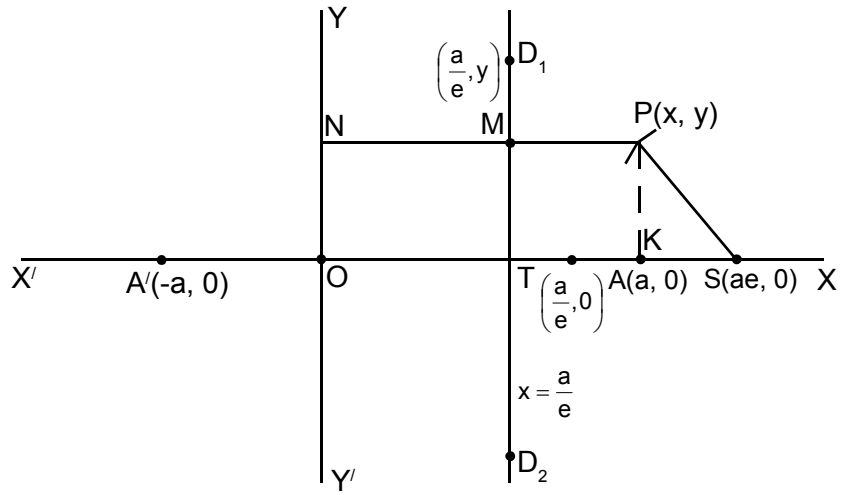
i) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ii) $3x^2 + 2y^2 = 18$

প্রশ্ন নং ৫ ঃ এটা উপবৃত্তৰ কেন্দ্র মূল বিন্দু, মুখ্য অক্ষ x-অক্ষত থাকে, উৎকেন্দ্রতা $\frac{2}{3}$ আৰু নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য 5 একক। উপবৃত্তটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

৫.৫ পৰাবৃত্ত আৰু ইয়াৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ

a) পৰাবৃত্ত ঃ যিবোৰ শাংকৰৰ উৎকেন্দ্ৰতা 1 অতকৈ ডাঙৰ, তেনেবোৰ শাংকৰেই পৰাবৃত্ত। গতিকে পৰাবৃত্ত হ'ল এনে এটা বিন্দুৰ কক্ষপথ যিটো বিন্দুৰে সমতল এখনত এনেদৰে চলাচল কৰে যে সমতলখনৰ এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দুৰ পৰা ইয়াৰ দূৰত্ব আৰু এডাল নিৰ্দিষ্ট ৰেখাৰ পৰা ইয়াৰ দূৰত্বৰ অনুপাত e > 1। নিৰ্দিষ্ট বিন্দুটোক নাভি, নিৰ্দিষ্ট ৰেখাডালক নিয়ামিকা আৰু নিৰ্দিষ্ট অনুপাত eক e > 1 পৰাবৃত্তৰ উৎকেন্দ্ৰতা বুলি কোৱা হয়।

b) পৰাবৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ ঃ



চিত্ৰ ঃ ৫.১৬

ধৰা হ'ল, পৰাবৃত্তটোৰ S নাভি আৰু D_1D_2 নিয়ামিকা আৰু ইয়াৰ উৎকেন্দ্ৰতা e। S অৰ মাজেৰে D_1D_2 ক T বিন্দুত কাটিছে। ধৰা হ'ল S আৰু Tৰ মাজত A এটা বিন্দু যাতে AS/AT = e. গতিকে A বিন্দুটো পৰাবৃত্তত আছে। যিহেতু e > 1, বৰ্ধিত STত আন এটা বিন্দু A' থাকিব যাতে $A'S / A'T = e$. এই বিন্দুটোৰো পৰা বৃত্তটোত আছে। পৰাবৃত্তটোৰ A আৰু A' বিন্দু দুটাক পৰাবৃত্তটোক শীৰ্ষ বিন্দু বুলি কোৱা হয়, আৰু $A'A$ ৰেখাখণ্ড ডালৰ মধ্য বিন্দু Oক কেন্দ্ৰ বুলিকোৱা হয়।

Oক মূল বিন্দু, OS অক x-অক্ষ আৰু Oৰ মাজেৰে OSৰ লম্বক y-অক্ষ হিচাপে লোৱা হ'ল। ধৰা হ'ল, $A'A = 2a$. গতিকে A আৰু A' ৰ স্থানাংক ক্ৰমে (a, 0) আৰু (–a, 0). গতিকে আমি পালোঁ,

$AS + A'S = e.AT + e.A'T = e(AT + A'T)$

$\Rightarrow (OS - OA) + (A'O + OS) = e.\ AA'$

$\Rightarrow 20S = e.2a$

$\Rightarrow OS = ae$

আৰু $A'S - AS = e.\ A'T - e.AT = e(A'T - AT)$

$\Rightarrow A'A = e.\{(A'O + OT) - (OA - OT)\} = e.2OT$

$\Rightarrow 2a = e.2OT$

$\Rightarrow OT = \frac{a}{e}$

যিহেতু S আৰু T বিন্দু দুটা x-অক্ষত আছে, গতিকে S আৰু Tৰ স্থানাংক ক্ৰমে (ae, 0) আৰু $\left(\frac{a}{e}, 0\right)$. D_1D_2 নিয়ামিকাডাল y-অক্ষৰ সমান্তৰাল আৰু ই $T\left(\frac{a}{e}, 0\right)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যায়। গতিকেইয়াৰ সমীকৰণ হ'ল $x = \frac{a}{e}$.

ধৰা হ'ল, পৰাবৃত্তটোত P(x, y) যিকোনো এটা বিন্দু। PS সংযোগ কৰা হ'ল। নিয়ামিকা D_1D_2ৰ ওপৰত PM লম্ব টনা হ'ল, PM অক বঢ়াই দিয়া হ'ল আৰু ই y-অক্ষক N বিন্দুত লম্বভাৱে মিলিছে। $PK \perp OX$ টনা হ'ল। গতিকে TM = KP = y হ'ল Mৰ কোটি আৰু ইয়াৰ ভুজ হ'ল $OT = \frac{a}{e}$. গতিকে Mৰ স্থানাংক হ'ল $\left(\frac{a}{e}, y\right)$. যিহেতু পৰাবৃত্তটোত P এটা বিন্দু, গতিকে সংজ্ঞাৰ পৰা,

$$\frac{PS}{PM} = e$$

$\Rightarrow PS^2 = e^2.PM^2$

$$\Rightarrow (x - ae)^2 + (y - 0)^2 = e^2\left[\left(x - \frac{a}{e}\right)^2 + (y - y)^2\right]$$

$\Rightarrow (x-ae)^2 + y^2 = (ex-a)^2$

$\Rightarrow x^2 + a^2e^2 - 2aex + y^2 = e^2x^2 + a^2 - 2aex$

$\Rightarrow (e^2-1)x^2 - y^2 = a^2(e^2-1)$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1$$

যিহেতু $e > 1$, $a^2(e^2 - 1)$ এটা ধনাত্মক ধ্ৰুৱক। ইয়াক b^2ৰে বুজোৱা হ'ল, য'ত b এটা ধনাত্মক সংখ্যা। গতিকে ওপৰৰ সমীকৰণটো হ'বগৈ, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

এইটোৱেই পৰাবৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ।

c) পৰাবৃত্তৰ আকাৰ, দ্বিতীয় নাভি আৰু দ্বিতীয় নিয়ামিকাৰ অস্তিত্ব ঃ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

সমীকৰণে বুজোৱা বক্ৰটো আঁকিবলৈ আমি তলৰ কথাকেইটালৈ মন কৰোঁ।

i) বক্ৰটো দুয়োডাল স্থানাংক অক্ষ সাপেক্ষে আৰু মূল বিন্দু সাপেক্ষে প্ৰতিসম।

ii) সমীকৰণটোত $y = 0$ বহুৰাই আমি পাওঁ $x = \pm a$, গতিকে বক্ৰডালে x-অক্ষক $A(a, 0)$ আৰু $A'(-a, 0)$ বিন্দু দুটাত কাটে। এই বিন্দু দুটা পৰাবৃত্তৰ শীৰ্ষ বিন্দু। AA' ৰেখাখণ্ডৰ মধ্য বিন্দু Oক মূল বিন্দু হিচাপে লোৱা হৈছে। ই পৰাবৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ। $AA' = 2a$ ৰেখাখণ্ডক পৰাবৃত্তটোৰ অনুপ্ৰস্থ অক্ষ বোলে। কেন্দ্ৰই ইয়াৰ মাজেৰে যোৱা সকলো জ্যাক সমদ্বিখণ্ডিত কৰে।

iii) সমীকৰণটোৰ পৰা আমি পালোঁ $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$. গতিকে $-a < x < a$ৰ বাবে y কাল্পনিক। গতিকে $x = -a$ আৰু $x = a$ৰ মাজত বক্ৰটোৰ কোনো বিন্দু নাই। $x = a$ৰ বাবে yৰ দুয়োটা মানেই শূন্য। গতিকে $x = a$ ৰেখাডাল পৰাবৃত্তটোৰ শীৰ্ষবিন্দু $A(a, 0)$ত স্পৰ্শক। সেইদৰে $x = -a$ ৰেখাডাল পৰাবৃত্তটোৰ $A'(-a, 0)$ বিন্দুত স্পৰ্শক।

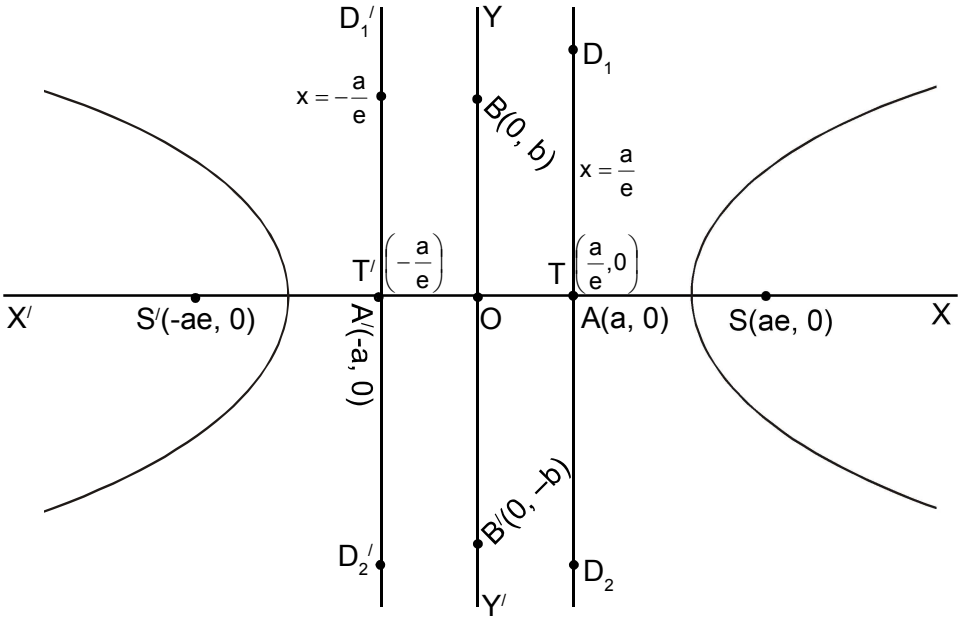
আকৌ সমীকৰণটোৰ পৰা আমি পালোঁ, $x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}$

yৰ প্ৰত্যেক বাস্তৱ মানৰ বাবে ই বাস্তৱ। গতিকে yৰ মানৰ কোনো সীমা নাই। আনহাতেদি xৰ মানে ওপৰত দেখুওৱাৰ দৰে $|x| \geq a$ সিদ্ধ কৰে।

iv) সেইদৰে $x \to \infty$ বা, $x \to -\infty$, $y \to \pm\infty$

ওপৰৰ কথাবোৰ বিবেচনা কৰি অংকিত তলৰ চিত্ৰৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পৰাবৃত্তটো দুটা পৃথক অংশেৰে গঠিত (অনুপ্ৰস্থ অক্ষৰ ধনাত্মক আৰু ঋণাত্মক দিশত অসীমলৈ বিস্তৃত)।



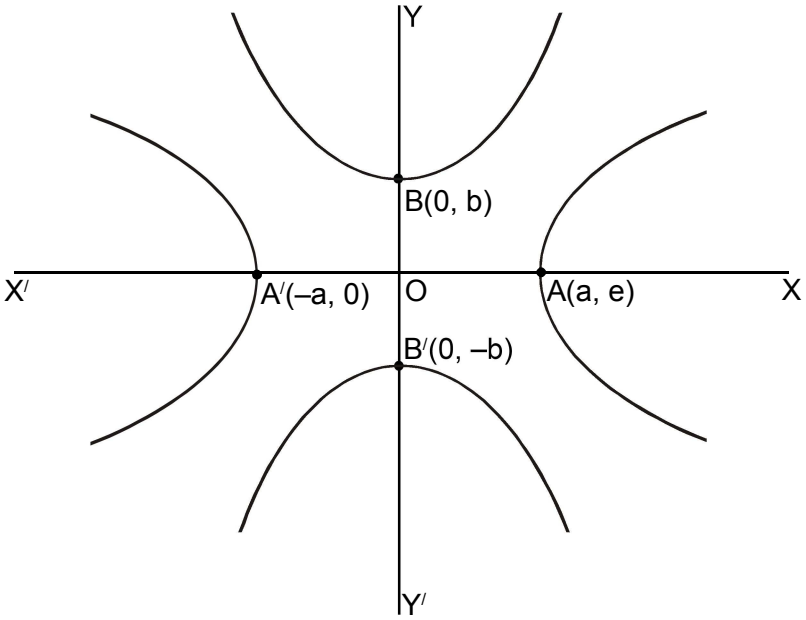
চিত্ৰ ঃ ৫.১৭

আমি y-অক্ষত দুটা বিন্দু B(0, b) আৰু B′(0, –b) চিহ্নিত কৰিলোঁ, এই বিন্দু দুটা পৰাবৃত্তটোত নাই। BB′ = 2b ৰেখা খণ্ডডালক পৰাবৃত্তটোৰ সংযুগ্ম অক্ষ (Conjugate Axis) বুলি কোৱা হয়।

সংযুগ্ম অক্ষ সাপেক্ষে (y-অক্ষ সাপেক্ষে) পৰাবৃত্তটোৰ প্রতিসমতাৰ পৰা আমি পাওঁ যে অনুপ্রস্থ অক্ষত বাঁওপিনে এটা দ্বিতীয় নাভি S′ থাকিব লাগিব যাতে OS′ = OS, আৰু S′সাপেক্ষে এডাল দ্বিতীয় নিয়ামিকা $D_1'D_2'$ থাকিব লাগিব। এই নিয়ামিকাডালে OA′ক T′ বিন্দুত লম্বভাৱে কাটে যাতে OT′ = OT. S′ৰ স্থানাংক হ'ল (–ae, 0) আৰু $D_1'D_2'$ৰ সমীকৰণ হ'ল $x = -\frac{a}{e}$.

দেখা গ'ল যে পৰাবৃত্তটোৰ প্রামাণিক সমীকৰণ হ'ল $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ আৰু এই ক্ষেত্রত অনুপ্রস্থ অক্ষ হ'ল x-অক্ষ, আৰু সংযুগ্ম অক্ষ হ'ল y-অক্ষ, ইয়াৰ কেন্দ্র (অনুপ্রস্থ অক্ষ আৰু সংযুগ্ম অক্ষৰ ছেদ বিন্দু) হ'ল মূল বিন্দু, অনুপ্রস্থ অক্ষৰ দৈর্ঘ্য 2a আৰু সংযুগ্ম অক্ষৰ দৈর্ঘ্য 2b. ইয়াৰ উৎকেন্দ্রতা e এই সম্বন্ধটোৰ পৰা উলিয়াব পাৰি, $b^2 = a^2(e^2 - 1)$.

ইয়াৰ পৰা, $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$



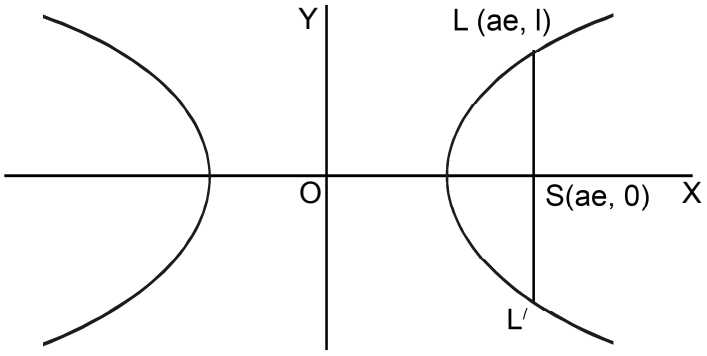
চিত্র ঃ ৫.১৮

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পৰাবৃত্তটোৰ অনুপ্রস্থ অক্ষ আৰু সংযুগ্ম অক্ষ ক্রমে AA′ = 2a আৰু BB′ = 2b যি পৰাবৃত্তৰ অনুপ্রস্থ অক্ষ BB′ আৰু সংযুগ্ম অক্ষ AA′, তাক মূল

পৰাবৃত্তটোৰ সংযুগ্ম পৰাবৃত্ত (Conjugate Axes) বোলে। সংযুগ্ম পৰাবৃত্তৰ সমীকৰণ হ'ল $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$, ইয়াৰ উৎকেন্দ্রতা $e=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b}$, ইয়াৰ নাভি দুটা y-অক্ষত থাকে আৰু ইয়াৰ স্থানাংক $(0, \pm be)$, ইয়াৰ নিয়ামিকা দুডাল x-অক্ষৰ সমান্তৰাল আৰু ইয়াৰ সমীকৰণ হ'ল $y=\pm\frac{b}{e}$.

d) নাভি লম্ব ঃ অনুপ্রস্থ অক্ষৰ লম্ব হোৱা নাভি জ্যাক (নাভিৰ মাজেৰে যোৱা জ্যা) পৰাবৃত্তটোৰ নাভি লম্ব বোলে।

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পৰাবৃত্তটোৰ S(ae, 0) নাভিৰ মাজেৰে যোৱা নাভি লম্ব LSL′ হ'লে, SL = SL′ = l. গতিকে L(ae, l) বিন্দুটো পৰাবৃত্তটোত থাকিব।



চিত্ৰ ঃ ৫.১৯

গতিকে, $\frac{(ae)^2}{a^2}-\frac{l^2}{b^2}=1$

$\Rightarrow \frac{l^2}{b^2}=(e^2-1)=\frac{a^2(e^2-1)}{a^2}=\frac{b^2}{a^2}$

$\Rightarrow l^2=\frac{b^4}{a^2}$

$\Rightarrow l=\frac{b^2}{a}$

গতিকে $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পৰাবৃত্তটোৰ উপ নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ আৰু ইয়াৰ নাভি লম্বৰ দৈর্ঘ্য $\frac{2b^2}{a}$.

স্পষ্টতঃ সংযুগ্ম পৰাবৃত্ত $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ৰ নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য $\frac{2a^2}{b}$.

e) আয়তাকাৰ পৰাবৃত্ত ঃ এটা পৰাবৃত্তৰ অনুপ্রস্থ অক্ষ আৰু সংযুগ্ম অক্ষৰ দৈর্ঘ্য সমান হ'লে ইয়াক আয়তাকাৰ পৰাবৃত্ত (Rectangular Hyperbola) বোলে। ইয়াৰ সমীকৰণ হ'ব এনেধৰণৰ, $x^2 - y^2 = a^2$. ইয়াৰ উৎকেন্দ্রতা হ'ল,

$$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \sqrt{2}\,.$$

দেখা গ'ল যে অনুপ্রস্থ অক্ষ আৰু সংযুগ্ম অক্ষৰ সমান দৈর্ঘ্য যিয়েই নহওক কিয় আয়তাকাৰ পৰাবৃত্তৰ উৎকেন্দ্রতা সদায় $\sqrt{2}$.

সাৰাংশ ঃ

পৰাবৃত্তৰ সমীকৰণ	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$
কেন্দ্র	(0, 0)	(0, 0)
শীর্ষ বিন্দু	(±a, 0)	(0, ±b)
উৎকেন্দ্রতা	$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$	$e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$
নাভি	(±a, 0)	(0, ±b)
নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ	$x = \pm\frac{a}{e}$	$y = \pm\frac{b}{e}$
অনুপ্রস্থ অক্ষৰ দৈর্ঘ্য	2a	2b
সংযুগ্ম অক্ষৰ দৈর্ঘ্য	2b	2a
অনুপ্রস্থ অক্ষৰ সমীকৰণ	y = 0 (x-axis)	x = 0 (y-axis)
সংযুগ্ম অক্ষৰ সমীকৰণ	x = 0 (y-axis)	y = 0 (x-axis)
নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য	$\frac{2b^2}{a}$	$\frac{2a^2}{b}$
নাভিলম্বৰ সমীকৰণ	x = ±ae	y = ±be

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ ঃ $21x^2 - 4y^2 = 84$ পৰাবৃত্তটোৰ নাভিৰ স্থানাংক আৰু নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ পৰাবৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$21x^2 - 4y^2 = 84$$

অর্থাৎ, $\frac{21x^2}{84} - \frac{4y^2}{84} = 1$

অর্থাৎ, $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{21} = 1$, এইটো $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ আকাৰৰ।

ইয়াত, $a^2 = 4,\ b^2 = 21$

আমি পালোঁ, $b^2 = a^2(e^2 - 1)$

$$\Rightarrow 21 = 4\left(e^2 - 1\right)$$

$$\Rightarrow e^2 - 1 = \frac{21}{4}$$

$$\Rightarrow e^2 = 1 + \frac{21}{4}$$

$$\Rightarrow e^2 = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow e = \frac{5}{2}$$

$\therefore$ নাভিৰ স্থানাংক (±a, 0), অর্থাৎ, $\left(\pm 2 \times \frac{5}{2}, 0\right)$, অর্থাৎ, (±5, 0)

আৰু নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য = $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 21}{2} = 21.$

উদাহৰণ ২ ঃ এটা পৰাবৃত্তৰ অক্ষদ্বয় স্থানাংক অক্ষ, সংযুগ্ম অক্ষ 5 আৰু নাভিদ্বয়ৰ মাজৰ দূৰত্ব 13 হ'লে, পৰাবৃত্তটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, পৰাবৃত্তটোৰ সমীকৰণ, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

ইয়াৰ অক্ষদ্বয় হ'ল স্থানাংক অক্ষ। প্রশ্নমতে, 2b = 5,

অর্থাৎ, $b = \frac{5}{2}$ আৰু 2ae = 13, অর্থাৎ, $ae = \frac{13}{2}$.

এতিয়া, $b^2 = a^2(e^2 - 1) = (ae)^2 - a^2$

আমি পালোঁ, $\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - a^2 \Rightarrow a^2 = \frac{169}{4} - \frac{25}{4} = \frac{144}{4} = 36.$

গতিকে, পৰাবৃত্তটোৰ নির্ণেয় সমীকৰণ হ'ল, $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2} = 1$

অর্থাৎ, $25x^2 - 144y^2 = 900.$

উদাহৰণ ৩ ঃ এটা পৰাবৃত্ত আৰু ইয়াৰ সংযুগ্ম পৰাবৃত্তৰ উৎকেন্দ্রতা ক্রমে e_1 আৰু e_2 হ'লে প্রমাণ কৰক যে $\frac{1}{e_1^{\,2}} + \frac{1}{e_2^{\,2}} = 1.$

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ পৰাবৃত্তটোৰ উৎকেন্দ্রতা e_1.

গতিকে, $e_1 = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$. ইয়াৰ সংযুগ্ম পৰাবৃত্ত $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ৰ উৎকেন্দ্ৰতা e_2.

গতিকে, $e_2 = \frac{\sqrt{b^2+a^2}}{b}$.

গতিকে, $\frac{1}{e_1^{\,2}} + \frac{1}{e_2^{\,2}} = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$.



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ৬ ঃ তলৰ পৰাবৃত্তবোৰৰ প্ৰতিটোৰ উৎকেন্দ্ৰতা, অক্ষদ্বয়ৰ দৈৰ্ঘ্য, শীৰ্ষ বিন্দু আৰু নাভিৰ স্থানাংক, নাভিলম্বৰ দৈৰ্ঘ্য আৰু নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

i) $9x^2 - 16y^2 = 144$ ii) $2x^2 - 3y^2 + 30 = 0$

প্ৰশ্ন নং ৭ ঃ এটা পৰাবৃত্তৰ অনুপ্ৰস্থ অক্ষৰ দৈৰ্ঘ্য 12 আৰু উৎকেন্দ্ৰতা 4 হ'লে, পৰাবৃত্তটোৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৮ ঃ এটা আয়তাকাৰ পৰাবৃত্তৰ নাভিলম্বৰ দৈৰ্ঘ্য 10 একক হ'লে, আয়তাকাৰ পৰাবৃত্তটোৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

৫.৬ দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ সাধাৰণ সমীকৰণ

x আৰু yৰ দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ সাধাৰণ সমীকৰণ হ'ল,

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... ...(1)

এনেধৰণৰ সমীকৰণে সদায় এটা শাংকৰৰ সমীকৰণ বুজায় (শাংকৰ বুলি কওঁতে অপ্ৰকৃত শাংকৰকো সামৰা হৈছে, যথা, এটা বৃত্ত আৰু যুগ্ম সৰলৰেখা)। তলৰ ফলকেইটা মনত ৰখা অতি প্ৰয়োজন।

ইয়াত, $D = \begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$.

(1) নম্বৰ সমীকৰণে,

i) এটা অধিবৃত্ত বুজায় যদি, $ab - h^2 = 0$, আৰু $D \neq 0$;

ii) এটা উপবৃত্ত বুজায় যদি, $ab - h^2 > 0$, আৰু $D \neq 0$;

iii) এটা পৰাবৃত্ত বুজায় যদি, $ab - h^2 < 0$, আৰু $D \neq 0$;

iv) এটা বৃত্ত বুজায় যদি, $a = b$ আৰু $h = 0$;

v) এযোৰ সৰল ৰেখা বুজায় যদি, $D = 0$.

(iii)ৰ ক্ষেত্ৰত $ab - h^2 < 0$, এই চৰ্তৰ লগতে যদি, $a + b = 0$ হয়, তেনেহ'লে, (1) সমীকৰণে এটা আয়তাকাৰ পৰাবৃত্ত বুজায়।

উদাহৰণ ১ঃ $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 6x + 16y - 7 = 0$ সমীকৰণে কি কক্ষপথ বুজায়?

সমাধান ঃ এইটো x আৰু yৰ দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ সমীকৰণ।

এতিয়া, $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$= 7.7.(-7) + 2.8.(-3).(-1) - 7.8^2 - 7.(-3)^2 - (-7).(-1)^2$

$= -243 + 48 - 448 - 63 + 7 \neq 0$

আৰু $ab - h^2 = 7.7 - (-1)^2 = 49 - 1 = 48 > 0$.

$\therefore$ প্ৰদত্ত সমীকৰণে এটা উপবৃত্ত বুজায়।

উদাহৰণ ২ঃ hৰ কি মানৰ বাবে $25x^2 + 2hxy + 9y^2 + 3x - 7y + 13 = 0$ সমীকৰণে এটা অধিবৃত্ত বুজাব?

সমাধান ঃ $25x^2 + 2hxy + 9y^2 + 3x - 7y + 13 = 0$ সমীকৰণে এটা অধিবৃত্ত বুজাবলৈ হ'লে, $25.9 - h^2 = 0$.

$\Rightarrow h^2 = 25.9 = (5 \times 3)^2$

$\Rightarrow h = \pm 15$



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ৯ ঃ $3x^2 - 8xy + 4y^2 - 3x + 5y + 11 = 0$ সমীকৰণে কি কক্ষপথ বুজায়?

প্ৰশ্ন নং ১০ ঃ λৰ কি মানৰ বাবে $9x^2 + 21xy + \lambda y^2 - 3x + 7y - 17 = 0$ সমীকৰণে এটা অধিবৃত্ত বুজাব?



৫.৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- যি শাংকৰৰ উৎকেন্দ্ৰতা 1ৰ সমান, তেনে শাংকৰক অধিবৃত্ত বুলি কোৱা হয়। অধিবৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ হ'ল $y^2 = 4ax$.
- যি শাংকৰৰ উৎকেন্দ্ৰতা 1তকৈ সৰু, তেনে শাংকৰক উপবৃত্ত বুলি কোৱা হয়। উপবৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ হ'ল $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- যি শাংকৰৰ উৎকেন্দ্ৰতা 1তকৈ ডাঙৰ, তেনে শাংকৰক পৰাবৃত্ত বুলি কোৱা হয়। পৰাবৃত্তৰ প্ৰামাণিক সমীকৰণ হ'ল $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

- $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ (1)সমীকৰণে,
  - i) এটা অধিবৃত্তৰ সমীকৰণ বুজায় যদি, $ab - h^2 = 0$, আৰু $D \neq 0$;
  - ii) এটা উপবৃত্তৰ সমীকৰণ বুজায় যদি, $ab - h^2 > 0$, আৰু $D \neq 0$;
  - iii) এটা পৰাবৃত্তৰ সমীকৰণ বুজায় যদি, $ab - h^2 < 0$, আৰু $D \neq 0$;
  - iv) এটা বৃত্তৰ সমীকৰণ বুজায় যদি, $a = b$ আৰু $h = 0$;
  - v) এযোৰ সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায় যদি, $D = 0$,

    য'ত, $D = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

(iii)ৰ ক্ষেত্ৰত $ab - h^2 < 0$ এই চর্তৰ লগতে যদি $a + b = 0$ হয়, তেনেহ'লে, (1) সমীকৰণে এটা আয়তাকাৰ পৰাবৃত্ত বুজায়।



৫.৮ অধিক জানিবলৈ

ইংৰাজী গ্ৰন্থ ঃ

1) Jain, P. K. and Ahmhad, K. *Textbook of Analytical Geometry of Three Dimensions*. New Delhi: New Age International (P) Ltd.
2) Kishan, Hari. *Coordinate Geometry of Two dimensions*. New Delhi: Atlantic Publishers & Distributors.
3) Pal, Sat and Pal, Harbans. *A Textbook of Two Dimensional Geometry*. New Age International Publishers.
4) Sharma, G. C. and Jain, Madhu. *Coordinate Geometry (2D and 3D)*. New Delhi: Galgotia Publications Pvt Ltd.
5) Sharma, A. K. *Coordinate Geometry (2D)*. New Delhi: Discovery Publishing House.



৫.৯ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ i) অধিবৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ল, $3y^2 = 8x$, অৰ্থাৎ, $y^2 = \frac{8}{3}x$

এইটো $y^2 = 4ax$, আকাৰৰ সমীকৰণ। ইয়াত $4a = \frac{8}{3}$, অৰ্থাৎ, $a = \frac{2}{3}$.

গতিকে অধিবৃত্তটোৰ নাভি স্থানাংক $(a, 0)$ অৰ্থাৎ, $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$; শীৰ্ষ বিন্দুৰ স্থানাংক $(0, 0)$; নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ $x = -a$, অৰ্থাৎ, $x = -\frac{2}{3}$, অৰ্থাৎ, $3x + 2 = 0$;

অধিবৃত্তটোৰ অক্ষৰ সমীকৰণ y = 0; নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য = $4a = \frac{8}{3}$.

ii) অধিবৃত্তটোৰ সমীকৰণ $y^2 = -8x$.

এইটো $y^2 = -4ax$ (a > 0) আকাৰৰ সমীকৰণ। এই ক্ষেত্ৰত 4a = 8 অর্থাৎ, a = 2. সেয়ে নাভিৰ স্থানাংক (–a, 0) অর্থাৎ, (–2, 0); শীর্ষ বিন্দুৰ স্থানাংক (0, 0); নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ x = a অর্থাৎ, x = 2; অক্ষৰ সমীকৰণ y = 0; নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য = 4a = 8.

iii) অধিবৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ল $x^2 = 10y$. এইটো $x^2 = 4ay$ (a > 0), আকাৰৰ সমীকৰণ। এই ক্ষেত্ৰত 4a = 10 অর্থাৎ, $a = \frac{5}{2}$.

গতিকে অধিবৃত্তটোৰ নাভিৰ স্থানাংক (0, a) অর্থাৎ, $\left(0, \frac{5}{2}\right)$; শীর্ষ বিন্দুৰ স্থানাংক (0, 0); নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ y = – a অর্থাৎ, $y = -\frac{5}{2}$ অর্থাৎ, 2y + 5 = 0; অক্ষৰ সমীকৰণ x = 0; নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য = 4a = 10.

iv) অধিবৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ল $x^2 = -8y$. এইটো $x^2 = -4ay$ (a > 0); আকাৰৰ সমীকৰণ। এই ক্ষেত্ৰত 4a = 8 অর্থাৎ, a = 2.

ইয়াৰ নাভিৰ স্থানাংক (0, –a) অর্থাৎ (0, –a); ইয়াৰ শীর্ষ বিন্দু (0, 0); নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ y = a অর্থাৎ, y = 2; অক্ষৰ সমীকৰণ x = 0; নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য 4a, অর্থাৎ, 8.

v) প্ৰদত্ত সমীকৰণটো হ'ল, $x^2 - 6x + 4y + 1 = 0$ ... ...(1)

অর্থাৎ, $x^2 - 6x = -4y - 1$

অর্থাৎ, $x^2 - 6x + 9 = -4y - 1 + 9$

অর্থাৎ, $(x - 3)^2 = -4y + 8$

অর্থাৎ, $(x - 3)^2 = -4(y - 2)$

স্থানাংক অক্ষৰ দিশ সলনি নকৰাকৈ মূল বিন্দুটো (3, 2), বিন্দুলৈ স্থানান্তৰিত কৰিলে, উপৰিউক্ত সমীকৰণটো হ'বগৈ, $X^2 = -4Y$

গতিকে প্ৰদত্ত সমীকৰণ (1)এ এটা অধিবৃত্তৰ সমীকৰণ বুজায়। নতুন মূল বিন্দুৰ (3, 2) মাজেৰে সমান্তৰাল অক্ষ সাপেক্ষে ইয়াৰ সমীকৰণ $X^2 = -4Y$. এইটো $X^2 = -4aY$ (a > 0), আকাৰৰ সমীকৰণ। ইয়াত a = 1. নতুন অক্ষ সাপেক্ষে অধিবৃত্তটোৰ শীর্ষ বিন্দু (0, 0), নাভি (0, –a) অর্থাৎ, (0, –1), ইয়াৰ অক্ষ হ'ল নতুন Y-অক্ষ আৰু ইয়াৰ সমীকৰণ X = 0, আৰু নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ Y = a অর্থাৎ, Y = 1. যিহেতু x = X + 3 আৰু y = Y + 2, আমি পালোঁ,

$(X, Y) = (0, 0) \Leftrightarrow (x, y) = (3, 2)$,

$(X, Y) = (0, -1) \Leftrightarrow (x, y) = (3, 1)$,

$X = 0 \Leftrightarrow x = 3$,

$Y = 1 \Leftrightarrow y = 3$.

গতিকে মূল অক্ষ সাপেক্ষে অধিবৃত্তটোৰ শীৰ্ষ বিন্দু (3, 2), নাভি (3, 1), অক্ষৰ সমীকৰণ $x = 3$ (y-অক্ষৰ সমান্তৰাল), আৰু নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ $y = 3$ (x-অক্ষৰ সমান্তৰাল)। আকৌ অধিবৃত্তটোৰ নাভি লম্বৰ দৈর্ঘ্য $= 4a = 4$.

২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ আমি জানো যে, যি অধিবৃত্তৰ নাভি $(a, 0)$ আৰু নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ $x = -a$, তেনে অধিবৃত্তৰ সমীকৰণ হ'ল $y^2 = 4ax$. গতিকে, নাভি $(4, 0)$, আৰু নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ $x = -4$ $(a = 4)$ হ'লে, অধিবৃত্তৰ সমীকৰণ হ'ব $y^2 = 4.4x$ অর্থাৎ, $y^2 = 16x$.

৩নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ উলিয়াবলগীয়া অধিবৃত্তটোৰ শীৰ্ষ বিন্দুহ'ল মূল বিন্দু আৰু নাভি y-অক্ষৰ ধনাত্মক দিশৰ পিনে আছে। ধৰা হ'ল, অধিবৃত্তটোৰ সমীকৰণ $x^2 = 4ay$, যিহেতু নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ 20, $4a = 20$, অর্থাৎ, $a = 5$.

$\therefore$ অধিবৃত্তটোৰ নির্ণেয় সমীকৰণ, $x^2 = 20y$.

৪নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ i) উপবৃত্তটোৰ সমীকৰণ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, অর্থাৎ, $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

এইটো $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ আকাৰৰ সমীকৰণ।

ইয়াত, $a = 5$, $b = 3$, গতিকে, $a > b$.

গতিকে মুখ্য অক্ষডাল x-অক্ষৰ ওপৰত আছে।

এতিয়া, $e = \frac{\sqrt{5^2 - 3^2}}{5} = \frac{4}{5}$.

প্ৰদত্ত উপবৃত্তটোৰ বাবে,

মুখ্য অক্ষৰ দৈর্ঘ্য $= 2a = 10$;

গৌণ অক্ষৰ দৈর্ঘ্য $= 2b = 6$;

উৎকেন্দ্ৰতা $= e = \frac{4}{5}$;

শীৰ্ষ বিন্দুৰ স্থানাংক $(\pm a, 0)$, অর্থাৎ, $(\pm 5, 0)$;

নাভিৰ স্থানাংক $(\pm ae, 0)$, অর্থাৎ, $(\pm 4, 0)$;

নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 3^2}{5} = \frac{18}{5}$;

নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ হ'ল, $x = \pm \frac{a}{e}$, অর্থাৎ, $x = \pm \frac{5}{\frac{4}{5}}$, অর্থাৎ, $x = \pm \frac{25}{4}$.

ii) উপবৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ল, $3x^2 + 2y^2 = 18$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{3x^2}{18} + \frac{2y^2}{18} = 1$$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{x^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$$

এইটো $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. আকাৰৰ সমীকৰণ। ইয়াত $a = \sqrt{6}$ আৰু $b = 3$;

স্পষ্টতঃ $b > a$, আৰু সেয়ে $= 2b = 6$ দৈর্ঘ্যৰ মুখ্য অক্ষডাল y-অক্ষৰ ওপৰত আছে।

এই ক্ষেত্ৰত, $e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} = \frac{\sqrt{9-6}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

ওপৰৰ উপবৃত্তটোৰ বাবে, মুখ্য অক্ষৰ দৈর্ঘ্য $= 2b = 6$;

গৌণ অক্ষৰ দৈর্ঘ্য $= 2a = 2\sqrt{6}$;

উৎকেন্দ্ৰতা $= e = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

শীর্ষ বিন্দুৰ স্থানাংক $(0, \pm b)$, অর্থাৎ, $(0, \pm 3)$;

নাভিৰ স্থানাংক $(0, \pm be)$, অর্থাৎ, $(0, \pm \sqrt{3})$;

নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ, $y = \pm \frac{b}{e}$, অর্থাৎ, $y = \pm \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$, অর্থাৎ, $y = \pm 3\sqrt{3}$;

নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2 \times 6}{3} = 4$.

৫নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ যিহেতু উপবৃত্তটোৰ কেন্দ্ৰ মূল বিন্দুত আছে আৰু ইয়াৰ মুখ্য অক্ষ x-অক্ষত আছে, গতিকে উপবৃত্তটো

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \text{... ... ...(1)}$$

আকাৰৰ হ'ব, য'ত a আৰু b ক্ৰমে উপ মুখ্য অক্ষ আৰু উপ গৌণ অক্ষৰ দৈর্ঘ্য।

প্ৰশ্নমতে, উৎকেন্দ্ৰতা $e = \frac{2}{3}$ আৰু নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = 5$.

এতিয়া, $2b^2 = 5a$

$\Rightarrow 2.a^2 (1 - e^2) = 5a$

$\Rightarrow 2a\left\{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right\} = 5$

$\Rightarrow 2a \times \frac{5}{9} \Rightarrow a = \frac{9}{2}$

আৰু ইয়াৰ পৰা, $b = \frac{5a}{2} = \frac{5}{2} \times \frac{9}{2} = \frac{45}{4}$.

$\therefore$ (1) হ'বগৈ, $\frac{x^2}{\frac{81}{4}} + \frac{y^2}{\frac{45}{4}} = 1$, অৰ্থাৎ, $\frac{4x^2}{81} + \frac{4y^2}{45} = 1$

এইটোৱেই উপবৃত্তটোৰ নিৰ্ণেয় সমীকৰণ। ইয়াক এনেধৰণেও লিখিব পাৰি,

$20x^2 + 36y^2 = 405$.

৬নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ i) পৰাবৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ল, $9x^2 - 16y^2 = 144$

অৰ্থাৎ, $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

অৰ্থাৎ, $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$

এইটো $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ আকাৰৰ সমীকৰণ। ইয়াত, $a = 4, b = 3$.

ইয়াৰ অনুপ্ৰস্থ অক্ষ x-অক্ষত আছে।

এতিয়া, $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} = \frac{\sqrt{4^2 + 3^2}}{4} = \frac{5}{4}$.

গতিকে, পৰাবৃত্তটোৰ উৎকেন্দ্ৰতা = $e = \frac{5}{4}$;

অনুপ্ৰস্থ অক্ষৰ দৈৰ্ঘ্য = $2a = 8$;

সংযুগ্ম অক্ষৰ দৈৰ্ঘ্য = $2b = 6$;

শীৰ্ষবিন্দুৰ স্থানাংক $(\pm a, 0)$, অৰ্থাৎ, $(\pm 4, 0)$;

নাভিৰ স্থানাংক $(\pm ae, 0)$, অৰ্থাৎ, $(\pm 5, 0)$;

প্ৰতিডাল নাভি লম্বৰ দৈৰ্ঘ্য = $\frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 3^2}{4} = \frac{9}{2}$;

নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ $x = \pm \frac{a}{e}$, অৰ্থাৎ, $x = \pm \frac{4}{\frac{5}{4}}$, অৰ্থাৎ, $x = \pm \frac{16}{5}$.

ii) পৰাবৃত্তটোৰ সমীকৰণ হ'ল, $2x^2 - 3y^2 + 30 = 0$

অৰ্থাৎ, $3y^2 - 2x^2 = 30$

অৰ্থাৎ, $\frac{3y^2}{30} - \frac{2x^2}{30} = 1$

অৰ্থাৎ, $\frac{y^2}{\left(\sqrt{10}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(\sqrt{15}\right)^2} = 1$

এইটো $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ আকাৰৰ সমীকৰণ। ইয়াত b = $\sqrt{10}$

আৰু a = $\sqrt{15}$; ইয়াৰ অনুপ্রস্থ অক্ষ y-অক্ষৰ ওপৰত আছে।

আকৌ, e = $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\frac{\sqrt{15+10}}{\sqrt{10}}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$.

এই পৰাবৃত্তটোৰ পৰা,

উৎকেন্দ্রতা = e = $\sqrt{\frac{5}{2}}$;

অনুপ্রস্থ অক্ষৰ দৈর্ঘ্য = 2b = $2\sqrt{10}$;

সংযুগ্ম অক্ষৰ দৈর্ঘ্য = 2a = $2\sqrt{15}$;

শীষ বিন্দুৰ স্থানাংক (0, ±b), অর্থাৎ, (0, ±$\sqrt{10}$);

নাভিৰ স্থানাংক (0, ±be), অর্থাৎ, (0, ±5);

প্রতিডাল নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য = $\frac{2a^2}{b}=\frac{2\times15}{\sqrt{10}}=3\sqrt{10}$;

নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ, y = $\pm\frac{b}{e}$, অর্থাৎ, y = $\pm\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{\frac{5}{2}}}$, অর্থাৎ, y = ±2.

৭নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, পৰাবৃত্তটোৰ প্রামাণিক সমীকৰণ, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

প্রশ্নমতে, 2a = 12 আৰু e = 4 $\Rightarrow \alpha$ = 6 আৰু e = 4.

গতিকে, $b^2 = a^2(e^2 - 1) = 6^2(4^2 - 1) = 36 \times 15 = 540$

গতিকে, পৰাবৃত্তটোৰ উলিয়াবলগীয়া সমীকৰণ, $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{540}=1$.

৮নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, আয়তাকাৰ পৰাবৃত্তটোৰ প্রামাণিক সমীকৰণ, $x^2 - y^2 = a^2$.

যিহেতু নাভিলম্বৰ দৈর্ঘ্য 10 দহক, গতিকে, $\frac{2a^2}{a}$ = 10

$\Rightarrow$ 2a = 10

$\Rightarrow \alpha$ = 5.

গতিকে আয়তাকাৰ পৰাবৃত্তটোৰ উলিয়াবলগীয়া সমীকৰণ,

$x^2 - y^2 = 25$.

৯নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $3x^2 - 8xy + 4y^2 - 3x + 5y + 11 = 0$

এইটো x আৰু yৰ দ্বিতীয় মাত্রাৰ সমীকৰণ।

$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$$= 3.4.11 + 2.\frac{5}{2}.\left(-\frac{3}{2}\right)(-4) - 3.\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4.\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 11.(-4)^2$$

$$= 132 + 30 - \frac{75}{4} - 9 - 176$$

$$= -\frac{75}{4} - 23 \neq 0$$

আৰু $ab - h^2 = 3.4 - (-4)^2 = 12 - 16 = -4 < 0$

গতিকে প্ৰদত্ত সমীকৰণটোৱে পৰাবৃত্তৰ সমীকৰণ বুজায়।

১০নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $9x^2 + 21xy + \lambda y^2 - 3x + 7y - 17 = 0$ সমীকৰণে অধিবৃত্তৰ সমীকৰণ বুজালে, $9.\lambda - \left(\frac{21}{2}\right)^2 = 0$ (চৰ্ত ঃ $ab - h^2 = 0$)

$$\Rightarrow 9\lambda = \frac{21 \times 21}{4}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{21 \times 21}{4 \times 9}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{49}{4}.$$



৫.১০ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ $(y + 3)^2 = 2(x + 2)$ অধিবৃত্তটোৰ শীৰ্ষবিন্দু, নাভি, অক্ষৰ সমীকৰণ আৰু নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ২ ঃ $x^2 + 4x + 4y + 16 = 0$ অধিবৃত্তটোৰ নাভি আৰু শীৰ্ষবিন্দুৰ স্থানাংক, অক্ষ আৰু নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ আৰু নাভিলম্বৰ দৈৰ্ঘ্য নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ ঃ $y^2 - 4y - 2x - 8 = 0$ অধিবৃত্তৰ নাভি আৰু শীৰ্ষ বিন্দুৰ স্থানাংক, অক্ষ আৰু নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ ঃ তলৰ অধিবৃত্তবোৰৰ প্ৰতিটোৱে নাভি আৰু শীৰ্ষ বিন্দুৰ স্থানাংক, অক্ষ আৰু নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ আৰু নাভিলম্বৰ দৈৰ্ঘ নিৰ্ণয় কৰক।

i) $4y^2 - 6x - 4y = 5$ ii) $x^2 - y - 2x = 0$ iii) $x^2 + 2y = 8x - 7$.

প্ৰশ্ন ৫ ঃ তলৰ উপবৃত্ত দুটাৰ প্ৰত্যেকৰে উৎকেন্দ্ৰতা, নাভি আৰু নাভিলম্বৰ দৈৰ্ঘ নিৰ্ণয় কৰক।

i) $2x^2 + 3y^2 = 6$ ii) $3x^2 + 2y^2 = 6$

প্ৰশ্ন ৬ঃ এটা উপবৃত্তৰ অক্ষদ্বয় স্থানাংক-অক্ষ, নাভি (±2, 0) আৰু উৎকেন্দ্ৰতা $\frac{1}{2}$ হ'লে উপবৃত্তটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৭ঃ এটা উপবৃত্তৰ (i) মুখ্য অক্ষৰ দৈৰ্ঘ্য ইয়াৰ গৌণ অক্ষৰ দুগুণ হ'লে, (ii) নাভিলম্বৰ দৈৰ্ঘ্য ইয়াৰ গৌণ অক্ষৰ আধা হ'লে, উপবৃত্তটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৮ঃ এটা পৰাবৃত্তৰ নাভি (±2, 0) আৰু উৎকেন্দ্ৰতা $\frac{3}{2}$ হ'লে, পৰাবৃত্তটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৯ঃ এটা পৰাবৃত্তৰ নিয়ামিকা দুডালৰ মাজৰ দূৰত্ব $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ হ'লে আৰু পৰাবৃত্তটো (2, 1) বিন্দুৰ মাজেৰে গ'লে, পৰাবৃত্তটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ১০ঃ এটা পৰাবৃত্তৰ নিয়ামিকাৰ সমীকৰণ $2x + y = 1$, নাভি (1, 2) আৰু উৎকেন্দ্ৰতা $\sqrt{3}$ হ'লে, পৰাবৃত্তটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

*** ***** ***

অধ্যায় ৬ ঃ ত্রিমাত্রিক জ্যামিতি

অধ্যায় গাঁথনি

৬.১ উদ্দেশ্য
৬.২ পৰিচয়
৬.৩ ত্রিমাত্রাত আয়তীয় কার্টীয় স্থানাংক
৬.৪ মূল বিন্দুৰ পৰিৱর্তন (অক্ষৰ দিশ পৰিৱর্তন নকৰাকৈ)
৬.৫ দুটা বিন্দুৰ মাজৰ দূৰত্ব
৬.৬ বিভাজন সূত্র
৬.৭ ৰেখাৰ দিশাংক
৬.৮ ৰেখাৰ দিশানুপাত
৬.৯ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
৬.১০ অধিক জানিবলৈ
৬.১১ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
৬.১২ আৰ্হি প্রশ্ন

৬.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

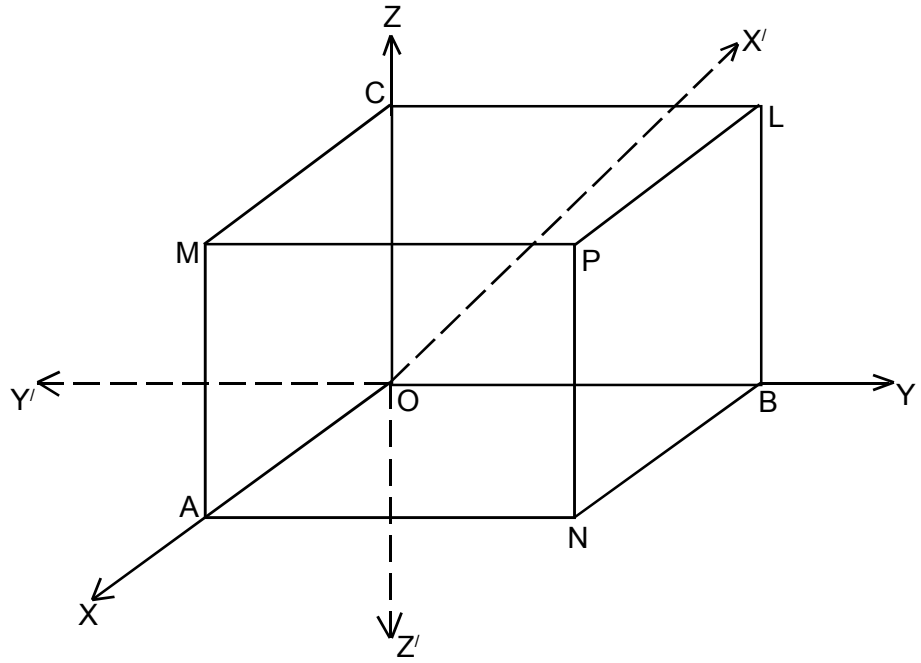
- ত্রিমাত্রাত স্থানাংক অক্ষ ব্যাখ্যা কৰিব পাৰিব
- দুটা বিন্দুৰ মাজৰ দূৰত্ব নির্ধাৰণ কৰিব পাৰিব আৰু নির্দিষ্ট অনুপাতত দুটা সংযোগী ৰেখাখণ্ডক বিভাজন কৰিব পাৰিব
- ৰেখাৰ দিশাংক আৰু দিশানুপাত সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

৬.২ পৰিচয়

প্রথম অধ্যায়ত আমি দ্বিমাত্রিক জ্যামিতি সম্বন্ধে আলোচনা কৰিছোঁ। এই অধ্যায়ত আমি অন্তৰিক্ষত থকা স্থানাংক প্রণালী আৰু তাত থকা বিন্দুৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম। লগতে আমি অন্তৰিক্ষত থকা দুটা বিন্দুৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিয়াম, দুটা বিন্দু সংলগ্নকাৰী ৰেখাখণ্ডক এটা নির্দিষ্ট অনুপাতত অন্তঃভাৱে/বহির্ভাৱে বিভক্ত কৰা বিন্দুৰ অৱস্থান উলিয়াম।

৬.৩ ত্রিমাত্রাত আয়তীয় কার্টীয় স্থানাংক

অন্তৰিক্ষত থকা (আমাৰ চিনাকি ত্রিমাত্রাৰ অন্তৰিক্ষ) যিকোনো স্থিৰ বিন্দু Oৰ মাজেৰে চিত্রত দেখুওৱাৰ দৰে তিনিডাল পৰস্পৰ লম্ব সৰলৰেখা $X'OX$, $Y'OY$ আৰু $Z'OZ$ টনা হ'ল।



চিত্র ঃ ৬.১

ইহঁতক ক্রমে x-অক্ষ আৰু y-অক্ষ বুলি কোৱা হয়। Oক মূল বিন্দু বুলি কোৱা হয়। প্রথানুযায়ী OX, OY, OZৰ দিশক নির্দিষ্ট অক্ষ তিনিডালৰ ধনাত্মক দিশ আৰু OX′, OY′, OZ′ক ঋণাত্মক দিশ বুলি কোৱা হয়। পৰস্পৰ লম্ব এই তিনিডাল অক্ষক স্থানাংক অক্ষ বুলি কোৱা হয়। এই স্থানাংক অক্ষ তিনিডালৰ পৰা তিনিখন পৰস্পৰ লম্ব সমতল YOZ, ZOX, XOY পোৱা যায়। ইহঁতক স্থানাংক সমতল বোলে। YOZ সমতলত y আৰু z অক্ষ দুডাল আছে। ইয়াক yz-সমতল (বা x-সমতল, x-অক্ষ এই সমতলৰ ওপৰত লম্ব) বুলিও কোৱা হয়। YOX সমতলক zx-সমতল (বা y-সমতল) আৰু XOY সমতলক xy-সমতল (বা z-সমতল) বুলি কোৱা হয়।

ধৰা হ'ল, অন্তৰিক্ষত P এটা বিন্দু। P বিন্দুৰ মাজেৰে YOZ, ZOX, XOY সমতল তিনিখনৰ সমান্তৰালকৈ তিনিখন সমতল অংকন কৰা হ'ল আৰু ইহঁতে ক্রমে XX′, YY′, ZZ′ স্থানাংক অক্ষ তিনিডালক A, B, C বিন্দুত কাটিছে। স্থানাংক সমতল তিনিখনৰ সৈতে এই সমতল তিনিখনে এটা আয়তীয় চৌপলৰ সৃষ্টি কৰে আৰু ইয়াৰ তিনিটা প্রান্ত হ'ল OA, OB, OC আৰু OP এডাল কর্ণ। তেনেহ'লে P বিন্দুটোৰ অৱস্থান জনা যাব যেতিয়া দিশযুক্ত ৰেখাখণ্ড OA, OB, OC (বা সিহঁতৰ সমতুল্য ৰেখাখণ্ড) মান আৰু চিহ্নত দিয়া থাকে।

ধৰা হ'ল, $OA = LP = BN = CM = x$,

$OB = MP = AN = CL = y$,

$OC = NP = AM = BL = z$

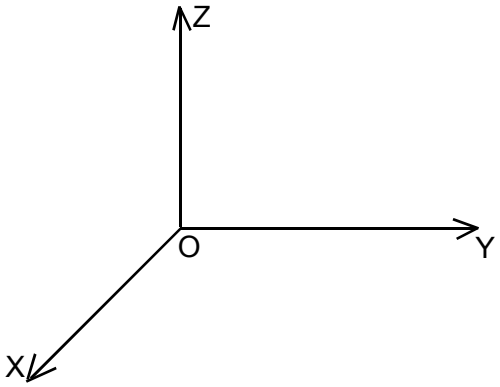
ইয়াত x, y, z বাস্তৱ সংখ্যা। ইহঁত ধনাত্মক বা ঋণাত্মক বা শূন্য হ'ব পাৰে। x ধনাত্মক হ'ব যদি A বিন্দুটো x-অক্ষৰ ধনাত্মক ফাল OX অত থাকে, x ঋণাত্মক হ'ব যদি ই ঋণাত্মক ফাল OX′ত থাকে। x শূন্য হ'ব যদি A বিন্দুটো মূল বিন্দু Oৰ লগত মিলি যায়। এই ক্ষেত্রত P বিন্দুটো

yz-সমতলত থাকিব আৰু OP কর্ণবিশিষ্ট আয়তীয় চৌপলটো yz-সমতলত থকা এটা আয়তলৈ পৰিৱর্তিত হ'ব যাৰ এডাল কর্ণ হ'ব OP। মন কৰিবলগীয়া যে OA ৰেখাখণ্ডৰ (বা সমতুল্যৰ) দৈর্ঘ্য |x|. আন দুটা বাস্তৱ সংখ্যা y আৰু zৰ বাবেও সেয়াই হ'ব। অন্তৰিক্ষত থকা প্রতিটো বিন্দু Pৰ বাবে বাস্তৱ সংখ্যাৰ এটা অদ্বিতীয় ত্রয়ী (x, y, z) থাকিব। বিপৰীতটোৱো সত্য হ'ব, অর্থাৎ এটা অদ্বিতীয় ত্রয়ীৰ বাবে অন্তৰিক্ষত এটা বিন্দু থাকিব। X′OX, Y′OY আৰু Z′OZ স্থানাংক অক্ষ সাপেক্ষে Pৰ আয়তীয় কার্টীয় স্থানাংক (x, y, z) বুলি কোৱা হয়। P(x, y, z) বুলি ক'লে আমি বুজিম যে Pৰ স্থানাংক (x, y, z), বা P বিন্দুটো (x, y, z) বুলি ক'লে আমি বুজিম যে P বিন্দুৰ স্থানাংক (x, y, z). (x, y, z) এটা বিন্দু বুলি ক'লে বুজিম যে এটা বিন্দুৰ স্থানাংক (x, y, z). স্পষ্টতঃ O বিন্দুৰ বাবে, L, M, N বিন্দু তিনিটা Oৰ লগত মিলি যাব। গতিকে x = 0, y = 0, z = 0. গতিকে মূল বিন্দু Oৰ স্থানাংক (0, 0, 0). চিত্র ৬.১ৰ পৰা আমি পাওঁ যে PL, PM, PN হ'ল P বিন্দুৰ পৰা ক্রমে YOZ, ZOX, XOY স্থানাংক সমতলৰ ওপৰত টনা লম্ব। গতিকে Pৰ স্থানাংক x, y, z হ'ল ক্রমে yz-সমতল, zx-সমতল আৰু xy-সমতলৰ পৰা P বিন্দুৰ লম্ব দূৰত্ব (যথোপযুক্ত চিত্রসহ)। আকৌ $\angle OCP = 90^0$; গতিকে z = OC আৰু ই z-অক্ষৰ ওপৰত OPৰ (লম্ব) অভিক্ষেপ। সেইদৰে x = OA, আৰু ই x-অক্ষৰ ওপত OP ৰ অভিক্ষেপ আৰু y=OB আৰু ই y-অক্ষৰ ওপৰত OPৰ অভিক্ষেপ।

স্থানাংক সমতল তিনিখন সমস্ত অন্তৰিক্ষক আঠোটা অংশত ভাগ কৰে। প্রত্যেক অংশক অষ্টাংশ (Octant) বুলি কোৱা হয়। স্থানাংকৰ চিহ্নই বিন্দুটো কোণটো অষ্টাংশত থাকে সেয়া নির্ধাৰণ কৰে। তলৰ সাৰণীখনত বিভিন্ন অষ্টাংশত স্থানাংকৰ চিন দিয়া হ'ল।

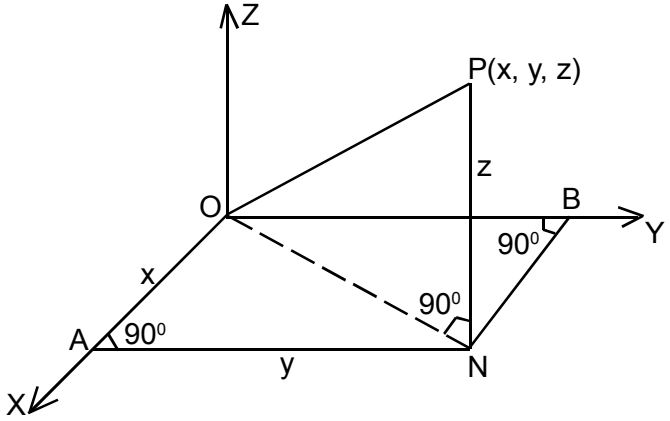
অষ্টাংশ / স্থানাংক	I OXYZ	II OX′YZ	III OX′Y′Z	IV OXY′Z	V OXYZ′	VI OX′YZ′	VII OX′Y′Z′	VIII OXY′Z′
x	+	–	–	+	+	–	–	+
y	+	+	–	–	+	+	–	–
z	+	+	+	+	–	–	–	–

উপৰিউক্ত প্রণালীৰ সহায়ত তিনিডাল পৰস্পৰ লম্ব অক্ষ সাপেক্ষে অন্তৰিক্ষত থকা কোনো বিন্দুৰ অৱস্থান নির্ণয় কৰিব পাৰি। এই প্রণালীক আয়তীয় কার্টেজীয় স্থানাংক প্রণালী বুলি কোৱা হয়। চিত্র ৬.১ত স্থানাংক অক্ষৰ ধনাত্মক দিশ OX, OY, OZ এনেভাৱে লোৱা হৈছে যে যদিহে এটা সোঁহতীয়া স্ক্রু OXৰ দিশৰ পৰা OYৰ দিশলৈ ঘূৰোৱা হয়, তেনেহ'লে স্ক্রুহেডটো OZৰ দিশত চলাচল কৰিব। চিত্র ৬.১ত দেখুওৱা প্রণালীক সোঁহতীয়া স্থানাংক প্রণালী বুলি কোৱা হয়।



চিত্র ঃ ৬.২

আনহাতেদি যদি চিত্র ৬.২ত দেখুওৱাৰ দৰে ধনাত্মক দিশ লোৱা হয়, স্থানাংক প্রণালীক বাঁওহতীয়া বুলি কোৱা হয়। সামঞ্জস্যৰ বাবে আমি সোঁহতীয়া প্রণালীটো ল'ম।



চিত্র ঃ ৬.৩

ধৰা হ'ল, অন্তৰিক্ষত P(x, y, z) এটা বিন্দু। P বিন্দুৰ পৰা xy-সমতলত PN লম্ব টনা হ'ল। চিত্রত (চিত্র ৬.৩) দেখুওৱাৰ দৰে NA হ'ল x-অক্ষৰ ওপৰত লম্ব আৰু NB হ'ল y-অক্ষৰ ওপৰত লম্ব। গতিকে আমি দেখিলোঁ যে OA = BN = x, OB = AN = y আৰু NP = z. স্থানাংকৰ এই সৰলীকৃত চিত্র প্রদর্শন যথেষ্ট সুবিধাজনক। মন কৰিবলগীয়া যে xy-সমতলত থকা প্রতিডাল ৰেখাৰ ওপৰত PN লম্ব। গতিকে $\angle ONP$ এটা সমকোণ।

OPN সমকোণী ত্রিভুজৰ পৰা, $OP^2 = ON^2 + NP^2$

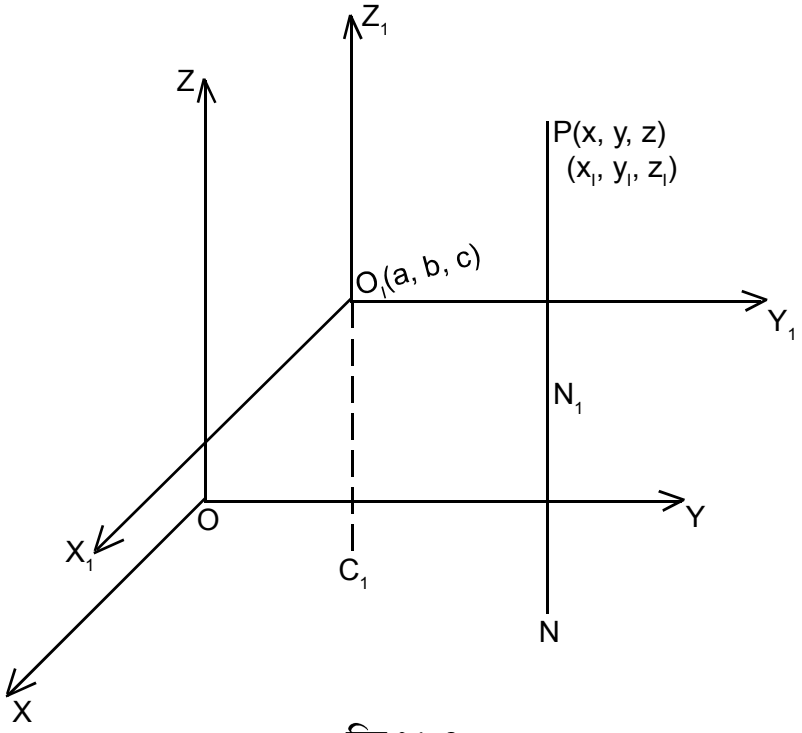
OAN সমকোণী ত্রিভুজৰ পৰা, $ON^2 = OA^2 + AN^2$

গতিকে, $OP^2 = OA^2 + AN^2 + NP^2 = x^2 + y^2 + z^2$

গতিকে, $OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

গতিকে, মূল বিন্দু আৰু যিকোনো বিন্দু P(x, y, z)ৰ মাজৰ দূৰত্ব = $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

৬.৪ মূল বিন্দুৰ পৰিৱৰ্তন (অক্ষৰ দিশ সলনি নকৰাকৈ)



চিত্ৰ ঃ ৬.৪

ধৰা হ'ল, স্থানাংক অক্ষ OX, OY, OZ সাপেক্ষে O_1 বিন্দুৰ স্থানাংক (a, b, c). O_1 বিন্দুৰ মাজেৰে OX, OY, OZ পুৰণি অক্ষৰ সমান্তৰালকৈ একে দিশত নতুন স্থানাংক অক্ষ O_1X_1, O_1Y_1, O_1Z_1 লোৱা হ'ল। ধৰা হ'ল, অন্তৰিক্ষত P যিকোনো এটা বিন্দু। ধৰা হ'ল, পুৰণি অক্ষ সাপেক্ষে P বিন্দুৰ স্থানাংক (x, y, z) আৰু নতুন অক্ষ সাপেক্ষে P বিন্দুৰ স্থানাংক (x_1, y_1, z_1)। OZৰ সমান্তৰালকৈ (আৰু সেয়ে O_1Z_1ৰ সমান্তৰালকৈ) Pৰ মাজেৰে এডাল ৰেখা টনা হ'ল। ই XOY আৰু $X_1O_1Y_1$, এই দুয়োখন সমতলৰ ওপৰত লম্ব হ'ব। ধৰা হ'ল, ৰেখাডালে সমতল দুখনক ক্ৰমে N আৰু N_1 বিন্দুত কাটে।

গতিকে, $NP = z$, $N_1P = z_1$

$C_1O_1 = O_1(a, b, c)$ বিন্দুৰ পুৰণি অক্ষ সাপেক্ষে z-স্থানাংক = c.

গতিকে, $z = NP = NN_1 + N_1P = C_1O_1 + N_1P = c + z_1$

$\therefore z_1 = z - c$

বাকী স্থানাংক সমতলৰ ওপৰত লম্ব টানি আমি পাওঁ, $x_1 = x - a$, আৰু $y_1 = y - b$

গতিকে, $O_1(a, b, c)$ক মূল বিন্দু হিচাপে P(x, y, z) বিন্দুৰ নতুন স্থানাংক ক্ৰমে

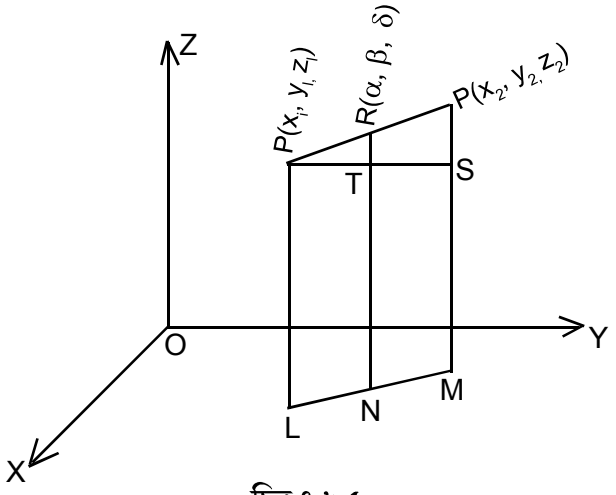
$x_1 = x - a$, $y_1 = y - b$ আৰু $z_1 = z - c$

৬.৫ দুটা বিন্দুৰ মাজৰ দূৰত্ব

ধৰা হ'ল, অন্তৰিক্ষত $P(x_1, y_1, z_1)$ আৰু $Q(x_2, y_2, z_2)$ যিকোনো দুটা বিন্দু। অক্ষৰ দিশ সলনি নকৰাকৈ যদি আমি মূল বিন্দুটো P বিন্দুলৈ স্থানান্তৰিত কৰোঁ, তেনেহ'লে, Q বিন্দুৰ নতুন স্থানাংক হ'ব $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. গতিকে নতুন অক্ষ সাপেক্ষে, P হ'ল মূল বিন্দু আৰু Q বিন্দুৰ স্থানাংক $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. গতিকে, চিত্ৰ ৬.৩ৰ শেহৰ পিনে থকা ফলৰ সহায়ত আমি পালোঁ,

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

৬.৬ বিভাজন সূত্ৰ



চিত্ৰ ঃ ৬.৫

ধৰা হ'ল, $P(x_1, y_1, z_1)$ আৰু $Q(x_2, y_2, z_2)$ অন্তৰিক্ষত যিকোনো দুটা বিন্দু। ধৰা হ'ল, R বিন্দুৱে P আৰু Q সংলগ্ন ৰেখাখণ্ডক অন্তঃভাৱে m : n অনুপাতত ভাগ কৰে (চিত্ৰ ৬.৫)। আমি Rৰ স্থানাংক (α, β, γ) উলিয়াব লাগে।

xy-সমতলত PL, QM, RN লম্ব টনা হ'ল। তেনেহ'লে চিত্ৰত দেখুওৱাৰ দৰে L, M, N বিন্দু তিনিটা xy-সমতলত এডাল ৰেখাত থাকিব। আকৌ, Pৰ মাজেৰে LM ৰেখাৰ সমান্তৰালকৈ এডাল ৰেখা টনা হ'ল। ই QM আৰু RN অক ক্ৰমে S আৰু T বিন্দুত লম্বভাৱে কাটে। PRT আৰু PQS সদৃশ ত্ৰিভুজৰ পৰা, $\frac{PR}{PQ} = \frac{TR}{SQ}$

আকৌ, দিয়া আছে যে $\frac{PR}{RQ} = \frac{m}{n}$

$$\Rightarrow \frac{PR}{PR + RQ} = \frac{m}{m + n}$$

$$\Rightarrow \frac{PR}{PQ} = \frac{m}{m + n}$$

গতিকে আমি পালোঁ, $\frac{TR}{SQ} = \frac{m}{m+n}$

$$\Rightarrow \frac{NR - NT}{MQ - MS} = \frac{m}{m+n}$$

$$\Rightarrow \frac{NR - LP}{MQ - LP} = \frac{m}{m+n}$$

$$\Rightarrow \frac{\gamma - z_1}{z_2 - z_1} = \frac{m}{m+n}$$

$$\Rightarrow (\gamma - z_1)(m + n) = m(z_2 - z_1)$$

$$\Rightarrow (m + n)\gamma = m(z_2 - z_1) + (m + n)z_1$$

$$\Rightarrow (m + n)\gamma = (m + n)\gamma = mz_2 + nz_1$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}$$

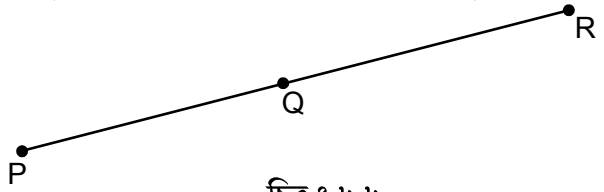
সেইদৰে yz-সমতল আৰু zx-সমতলৰ ওপৰত লম্ব টানি আমি পাওঁ,

$$\alpha = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n},\ \beta = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

গতিকে R বিন্দুৰ স্থানাংক, $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}\right)$

যদি R বিন্দুৱে $P(x_1, y_1, z_1)$ আৰু $Q(x_2, y_2, z_2)$ বিন্দুদ্বয় সংযোগী ৰেখাখণ্ডক বহির্ভাৱে বিভক্ত কৰে, তেনেহ'লে সহজে দেখুৱাব পাৰি যে R বিন্দুৰ স্থানাংক m : n,

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m-n}\right)$$



চিত্ৰ ঃ ৬.৬

ওপৰৰ ফল দুটা তলত দিয়া ধৰণে একেলগে লিখিব পাৰি, যদি R বিন্দুৱে $P(x_1, y_1, z_1)$ আৰু $Q(x_2, y_2, z_2)$ বিন্দু সংযোগী ৰেখাখণ্ডক $\lambda : 1$ $(\lambda \neq 1)$ অনুপাতত ভাগ কৰে, তেনেহ'লে, R বিন্দুৰ স্থানাংক,

$$\left(\frac{\lambda x_2 + x_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda y_2 + y_1}{\lambda + 1}, \frac{\lambda z_2 + z_1}{\lambda + 1}\right)$$

যদি λ ধনাত্মক, R বিন্দুটো P আৰু Qৰ মাজত থাকে আৰু বিভাজনটো অন্তঃ, আৰু যদি λ ঋণাত্মক, R বিন্দুটো P আৰু Qৰ একে পিনে থাকে আৰু বিভাজনটো বহিঃ।

টোকা ঃ

1) PQৰ মধ্য বিন্দুৰ স্থানাংক, $\left(\frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2}, \frac{z_2+z_1}{2}\right)$

2) এটা ত্রিভুজৰ শীর্ষ বিন্দুৰ স্থানাংক (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) আৰু (x_3, y_3, z_3) হ'লে ভাৰকেন্দ্ৰৰ স্থানাংক,

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

মন্তব্য ঃ

1) x-অক্ষৰ প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে y = 0, z = 0; y-অক্ষৰ প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে z = 0, x = 0; z-অক্ষৰ প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে x = 0, y = 0। গতিকে x-অক্ষত থকা কোনো স্বেচ্ছ বিন্দুৰ স্থানাংক হ'ব (x, 0, 0) আকাৰৰ। সেইদৰে x-অক্ষ আৰু y-অক্ষত থকা বিন্দুৰ বাবে হ'ব।

2) yz-সমতলত থকা যিকোনো বিন্দুৰ বাবে x = 0; zx-সমতলত থকা যিকোনো বিন্দুৰ বাবে y = 0, আৰু xy-সমতলত থকা যিকোনো বিন্দুৰ বাবে z = 0।

3) আমি তিনিওডাল স্থানাংক অক্ষ পৰস্পৰ লম্ব হিচাপে লৈছোঁ। এটা নির্দিষ্ট বিন্দুৰ (মূল বিন্দুৰ) মাজেৰে যোৱা তিনিডাল অসামতলিক (Non-Coplanar) ৰেখাক অক্ষ হিচাপে লৈও অন্তৰিক্ষত থকা এটা বিন্দুৰ অৱস্থান নির্ণয় কৰিব পাৰি।এই অক্ষ তিনিডাল তির্য্যক। আমি আমাৰ আলোচনাত তির্য্যক অক্ষ ব্যৱহাৰ নকৰোঁ।

পৃষ্ঠৰ সমীকৰণ ঃ x = 0 সমীকৰণটো লোৱা হ'ল। yz-সমতলত থকা প্ৰত্যেক বিন্দুৰ স্থানাংকই এই সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে (ইয়াৰ বাহিৰত থকা কোনো বিন্দুৰে সিদ্ধ নকৰে)। আমি কওঁ যে x = 0 সমীকৰণে yz-সমতল বুজায়, অর্থাৎ yz-সমতলৰ সমীকৰণ x = 0. সেইদৰে y = 0 সমীকৰণে zx-সমতল বুজায় আৰু z = 0 সমীকৰণে xy-সমতল বুজায়।

দেখা গ'ল যে স্থানাংক সমতল তিনিখনৰ সমীকৰণ হ'ল x = 0, y = 0 আৰু z = 0।

এতিয়া $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ সমীকৰণটো লোৱা হ'ল। আমি জানো যে মূল বিন্দুৰ পৰা (x, y, z) বিন্দুৰ দূৰত্ব $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ । মূল বিন্দুৰ পৰা a দূৰত্বত থকা প্ৰত্যেক বিন্দুৰ বাবে উপৰিউক্ত সমীকৰণটো সত্য। কিন্তু এনেধৰণৰ সকলো বিন্দুৰ কক্ষপথ এটা গোলক, যাৰ কেন্দ্ৰ হ'ল মূল বিন্দু আৰু ব্যাসার্ধ 'a'।

গতিকে $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ সমীকৰণে এটা গোলকৰ সমীকৰণ বুজায়, যাৰ কেন্দ্ৰ হ'ল মূল বিন্দু আৰু ব্যাসার্ধ 'a'।

সাধাৰণভাৱে, এটা চলক বিন্দুৰ চলন্ত স্থানাংক (x, y, z)ৰ এটা বা ততোধিক জড়িত থকা সমীকৰণে এখন পৃষ্ঠৰ বা পৃষ্ঠ-প্ৰণালীৰ সমীকৰণ বুজায়। ইয়েই চলক বিন্দুটোৰ কক্ষপথ।

অন্তৰিক্ষত থকা বক্ৰৰ সমীকৰণ ঃ $f(x, y, z) = 0$ আৰু $g(x, y, z) = 0$ সমীকৰণ দুটাই পৃথকভাৱে দুখন পৃষ্ঠৰ সমীকৰণ বুজায়। দুয়োখন পৃষ্ঠৰ উমৈহতীয়া বিন্দুবোৰে একেলগে দুয়োটা সমীকৰণ সিদ্ধ কৰে। এই উমৈহতীয়া বিন্দুবোৰে অন্তৰিক্ষত এডাল বক্ৰ গঠন কৰে। দুয়োখন পৃষ্ঠৰ কটাকটি কৰা বক্ৰ হ'ল এই বক্ৰ। গতিকে সহসমীকৰণ $f(x, y, z) = 0$ আৰু $g(x, y, z) = 0$এ অন্তৰিক্ষত এডাল বক্ৰ বুজায়। এই বক্ৰডালত $f = 0$ আৰু $g = 0$ পৃষ্ঠ দুখনে কটাকটি কৰে।

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ ঃ $(-2, -1, 7)$ বিন্দুটো কোন অষ্টাংশত আছে নির্ধাৰণ কৰক।

সমাধান ঃ $(-2, -1, 7)$ বিন্দুৰ বাবে, $x = -2 < 0$, $y = -1 < 0$, $z = 7 > 0$.

$\therefore$ $(-2, -1, 7)$ বিন্দুটো $OX'Y'Z$ অষ্টাংশত আছে। (অষ্টাংশ III)

উদাহৰণ ২ ঃ $A(3, 4, 5)$ আৰু $B(-1, 3, -7)$ বিন্দু দুটা দিয়া আছে। চলমান বিন্দু Pৰ কক্ষপথ নির্ণয় কৰক যাতে ই A আৰু Bৰ পৰা সমদূৰৱৰ্তী।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, চলমান বিন্দু Pৰ স্থানাংক (x, y, z)। যিহেতু $P(x, y, z)$ বিন্দুটো $A(3, 4, 5)$ আৰু $B(-1, 3, -7)$ বিন্দুৰ পৰা সমদূৰৱৰ্তী, গতিকে,

$$PA = PB$$

$$\Rightarrow PA^2 = PB^2$$

$$\Rightarrow (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = (x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 7)^2$$

$$\Rightarrow (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) + (z^2 - 10z + 25) = (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 + 14z + 49)$$

$$\Rightarrow -8x - 2y - 24z - 9 = 0$$

$$\Rightarrow 8x + 2y + 24z + 9 = 0$$

এইটোৱেই Pৰ কক্ষপথৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।

উদাহৰণ ৩ ঃ $A(-2, 4, 7)$ আৰু $B(3, -5, 8)$ সংযোগী ৰেখাই xy-সমতলক যিটো বিন্দুত কাটে, সেই বিন্দুটো নির্ধাৰণ কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $A(-2, 4, 7)$ আৰু $B(3, -5, 8)$ বিন্দুদ্বয় সংযোগী ৰেখাই xy-সমতলক P বিন্দুত কাটে। যিহেতু P বিন্দুটো xy-সমতলত আছে, ধৰা হ'ল P বিন্দুৰ স্থানাংক $(\alpha, \beta, 0)$।

ধৰা হ'ল, $AP : PB = \lambda : 1$; গতিকে, $\frac{\lambda.8 + 1.7}{\lambda + 1} = 0$

$$\Rightarrow 8\lambda + 7 = 0$$

$$\Rightarrow 8\lambda = -7$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{7}{8}$$

গতিকে, $\alpha = \frac{\lambda.3+1.(-2)}{\lambda+1}$

$= \frac{\left(-\frac{7}{8}\right).3-2}{-\frac{7}{8}+1}$

$= \frac{-\frac{37}{8}}{\frac{1}{8}}$

$= -37$

আৰু $\beta = \frac{\lambda.(-5)+1.4}{\lambda+1}$

$= \frac{\left(-\frac{7}{8}\right).(-5)+4}{-\frac{7}{8}+1}$

$= \frac{\frac{67}{8}}{\frac{1}{8}}$

$= 67$

$\therefore$ P বিন্দুৰ স্থানাংক (–37, 67, 0)

গতিকে A আৰু B সংযোগী ৰেখাই xy সমতলক P(–37, 67, 0) বিন্দুত কাটে।

উদাহৰণ ৩ঃ A(1, 2, 3), B(–1, –2, –1), C(2, 3, 2) আৰু D হ'ল স্থানাংক নির্ণয় কৰক। লগতে দেখুওৱাক যে ABCD আয়ত নহয়।

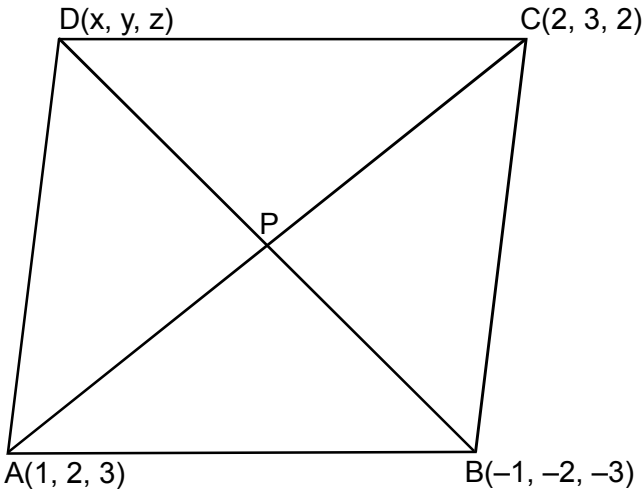
সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, AC আৰু BD কর্ণ দুডালে P বিন্দুত কটাকটি কৰে। তেনেহ'লে, প্রতিডাল কর্ণৰ মধ্য বিন্দু P।

যিহেতু P, ACৰ মধ্য বিন্দু, গতিকে Pৰ স্থানাংক,

$\left(\frac{1+2}{2}, \frac{2+3}{2}, \frac{3+2}{2}\right)$, অর্থাৎ, $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

ধৰা হ'ল, Dৰ স্থানাংক (x, y, z). এতিয়া $P\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$, BDৰো মধ্যবিন্দু,

য'ত B(–1, –2, –1) আৰু D(x, y, z)। গতিকে,



চিত্র ঃ ৬.৭

$$\frac{-1+x}{2}=\frac{3}{2},\ \frac{-2+y}{2}=\frac{5}{2},\ \frac{-1+z}{2}=\frac{5}{2}$$

$\Rightarrow$ x – 1 = 3, y – 2 = 5, z – 1 = 5

$\Rightarrow$ x = 4, y = 7, z = 6

গতিকে, শীর্ষ বিন্দু Dৰ স্থানাংক (4, 7, 6).

এতিয়া, $AC = \sqrt{(1-2)^2+(2-3)^2+(3-2)^2}$

$= \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$

আৰু $BD = \sqrt{(4+1)^2+(7+2)^2+(6+1)^2}$

$= \sqrt{25+81+49} = \sqrt{55}$

যিহেতু $AC \neq BD$, ABCD আয়ত নহয়।

উদাহৰণ ৫ঃ y-অক্ষত এনে এটা বিন্দু নির্ণয় কৰক যিটো (0, 3, –1) আৰু (0, 3, –1) বিন্দুৰ পৰা সমদূৰৱৰ্তী।

সমাধান ঃ y-অক্ষত থকা যিকোনো বিন্দুৰ স্থানাংক (0, y, 0)আকাৰৰ। যদি এই বিন্দুটো (0, 3, –1) আৰু (5, –4, 2) বিন্দুৰ পৰা সমদূৰৱৰ্তী হয়, তেনেহ'লে,

$$\sqrt{(0-0)^2+(y-3)^2+(0+1)^2}=\sqrt{(0-5)^2+(y+4)^2+(0-2)^2}$$

$\Rightarrow (y-3)^2 + 1 = 25 + (y+4)^2 + 4$

$\Rightarrow y^2 - 6y + 9 + 1 = y^2 + 8y + 16 + 29$

$\Rightarrow -6y - 8y = 45 - 10$

$\Rightarrow -14y = 35 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}$

$\therefore$ y-অক্ষত থকা নির্ণেয় বিন্দুটো $\left(0, -\frac{5}{2}, 0\right)$.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ ঃ তলৰ বিন্দুবোৰ কোনটো অষ্টাংশত থাকে নির্ণয় কৰক।

a) (–2, –1, 5) b) (1, 1, 7) c) (–1, –1, –2)

প্রশ্ন নং ২ ঃ O(0, 0, 0), A(a, 0, 0), B(0, b, 0) আৰু C(0, 0, c) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা গোলকৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক। লগতে গোলকটোৰ ব্যাসার্ধও নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ ঃ এটা ত্রিভুজৰ শীর্ষ বিন্দু তিনিটাৰ স্থানাংক $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ আৰু $C(x_3, y_3, z_3)$ হ'লে ভাৰকেন্দ্র Gৰ স্থানাংক নির্ণয় কৰক।

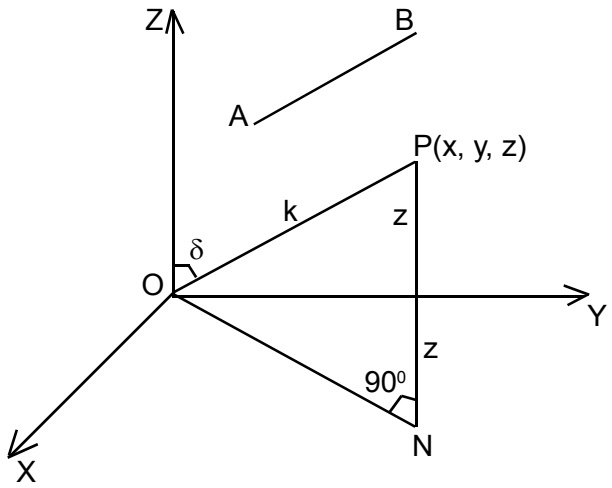
প্রশ্ন নং ৪ ঃ P(–2, 4, 7) আৰু Q(3, –5, 8) বিন্দুদ্বয় সংযোগী ৰেখাই x-স্থানাংক সমতলক যিটো বিন্দুত কাটে, তাৰ স্থানাংক নির্ধাৰণ কৰক।

৬.৭ ৰেখাৰ দিশাংক

অন্তৰিক্ষত থকা এডাল ৰেখাই যদি x-অক্ষ, y-অক্ষ আৰু z-অক্ষৰ ধনাত্মক দিশৰ লগত ক্রমে α, β, γ কোণ কৰে, তেনেহ'লে, α, β, γক ৰেখাডালৰ দিশ কোন (Direction Angles) বুলি কোৱা হয় আৰু $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ক ৰেখাডালৰ দিশাংক (Direction Cosines) বুলি কোৱা হয়। স্পষ্টতঃ সকলো সমান্তৰাল ৰেখাৰ দিশাংক একে।

যিহেতু x-অক্ষই (বা x-অক্ষৰ সমান্তৰাল যিকোনো ৰেখাই) স্থানাংক অক্ষৰ লগত 0^0, 90^0, 90^0 কোণ কৰে, গতিকে স্থানাংক অক্ষৰ দিশাংক 1, 0, 0. সেইদৰে y-অক্ষৰ (বা ইয়াৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ) দিশাংক 0, 1, 0, আৰু z-অক্ষৰ (বা ইয়াৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ) দিশাংক 0, 0, 1।

এডাল ৰেখাৰ দিশাংকৰ মাজৰ সম্বন্ধ ঃ



চিত্র ঃ ৬.৮

ধৰা হ'ল, অন্তৰিক্ষত AB যিকোনো এডাল ৰেখা আৰু ধৰা হ'ল, ৰেখাডালে ক্ৰমে OX, OY, OZৰ লগত α, β, γ কোণ কৰে। মূল বিন্দু Oৰ মাজেৰে ABৰ সমান্তৰালকৈ এডাল ৰেখা টনা হ'ল আৰু ধৰা হ'ল, এই ৰেখাডাল P(x, y, z) যিকোনো এটা বিন্দু। গতিকে OP ৰেখাডালে OX, OY, OZৰ লগত ক্ৰমে α, β, γ কোণ কৰে। ধৰা হ'ল, OP = k আৰু ধৰা হ'ল, P বিন্দুৰ পৰা xy-সমতলত টনা লম্ব PN. তেনেহ'লে NP = z আৰু $\angle OPN = \angle ZOP = \gamma$.

OPN ত্ৰিভুজৰ $\angle ONP = 90^0$, গতিকে, $NP = OP\cos\angle OPN \Rightarrow z = k\cos\gamma$

সেইদৰে yz-সমতল আৰু zx-সমতলৰ ওপৰত লম্ব টানি দেখুৱাব পাৰি যে,

$x = k\cos\alpha$ and $y = k\cos\beta$

আকৌ, $k^2 = OP^2 = x^2 + y^2 + z^2$

গতিকে, আমি পালোঁ, $k^2 = (k\cos\alpha)^2 + (k\cos\beta)^2 + (k\cos\gamma)^2$

অৰ্থাৎ, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

প্ৰত্যেক ৰেখাৰ দিশাংক জড়িত এইটো এটা সৰ্বজনীন সম্বন্ধ।

কেতিয়াবা ৰেখাৰ দিশাংক l, m, nৰেও বুজোৱা হয় (অৰ্থাৎ, $l = \cos\alpha$, $m = \cos\beta$, $n = \cos\gamma$)। তেতিয়া উপৰিউক্ত সম্বন্ধটো হ'বগৈ, $l^2 + m^2 + n^2 = 1$।

টোকা ঃ যদি Pৰ স্থানাংক (x, y, z), OP ৰেখাৰ দিশাংক l, m, n আৰু OP = k, তেনেহ'লে, x = lk, y = mk, z = nk। যদি OP = 1, Pৰ স্থানাংক (l, m, n).

৬.৮ ৰেখাৰ দিশানুপাত

যদি তিনিটা সংখ্যা এডাল ৰেখাৰ দিশাংকৰ সমানুপাতিক হয়, তেনেহ'লে সংখ্যা তিনিটাক দিশানুপাত (বা দিশ সংখ্যা) বুলি কোৱা হয়। a, b, c এডাল ৰেখাৰ দিশানুপাত হ'লে, ka, kb, kcও ৰেখাডালৰ দিশানুপাত হ'ব, k এটা অশূন্য ধ্ৰুৱক।

যদি এডাল ৰেখাৰ দিশানুপাত দিয়া থাকে, তেনেহ'লে আমি অতি সহজে ইয়াৰ দিশাংক উলিয়াব পাৰোঁ। ধৰা হ'ল, এডাল ৰেখাৰ দিশাংক l, m, n আৰু ৰেখাডালৰ দিশানুপাত a, b, c।

তেনেহ'লে, $\frac{l}{a} = \frac{m}{b} = \frac{n}{c} = k$ (ধৰা হ'ল)

$\therefore l = ak, m = bk, n = ck$

কিন্তু আমি জানো যে $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

$$\Rightarrow (ak)^2 + (bk)^2 + (ck)^2 = 1$$

$$\Rightarrow k^2(a^2 + b^2 + c^2) = 1$$

$$\Rightarrow k^2 = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$\Rightarrow k = \pm\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

গতিকে, $l = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $m = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $n = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

বা,

$l = -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $m = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $n = -\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

গতিকে এডাল ৰেখাৰ দিশানুপাত a, b, c হ'লে, ৰেখাডালৰ দিশাংক,

$\left(\frac{a}{\rho},\frac{b}{\rho},\frac{c}{\rho}\right)$ বা, $\left(-\frac{a}{\rho},-\frac{b}{\rho},-\frac{c}{\rho}\right)$, য'ত, $\rho = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

দৰাচলতে a, b, c দিশানুপাত ৰেখাৰ লগত দুডাল দিশযুক্ত ৰেখা জড়িত। এডালৰ দিশাংক $\frac{a}{\rho},\frac{b}{\rho},\frac{c}{\rho}$ আৰু আন ডালৰ দিশাংক $-\frac{a}{\rho},-\frac{b}{\rho},-\frac{c}{\rho}$। সাধাৰণতে আমি কোনো দিশ বিবেচনা নকৰি ৰেখাডাল লওঁ আৰু $\frac{a}{\rho},\frac{b}{\rho},\frac{c}{\rho}$ক দিশাংক হিচাপে লওঁ।

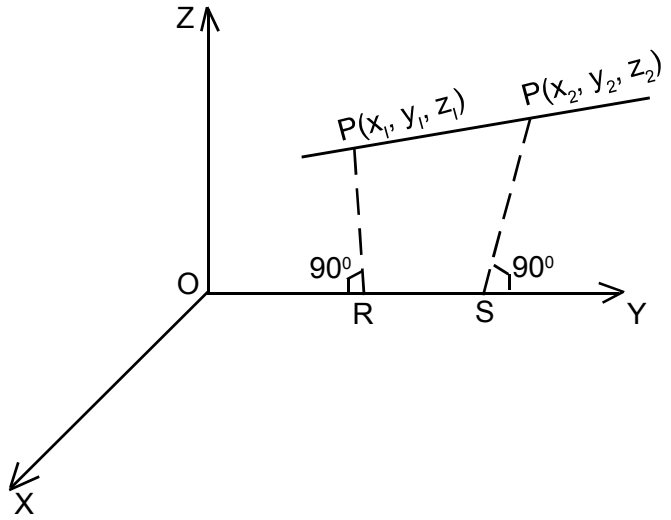
উদাহৰণ স্বৰূপে, যদি এডাল ৰেখাৰ দিশানুপাত 2, –2, 1,

তেনেহ'লে ইয়াৰ দিশাংক হ'ল,

$$\frac{2}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}},-\frac{2}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}},\frac{1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}$$

অর্থাৎ, $\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}$.

দুটা বিন্দু সংযোগী ৰেখাৰ দিশানুপাত ঃ



চিত্র ঃ ৬.৯

$P(x_1, y_1, z_1)$ আৰু $Q(x_2, y_2, z_2)$ বিন্দু দুটাৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাডাল লোৱা হ'ল। ধৰা হ'ল, ৰেখাডালে x-অক্ষ y-অক্ষ আৰু z-অক্ষৰ ধনাত্মক দিশৰ লগত α, β, γ কোণ কৰে। y-অক্ষৰ ওপৰত PR আৰু QS লম্ব টনা হ'ল। মন কৰিবলগীয়া যে সাধাৰণতে PR আৰু QS অ-সামতলিক ৰেখা।

এতিয়া, RS = OYৰ ওপৰত PQ ৰেখাখণ্ডৰ অভিক্ষেপ

$= PQ\cos\beta$ ($\therefore$ PQ ৰেখাই OYৰ লগত β কোণ কৰে)

$= k\cos\beta$ (যেতিয়া $k = PQ$)

কিন্তু $RS = OS - OR = y_2 - y_1$

$\therefore k\cos\beta = y_2 - y_1$

সেইদৰে ক্ৰমে OX আৰু OZৰ ওপৰত PQৰ অভিক্ষেপ লৈ আমি পাওঁ,

$k\cos\alpha = x_2 - x_1$ আৰু $k\cos\gamma = z_2 - z_1$

গতিকে আমি পালোঁ, $\dfrac{\cos\alpha}{x_2 - x_1} = \dfrac{\cos\beta}{y_2 - y_1} = \dfrac{\cos\gamma}{z_2 - z_1} = \dfrac{1}{k}$

গতিকে আমি পালোঁ যে $P(x_1, y_1, z_1)$ আৰু $Q(x_2, y_2, z_2)$ বিন্দু দুটাৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাৰ দিশানুপাত $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$। আকৌ, ৰেখাডালৰ দিশাংক,

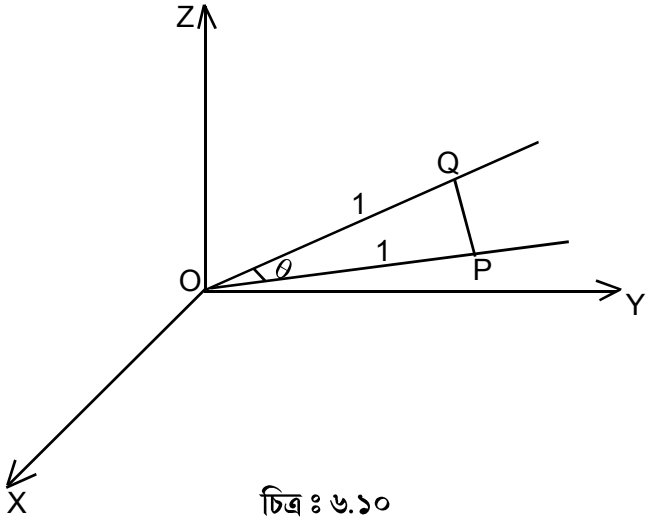
$$\frac{x_2 - x_1}{k}, \frac{y_2 - y_1}{k}, \frac{z_2 - z_1}{k}$$

য'ত, $k^2 = PQ^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$.

উদাহৰণস্বৰূপে, ধৰা হ'ল, এডাল ৰেখা (2, 0, –1) আৰু (–3, 2, 7) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়। তেনেহ'লে ইয়াৰ দিশানুপাত $-3-2, 2-0, 7-(-1)$ অৰ্থাৎ, –5, 2, 8; আকৌ, যিহেতু,

$k = \sqrt{(-5)^2 + 2^2 + 8^2} = \sqrt{93}$, ৰেখাডালৰ দিশাংক, $-\dfrac{5}{\sqrt{93}}, \dfrac{2}{\sqrt{93}}, \dfrac{8}{\sqrt{93}}$.

দুডাল ৰেখাৰ দিশাংক দিয়া আছে। ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণ উলিয়াব লাগে ঃ



চিত্ৰ ঃ ৬.১০

ধৰা হ'ল আন্তৰিক্ষত থকা ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণ θ, আৰু ৰেখা দুডালৰ দিশাংক ক্ৰমে l_1, m_1, n_1 আৰু l_2, m_2, n_2।

মূল বিন্দু Oৰ মাজেৰে ওপৰৰ ৰেখা দুডালৰ সমান্তৰালকৈ দুডাল ৰেখা টনা হ'ল। ৰেখাডালত P আৰু Q বিন্দু দুটা এনেদৰে লোৱা হ'ল যাতে OP = OQ = 1। তেনেহ'লে, OP আৰু OQৰ মাজৰ কোণ θ। যিহেতু OPৰ দিশাংক l_1, m_1, n_1 আৰু OP = 1, Pৰ স্থানাংক (l_1, m_1, n_1)। আকৌ যিহেতু OQৰ দিশাংক l_2, m_2, n_2 আৰু OQ = 1, Qৰ স্থানাংক (l_2, m_2, n_2)।

গতিকে, $PQ^2 = (l_1 - l_2)^2 + (m_1 - m_2)^2 + (n_1 - n_2)^2$

$= (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2) + (l_2^2 + m_2^2 + n_2^2) - 2(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)$

$= 1 + 1 - 2(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)$

অৰ্থাৎ, $PQ^2 = 2[1 - (l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)]$

আকৌ OPQ, ত্ৰিভুজৰ পৰা, প্ৰাথমিক ত্ৰিকোণমিতিৰ সহায়ত আমি পাওঁ,

$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP.OQ\cos\angle POQ$

অৰ্থাৎ, $PQ^2 = 1^2 + 1^2 - 2.1.1\cos\theta$

অৰ্থাৎ, $PQ^2 = 2(1 - \cos\theta)$

গতিকে আমি পালোঁ, $2(1 - \cos\theta) = 2[1 - (l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)]$

$\therefore \cos\theta = l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2$

অনুসিদ্ধান্ত ১ ঃ $\sin\theta = \pm\sqrt{\sum(m_1n_2 - m_2n_1)^2}$ কিয়নো,

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1.1 - \cos^2\theta$

$= (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)(l_2^2 + m_2^2 + n_2^2) - 2(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2)^2$

$= (m_1^2n_2^2 + m_2^2n_1^2 - 2m_1m_2n_1n_2) + (n_1^2l_2^2 + n_2^2l_1^2 - 2n_1n_2l_1l_2)$

$+ (l_1^2m_2^2 + l_2^2m_1^2 - 2l_1l_2m_1m_2)$

$= (m_1n_2 - m_2n_1)^2 + (n_1l_2 - n_2l_1)^2 + (l_1m_2 - l_2m_1)^2$

$= \sum(m_1n_2 - m_2n_1)^2$

অনুসিদ্ধান্ত ২ ঃ দুডাল ৰেখা সমান্তৰাল হোৱাৰ চর্ত, $\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \pm 1$

গতিকে, $l_1 = l_2, m_1 = m_2, n_2$ or, $l_1 = -l_2, m_1 = -m_2, n_1 = -n_2$

কিয়নো সমান্তৰাল হ'ব লাগিলে, $\theta = 0$ বা, $\theta = \pi$.

অনুসিদ্ধান্ত ৩ ঃ দুডাল ৰেখা লম্ব হোৱাৰ চর্ত, $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$,

কিয়নো এই ক্ষেত্ৰত, $\theta = \frac{\pi}{2}$, অৰ্থাৎ, $\cos\theta$.

দুডাল ৰেখাৰ দিশানুপাত দিয়া আছে। ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণ উলিয়াব লাগে ঃ

ধৰা হ'ল, অন্তৰিক্ষত থকা দুডাল ৰেখাৰ দিশানুপাত ক্ৰমে a_1, b_1, c_1 আৰু a_2, b_2, c_2।

তেনেহ'লে, ৰেখা দুডালৰ দিশাংক ক্ৰমে $\frac{a_1}{k_1},\frac{b_1}{k_1},\frac{c_1}{k_1}$ আৰু $\frac{a_2}{k_2},\frac{b_2}{k_2},\frac{c_2}{k_2}$

য'ত, $k_1 = \sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}$ আৰু $k_2\ \sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}$

গতিকে, ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণ θ হ'লে,

$$\cos\theta = \frac{a_1}{k_1}.\frac{a_2}{k_2}+\frac{b_1}{k_1}.\frac{b_2}{k_2}+\frac{c_1}{k_1}.\frac{c_2}{k_2}$$

$$= \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{k_1k_2}$$

অৰ্থাৎ, $\cos\theta = \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$

অৰ্থাৎ, $\cos\theta = \frac{a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2}{\sqrt{\sum a_1^2}\sqrt{\sum a_2^2}}$

অনুসিদ্ধান্ত ১ ঃ $\sin\theta = \pm\frac{\sqrt{(b_1c_2-b_2c_1)^2}}{\sqrt{\sum a_1^2}\sqrt{\sum a_2^2}}$

অনুসিদ্ধান্ত ২ ঃ সমান্তৰাল হোৱাৰ চর্ত, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

অনুসিদ্ধান্ত ৩ ঃ লম্ব হোৱাৰ চর্ত, $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ ঃ $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ সংখ্যা তিনিটা এডাল ৰেখাৰ দিশাংক হ'ব পাৰেনে?

সমাধান ঃ যদি সম্ভৱ, ধৰা হ'ল α, β, γ তিনিটা কোণ আছে. যাতে,

$$\cos\alpha = \frac{1}{2},\ \cos\beta = \frac{1}{3},\ \cos\gamma = \frac{1}{4};\ \text{তেনেহ'লে,}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16} \neq 1$$

গতিকে, $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ এডাল ৰেখাৰ দিশাংক হ'ব নোৱাৰে।

উদাহৰণ ২ ঃ (1, –1, 2) আৰু (2, 0, 1) বিন্দু দুটাৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ (1, –1, 2) আৰু (2, 0, 1) বিন্দু দুটাৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাৰ দিশানুপাত 2 – 1, 0 – (–1), 1 – 2, অৰ্থাৎ, 1, 1, –1।

যিহেতু, $\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{3}$, গতিকে ৰেখাডালৰ দিশাংক $\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

উদাহৰণ ৩ঃ A(1, –2, 1), B(0, 1, 4), C(–3, 1, 2) আৰু D(1, 2, 3), বিন্দু চাৰিটা দিয়া আছে। AB আৰু CDৰ মাজৰ কোণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ৰেখাডালৰ দিশানুপাত 0 – 1, 1 – (–2), 4 – 1, অর্থাৎ, –1, 3, 3।

CD ৰেখাডালৰ দিশানুপাত 1 – (–3), 2 – 1, 3 – 2, অর্থাৎ, 4, 1, 1।

AB আৰু CD ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণ θ হ'লে,

$$\cos\theta = \frac{(-1).4 + 3.1 + 3.1}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 3^2}\sqrt{4^2 + 1^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{-4 + 3 + 3}{\sqrt{19}\sqrt{18}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{19} \times 3\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{19}}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{19}}\right)$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৫ ঃ এডাল ৰেখাৰ দিশাংক $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ হ'লে, প্রমাণ কৰক যে $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$।

প্রশ্ন নং ৬ ঃ এডাল ৰেখাই x-অক্ষ আৰু y-অক্ষৰ লগত 30^0 আৰু 60^0 কোণ কৰে। ৰেখাডালে z-অক্ষৰ লগত কৰা কোণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৭ ঃ দুডাল ৰেখাৰ দিশানুপাত –1, 2, 1 আৰু 2, 3, –1 ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৮ ঃ দেখুওৱাক যে (2, 1, –6) আৰু (4, –3, 2) বিন্দুদ্বয় সংযোগী ৰেখাডাল, (2, 2, –3) আৰু (5, –4, 9) বিন্দুদ্বয় সংযোগী ৰেখাৰ সমান্তৰাল।

প্রশ্ন নং ৯ ঃ A(1, –1, 2), B(3, 2, –1) আৰু C(0, 1, 2) বিন্দু তিনিটা দিয়া আছে। OA আৰু BCৰ মাজৰ কোণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ১০ ঃ এডাল ৰেখাৰ দিশানুপাত 1, –2, 3। P বিন্দুটোৱে এনেদৰে চলাচল কৰে যাতে OP সদায় প্রদত্ত ৰেখাডালৰ ওপৰত লম্ব। P বিন্দুৰ কক্ষপথৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।



৬.৯ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- স্থানাংক সমতল তিনিখন সমস্ত অন্তৰিক্ষক আঠোটা অংশত ভাগ কৰে। প্ৰত্যেক অংশক অষ্টাংশ (Octant) বুলি কোৱা হয়। স্থানাংকৰ চিহ্নই বিন্দুটো কোণটো অষ্টাংশত থাকে সেয়া নিৰ্ধাৰণ কৰে।
- অন্তৰিক্ষত থকা এডাল ৰেখাই যদি x-অক্ষ, y-অক্ষ আৰু z-অক্ষৰ ধনাত্মক দিশৰ লগত ক্ৰমে α, β, γ কোণ কৰে, তেনেহ'লে α, β, γক ৰেখাডালৰ দিশ কোন (Direction Angles) বুলি কোৱা হয় আৰু $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ক ৰেখাডালৰ দিশাংক (Direction Cosines) বুলি কোৱা হয়।
- যদি তিনিটা সংখ্যা এডাল ৰেখাৰ দিশাংকৰ সমানুপাতিক হয়, তেনেহ'লে সংখ্যা তিনিটাক দিশানুপাত (বা দিশ সংখ্যা) বুলি কোৱা হয়।



৬.১০ অধিক জানিবলৈ

ইংৰাজী গ্ৰন্থ ঃ

1) Jain, P. K. and Ahmhad, K. *Textbook of Analytical Geometry of Three Dimensions*. New Delhi: New Age International (P) Ltd.
2) Khan, R. M. *Analytical Geometry Of Two & Three Dimensions & Vector Analysis*. New Central Book Agency (P) Limited.
3) Kishan, Hari. *Coordinate Geometry of Two dimensions*. New Delhi: Atlantic Publishers & Distributors.
4) Pal, Sat and Pal, Harbans. *A Textbook of Two Dimensional Geometry*. New Age International Publishers.
5) Sharma, G. C. and Jain, Madhu. *Coordinate Geometry (2D and 3D)*. New Delhi: Galgotia Publications Pvt Ltd.
6) Sharma, A. K. *Coordinate Geometry (2D)*. New Delhi: Discovery Publishing House.
7) Vasistha, A. R., Agrawal, D. C. *Analytical Geometry of Three Dimensions (Coordinate of Solid Geometry)*.

৬.১১ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) (–2, –1, 5) বিন্দুটোৰ বাবে $x = -2 < 0$, $y = -1 < 0$, $z = 5 > 0$

(–2, –1, 5) বিন্দুটো $OX'Y'Z$ অষ্টাংশত আছে (অষ্টাংশ III)।

b) (1, 1, 7) বিন্দুটোৰ বাবে, সকলো স্থানাংক ধনাত্মক। গতিকে বিন্দুটো OXYZ অষ্টাংশত আছে (অষ্টাংশ I)।

c) (–1, –1, –2) বিন্দুটোৰ বাবে, সকলো স্থানাংক ঋণাত্মক। গতিকে বিন্দুটো $OX'Y'Z'$ অষ্টাংশত আছে (অষ্টাংশ VIII)।

২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, গোলকটোৰ কেন্দ্ৰ $P(\alpha, \beta, \gamma)$ আৰু ই $O(0, 0, 0)$, $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ আৰু $C(0, 0, c)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যায়।

গতিকে, $PO = PA = PB = PC$ ($\because$ প্ৰত্যেক = গোলকৰ ব্যাসাৰ্ধ)

$\Rightarrow PO^2 = PA^2 = PB^2 + PC^2$

$\Rightarrow \alpha^2, \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha - a)^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2 + (\beta - b)^2 + \gamma^2 =$

$\alpha^2 + \beta^2 + (\gamma - c)^2$

$\Rightarrow 0 = -2a\alpha + a^2 = -2b\beta + b^2 = -2c\gamma + c^2$

এতিয়া, $0 = -2a\alpha + a^2 \Rightarrow 2a\alpha = a^2 \Rightarrow \alpha = \frac{a}{2}$

$0 = -2a\beta + b^2 \Rightarrow 2b\beta = b^2 \Rightarrow \beta = \frac{b}{2}$

$0 = -2c\gamma + c^2 \Rightarrow 2c\gamma = c^2 \Rightarrow \gamma = \frac{c}{2}$

$\therefore$ গোলকটোৰ কেন্দ্ৰ হ'ল (α, β, γ), অৰ্থাৎ, $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

আৰু গোলকটোৰ ব্যাসাৰ্ধ,

$$PO = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

৩নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, BC বাহুৰ মধ্য বিন্দু D. তেনেহ'লে Dৰ স্থানাংক,

$$\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}, \frac{z_2 + z_3}{2}\right).$$

ABC ত্ৰিভুজৰ ভাৰকেন্দ্ৰ GএAD মধ্যমাক 2 : 1; অনুপাতত অন্তৰ্বিভক্ত কৰে। গতিকে Gৰ স্থানাংক হ'ল,

$$\left(\frac{2\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+1x_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{y_2+y_3}{2}\right)+1y_1}{2+1}, \frac{2\left(\frac{z_2+z_3}{2}\right)+1z_1}{2+1}\right)$$

অর্থাৎ, $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$.

৪নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, P(–2, 4, 7) আৰু Q(3, –5, 8) বিন্দুদ্বয় সংযোগী ৰেখাডালে x-সমতলক (অর্থাৎ yz-সমতলক) R(x, y, z) বিন্দুত কাটে।

ধৰা হ'ল, PR : RQ = λ : 1 তেনেহ'লে,

$x = \frac{\lambda.3+(-2)}{\lambda+1} = \frac{3\lambda-2}{\lambda+1}$,

$y = \frac{\lambda.(-5)+4}{\lambda+1} = \frac{4-5\lambda}{\lambda+1}$,

$z = \frac{\lambda.8+7}{\lambda+1} = \frac{8\lambda+7}{\lambda+1}$

যিহেতু, R(x, y, z) বিন্দুটো x-সমতলত আছে, গতিকে, x = 0

$\Rightarrow \frac{3\lambda-2}{\lambda+1} = 0$

$\Rightarrow 3\lambda - 2 = 0 \Rightarrow 3\lambda - 2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}$

গতিকে, $y = \frac{4-5\lambda}{\lambda+1} = \frac{4-5\times\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{2}{5}$

আৰু $z = \frac{8\lambda+7}{\lambda+1} = \frac{8\times\frac{2}{3}+7}{\frac{2}{3}+1} = \frac{37}{5}$.

$\therefore$ P আৰু Q বিন্দুদ্বয় সংযোগী ৰেখাই x-সমতলক $\left(0, \frac{2}{5}, \frac{37}{5}\right)$ বিন্দুত কাটে।

৫নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ আমি জানো যে $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$\Rightarrow (1 - \sin^2\alpha) + (1 - \sin^2\beta) + (1 - \sin^2\gamma) = 0$

$\Rightarrow \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2.$

৬নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ এডাল ৰেখাই x-অক্ষৰ লগত $\alpha = 30^0$ আৰু y-অক্ষৰ লগত $\beta = 60^0$ কোণ কৰে। ৰেখাডালে z-অক্ষৰ লগত কৰা কোণ γ নির্ণয় কৰিব লাগে।

আমি জানো যে $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$\Rightarrow \cos^2 30^0 + \cos^2 60^0 + \cos^2\gamma = 1$

$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\gamma = 1$

$\Rightarrow 1 + \cos^2\gamma = 1$

$\Rightarrow \cos^2\gamma = 0$

$\Rightarrow \cos\gamma = 0$

$\Rightarrow \gamma = 90^0$

$\therefore$ ৰেখাডালে z-অক্ষৰ লগত 90^0 কোণ কৰে।

৭নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণ θ, আৰু ৰেখা দুডালৰ দিশানুপাত $-1, 2, 1$ আৰু $2, 3, -1$।

গতিকে, $\cos\theta = \frac{(-1)(2)+(2)(3)+(1)(-)}{\sqrt{(-1)^2+2^2+1^2}\sqrt{2^2+3^2+(-1)^2}}$

$= \frac{-2+6-1}{\sqrt{6}\sqrt{14}}$

$= \frac{3}{\sqrt{84}}$

$= \frac{3}{2\sqrt{21}}$

$\therefore \theta = \cos^{-1}\left(\frac{3}{2\sqrt{21}}\right)$, এইটোৱেই নির্ণেয় কোণ।

৮নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ $(2, 1, -6)$ আৰু $(4, -3, 2)$ বিন্দু সংযোগী ৰেখাৰ দিশানুপাত

$4 - 2, (-3) - 1, 2 - (-6)$ অর্থাৎ, $2, -4, 8$.

$(2, 2, -3)$ আৰু $(5, -4, 9)$ বিন্দু সংযোগী ৰেখাৰ দিশানুপাত

$5 - 2, (-4) - 2, 9 - (-3)$ অর্থাৎ, $3, -6, 12$.

আমি দেখিলোঁ যে $\frac{2}{3} = \frac{-4}{-6} = \frac{8}{12}$ ৰেখা দুডাল পৰস্পৰ সমান্তৰাল।

৯নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ $O(0, 0, 0)$ আৰু $A(1, -1, 2)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা OA ৰেখাৰ দিশানুপাত

$1 - 0, (-1) - 0, 2 - 0$, অর্থাৎ, $1, -1, 2$.

B(3, 2, –1) আৰু C(0, 1, 2) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা BC ৰেখাৰ দিশানুপাত 0 – 3, 1 – 2, 2 – (–1), অর্থাৎ, –3, –1, 3.

OA আৰু BCৰ মাজৰ কোণ θ হ'লে,

$$\cos\theta = \frac{1.(-3)+(-1).(-1)+2.3}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+3^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}\sqrt{19}}$$

গতিকে, $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{114}}\right)$

১০নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, চলন্ত বিন্দু Pৰ স্থানাংক (x, y, z)। এতিয়া OP ৰ দিশানুপাত x, y, z। 1, –2, 3 দিশানুপাত বিশিষ্ট ৰেখা ডালৰ ওপৰত OP লম্ব।

$\therefore$ x.1 + y.(–2) + z.3 = 0

অর্থাৎ, x – 2y + 3z = 0

এইটোৱেই P ৰ কক্ষপথৰ সমীকৰণ।



৬.১২ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ XY-সমতলে (2, 4, 5), (3, 5, –4) বিন্দু সংযোগী ৰেখাক কি অনুপাতত ভাগ কৰে নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ২ ঃ এডাল ৰেখাই x আৰু y-অক্ষৰ ধনাত্মক দিশৰ লগত ক্ৰমে 45^0 আৰু 60^0 কোণ কৰে। ৰেখাডালে z-অক্ষৰ ধনাত্মক দিশৰ লগত কিমান কোণ কৰে?

প্ৰশ্ন ৩ ঃ অক্ষ তিনিডালৰ লগত সমান কোণ কৰা ৰেখা কেইডালৰ দিশাংক কি? এনেকুৱা ৰেখা কিমানডাল আছে?

প্ৰশ্ন ৪ ঃ P(4, 3, –5) আৰু Q(–2, 1, –8) বিন্দু সংযোগী ৰেখাৰ দিশাংক নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৫ ঃ P, Q, R, S বিন্দুকেইটাৰ স্থানাংক ক্ৰমে (–2, 3, 4), (–4, 4, 6), (4, 3, 5) আৰু (0, 1, 2)। PQ আৰু RS অৰ দিশাংক নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৬ ঃ এডাল ৰেখাৰ দিশানুপাত 6, 2, 3. দিশাংক নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৭ ঃ দুডাল ৰেখাৰ দিশানুপাত ক্ৰমে 1, 2, 1 আৰু 2, –3, 6। ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণ নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৮ ঃ দুডাল ৰেখাৰ দিশানুপাত ক্ৰমে 1, 2, 3 আৰু –2, 1, 4 । এই ৰেখা দুডালৰ লম্ববেখাৰ দিশাংক নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৯ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে (1, 2, 3) আৰু (4, 5, 6) বিন্দু সংযোগী ৰেখাডাল (–4, 3, –6) আৰু (2, 9, 2) বিন্দু সংযোগী ৰেখাৰ সমান্তৰাল।

*** ***** ***

অধ্যায় ৭ ঃ সমতল

অধ্যায় গাঁথনি

৭.১ উদ্দেশ্য
৭.২ পৰিচয়
৭.৩ সমতল
৭.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
৭.৫ অধিক জানিবলৈ
৭.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
৭.৭ আৰ্হি প্রশ্ন

৭.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- সমতলৰ সাধাৰণ সমীকৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব

৭.২ পৰিচয়

আগৰ অধ্যায়ত আমি অন্তৰিক্ষত থকা স্থানাংক প্রণালী আৰু তাত থকা বিন্দুৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিছোঁ। লগতে আমি অন্তৰিক্ষত থকা দুটা বিন্দুৰ মাজৰ দূৰত্ব উলিয়াম, দুটা বিন্দু সংলগ্নকাৰী ৰেখাখণ্ডক এটা নির্দিষ্ট অনুপাতত অন্তঃভাৱে/বহির্ভাৱে বিভক্ত কৰা বিন্দুৰ অৱস্থানও উলিয়াছোঁ। এই অধ্যায়ত আমি সমতলৰ সমীকৰণ আৰু বিভিন্ন প্রকাৰৰ সমতলৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিম।

৭.৩ সমতল

সমতলৰ সাধাৰণ সমীকৰণ ঃ x, y, zৰ প্রথম মাত্রাৰ সমীকৰণে, অর্থাৎ, $Ax + By + Cz + D = 0$ সমীকৰণে সমতলৰ (Plane) সমীকৰণ বুজায়, য'ত A, B, C আৰু D ধ্রুৱক আৰু A, B, C একেলগে শূন্য নহয়।

ধৰা হ'ল, $P(x_1, y_1, z_1)$ আৰু $Q(x_2, y_2, z_2)$ যিকোনো দুটা বিন্দু।

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{... ... ...(i)}$$

সমীকৰণে বুজোৱা কক্ষপথত। গতিকে আমি পালোঁ,

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \quad \text{... ... ...(ii)}$$

আৰু $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$ ... ...(iii)

(iii)ক kৰে পূৰণ কৰি (k এটা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক) আৰু পাছত (ii)ৰ লগত যোগ কৰি আমি পাওঁ,

$A(kx_2 + x_1) + B(ky_2 + y_1) + C(Kz_2 + z_1) + D(k + 1) = 0$

$\Rightarrow A\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}\right) + B\left(\frac{ky_2 + y_1}{k+1}\right) + C\left(\frac{kz_2 + z_1}{k+1}\right) + D = 0 \quad (k \neq -1)$

ইয়াৰ পৰা আমি পালোঁ যে kৰ মান যিয়েই নহওক $k(\neq -1)$

$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1}, \frac{kz_2 + z_1}{k+1}\right)$ বিন্দুটো (i)এ বুজোৱা কক্ষপথত থাকে। কিন্তু এই বিন্দুটো P আৰু Q সংযোগী ৰেখাত আছে আৰু ই PQ ৰেখাখণ্ডক k : 1 অনুপাতত ভাগ কৰে। ইয়াৰ kৰ মান –1ৰ বাহিৰে যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা। গতিকে PQ ৰেখাৰ প্ৰতিটো বিন্দু (i)এ বুজোৱা কক্ষপথত আছে। গতিকে PQ ৰেখাডাল সম্পূৰ্ণৰূপে (i)ৰ কক্ষপথত আছে। গতিকে (i)এ এখন সমতলৰ সমীকৰণ বুজায়।

টোকা ঃ

i) আমি ইতিমধ্যে ৬.৩ত পাইছোঁ যে স্থানাংক সমতল তিনিখনৰ সমীকৰণ $x = 0, y = 0$ আৰু $z = 0$. ই সাধাৰণ সমীকৰণৰ বিশেষ ৰূপ। $A = 1, B = C = D = 0$ হ'লে $x = 0$ সমতল, $B = 1, A = C = D = 0$ হ'লে $y = 0$ সমতল, $C = 1, A = B = D = 0$ হ'লে $z = 0$ সমতল পোৱা যায়।

ii) সমতলৰ সাধাৰণ সমীকৰণত অর্থাৎ, $Ax + By + Cz + D = 0$ সমীকৰণত দেখাত চাৰিটা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক আছে। যিহেতু A, B, C ধ্ৰুৱক তিনিটাৰ এটা অন্ততঃ অশূন্য ধ্ৰুৱক, আমি সমীকৰণটোক এটা অশূন্য ধ্ৰুৱকেৰে হৰণ কৰিব পাৰোঁ আৰু নতুন সমীকৰণটোত তেতিয়া স্বতন্ত্ৰ স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক থাকিব।উদাহৰণ স্বৰূপে, যদি $A \neq 0$, Aৰে হৰণ কৰি আমি পাওঁ, $x + \left(\frac{B}{A}\right)y + \left(\frac{C}{A}\right)z + \frac{D}{A} = 0$

অর্থাৎ, $x + B'y + C'z + D' = 0 \quad \left(B' = \frac{B}{A}, C' = \frac{C}{A}, D' = \frac{D}{A}\right)$

ইয়াত তিনিটা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক B', C' আৰু D' আছে।

স্পষ্টতঃ এখন বিশেষ সমতল নির্ধাৰণ কৰিবলৈ তিনিটা স্বতন্ত্ৰ চর্তৰ প্ৰয়োজন।

iii) যদি$Ax + By + Cz + D = 0$ সমতলখন (x_1, y_1, z_1) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, তেনেহ'লে,

$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$

$\Rightarrow D = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1)$

গতিকে সমতলখনৰ সমীকৰণ হ'বগৈ,

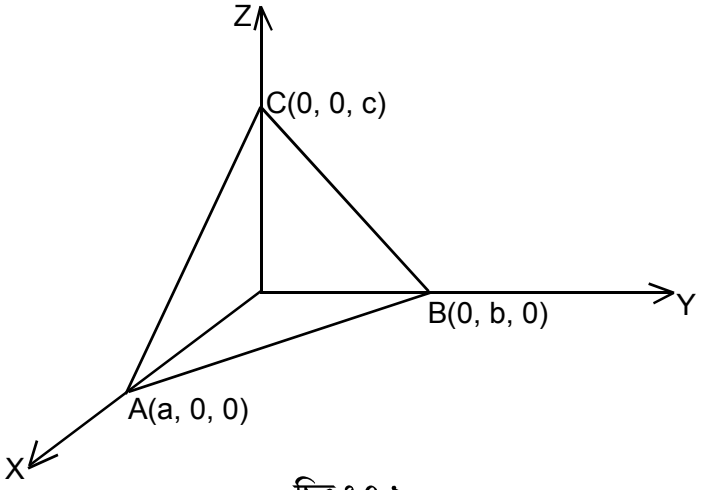
$Ax + By + Cz - (Ax_1 + By_1 + Cz_1) = 0$

অর্থাৎ, $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$

(x_1, y_1, z_1) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা যিকোনো সমতলৰ এইটো সমীকৰণ।

বিশেষকৈ $Ax + By + Cz = 0$ সমীকৰণে মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা যিকোনো সমতল বুজায়। $Ax + By = 0$ সমীকৰণে z-অক্ষ থকা সমতল বুজায়। সেইদৰে $By + Cz = 0$ আৰু $Ax + Cz = 0$ সমীকৰণে ক্ৰমে $x = 0$, $y = 0$ অক্ষ থকা সমীকৰণ বুজায়।

ছেদাংশ আকাৰত সমতলৰ সমীকৰণ ঃ



চিত্ৰ ঃ ৭.১

ধৰা হ'ল, এখন সমতলে x-অক্ষত OA = a, y-অক্ষত OB = b আৰু z-অক্ষত OC = c ছেদাংশ কৰে। গতিকে সমতলখন A(a, 0, 0), B(0, b, 0) আৰু C(0, 0, c) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়।

ধৰা হ'ল, সমতলখনৰ সমীকৰণ, $lx + my + nz = p$ ... ...(1)

ই x, y, zৰ প্ৰথম মাত্ৰাৰ সমীকৰণ। যিহেতু ই A(a, 0, 0), B(0, b, 0) আৰু C(0, 0, c) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, $la = p$, $mb = p$, $nc = p$

গতিকে (1) হ'বগৈ, $\frac{p}{a}.x + \frac{p}{b}y + \frac{p}{c}z = p$

অৰ্থাৎ, $\frac{x}{a}. + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

এইটোৱেই সমতলখনৰ নিৰ্ণেয় সমীকৰণ।

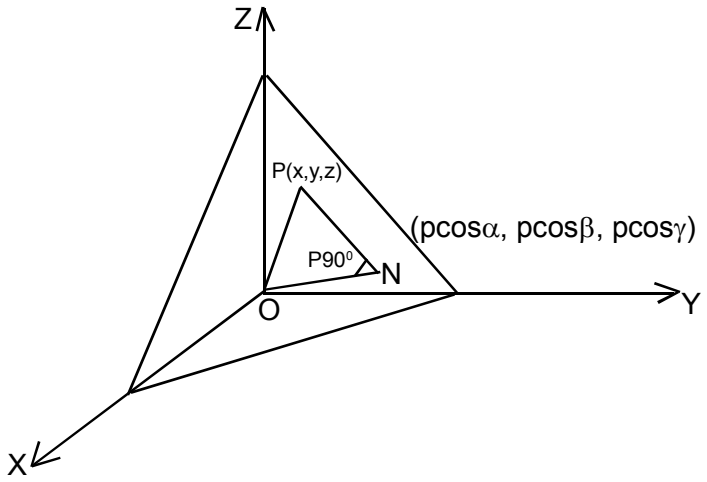
টোকা ঃ

i) যদি এখন সমতলে x-অক্ষক A(a, 0, 0) বিন্দুত কাটে আৰু সমতলখন yz-সমতলৰ সমান্তৰাল, তেনেহ'লে, b আৰু c উভয়ে সীমা আৰু উপৰিউক্ত সমীকৰণটো হ'বগৈ $\frac{x}{a} = 1$, অৰ্থাৎ, $x = a$। $x = a$ সমীকৰণে yz-সমতলৰ (বা x-সমতলৰ) সমান্তৰাল সমতলৰ সমীকৰণ বুজায় আৰু ই x-অক্ষক (a, 0, 0) বিন্দুত কাটে। সেইদৰে $y = b$ সমীকৰণে zx-সমতলৰ (বা y-সমতলৰ) সমান্তৰাল সমতলৰ সমীকৰণ বুজায় আৰু ই y-অক্ষক (0, b, 0) বিন্দুত কাটে, $z = c$ সমীকৰণে xy-সমতলৰ (বা z-সমতলৰ) সমান্তৰাল সমতলৰ সমীকৰণ বুজায় আৰু ই z-অক্ষক (0, 0, c) বিন্দুত কাটে।

ii) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ সমতলখন x-অক্ষৰ সমান্তৰাল হ'ব যদি a অসীম আৰু এই ক্ষেত্ৰত সমীকৰণটো হ'বগৈ $\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, আৰু ই By + Cz = 1 আকাৰৰ। অর্থাৎ, x-অক্ষৰ সমান্তৰাল সমতলৰ সমীকৰণৰ আকাৰ By + Cz = 1। সেইদৰে y-অক্ষৰ সমান্তৰাল সমতলৰ সমীকৰণৰ আকাৰ Ax + Cz = 1 আৰু z-অক্ষৰ সমান্তৰাল সমতলৰ সমীকৰণৰ আকাৰ Ax + Cz = 1।

iii) By + Cz + D = 0 আকাৰৰ সমীকৰণে x-অক্ষৰ সমান্তৰাল সমতলৰ সমীকৰণ বুজায় যদি $D \neq 0$ আৰু ই x-অক্ষৰ মাজেৰে যোৱা সমতলৰ সমীকৰণ বুজায় যদি D = 0. সেইদৰে Ax + Cz + D = 0 আৰু Ax + By + D = 0 সমীকৰণৰ বাবে হ'ব।

সমতলৰ অভিলম্ব আকাৰৰ সমীকৰণ ঃ



চিত্ৰ ঃ ৭.২

ধৰা হ'ল, ON = p (p > 0) মূল বিন্দুৰ পৰা এখন সমতলৰ ওপৰত টনা অভিলম্ব। ধৰা হ'ল, ইয়াৰ দিনাংক cosα, cosβ, cosγ। গতিকে Nৰ স্থানাংক (pcosα, pcosβ, pcosγ)।

গতিকে PN ৰেখাৰ দিশানুপাত x – pcosα, y – pcosβ, z – pcosγ।

যিহেতু ON ⊥ PN, গতিকে,

$$\cos\alpha(x - p\cos\alpha) + \cos\beta(y - p\cos\beta) + \cos\gamma(z - p\cos\gamma) = 0$$

অর্থাৎ, $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$

অর্থাৎ, $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$

এইটোৱেই সমতলখনৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।এই সমীকৰণটোক সমতলৰ অভিলম্ব আকাৰৰ সমীকৰণ বুলি কোৱা হয়।

তিনিটা নির্দিষ্ট বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা (একৰেখীয় নহয়) সমতলৰ সমীকৰণ ঃ ধৰা হ'ল, এখন সমতল (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) আৰু (x_3, y_3, z_3); –এই বিন্দু তিনিটাৰ মাজেৰে যায়। সমতলখনৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰিব লাগে।

যিহেতু সমতলখন (x_1, y_1, z_1), বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, ইয়াৰ সমীকৰণটোৰ আকাৰ এনেধৰণৰ হ'ব,

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots(i)$$

যিহেতু সমতলখন (x_2, y_2, z_2) আৰু (x_3, y_3, z_3), বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, গতিকে,

$$a(x_2 - x_1) + b(y_2 - y_1) + c(z_2 - z_1) = 0 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots(ii)$$

আৰু $a(x_3 - x_1) + b(y_3 - y_1) + c(z_3 - z_1) = 0 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots(iii)$

(i), (iii) আৰু (iii) a, b, c অপনয়ন কৰি আমি পাওঁ,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

এইটোৱেই সমতলখনৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।

সমতলৰ সাধাৰণ সমীকৰণক ছেদাংশ আকাৰ আৰু অভিলম্ব আকাৰলৈ ৰূপান্তৰণ ঃ

i) সমতলৰ সাধাৰণ সমীকৰণ $Ax + By + Cz + D = 0$ লোৱা হ'ল।

সমীকৰণটো হ'বগৈ, $Ax + By + Cz = -D$

অর্থাৎ, $-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z = 1 \quad (D \neq 0)$

অর্থাৎ, $\frac{x}{-\frac{D}{A}} + \frac{y}{-\frac{D}{B}} + \frac{z}{-\frac{D}{C}} = 1$

এইটো সমতলৰ ছেদাংশ আকাৰৰ সমীকৰণ। সমতলখনে x-অক্ষ, y-অক্ষ z-অক্ষত ক্রমে, $-\frac{D}{A}, -\frac{D}{B}, -\frac{D}{C}$ ছেদাংশ কাটে।

ii) ধৰা হ'ল, $Ax + By + Cz + D = 0$ সমীকৰণৰ অভিলম্ব আকাৰ,

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p \ (p > 0)$$

অর্থাৎ, $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$

গতিকে আমি পাম, $\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C} = \frac{-p}{D}$

$$\Rightarrow \cos\alpha = -\frac{Ap}{D}, \cos\beta = -\frac{Bp}{D}, \cos\gamma = \frac{-Cp}{D}$$

কিন্তু, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

গতিকে আমি পালোঁ, $\left(-\frac{Ap}{D}\right)^2 + \left(-\frac{Bp}{D}\right)^2 + \left(\frac{-Cp}{D}\right)^2 = 1$

$$\Rightarrow p^2 (A^2 + B^2 + C^2) = D^2$$

$$\Rightarrow p^2 = \frac{D^2}{A^2 + B^2 + C^2} \Rightarrow p = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \ (p > 0)$$

যদি $D > 0$, আমি পাম, $p = \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, আৰু

$$\cos\alpha = -\frac{Ap}{D} = -\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\beta = -\frac{Bp}{D} = -\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos\gamma = -\frac{Cp}{D} = -\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

গতিকে $Ax + By + Cz + D = 0$, $D > 0$, সমতলৰ অভিলম্ব আকাৰ হ'ব,

$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$,

অর্থাৎ, $\left(-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)x + \left(-\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)y + \left(-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)z$

$$= \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

যদি $D < 0$, তেনেহ'লে, $p = \frac{|D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

আৰু সমতলখনৰ অভিলম্ব আকাৰৰ সমীকৰণ হ'ব,

$$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)x + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)y + \left(\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)z$$

$$= -\frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

মন্তব্য ঃ

i) ওপৰৰ আলোচনাৰ পৰা আমি অধোলিখিত কার্য্যকৰী বিধিটো পালোঁ। ইয়াৰ সহায়ত সমতলৰ সমীকৰণক অভিলম্ব আকাৰলৈ নিব পাৰি।

ধৰা হ'ল সমতলখনৰ সমীকৰণ, $Ax + By + Cz + D = 0$, D ধনাত্মক।

ধ্ৰুৱক পদটো সোঁহাতলৈ নিয়া হ'ল (ধনাত্মক চিনসহ) $-Ax - By - Cz = D$,

সমীকৰণটোক $\sqrt{A^2+B^2+C^2}$ ৰে হৰণ কৰি আমি পাওঁ,

$$\left(-\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)x + \left(-\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)y + \left(-\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right)z$$

$$= \frac{D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

এইটোৱেই সমতলখনৰ নির্ণেয় অভিলম্ব আকাৰৰ সমীকৰণ।

উদাহৰণ স্বৰূপে, $2x - 3y + 4z - 11 = 0$ সমতলখনক অভিলম্ব আকাৰলৈ নিব লাগে।

$$2x - 3y + 4z - 11 = 0$$

অর্থাৎ, $2x - 3y + 4z = 11$ (সোঁহাতৰ ধ্রুৱক পদটো ধনাত্মক)

উভয়পক্ষক $\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 4^2}$, অর্থাৎ, $\sqrt{29}$ ৰে হৰণ কৰি আমি পাওঁ,

$$\frac{2}{\sqrt{29}}x - \frac{3}{\sqrt{29}}y + \frac{4}{\sqrt{29}}z = \frac{11}{\sqrt{29}}$$

এইটোৱেই প্রদত্ত সমতলখনৰ অভিলম্ব আকাৰ।

ii) আমি পালোঁ যে, $\frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C}$ কিন্তু, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ হ'ল,

$Ax + By + Cz + D = 0$ সমতলখনৰ অভিলম্বৰ দিশাংক।

গতিকে A, B, C সংখ্যা তিনিটা (x, y, zৰ সহগ) $Ax + By + Cz + D = 0$ সমতলখনৰ অভিলম্বৰ দিশানুপাত।

আকৌ, $p = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ হ'ল মূল বিন্দুৰ পৰা সমতলখনৰ লম্ব দূৰত্ব।

দুখন সমতলৰ মাজৰ কোণ ঃ ধৰা হ'ল, $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ আৰু $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ সমতল দুখনৰ মাজৰ কোণ θ। গতিকে সমতল দুখনৰ অভিলম্ব দুডালৰ মাজৰ কোণো θ।

আকৌ, অভিলম্ব দুডালৰ দিশানুপাত ক্রমে, A_1, B_1, C_1 আৰু A_2, B_2, C_2।

$$\cos\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

ইয়াৰ পৰা সমতল দুখনৰ মাজৰ কোণ θ পোৱা যাব।

মন্তব্য ঃ

1) সমতল দুখন পৰস্পৰ লম্ব হ'ব যদি $\theta = \frac{\pi}{2}$, অর্থাৎ, যদি $\cos\theta = 0$,

অর্থাৎ, $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.

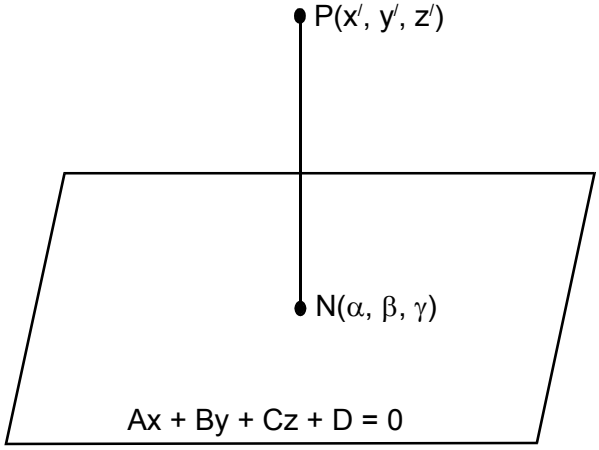
$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ আৰু $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ সমতল দুখন পৰস্পৰ লম্ব হোৱাৰ এইটোৱেই চর্ত।

2) যদি $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ আৰু $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ সমতল দুখন সমান্তৰাল, এখনৰ ওপৰত টনা অভিলম্বডাল আনখনৰো ওপৰতো লম্ব হ'ব। যিহেতু প্ৰথম সমতলখনৰ অভিলম্বৰ দিশানুপাত A_1, B_1, C_1 আৰু দ্বিতীয়খনৰ দিশানুপাত A_2, B_2, C_2,

গতিকে, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, এইটোৱেই সমতল দুখন সমান্তৰাল হোৱাৰ চর্ত।

3) স্পষ্টতঃ $Ax + By + Cz + D = 0$ আৰু $Ax + By + Cz + D' = 0$ সমতল দুখন পৰস্পৰ সমান্তৰাল। গতিকে, $Ax + By + Cz + D = 0$ সমতলৰ সমান্তৰাল সমতলৰ সমীকৰণ $Ax + By + Cz + D' = 0$; সিহঁতৰ পার্থক্য অকল ধ্ৰুৱক পদতহে।

এখন সমতলৰ পৰা এটা বিন্দুৰ লম্ব দূৰত্ব ঃ ধৰা হ'ল, $P(x', y', z')$ এটা নির্দিষ্ট বিন্দু আৰু $N(\alpha, \beta, \gamma)$ হ'ল P বিন্দুৰ পৰা $Ax + By + Cz + D = 0$ সমতলৰ ওপৰত টনা লম্বৰ পাদ বিন্দু।



চিত্ৰ ঃ ৭.৩

PN ৰেখাডালৰ দিশানুপাত $\alpha - x'$, $\beta - y'$, $\gamma - z'$. কিন্তু $Ax + By + Cz + D = 0$ সমতলৰ ওপৰত PN লম্ব। গতিকে PNৰ দিশানুপাত A, B, C.

গতিকে, একেডাল ৰেখা PNৰ দিশানুপাতৰ দুটা সংগ্ৰহ হ'ল $\alpha - x'$, $\beta - y'$, $\gamma - z'$ আৰু A, B, C। গতিকে,

$$\frac{\alpha - x'}{A} = \frac{\beta - y'}{B} = \frac{\gamma - z'}{C} = k \text{ (ধৰা হ'ল)}$$

তেনেহ'লে, $\alpha = Ak + x'$, $\beta = Bk + y'$, $\gamma = Ck + z'$.

এতিয়া $N(\alpha, \beta, \gamma)$ বিন্দুটো $Ax + By + Cz + D = 0$ সমতলখনত আছে।

গতিকে, $A\alpha + B\beta + C\gamma + D = 0$

$$\Rightarrow A(Ak + x') + B(Bk + y') + C(Ck + z') + D = 0$$

$$\Rightarrow (A^2 + B^2 + C^2)k = -(Ax' + By' + Cz' + D)$$

$$\Rightarrow k = -\frac{Ax' + By' + Cz' + D}{A^2 + B^2 + C^2}$$

$\therefore PN^2 = (\alpha - x')^2 + (\beta - y')^2 + (\gamma - z')^2$

$= (Ak)^2 + (Bk)^2 + (Ck)^2$

$= (A^2 + B^2 + C^2)k^2$

$= (A^2 + B^2 + C^2)\left(-\frac{Ax' + By' + Cz' + D}{A^2 + B^2 + C^2}\right)^2$

অর্থাৎ, $PN^2 = \frac{(Ax' + By' + Cz' + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2}$

$\therefore P(x', y', z')$ বিন্দুৰ পৰা প্ৰদত্ত সমতলৰ ওপৰত টনা লম্বৰ দৈর্ঘ্য = PN

$= \left|\frac{Ax' + By' + Cz' + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ মূল বিন্দুৰ পৰা লম্ব দূৰত্ব = $\left|\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right|$

দুখন প্ৰদত্ত সমতলৰ মাজেৰে যোৱা সমতলৰ সমীকৰণ ঃ দুখন সমতল দিয়া আছে,

$A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1 = 0$ ... ...(i)

আৰু $A_2x_2 + B_2y_2 + C_2z_2 + D_2 = 0$ ... ...(ii)

$(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1) + k(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ ... ...(iii)

সমতলে (i) আৰু (ii) সমতলৰ ছেদ ৰেখাৰ মাজেৰে যোৱা সমতলৰ সমীকৰণ বুজায়। (ইয়াত k এটা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক)

(iii) হ'ল x, y, zৰ প্ৰথম মাত্ৰাৰ সমীকৰণ। গতিকে ই এখন সমতলৰ সমীকৰণ বুজায়। (i) আৰু (ii) সমতল দুখনৰ ছেদ ৰেখাত থকা যিকোনো বিন্দুৰ স্থানাংকই (i) আৰু (ii) সমীকৰণ দুটা সিদ্ধ কৰে আৰু সেয়ে সমীকৰণ (iii) সিদ্ধ কৰে। সেয়ে (iii) সমীকৰণে বুজোৱা সমতলখন (i) আৰু (ii) সমতল দুখনৰ ছেদ ৰেখাৰ মাজেৰে যায়। যিহেতু k স্বেচ্ছ, kৰ বিভিন্ন মানৰ বাবে সকলো সমতল (iii)ৰ পৰা পোৱা যাব। সেয়েহে (iii) হ'ল (i) আৰু (ii) সমতল দুখনৰ ছেদ ৰেখাৰ মাজেৰে যোৱা সমতলৰ সাধাৰণ সমীকৰণ।

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ঃ $2x + y - 2z = 12$ সমতলৰ অভিলম্বৰ দিশাংক নিৰ্ণয় কৰক। মূল বিন্দুৰ পৰা সমতলখনৰ লম্ব দূৰত্ব কিমান?

সমাধান ঃ সমতলখনৰ সমীকৰণ হ'ল $2x + y - 2z = 12$। ইয়াত x, y আৰু zৰ সহগ ক্ৰমে 2, 1 আৰু –2. সমতলখনৰ অভিলম্বৰ দিশানুপাত 2, 1, –2. এতিয়া,

$\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3,$

গতিকে সমতলখনৰ অভিলম্বৰ দিশাংক, $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}$.

মূল বিন্দুৰ পৰা সমতলখনৰ লম্ব দূৰত্ব = $\frac{12}{3}$ = 4.

উদাহৰণ ২ ঃ $3x - 4y + 2z + 2 = 0$ সমতলখনে স্থানাংক অক্ষত কৰা ছেদাংশ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ সমতলখনৰ সমীকৰণ হ'ল, $3x - 4y + 2z + 2 = 0$

অর্থাৎ, $3x - 4y + 2z = -2$

অর্থাৎ, $\frac{3x}{-2} - \frac{4y}{-2} + \frac{2z}{-2} = \frac{-2}{-2}$

অর্থাৎ, $\frac{x}{-\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} + \frac{z}{-1} = 1$

$\therefore$ সমতলখনে অক্ষত কৰা ছেদাংশ হ'ল, $-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, -1$

উদাহৰণ ৩ ঃ (0, 1, 1), (1, 1, 2) আৰু (–1, 2, –2) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা সমতলৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ যিহেতু প্রদত্ত সমতলখন (0, 1, 1), বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, ইয়াৰ সমীকৰণৰ আকাৰ হ'ব এনেধৰণৰ, $A(x - 0) + B(y - 1) + C(z - 1) = 0$ ... ...(i)

আকৌ, যিহেতু সমতলখন (1, 1, 2) আৰু (–1, 2, –2) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, গতিকে সিহঁতৰ স্থানাংকই (i) সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰিব। গতিকে আমি পালোঁ,

$A.1 + B.0 + C.1 = 0$ ... ...(ii)

আৰু $A.(-1) + B.1 + C.(-3) = 0$ ... ...(iii)

(i), (ii) আৰু (iii)ৰ পৰা A, B আৰু C অপনয়ন কৰি আমি পাওঁ,,

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

অর্থাৎ, $x(0 - 1) - (y - 1)(-3 + 1) + (z - 1)(1 - 0) = 0$

অর্থাৎ, $-x + 2(y - 1) + (z - 1) = 0$

অর্থাৎ, $-x + 2y + z - 3 = 0$

এইটোৱেই সমতলখনৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।

বিকল্প উপায় ঃ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) আৰু (x_3, y_3, z_3) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা সমতলৰ সমীকৰণ হ'ল, $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$

গতিকে (0, 1, 1), (1, 1, 2) আৰু (–1, 2, –2) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা সমতলৰ

সমীকৰণ, $\begin{vmatrix} x-0 & y-1 & z-1 \\ 1-0 & 1-1 & 2-1 \\ -1-0 & 2-1 & -2-1 \end{vmatrix} = 0$

অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

অর্থাৎ, $x(0 - 1) - (y - 1)(–z + 1) + (z – 1)(1 – 0) = 0$

অর্থাৎ, $–x + 2(y – 1) + (z – 1) = 0$

অর্থাৎ, $–x + 2y + z – 3 = 0$

এইটোৱেই সমতলখনৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।

উদাহৰণ ৪ ঃ (1, –2, 0) আৰু (–1, 4, 2) বিন্দুদ্বয় সংযোগী ৰেখাখণ্ডৰ মধ্যবিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু ৰেখাডালৰ ওপৰত লম্ব হোৱা সমতলৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ (1, –2, 0) আৰু (–1, 4, 2) বিন্দুদ্বয় সংযোগী ৰেখাখণ্ডৰ মধ্যবিন্দু হ'ল, $\left(\frac{1-1}{2}, \frac{-2+4}{2}, \frac{0+2}{2}\right)$ অর্থাৎ, (0, 1, 1).

বিন্দুদ্বয় সংযোগী ৰেখাৰ দিশানুপাত –1 – 1, 4 – (–2), 2 – 0, অর্থাৎ, –2, 6, 2। ৰেখাডাল সমতলখনৰ ওপৰত লম্ব। অর্থাৎ আমি এনে এখন সমতলৰ সমীকৰণ উলিয়াব লাগে যিখন (0, 1, 1) বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু যাৰ অভিলম্বৰ দিশানুপাত –2, 6, 2।

গতিকে, সমতলখনৰ নির্ণেয় সমীকৰণ,

$–2(x – 0) + 6(y – 1) + 2(z – 1) = 0$

অর্থাৎ, $–2x + 6y – 6 + 2z – 2 = 0$

অর্থাৎ, $–2x + 6y + 2z – 8 = 0$

অর্থাৎ, $–2(x – 3y – z + 4) = 0$

অর্থাৎ, $x – 3y – z = 0$

উদাহৰণ ৫ ঃ এখন সমতল y-অক্ষৰ সমান্তৰাল আৰু ই (1, –4, 2) আৰু (2, 3, 1) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়। সমতলখনৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ যিহেতু সমতলখন y-অক্ষৰ সমান্তৰাল, সমতলখনৰ সমীকৰণৰ আকাৰ হ'ব,

$ax + cz + d = 0$ ... ...(i)

যিহেতু ই (1, –4, 2) আৰু (2, 3, 1) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, গতিকে,

$a.1 + c.2 + d = 0$ ... ...(ii)

আৰু $a.2 + c.2 + d = 0$ ... ...(iii)

(i), (ii) আৰু (iii)ৰ পৰা a, c আৰু d অপনয়ন কৰি আমি পাওঁ,

$$\begin{vmatrix} x & z & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

অর্থাৎ, $x(2 - 1) - z(1 - 2) + 1(1 - 4) = 0$

অর্থাৎ, $x + z - 3 = 0$

এইটোৱেই সমতলখনৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।

উদাহৰণ ৬ ঃ এখন সমতল (2, 5, –8) বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু ই $2x - 3y + 4z + 1 = 0$ আৰু $4x + y - 2z + 6 = 0$ উভয় সমতলৰ ওপৰত লম্ব। সমতলখনৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ (2, 5, –8) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা যিকোনো সমতলৰ সমীকৰণ,

$a(x - 2) + b(y - 5) + c(z + 8) = 0$ ... ...(i)

যদি ই $2x - 3y + 4z + 1 = 0$ আৰু $4x + y - 2z + 6 = 0$, সমতল দুখনৰ ওপৰত লম্ব, তেনেহ'লে, $a.2 + b.(-3) + c.4 = 0$ ... ...(ii)

আৰু $a.4 + b.1 + c.(-2) = 0$ ... ...(iii)

[মন কৰিবলগীয়া যে দুখন সমতল লম্ব হোৱাৰ চর্ত হ'ল, $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$]

(i), (ii) আৰু (iii)ৰ পৰা a, b আৰু c অপনয়ন কৰি আমি পাওঁ,

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z+8 \\ 2 & -3 & 4 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

অর্থাৎ, $(x - 2)(6 - 4) - (y - 5)(-4 - 16) + (z + 8)(2 + 12) = 0$

অর্থাৎ, $2(x - 2) + 20(y - 5) + 14(z + 8) = 0$

অর্থাৎ, $(x - 2) + 10(y - 5) + 7(z + 8) = 0$

অর্থাৎ, $x + 10y + 7z + 4 = 0$

এইটোৱেই সমতলখনৰ সমীকৰণ।

উদাহৰণ ৭ ঃ প্রমাণ কৰক যে $4x - 6y + 2z - 1 = 0$ আৰু $6x - 9y + 3z + 5 = 0$ সমতল দুখন পৰস্পৰ সমান্তৰাল। লগতে সমতল দুখনৰ মাজৰ দূৰত্ব নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে, $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ আৰু $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$, সমতল দুখন সমান্তৰাল যদি $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

প্রদত্ত সমতল দুখন হ'ল, $4x - 6y + 2z - 1 = 0$ ... ...(i)

$6x - 9y + 3z + 5 = 0$ ... ...(ii)

এই ক্ষেত্রত, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$, $\frac{b_1}{b_2}=\frac{-6}{-9}=\frac{2}{3}$, $\frac{c_1}{c_2}=\frac{2}{3}$

গতিকে, $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ চর্ত সিদ্ধ হৈছে।

সেয়েহে (i) আৰু (ii) সমতল দুখন পৰস্পৰ সমান্তৰাল।

(i)ত y = 0 আৰু z = 0 বহুৰাই আমি পাওঁ, $4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$;

$\left(\frac{1}{4}, 0, 0\right)$ বিন্দুটো (i) সমতলত আছে।

(i) আৰু (ii) সমান্তৰাল সমতল দুখনৰ মাজৰ দূৰত্ব =

(i) $\left(\frac{1}{4}, 0, 0\right)$ বিন্দুৰ পৰা (ii) সমতলত টনা লম্বৰ দৈর্ঘ্য

$$= \left|\frac{6.\frac{1}{4}-9.0+3.0+5}{\sqrt{6^2+(-9)^2+3^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{\frac{3}{2}+5}{\sqrt{126}}\right|$$

$$= \frac{\frac{13}{5}}{\sqrt{126}}$$

$$= \frac{13}{15\sqrt{14}}$$

$$= \frac{13\sqrt{14}}{210}$$

উদাহৰণ ৮ ঃ এখন সমতলত x + 2y + 3z – 4 = 0 আৰু 2x + y – z + 5 = 0 সমতল দুখনৰ ছেদ ৰেখাডাল থাকে আৰু সমতলখন 5x + 3y + 6z + 8 = 0 সমতলৰ ওপৰত লম্ব। সমতলখনৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ x + 2y + 3z – 4 = 0 আৰু 2x + y – z + 5 = 0 সমতল দুখনৰ ছেদ ৰেখাৰ মাজেৰে যোৱা সমতলৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$x + 2y + 3z - 4 + \lambda(2x + y - z + 5) = 0$$

অর্থাৎ, $(1 + 2\lambda)x + (2 + \lambda)y + (3 - \lambda)z + (5\lambda - 4) = 0$ ... ...(1)

ই $5x + 3y + 6z + 8 = 0$ সমতলখনৰ ওপৰত লম্ব হ'ব যদি,

$(1 + 2\lambda)5 + (2 + \lambda)3 + (3 - \lambda)6 = 0$

$\Rightarrow 5 + 10\lambda + 6 + 3\lambda + 18 - 6\lambda = 0$

$\Rightarrow 7\lambda = -29$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{29}{7}$

(i)ত λৰ এই মান বহুৱাই আমি পাওঁ,

$$\left(1-\frac{58}{7}\right)x+\left(2-\frac{29}{7}\right)y+\left(3+\frac{29}{7}\right)z+\left(-\frac{145}{7}-4\right)=0$$

অর্থাৎ, $-51x - 15y + 50z - 173 = 0$

অর্থাৎ, $51x + 15y - 50z + 173 = 0$

এইটোৱেই সমতলখনৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।

উদাহৰণ ৯ ঃ এখন সমতলে অক্ষ তিনিডালৰ লগত ক্রমে $-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}$ ছেদাংশ কৰে। সমতলখনৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক। সমীকৰণটো অভিলম্ব আকাৰলৈ ৰূপান্তৰ কৰক। সমতলখনৰ ওপৰত টনা অভিলম্বৰ দিশাংক নির্ণয় কৰক। লগতে মূল বিন্দুৰ পৰা সমতলখনৰ লম্ব দূৰত্ব নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ সমতলখনৰ সমীকৰণ হ'ল, $\frac{x}{-\frac{1}{2}}+\frac{y}{1}+\frac{z}{\frac{1}{2}}=1$

অর্থাৎ, $-2x + y + 2z = 1$

অর্থাৎ, $2x - y - 2z + 1 = 0$ ... ...(1)

এতিয়া আমি (1)ক অভিলম্ব আকাৰত প্রকাশ কৰিম। (1)ৰ পৰা,

$2x - y - 2z = -1$

অর্থাৎ, $-2x + y + 2z = 1$

অভয় পক্ষক $\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}$ ৰে অর্থাৎ, 3ৰে হৰণ কৰি, আমি পাওঁ,

$$\left(-\frac{2}{3}\right)x+\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z=\frac{1}{3} \qquad \text{... ... ...(2)}$$

এইটোৱেই সমতলখনৰ অভিলম্ব আকাৰ $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$

সমতলখনৰ ওপৰত টনা অভিলম্বৰ দিশাংক, $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$

অর্থাৎ, $-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$

মূল বিন্দুৰ পৰা সমতলখনৰ লম্ব দূৰত্ব p, অর্থাৎ, $\frac{1}{3}$.



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ ঃ এখন সমতলে অক্ষ তিনিডালক ক্রমে A, B, C বিন্দুত কাটে আৰু ABC ত্রিভুজৰ ভাৰকেন্দ্রৰ স্থানাংক (p, q, r)। সমতলখনৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ ঃ (1, 0, –1), (2, –3, 4) আৰু (3, 1, 1) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা সমতলৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ ঃ এখন সমতল (1, –4, 2) বিন্দু আৰু x-অক্ষৰ মাজেৰে যায়। সমতলখনৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ ঃ প্রমাণ কৰক যে $x + 2y + 2z – 5 = 0$ আৰু $2x + y –2z = 0$ সমতল দুখন পৰস্পৰ লম্ব। (2, –4, 7) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু উপৰিউক্ত দুয়োখন সমতলৰ লম্ব হোৱা সমতলৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক। শেহৰ সমতলখনৰ ওপৰত টনা অভিলম্বৰ দিশাংক কি?

প্রশ্ন নং ৫ ঃ $3x + 2y – 6z + 14 = 0$ সমতলখনৰ সমীকৰণটোক অভিলম্ব আকাৰত প্রকাশ কৰক।

প্রশ্ন নং ৬ ঃ এখন সমতল $x – y + 2z = 3$ আৰু $2x + 3y – z + 2 = 0$ সমতল দুখনৰ ছেদ ৰেখা আৰু (2, 0, –5) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়। সমতলখনৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৭ ঃ $x – 2y + 2z – 5 = 0$ আৰু $3x –2y + 6z = 0$ সমতল দুখনৰ মাজৰ কোণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৮ ঃ $kx – y + 4z = 2$ আৰু $3x + 2ky – 11z = 8$ সমতল দুখন পৰস্পৰ লম্ব হ'লে, kৰ মান নির্ণয় কৰক।



৭.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- x, y আৰু zৰ প্রথম মাত্রাৰ সমীকৰণ $Ax + By + Cz + D = 0$ ই সমতলৰ সমীকৰণ বুজায়। A, B, C সংখ্যা তিনিটা সমতলখনৰ ওপৰত টনা অভিলম্বৰ দিশানুপাত।
- (x_1, y_1, z_1) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা যিকোনো সমতলৰ সমীকৰণ হ'ল $A(x – x_1) + B(y – y_1) + C(z – z_1) = 0$, য'ত A, B, C হ'ল অভিলম্বৰ দিশানুপাত।
- ছেদাংশ আকাৰত সমতলৰ সমীকৰণ হ'ল $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{a}=1$, য'ত, a, b, c হ'ল সমতলখনে স্থানাংক-অক্ষত কৰা ছেদাংশ।

- অভিলম্ব আকাৰত সমতলৰ সমীকৰণ হ'ল $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$ $(p > 0)$, য'ত p হ'ল মূল বিন্দুৰ পৰা সমতলখনৰ লম্ব দূৰত্ব আৰু $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$ হ'ল লম্বডালৰ দিশাংক।
- (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) আৰু (x_3, y_3, z_3) বিন্দু তিনিটাৰ (একৰেখীয় নহয়) মাজেৰে যোৱা সমতলৰ সমীকৰণ হ'ল, $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$
- $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ আৰু $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ সমতল দুখনৰ মাজৰ কোণ হ'ল, $\cos^{-1}\frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$
- $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ আৰু $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ সমতল দুখন সমান্তৰাল হোৱাৰ চর্ত হ'ল, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$.
- $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ আৰু $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ সমতল দুখন লম্ব হোৱাৰ চর্ত হ'ল, $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$.
- $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ আৰু $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ সমতল দুখনৰ ছেদ ৰেখাৰ মাজেৰে যোৱা সমতলৰ সমীকৰণ হ'ল, $(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$, λ এটা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক।
- $Ax + By + Cz + D = 0$ সমতলৰ সমান্তৰাল যিকোনো সমতলৰ সমীকৰণ হ'ল $Ax + By + Cz + k = 0$, য'ত k এটা ধ্ৰুৱক।



৭.৫ অধিক জানিবলৈ

ইংৰাজী গ্ৰন্থ ঃ

1) Jain, P. K. and Ahmhad, K. *Textbook of Analytical Geometry of Three Dimensions*. New Delhi: New Age International (P) Ltd.
2) Khan, R. M. *Analytical Geometry Of Two & Three Dimensions & Vector Analysis*. New Central Book Agency (P) Limited.
3) Kishan, Hari. *Coordinate Geometry of Two dimensions*. New Delhi: Atlantic Publishers & Distributors.
4) Pal, Sat and Pal, Harbans. *A Textbook of Two Dimensional Geometry*. New Age International Publishers.

5) Sharma, G. C. and Jain, Madhu. *Coordinate Geometry (2D and 3D)*. New Delhi: Galgotia Publications Pvt Ltd.

6) Sharma, A. K. *Coordinate Geometry (2D)*. New Delhi: Discovery Publishing House.

7) Vasistha, A. R., Agrawal, D. C. *Analytical Geometry of Three Dimensions (Coordinate of Solid Geometry)*.

৭.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, A, B, C বিন্দুৰ স্থানাংক ক্রমে (a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c) গতিকে ABC ত্রিভুজটোৰ ভাৰকেন্দ্রৰ স্থানাংক,

$\left(\frac{a+0+0}{3}, \frac{0+b+0}{3}, \frac{0+0+c}{3}\right)$ অর্থাৎ, $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$.

কিন্তু ABC ত্রিভুজৰ ভাৰকেন্দ্রৰ স্থানাংক (p, q, r) বুলি দিয়া আছে। গতিকে,

$\frac{a}{3} = p$, $\frac{b}{3} = q$, $\frac{c}{3} = r$, গতিকে, $a = 3p$, $b = 3q$, $c = 3r$.

$\therefore$ সমতলখনৰ নির্ণেয় সমীকৰণ, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

অর্থাৎ, $\frac{x}{3p}+\frac{y}{3q}+\frac{z}{3r}=1$

অর্থাৎ, $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=3$.

২নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ (1, 0, –1), (2, –3, 4) আৰু (3, 1, 1) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা সমতলৰ

সমীকৰণ, $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$

অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+1 \\ 2-1 & -3-0 & 4+1 \\ 3-1 & 1-0 & 1+1 \end{vmatrix} = 0$

অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

অর্থাৎ, $(x - 1)(-6 - 5) - y(2 - 10) + (z + 1)(1 + 6) = 0$

অর্থাৎ, $-11x + 11 + 8y + 7z = 0$

অর্থাৎ, $11x - 8y - 7z = 18$

এতিয়া আমি সমীকৰণটোক ছেদাংশ আকাৰত প্ৰকাশ কৰিম।

উভয় পক্ষক 18 এৰে হৰণ কৰি, আমি পাওঁ, $\frac{11x}{18} - \frac{8y}{18} - \frac{7z}{18} = 1$

অর্থাৎ, $\frac{x}{\frac{18}{11}} + \frac{y}{-\frac{9}{4}} + \frac{z}{-\frac{18}{7}} = 1$

$\therefore$ ৰেখাডালে স্থানাংক অক্ষ কেইডালৰ লগত কৰা ছেদাংশ হ'ল, $\frac{18}{11}, -\frac{9}{4}, -\frac{18}{7}$.

৩নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ যিহেতু নির্ণেয় সমতলখন x-অক্ষৰ মাজেৰে যায়, ইয়াৰ সমীকৰণৰ আকাৰ হ'ব, $by + cz = 0$ ... ...(i).

আকৌ, যিহেতু ই (1, –4, 2) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, গতিকে,

$-4b + 2c = 0 \Rightarrow 2c = 4b \Rightarrow c = 2b$.

(i)ত cৰ মান বহুৰাই আমি পাওঁ, $by + 2bz = 0$, অর্থাৎ, $y + 2z = 0$

এইটোৱেই সমতলখনৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।

৪নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ আমি জানো যে $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ আৰু $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ সমতল দুখন পৰস্পৰ লম্ব যদি $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

এই ক্ষেত্ৰত, $x + 2y + 2z - 5 = 0$ আৰু $2x + y - 2z = 0$. সমতল দুখনৰ বাবে,

$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 1.2 + 2.1 + 2.(-2) = 2 + 2 - 4 = 0$;

গতিকে, প্ৰদত্ত সমতল দুখন পৰস্পৰ লম্ব।

(2, –4, 7) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা যিকোনো সমতলৰ সমীকৰণ হ'ল,

$A(x - 2) + B(y + 4) + C(z - 7) = 0$ ... ...(i)

যদি ই দুয়োখন সমতলৰ ওপৰত লম্ব, তেনেহ'লে,

$A.1 + B.2 + C.2 = 0$, অর্থাৎ, $A + 2B + 2C = 0$ ... ...(ii)

আৰু $A.2 + B.1 + C.(-2) = 0$, অর্থাৎ, $2A + B - 2C = 0$ ... ...(iii)

(i), (ii) আৰু (iii)ৰ পৰা A, B, C অপনয়ন কৰি আমি পাওঁ,

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+4 & z-7 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

অর্থাৎ, $(x - 2)(-4 - 2) - (y + 4)(-2 - 4) + (z - 7)(1 - 4) = 0$

অর্থাৎ, $-6x + 12 + 6y + 24 - 3z + 21 = 0$

অর্থাৎ, $-6x + 6y - 3z = -57$

অর্থাৎ, $2x - 2y + z = 19$

এইটোৱেই সমতলখনৰ সমীকৰণ।

শেহৰ সমতলখনৰ অভিলম্বৰ দিশানুপাত 2, –2, 1;

এতিয়া, $\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = \sqrt{3}$,

গতিকে অভিলম্বডালৰ দিশাংক, $\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$.

৫নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্ৰদত্ত সমতলখন হ'ল, $3x + 2y - 6z + 14 = 0$;

অর্থাৎ, $3x + 2y - 6z = -14$ (ধ্ৰুৱক পদটোক সোঁহাতলৈ নিয়া হ'ল R.H.S)

এতিয়া x, y, zৰ সহগ –3, –2, 6;

উভয় পক্ষক $\sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 6^2}$, অর্থাৎ, $\sqrt{9 + 4 + 36}$,

অর্থাৎ, 7ৰে হৰণ কৰি আমি পাওঁ, $\left(-\frac{3}{7}\right)x + \left(-\frac{2}{7}\right)y + \frac{6}{7}z = 2$.

এইটোৱেই প্ৰদত্ত সমতলখনৰ সমীকৰণৰ অভিলম্ব ৰূপ।

৬নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $x - y + 2z = 0$ আৰু $2x + 3y - z + 2 = 0$ সমতল দুখনৰ ছেদ ৰেখাৰ মাজেৰে যোৱা যিকোনো সমতলৰ সমীকৰণ হ'ল,

$x - y + 2z - 3 + k(2x + 3y - z + 2) = 0$ ... ...(i)

যদি ই (2, 0, –5) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, তেনেহ'লে,

$2 - 0 - 10 - 3 + k(4 + 0 + 5 + 2) = 0$

$\Rightarrow 11k = 11$

$\Rightarrow k = 1$

kৰ এই মান (i)ত বহুৱাই আমি পাওঁ, $x - y + 2z - 3 + 2x + 3y - z + 2 = 0$

অর্থাৎ, $3x + 2y + z - 1 = 0$

এইটোৱেই সমতলখনৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।

৭নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $x - 2y + 2z - 5 = 0$ আৰু $3x - 2y + 6z = 0$ সমতল দুখনৰ মাজৰ কোণ θ হ'লে, $\cos\theta = \frac{1.3 + (-2).(-2) + 2.6}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 6^2}}$

$$= \frac{3 + 4 + 12}{\sqrt{9}\sqrt{49}}$$

$$= \frac{19}{21}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{19}{21}.$$

৮নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ $kx - y + 4z = 2$ আৰু $3x + 2ky - 11z = 8$ সমতল দুখন পৰস্পৰ লম্ব হ'বলৈ হ'লে $k.3 + (-1).2k + 4.(-11) = 0$ [লম্ব হোৱাৰ চর্ত] $\Rightarrow k = 44$.



৭.৭ আৰ্হি প্রশ্ন

প্রশ্ন ১ ঃ এখন সমতল (3, –3, 1) বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু (3, 2, –1) আৰু (2, –1, 5) বিন্দু সংযোগী ৰেখাডাল সমতলখনৰ অভিলম্ব। সমতলখনৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ২ ঃ তলৰ সমতল দুখনৰ মাজৰ কোণ নির্ণয় কৰক।

i) $2x + 3y - 5z = 6,\ 3x + 8y + 6z = 9$

ii) $2x - y + 2z - 6 = 0,\ 3x + 6y + 2z - 9 = 0$

প্রশ্ন ৩ ঃ এখন সমতল (1, 2, 3) বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু ই $4x + 5y + -3z = 7$ সমতলৰ সমান্তৰাল। সমতলখনৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

*** ***** ***

অধ্যায় ৮ ঃ সৰল ৰেখা

অধ্যায় গাঁথনি

৮.১ উদ্দেশ্য
৮.২ পৰিচয়
৮.৩ সৰল ৰেখা
৮.৪ দুডাল ৰেখাৰ মাজৰ হ্রস্বতম দূৰত্ব
৮.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
৮.৬ অধিক জানিবলৈ
৮.৭ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
৮.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

৮.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- সৰল ৰেখা সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- দুডাল ৰেখাৰ মাজৰ হ্রস্বতম দূৰত্ব উলিয়াব পাৰিব।

৮.২ পৰিচয়

সপ্তম অধ্যায়ত আমি সমতলৰ সমীকৰণ বিষয়ে আলোচনা কৰিছোঁ। এতিয়া আমি অন্তৰিক্ষত থকা ৰেখাৰ সমীকৰণ উলিয়াম। এই অধ্যায়ত আমি দুডাল ৰেখাৰ মাজৰ হ্রস্বতম দূৰত্ব উলিয়াম।

৮.৩ সৰল ৰেখা

a) **ৰেখাৰ সমীকৰণ ঃ** প্রথম মাত্রাৰ এযোৰ সমীকৰণ,

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

আৰু $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$

ই একেলগে অন্তৰিক্ষত এডাল সৰল ৰেখা বুজায়, কিয়নো ছেদ ৰেখাত থকা প্রত্যেক বিন্দুৰ স্থানাংকই দুয়োটা সমীকৰণ সিদ্ধ কৰে। ধৰি লোৱা হৈছে যে সমতল দুখন সমান্তৰাল নহয়। দেখা গ'ল যে $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ আৰু $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ সমীকৰণে একেলগে এডাল ৰেখা বুজায়।

b) **সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণৰ প্ৰতিসম আকাৰ ঃ** ধৰা হ'ল, এডাল ৰেখা এটা নিৰ্দিষ্ট বিন্দু $A(x_1, y_1, z_1)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যায়। ধৰা হ'ল, ৰেখাডালৰ দিশানুপাত l, m, n। ধৰা হ'ল, ৰেখাডালত P(x, y, z) যিকোনো এটা বিন্দু। যিহেতু ৰেখাডাল $A(x_1, y_1, z_1)$ আৰু P(x, y, z) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, ইয়াৰ দিশানুপাত $x - x_1, y - y_1, z - z_1$। দেখা গ'ল যে একেডাল ৰেখাৰে দিশানুপাতৰ দুটা সংগ্ৰহ হ'ল $x - x_1, y - y_1, z - z_1$ আৰু l, m, n।

গতিকে, $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$

কিন্তু ৰেখাডালত P(x, y, z) যিকোনো এটা বিন্দু।

গতিকে, $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ সমীকৰণে ৰেখাডাল বুজাব।

ইয়াক ৰেখাৰ প্ৰতিসম আকাৰ বুলি কোৱা হয়।

মন্তব্য ঃ

i) বিশেষ ক্ষেত্ৰত ৰেখাডালৰ দিশাংক l, m, n হ'ব পাৰে।

ii) $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n} = k$, সমীকৰণৰ পৰা ৰেখাডালত থকা এটা চলক বিন্দুৰ স্থানাংক kৰ মাধ্যমত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি, কিয়নো,

$x = x_1 + lk, y = y_1 + mk, z = z_1 + nk.$

iii) এই ৰেখাডালৰ বাবে,

$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = k^2(l^2 + m^2 + n^2)$

$\Rightarrow k^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2,$

যদি ৰেখাডালৰ দিশাংকl, m, nৰ সাংখ্যিক মান অৰ্থাৎ, |k| হ'ল ৰেখাডালত থকা চলক বিন্দু P(x, y, z) আৰু নিৰ্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1, z_1)ৰ মাজৰ দূৰত্ব। k ধনাত্মকো হ'ব পাৰে, ঋণাত্মকো হ'ব পাৰে। ইয়াক ৰেখাডালত থকা চলক বিন্দু (x, y, z) আৰু নিৰ্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1, z_1)ৰ মাজৰ বীজগণিতীয় দূৰত্ব (Algebraic Distance) বুলি কোৱা হয়।

c) **দুটা বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখা ঃ** যদি এডাল ৰেখা (x_1, y_1, z_1) আৰু (x_2, y_2, z_2) বিন্দু দুটাৰ মাজেৰে যায়, তেনেহ'লে ইয়াৰ দিশানুপাত $x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1$।

গতিকে ৰেখাডালৰ সমীকৰণ হ'ল, $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$.

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ ঃ এডাল ৰেখা (1, –4, 3) বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু ৰেখাডাল (–1, 5, 2) আৰু (2, –1, 0) বিন্দুদ্বয় সংযোগী ৰেখাৰ সমান্তৰাল। ৰেখাডালৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ (–1, 5, 2) আৰু (2, –1, 0) বিন্দু সংযোগী ৰেখাৰ দিশানুপাত 2 – (–1), –1 – 5, 0 – 2, অৰ্থাৎ, 3, –6, –2।

নির্ণেয় ৰেখাডাল এই ৰেখাডালৰ সমান্তৰাল। গতিকে ইয়াৰ দিশানুপাত 3, –6, –2; আকৌ ৰেখাডাল (1, –4, 3) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়।

গতিকে ৰেখাডালৰ নির্ণেয় সমীকৰণ, $\frac{x-1}{3}=\frac{y-(-4)}{-6}=\frac{z-3}{-2}$

অর্থাৎ, $\frac{x-1}{3}=\frac{y+4}{-6}=\frac{z-3}{-2}$

উদাহৰণ ২ঃ এডাল ৰেখা (–1, 2, –3) আৰু (2, 1, –4) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়। ৰেখাডালৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক। ৰেখাডালে $x - 3y + 4z - 5 = 0$ সমতলক কোনটো বিন্দুত কাটে?

সমাধান ঃ (–1, 2, –3) আৰু (2, 1, –4) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

অর্থাৎ, $\frac{x-(-1)}{2-(-1)}=\frac{y-2}{1-2}=\frac{z-(-3)}{-4-(-3)}$

অর্থাৎ, $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-1}$

ৰেখাডাল হ'ল, $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-1}=k$ (ধৰা হ'ল)

গতিকে, $x + 1 = 3k, y – 2 = – k, z + 3 = –k$

$\Rightarrow x = 3k – 1, y = 2 – k, z = –k –3$

$\therefore$ ওপৰৰ ৰেখাডালত থকা যিকোনো বিন্দু হ'ল, $(3k – 1, 2 – k, –k –3)$.

যদি এই বিন্দুটো $x – 3y + 4z – 5 = 0$ সমতলখনত থাকে, তেনেহ'লে,

$(3k – 1) – (2 – k) + (–k –3) – 5 = 0$

$\Rightarrow 3k – 1 –6 + 3k – 4k – 12 – 5 = 0$

$\Rightarrow 2k – 24 = 0$

$\Rightarrow 2k = 24$

$\Rightarrow k = 12$

$k = 12$ৰ বাবে, $x = 3k – 1 = 35, y = 2 – k = –10, z = –k –3 = –15$

$\therefore$ ৰেখাডালে সমতলখনক (35, –10, –15).

উদাহৰণ ৩ঃ $6x + 2y –3z – 14 = 0 = x + 2y – z + 8$ সমীকৰণে বুজোৱা ৰেখাৰ দিশাংক নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ প্রদত্ত ৰেখাডাল হ'ল অধোলিখিত সমতল দুখনৰ ছেদ ৰেখা,

$$\left.\begin{aligned}6x+2y-3z-14=0\\ x+2y-z+8=0\end{aligned}\right\} \quad \text{... ... ...(1)}$$

মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু $6x + 2y – 3z – 14 = 0$ সমতলৰ সমান্তৰাল সমতলৰ সমীকৰণ হ'ল, $6x + 2y – 3z = 0$। আকৌ মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু $x + 2y – z + 8 = 0$ সমীকৰণৰ সমান্তৰাল সমতলৰ সমীকৰণ হ'ল $x + 2y – z = 0$।

তেনেহ'লে, $\left.\begin{matrix} 6x+2y-3z=0 \\ x+2y-z=0 \end{matrix}\right\}$ ... ...(2)

সমীকৰণযোৰে মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু (1) সমীকৰণ বুজোৱা ৰেখাৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায়। এতিয়া (2)ক এনেদৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি,

$$\frac{x}{-2+6}=\frac{y}{-3+6}=\frac{z}{12-2} \text{ অৰ্থাৎ, } \frac{x}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z}{10}$$

এইটো (2) ৰেখাডালৰ প্ৰতিসম আকাৰ। ৰেখাডালৰ দিশানুপাত 4, 3, 10; (1) ৰেখাডাল (2) ৰেখাডালৰ সমান্তৰাল। গতিকে (1) ৰেখাডালৰ দিশানুপাত 4, 3, 10।

এতিয়া, $\sqrt{4^2+3^2+10^2}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$

গতিকে (1) ৰেখাডালৰ দিশাংক, $\frac{4}{5\sqrt{5}},\frac{3}{5\sqrt{5}},\frac{10}{5\sqrt{5}}$

উদাহৰণ ৪ ঃ $2x + 3y – z = 0 = 4x + y – 5z + 12$ সমীকৰণে বুজোৱা ৰেখাক প্ৰতিসম আকাৰত প্ৰকাশ কৰক।

সমাধান ঃ ৰেখাৰ সমীকৰণ হ'ল,

$2x + 3y – z = 0 = 4x + y – 5z + 12$ ... ...(1)

মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা আৰু (1) ৰেখাৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ সমীকৰণ হ'ল,

$\left.\begin{matrix} 2x+3y-z=0 \\ 4x+y-5z=0 \end{matrix}\right\}$ ... ...(2)

ইয়াক এনেদৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি,

$$\frac{x}{-15+1}=\frac{y}{-4+10}=\frac{z}{2-12}$$

অৰ্থাৎ, $\frac{x}{-14}=\frac{y}{6}=\frac{z}{-10}$

অৰ্থাৎ, $\frac{x}{7}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{5}$

গতিকে (2) নম্বৰ ৰেখাডালৰ দিশানুপাত 7, –3, 5 । গতিকে (1) নম্বৰ ৰেখাডালৰো দিশানুপাত 7, –3, 5, কিয়নো ৰেখা দুডাল সমান্তৰাল।

এতিয়া আমি (1) নম্বৰ ৰেখাডালত এটা বিন্দু লওঁ। (1)ত $z = 0$ বহুৰাই, আমি পাওঁ,

$\left.\begin{matrix} 2x+3y-6=0 \\ 4x+y+12=0 \end{matrix}\right\}$

দেখা গ'ল যে (1) নম্বৰ ৰেখাডাল $\left(-\frac{21}{5}, \frac{24}{5}, 0\right)$; বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু ইয়াৰ দিশানুপাত 7, –3, 5.

$\therefore$ প্ৰতিসম আকাৰত (1) নম্বৰ ৰেখাডালৰ সমীকৰণ হ'ল, $\frac{x+\frac{21}{5}}{7} = \frac{y-\frac{24}{5}}{-3} = \frac{z}{5}$.

উদাহৰণ ৫ঃ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4}$ আৰু $2x + 2y - z = 0 = 2x + 3 - 4z - 8$ ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ প্ৰদত্ত ৰেখা দুডাল হ'ল,

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4} \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots(1)$$

আৰু $2x + 2y - z - 6 = 2x + 3 - 4z - 8$ $\ldots\ \ldots\ \ldots(2)$

ধৰা হ'ল (2) ৰেখাডালৰ দিশাংক l, m, n তেনেহ'লে, $\left.\begin{aligned} 2l + 2m - n = 0 \\ 2l + 3m - 4n = 0 \end{aligned}\right\}$

[(2) নম্বৰ ৰেখাডাল $2x + 2y - z - 6 = 0$ আৰু $2x + 3 - 4z - 8 = 0$ সমতলত আছে। সমতল দুখনৰ ওপৰত টনা অভিলম্বৰ দিশানুপাত 2, 2, –1 আৰু 2, 3, –4 এই অভিলম্ব ৰেখাডালৰ ওপৰত লম্ব।]

গতিকে, $\frac{l}{-8+3} = \frac{m}{-2+8} = \frac{n}{6-4} \Rightarrow \frac{l}{-5} = \frac{m}{6} = \frac{n}{2}$

$\therefore$ (1) নম্বৰ ৰেখাডালৰ দিশানুপাত 2, 3, 4 আৰু (2) নম্বৰ ৰেখাডালৰ দিশানুপাত –5, 6, 2. গতিকে ৰেখাদুডালৰ মাজৰ নিৰ্ণেয় কোণ,

$$= \cos^{-1}\frac{2.(-5)+3.6+4.2}{\sqrt{2^2+3^2+4^2}\sqrt{(-5)^2+6^2+2^2}}$$

$$= \cos^{-1}\frac{16}{\sqrt{29}\sqrt{65}}$$



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১ ঃ এডাল ৰেখা (α, β, γ) বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু ৰেখাডাল y-অক্ষৰ সমান্তৰাল। ৰেখাডালৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $3x + 2y - 3z + 3 = 0 = x + 2y - 2z + 4$ ৰেখাৰ সমীকৰণক তলত দিয়া ধৰণে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{4}$.

প্ৰশ্ন নং ৩ ঃ এডাল ৰেখা (0, 3, –1) বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু তলৰ প্ৰতিডাল ৰেখাৰ ওপৰত লম্ব $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}$ আৰু $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+1}{-1}$. ৰেখাডালৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৪ ঃ A(2, 3, 1) আৰু B(–2, 1, –3) বিন্দু সংযোগী ৰেখাক $x - 2y + 3z + 4 = 0$ সমতলখনে কি অনুপাতত ভাগ কৰিছে নিৰ্ণয় কৰক। লগতে ছেদবিন্দুৰ স্থানাংক নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৫ ঃ $\frac{x+1}{2} = y - 3 = \frac{z-2}{-2}$ ৰেখা আৰু $3x - 4z + 8 = 0$ সমতলৰ মাজৰ কোণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৬ ঃ λৰ কি মানৰ বাবে $\frac{x+7}{\lambda} = \frac{y-9}{1} = \frac{z+1}{-2}$ আৰু $\frac{x+4}{5} = \frac{y+3}{-3\lambda} = \frac{z-3}{2}$ ৰেখা দুডাল পৰস্পৰ লম্ব হ'ব?

সমতল আৰু সৰল ৰেখা ঃ

তলৰ সমতলখন লোৱা হ'ল, $Ax + By + Cz + D = 0$ ... ...(1)

তলৰ ৰেখাডাল লোৱা হ'ল, $\frac{x - x_1`}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ ... ...(2)

(2) নম্বৰে ৰেখাত থকা যিকোনো বিন্দু হ'ল $(x_1 + lk, y_1 + mk, z_1 + nk)$, k এটা প্ৰাচল। এই ৰেখাডালে (1) নম্বৰ সমতলক কাটিব, যদি kৰ কিবা মানৰ বাবে, এই বিন্দুটো (1) নম্বৰ সমতলত থাকে, অৰ্থাৎ, যদি,

$A(x_1 + lk) + B(y_1 + mk) + C(z_1 + nk) + D = 0$ ... ...(3)

অৰ্থাৎ, $(Al + Bm + Cn)k = -(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)$

i) যদি $Al + Bm + Cn \neq 0$, (2) নম্বৰ ৰেখাডালে (1) নম্বৰ সমতলক $(x_1 + lk, y_1 + mk, z_1 + nk)$ বিন্দুত কাটিব, য'ত,

$$k = -\frac{(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)}{(Al + Bm + Cn)}$$

ii) যদি $Al + Bm + Cn = 0$ আৰু $Ax + By + Cz + D \neq 0$, তেনেহ'লে, kৰ কোনো সসীম মানে (3) সিদ্ধ নকৰে। ইয়াৰ অৰ্থ এইটোৱেই যে (2) নম্বৰ ৰেখাডালৰ (1) নম্বৰ সমতলৰ সৈতে কোনো উমৈহতীয়া বিন্দু নাই। অৰ্থাৎ, (2) নম্বৰ ৰেখাডালে (1) নম্বৰ সমতলক ছেদ নকৰে। অৰ্থাৎ, (2) নম্বৰ ৰেখাডাল (1) নম্বৰ সমতলৰ সমান্তৰাল যদি, $Al + Bm + Cn = 0$ আৰু $Ax + By + Cz + D \neq 0$.

iii) যদি $Al + Bm + Cn = 0$ আৰু $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, তেনেহ'লে, kৰ সকলো মানৰ বাবে (3) সিদ্ধ হয়। গতিকে (2) নম্বৰ ৰেখাডালৰ প্ৰতিটো বিন্দু (1) নম্বৰ সমতলখনত

থাকিব, অর্থাৎ (2) নম্বৰ ৰেখাডাল সম্পূর্ণৰূপে (1) নম্বৰ সমতলখনত থাকিব। দেখা গ'ল যে (2) নম্বৰ ৰেখাডাল (1) নম্বৰ সমতলখনত সম্পূর্ণৰূপে থাকিব যদি, $Al + Bm + Cn = 0$ আৰু $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$.

iv) (2) নম্বৰ ৰেখাডাল (1) নম্বৰ সমতলৰ অভিলম্ব হ'ব যদি $\frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}$, কিয়নো l, m, n হ'ল ৰেখাডালৰ দিশানুপাত আৰু A, B, C হ'ল সমতলখনৰ অভিলম্বৰ দিশানুপাত।

v) $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ ৰেখাৰ মাজেৰে যোৱা সমতলৰ সাধাৰণ সমীকৰণ হ'ল, $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$, য'ত, $Al + Bm + Cn = 0$.

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-5}{4}$ ৰেখাডাল,

(i) $4x + 4y - 5z + 3 = 0$ সমতলখনৰ সমান্তৰাল, আৰু

(ii) $4x + 4y - 5z - 3 = 0$ সমতলত সম্পূর্ণৰূপে থাকে।

সমাধান ঃ

i) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-5}{4}$ ৰেখাডাল আৰু $4x + 4y - 5z - 3 = 0$ সমতলখনৰ বাবে,

$Al + Bm + Cn = 4.2 + 4.3 + (-5).4 = 8 + 12 - 20 = 0$

আৰু $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 4.3 + 4.4 - 5.5 + 3 - 31 - 25 \neq 0$;

প্ৰদত্ত ৰেখাডাল $4x + 4y - 5z + 3 = 0$ সমতলৰ সমান্তৰাল।

ii) $\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-5}{4}$ ৰেখাডাল আৰু $4x + 4y - 5z - 3 = 0$ সমতলৰ বাবে,

$Al + Bm + Cn = 4.2 + 4.3 + (-5).4 = 8 + 12 - 20 = 0$

আৰু $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 4.3 + 4.4 - 5.5 - 3 = 28 - 28 = 0$;

$\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-5}{4}$ ৰেখাডাল $3x + 4y - 5z - 3 = 0$ সমতলত সম্পূর্ণৰূপে থাকে।

উদাহৰণ ২ ঃ দেখুওৱাক যে $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ ৰেখাৰ মাজেৰে যোৱা আৰু $\frac{x}{l'} = \frac{y}{m'} = \frac{z}{n'}$ ৰেখাৰ সমান্তৰাল সমতলৰ সমীকৰণ, $\sum(x - \alpha)(mn' - m'n) = 0$.

সমাধান ঃ $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ ৰেখাৰ মাজেৰে যোৱা সমতলৰ সমীকৰণ,

$A(x - \alpha) + B(y - \beta) + C(z - \gamma)$ ... ...(1)

য'ত, $Al + Bm + Cn = 0$ ... ...(2)

যদি এই সমতলখন $\frac{x}{l'} = \frac{y}{m'} = \frac{z}{n'}$ ৰেখাৰ সমান্তৰাল হয়, তেনেহ'লে,

$Al' + Bm' + Cn' = 0$ ... ...(3)

(1), (2), (3)ৰ পৰা A, B, C অপনয়ন কৰি আমি সমতলখনৰ সমীকৰণ পাওঁ,

$$\begin{vmatrix} x-\alpha & y-\beta & z-\gamma \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$$

অৰ্থাৎ, $(x-\alpha)(mn' - m'n) + (y-\beta)(nl' - n'l) + (z-\gamma)(lm' - l'm) = 0$

অৰ্থাৎ, $\sum(x-\alpha)(mn' - m'n) = 0$.

উদাহৰণ ২ঃ $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{12}$ ৰেখা আৰু $x - y + z = 5$ সমতলৰ ছেদ বিন্দুৰ পৰা (2, –1, 3) বিন্দুৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{12}$ ... ...(i)

$x - y + z = 5$ ... ...(ii)

(i)ত প্ৰত্যেক অনুপাত = ρ লৈ আমি পাওঁ,

$x - 2 = 3\rho, y + 1 = 4\rho, z - 2 = 12\rho$

$\Rightarrow x = 3\rho + 2, y\ 4\rho - 1, z = 12\rho + 2$ ... ...(iii)

x, y, zৰ মান (ii)ত বহুৰাই আমি পাওঁ,

$(3\rho + 2) - (4\rho - 1) + (12\rho + 2) = 5$

$\Rightarrow 11\rho + 5 = 5$

$\Rightarrow 11\rho = 0$

$\Rightarrow \rho = 0$

(iii)ত $\rho = 0$ বহুৰাই আমি পাওঁ, $x = 2, y = -1, z = 2$.

(i) নম্বৰ ৰেখা আৰু (ii) নম্বৰ সমতলৰ ছেদ বিন্দুৰ স্থানাংক (2, –1, 2).

$\therefore$ ছেদ বিন্দু (2, –1, 2) ৰ পৰা (2, –1, 3) বিন্দুৰ দূৰত্ব,

(2, –1, 2) = $\sqrt{(2-2)^2 + (-1+1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{0+0+1} = \sqrt{1} = 1$.

উদাহৰণ ৪ঃ $2x - y + 3z + 1 = 0 = x + y + z + 3$ ৰেখাৰ মাজেৰে যোৱা আৰু $\frac{x+1}{1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z}{3}$ ৰেখাৰ সমান্তৰাল সমতলৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $2x - y + 3z + 1 = 0 = x + y + z + 3$ ৰেখাৰ মাজেৰে যোৱা সমতলৰ সমীকৰণ হ'ল,

$2x - y + 3z + 1 + \lambda(x + y + z + 3) = 0$ ... ...(1)

ই $\frac{x+1}{1}=\frac{y-5}{2}=\frac{z}{3}$ ৰেখাৰ সমান্তৰাল হ'ব যদি,

$Al + Bm + Cn = 0$ চর্তটো সিদ্ধ হয়।

অর্থাৎ, যদি $(2 + \lambda).1 + (\lambda - 1).2 + (3 + \lambda).3 = 0$

$\Rightarrow 2 + \lambda + 2\lambda - 2 + 9 + 3\lambda = 0$

$\Rightarrow 6\lambda = -9$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{3}{2}$

(1)ত $\lambda = -\frac{3}{2}$ বহুৰাই আমি পাওঁ,

$$\left(2-\frac{3}{2}\right)x+\left(-\frac{3}{2}-1\right)y+\left(3-\frac{3}{2}\right)z+\left(1-3.\frac{3}{2}\right)=0$$

অর্থাৎ, $\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}y+\frac{3}{2}z-\frac{7}{2}=0$

অর্থাৎ, $x - 5y + 3z - 7 = 0$

এইটোৱেই সমতলখনৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।

এক সমতলীয় ৰেখা ঃ দুডাল ৰেখাক এক সমতলীয় (Coplanar) ৰেখা বুলি কোৱা হয় যদি সিহঁত একেখন সমতলতে থাকে। অন্যথাই সিহঁতক বিষমতলীয় ৰেখা (Non-Coplanar or Skew Lines) বোলে। দুডাল এক সমতলীয় ৰেখাই এটা বিন্দুত কটাকটি কৰে বা ৰেখা দুডাল সমান্তৰাল। তলৰ ৰেখা দুডাল লোৱা হ'ল,

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{... ... ...(i)}$$

আৰু $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ ... ...(ii)

(i) নম্বৰ ৰেখাৰ মাজেৰে যোৱা সমতলৰ সমীকৰণ হ'ল,

$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$ ... ...(iii)

য'ত, $Al_1 + Bm_1 + Cn_1 = 0$ ... ...(iv)

যদি এই সমতলখনত (ii) নম্বৰ ৰেখাডাল থাকে, তেনেহ'লে,

$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0$ ... ...(v)

আৰু $Al_2 + Bm_2 + Cn_2 = 0$ ... ...(vi)

(iv), (v) আৰু (vi)ৰ পৰা A, B, C অপনয়ন কৰি আমি পাওঁ,

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0 \quad \text{... ... ...(vii)}$$

(i) আৰু (ii) ৰেখা দুডাল এক সমতলীয় হোৱাৰ এইটোৱেই চর্ত। যেতিয়া এই চর্তটো সিদ্ধ হয়, তেতিয়া (i) আৰু (ii) ৰেখা দুডাল একসমতলীয়। (iii), (iv), (vi)ৰ পৰা A, B, C অপনয়ন কৰি এই ৰেখা দুডাল থকা সমতলখনৰ সমীকৰণ পোৱা যাব,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 .$$

উদাহৰণ ১ ঃ প্রমাণ কৰক যে $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ আৰু $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ ৰেখা দুডাল একসমতলীয়।

সমাধান ঃ ৰেখা দুডাল হ'ল, $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ আৰু $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$

এতিয়া, $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 1-2 & 2-3 & 3-4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \quad (C_2 - C_3 \text{ আৰু } C_3 - C_2)$$

$= 0$

$\therefore$ ৰেখা দুডাল এক সমতলীয়।

৮.৪ দুডাল ৰেখাৰ মাজৰ হ্রস্বতম দূৰত্ব

দুডাল ৰেখা দিয়া আছে। এই দুয়োডাল ৰেখাৰ লম্ব ৰেখাডালক হ্রস্বতম দূৰত্বৰ ৰেখা (Line of Shortest Distance) বুলি কোৱা হয়। দুয়োডাল ৰেখাই ছেদ কৰা উমৈহতীয়া লম্বডালৰ

মাজৰ খণ্ডটোৰ দৈর্ঘ্যক ৰেখা দুডালৰ মাজৰ হ্রস্বতম দূৰত্ব [Shortest Distance (S.D)] বুলি কোৱা হয়। তলৰ ফলটো আমি পাওঁ,

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

আৰু $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$

দিয়া আছে, $S.D=\frac{|\Delta|}{k}$

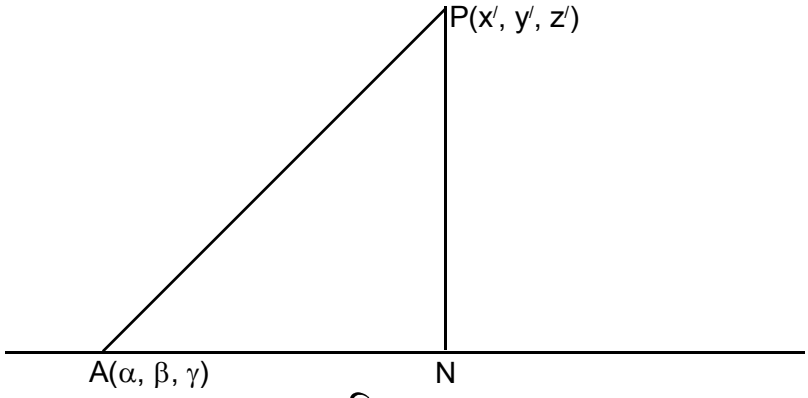
য'ত. $\Delta=\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}$

আৰু $k=\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2}$

যদি $\Delta = 0$, আমি পাওঁ, S.D = 0

এই ক্ষেত্রত ৰেখা দুডাল এক সমতলীয় আৰু ৰেখা দুডালে কটাকটি কৰে।

এডাল নির্দিষ্ট ৰেখাৰপৰা এটা নির্দিষ্ট বিন্দুৰ দূৰত্ব ঃ



চিত্র ঃ ৮.১

এডাল ৰেখা $A(\alpha, \beta, \gamma)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু ৰেখাডালৰ দিশাংক l, m, n। তেনেহ'লে, $P(x', y', z')$ বিন্দুৰ পৰা ৰেখাডালৰ ওপৰত টনা লম্ব PNৰ দৈর্ঘ্য তলৰ ফলটোৰ পৰা পোৱা যাব,

$$PM^2=\begin{vmatrix} x'-\alpha & y'-\beta \\ l & m \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y'-\beta & z'-\gamma \\ m & n \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z'-\gamma & x'-\alpha \\ n & l \end{vmatrix}^2$$

উদাহৰণ ১ ঃ তলৰ ৰেখা দুডালৰ মাজৰ হ্রস্বতম দূৰত্ব (S.D) নির্ণয় কৰক।

$\frac{x-1}{2}=\frac{y+8}{-7}=\frac{z-4}{5}$ আৰু $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-6}{-3}$

সমাধান ঃ আমি পালোঁ, $\Delta = \begin{vmatrix} 1-1 & -8-2 & 4-6 \\ 2 & -7 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -10 & -2 \\ 2 & -7 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -10 & -2 \\ 0 & -8 & 8 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \times (-80 - 16) = -192$$

আৰু $k = \sqrt{\begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}^2}$

$$= \sqrt{(2+14)^2 + (21-5)^2 + (10+6)^2}$$

$$= \sqrt{3 \times 16^2}$$

$$= 16\sqrt{3}$$

$\therefore$ নির্ণেয় S.D $= \frac{|\Delta|}{k} = \frac{192}{16\sqrt{3}}$

$$= \frac{12}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{12\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3}$$

উদাহৰণ ২ ঃ $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{3}$ ৰেখাডালৰ পৰা (2, 3, 4) বিন্দুৰ দূৰত্ব নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ৰেখাডাল $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 3)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু ইয়াৰ দিশানুপাত 2, 1, 3; ইয়াৰ দিশাংক l, m, n হ'ব,

$$l = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{14}}, m = \frac{2}{\sqrt{14}}, n = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

নির্ণেয় দূৰত্ব d হ'লে,

$$d^2 = \begin{vmatrix} x'-\alpha & y'-\beta \\ l & m \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y'-\beta & z'-\gamma \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'-\gamma & x'-\alpha \\ n & l \end{vmatrix}^2$$

$$= \begin{vmatrix} 2-1 & 3-2 \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3-2 & 4-3 \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 4-3 & 2-1 \\ \frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{2}{\sqrt{14}} \end{vmatrix}^2$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{14}} - \frac{1}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{14}} - \frac{2}{\sqrt{14}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{14}} - \frac{3}{\sqrt{14}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{14} + \frac{1}{14} + \frac{4}{14}$$

$$= \frac{6}{14}$$

$$= \frac{3}{7}$$

$\therefore d = \sqrt{\frac{3}{7}}$, এইটোৱেই নির্ণেয় দূৰত্ব।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ৭ ঃ এখন সমতলত (1, 4, –3) বিন্দুটো আৰু $3x + 2y - 2 = 0$ আৰু $2y + z + 3 = 0$ ৰেখাডাল আছে। সমতলখনৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৮ ঃ এখন সমতল $x + y - 2z + 4 = 0 = 3x - y + 2z + 1$ ৰেখাৰ মাজেৰে যায় আৰু $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{-1}$ ৰেখাৰ সমান্তৰাল। সমতলখনৰ সমীকৰণ $2x - 8y + 16z + 3 = 0$ বুলি প্রমাণ কৰক।

প্রশ্ন নং ৯ ঃ এখন সমতল $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{4}$ ৰেখাৰ মাজেৰে যায় আৰু ই $3x - y + 4 = 0$ সমতলখনৰ লম্ব। সমতলখনৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ১০ ঃ দেখুওৱাক যে $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ আৰু $4x - 3y + 1 = 0 = 5x - 3z + 2$ ৰেখা দুডাল এক সমতলীয়।

প্রশ্ন নং ১১ ঃ দেখুওৱাক যে $\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{-2}$ আৰু $\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{2} = \frac{z+3}{-3}$ ৰেখা দুডাল এক সমতলীয়। লগতে ৰেখা দুডালৰ ছেদ বিন্দুৰ স্থানাংক নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ১২ ঃ z-অক্ষ আৰু $3x - 4y + 5 = 0 = 6x - 2y + z + 9$ ৰেখাৰ মাজৰ S.D নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ১৩ ঃ $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}$ আৰু $\frac{x-4}{2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z-8}{4}$ ৰেখা দুডালৰ মাজৰ S.D নির্ণয় কৰক। লগতে ফলটোৰ ব্যাখ্যা দিয়ক।

প্ৰশ্ন নং ১৪ ঃ $\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-5}{4}$ ৰেখাডালৰ পৰা (1, 2, 3) বিন্দুৰ দূৰত্ব নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ১৫ ঃ কি চৰ্ত সিদ্ধ হ'লে $x = az + b$, $y = cz + d$ আৰু $x = a'z + b'$, $y = c'z + d'$ ৰেখা দুডাল এক সমতলীয় হ'ব?



৮.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- x, y, zৰ প্ৰথম মাত্ৰাৰ এযোৰ সমীকৰণে একেলগে অন্তৰিক্ষত এডাল সৰল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায়।
- এডাল ৰেখা (x_1, y_1, z_1) বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু ৰেকাডালৰ দিশানুপাত l, m, n তেনেহ'লে, ৰেখাডালৰ সমীকৰণ হ'ল, $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$
- (x_1, y_1, z_1) আৰু (x_2, y_2, z_2) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাৰ সমীকৰণ হ'ল, $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.
- $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ ৰেখাডাল,
  - i) $Ax + By + Cz + D = 0$ সমতলৰ সমান্তৰাল, যদি, $Al + Bm + Cn = 0$ আৰু $Ax + By + Cz + D \neq 0$;
  - ii) $Ax + By + Cz + D = 0$ সমতলত থাকে, যদি, $Al + Bm + Cn = 0$ আৰু $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$;
  - iii) $Ax + By + Cz + D = 0$ সমতলৰ ওপৰত লম্ব, যদি, $\frac{l}{A}=\frac{m}{B}=\frac{n}{C}$.
- যিখন সমতলত $\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}=\frac{z-z_1}{n}$ ৰেখাডাল থাকে, সেই সমতলখনৰ সমীকৰণ, $A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$, য'ত, $Al + Bm + Cn = 0$.
- $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ আৰু $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ ৰেখা দুডাল এক সমতলীয় হ'ব যদি, $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$ আৰু সেই ক্ষেত্ৰত ৰেখা দুডাল থকা সমতলখনৰ সমীকৰণ, $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}=0$.

- $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$ আৰু $\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$ ৰেখা দুডালৰ মাজৰ হ্ৰস্বতম দূৰত্ব (S.D) হ'ল, S.D = $\frac{|\Delta|}{k}$.

  য'ত $\Delta=\begin{vmatrix} x_1-x_2 & y_1-y_2 & z_1-z_2 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}$

  আৰু $k=\sqrt{\begin{vmatrix} l_1 & m_1 \\ l_2 & m_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} m_1 & n_1 \\ m_2 & n_2 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} n_1 & l_1 \\ n_2 & l_2 \end{vmatrix}^2}$

- $\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$ ($l^2+m^2+n^2=1$) ৰেখাডালৰ পৰা (x', y', z') বিন্দুৰ লম্ব দূৰত্ব d হ'লে, $d^2=\begin{vmatrix} x'-\alpha & y'-\beta \\ l & m \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} y'-\beta & z'-\gamma \\ m & n \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z'-\gamma & x'-\alpha \\ n & l \end{vmatrix}^2$



৮.৬ অধিক জানিবলৈ

ইংৰাজী গ্ৰন্থ ঃ

1) Jain, P. K. and Ahmhad, K. *Textbook of Analytical Geometry of Three Dimensions*. New Delhi: New Age International (P) Ltd.
2) Khan, R. M. *Analytical Geometry Of Two & Three Dimensions & Vector Analysis*. New Central Book Agency (P) Limited.
3) Kishan, Hari. *Coordinate Geometry of Two dimensions*. New Delhi: Atlantic Publishers & Distributors.
4) Pal, Sat and Pal, Harbans. *A Textbook of Two Dimensional Geometry*. New Age International Publishers.
5) Sharma, G. C. and Jain, Madhu. *Coordinate Geometry (2D and 3D)*. New Delhi: Galgotia Publications Pvt Ltd.
6) Sharma, A. K. *Coordinate Geometry (2D)*. New Delhi: Discovery Publishing House.
7) Vasistha, A. R., Agrawal, D. C. *Analytical Geometry of Three Dimensions (Coordinate of Solid Geometry)*.

৮.৭ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ y-অক্ষৰ দিশাংক 0, 1, 0. নির্ণেয় ৰেখাডাল y-অক্ষৰ সমান্তৰাল আৰু সেয়ে ইয়াৰ দিশাংক 0, 1, 0. আকৌ ৰেখাডাল (α, β, γ) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়।

গতিকে ৰেখাডালৰ সমীকৰণ, $\frac{x-\alpha}{0} = \frac{y-\beta}{1} = \frac{z-\gamma}{0}$

অর্থাৎ, $x = \alpha, z = \gamma$.

২নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্রদত্ত ৰেখাডাল তলৰ সমীকৰণৰ দ্বাৰা বুজোৱা হৈছে,

$$\left.\begin{aligned} 3x+2y-3z+3=0 \\ x+2y-2z+4=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ \ldots\ \ldots(1)$$

(1)ৰ পৰা ধ্রুৱক পদটো আঁতৰালে আমি পাওঁ,

$$\left.\begin{aligned} 3x+2y-3z=0 \\ x+2y-2z=0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ \ldots\ \ldots(2)$$

ইয়ে মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা (1)নম্বৰ ৰেখাডালৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ সমীকৰণ বুজায়।

(2)ক এনেদৰে প্রকাশ কৰিব পাৰি, $\frac{x}{-4+6} = \frac{y}{-3+6} = \frac{z}{6-2}$

অর্থাৎ, $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$

এয়া (2)নম্বৰ ৰেখাৰ সমমিত আকাৰৰ সমীকৰণ। স্পষ্টতঃ (2)নম্বৰ ৰেখাডালৰ দিশানুপাত 2, 3, 4। (1)নম্বৰ ৰেখাডাল (2)নম্বৰ ৰেখাৰসমান্তৰাল। গতিকে (1)নম্বৰ ৰেখাডালৰ দিশানুপাতো 2, 3, 4। এতিয়া আমি (1)নম্বৰ ৰেখাডালত এটা বিন্দু উলিয়াওঁ।

(1)ত $y = 0$ বহুৱাই আমি পাওঁ, $\left.\begin{aligned} 3x-3z+3=0 \\ x-2z+4=0 \end{aligned}\right\}$

অর্থাৎ, $\left.\begin{aligned} x-z+1=0 \\ x-2z+4=0 \end{aligned}\right\}$,

বিয়োগ কৰি, আমি পাওঁ, $z - 3 = 0 \Rightarrow z = 3$

গতিকে প্রথম সমীকৰণটোৰ পৰা আমি পাওঁ, $x - 3 + 1 = 0 \Rightarrow x = 2$.

গতিকে (1)নম্বৰ ৰেখাডালত (2, 0, 3) এটা বিন্দু আৰু ইয়াৰ দিশানুপাত 2, 3, 4.

গতিকে সমমিত আকাৰত (1)নম্বৰ ৰেখাডালৰ সমীকৰণ হ'ব, $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-3}{4}$.

৩নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, নির্ণেয় ৰেখাডালৰ দিশাংক l, m, n। এই ৰেখাডাল তলৰ প্রতিডাল ৰেখাৰ ওপৰত লম্ব,

$\frac{x}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{3}$ আৰু $\frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{5}=\frac{z+1}{-1}$

গতিকে, $\left.\begin{aligned} l-2m+3n=0 \\ 4l+5m-n=0 \end{aligned}\right\}$

ইয়াৰ পৰা, $\frac{l}{2-15}=\frac{m}{12+1}=\frac{n}{5+8}$

$\Rightarrow \frac{l}{-13}=\frac{m}{13}=\frac{n}{13}$

$\Rightarrow \frac{l}{-1}=\frac{m}{1}=\frac{n}{1}$

$\therefore$ ৰেখাডালৰ দিশানুপাত –1, 1, 1.

আকৌ ৰেখাডাল (0, 3, –1) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়।

গতিকে ৰেখাডালৰ সমীকৰণ, $\frac{x}{-1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+1}{1}$.

৪নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰাহ'ল, A(2, 3, 1) আৰু B(–2, 1, –3) বিন্দুদ্বয় সংযোগী ৰেখাই $x - 2y + 3z + 4 = 0$ সমতলক $P(\alpha, \beta, \gamma)$ বিন্দুত কাটে।

ধৰা হ'ল, $AP : PB = \lambda : 1$; তেনেহ'লে,

$\alpha = \frac{\lambda.(-2)+1.2}{\lambda+1}=\frac{-2\lambda+2}{\lambda+1}$

$\beta = \frac{\lambda.1+1.3}{\lambda+1}=\frac{\lambda+3}{\lambda+1}$ ... ...(i)

$\gamma = \frac{\lambda.(-3)+1.1}{\lambda+1}=\frac{1-3\lambda}{\lambda+1}$

যিহেতু $P(\alpha, \beta, \gamma)$ বিন্দুটো $x - 2y + 3z + 4 = 0$ সমতলত থাকে, গতিকে,

$\frac{2-2\lambda}{\lambda+1}-2\left(\frac{\lambda+3}{\lambda+1}\right)+3\left(\frac{1-3\lambda}{\lambda+1}\right)+4=0$

$\Rightarrow 2 - 2\lambda - 2\lambda - 6 + 3 - 9\lambda + 4 = 0$

$\Rightarrow 9\lambda + 3 = 0$

$\Rightarrow 9\lambda = 3$

$\Rightarrow 9\lambda = \frac{1}{3}$

$\therefore$ λৰ এই মান (i)ত বহুৱাই, আমি পাওঁ, $\alpha = \frac{2-2.\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1}=\frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{3}}=1$

$$\beta = \frac{\frac{1}{3}+3}{\frac{1}{3}+1} = \frac{10}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{5}{2}$$

$$\gamma = \frac{1-3.\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+1} = 0$$

$\therefore$ ছেদ বিন্দু Pৰ স্থানাংক $\left(1, \frac{5}{2}, 0\right)$.

৫নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, $\frac{x+1}{2} = y - 3 = \frac{z-2}{-2}$ ৰেখা আৰু $3x - 4z + 8 = 0$ সমতলখনৰ মাজৰ কোণ θ। গতিকে 2, 1, –2 দিশানুপাত বিশিষ্ট ৰেখাডাল আৰু 3, 0, –4 দিশানুপাত বিশিষ্ট সমতলখনৰ অভিলম্বৰ মাজৰ কোণ $90^0 - \theta$।

গতিকে আমি পালোঁ, $\cos(90^0 - \theta) = \frac{2.3+1.0+(-2).(-4)}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}}$

$$\Rightarrow \sin\theta = \frac{6+8}{\sqrt{9}\sqrt{25}} = \frac{14}{15}$$

$$\Rightarrow \theta = \sin^{-1}\frac{14}{15}.$$

৬নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\frac{x+7}{\lambda} = \frac{y-9}{1} = \frac{z+1}{-2}$ আৰু $\frac{x+4}{5} = \frac{y+3}{-3\lambda} = \frac{z-3}{2}$ ৰেখা দুডাল পৰস্পৰ লম্ব হ'বলৈ হ'লে (লম্ব হোৱাৰ চৰ্ত $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$ অনুযায়ী)।

$\lambda.5 + 1.(-3\lambda) + (-2).2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 4$

$\Rightarrow \lambda = 2$

৭নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $3x + 2y - 2 = 0$ আৰু $2y + z + 3 = 0$ ৰেখাডাল থকা যিকোনো সমতলৰ সমীকৰণ হ'ল, $3x + 2y - 2 + \lambda(2y + z + 3) = 0$ ... ...(i)

এই সমতলখনত (1, 4, –3) বিন্দুটো থাকিব যদি,

$3.1 + 2.3 - 2 + \lambda(2.4 - 3 + 3) = 0$

$\Rightarrow 8\lambda + 9 = 0$

$\Rightarrow 8\lambda = -9$

$\Rightarrow \lambda = -\frac{9}{8}$

গতিকে (i) সমীকৰণটো হ'বগৈ, $3x + 2y - 2 - \frac{9}{8}(2y + z + 3) = 0$

অর্থাৎ, $24x + 16y - 16 - 18y - 9z - 27 = 0$

অর্থাৎ, $24x - 2y - 9z - 43 = 0$

এইটোৱেই সমতলখনৰ উলিয়াবলগীয়া সমীকৰণ।

৮নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ $x + y - 2z + 4 = 0 = 3x - y + 2z + 1$ ৰেখাডালৰ মাজেৰে যোৱা যিকোনো সমতলৰ সমীকৰণ,

$x + y - 2z + 4 + \lambda(3x - y + 2z + 1) = 0$

অর্থাৎ, $(1 + 3\lambda)x + (1 - \lambda)y + (2\lambda - 2)z + (\lambda + 4) = 0$ ... ...(i)

সমতলখন $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z-4}{-1}$ ৰেখাডালৰ সমান্তৰাল হ'ব, যদি,

$Al + Bm + Cn = 0$ চর্ত সিদ্ধ হয়।

অর্থাৎ, যদি, $(1 + 3\lambda).2 + (1 - \lambda).3 + (2\lambda - 2).(-1) = 0$

অর্থাৎ, যদি, $2 + 6\lambda + 3 - 3\lambda - 2\lambda + 2 = 0$

অর্থাৎ, যদি, $\lambda = -7$.

(i)ত $\lambda = -7$ বহুৱাই আমি পাওঁ,

$(1 - 21)x + (1 + 7)y + (-14 - 2)z + (-7 + 4) = 0$

অর্থাৎ, $-20x + 8y - 16z - 3 = 0$

অর্থাৎ, $20x - 8y + 16z + 3 = 0$

এইটোৱেই সমতলখনৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।

৯নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-1}{4}$ ৰেখাডালৰ মাজেৰে যোৱা যিকোনো সমতলৰ সমীকৰণ, $A(x + 1) + B(y - 3) + C(z - 1) = 0$ ... ...(i)

য'ত, $2A + 3B + 4C = 0$ ... ...(ii)

যদি (i) নম্বৰ সমতলখন $3x - y + 4 = 0$ সমতলৰ ওপৰত লম্ব হয়, তেনেহ'লে,

$3A - B + 0.C = 0$ ... ...(iii)

(i), (ii) আৰু (iii)ৰ পৰা A, B, C অপনয়ন কৰি, আমি পাওঁ,

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z-1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

অর্থাৎ, $(x + 1)(0 + 4) - (y - 3)(0 - 12) + (z - 1)(-2 - 9) = 0$

অর্থাৎ, $4(x + 1) + 12(y - 3) - 11(z - 1) = 0$

অর্থাৎ, $4x + 4 + 12y - 36 - 11z + 11 = 0$

অর্থাৎ, $3x + 12y - 11z = 21$ এইটোৱেই সমতলখনৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।

১০নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্ৰদত্ত ৰেখা দুডাল হ'ল,

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4} \quad \text{... ... ...(i)}$$

আৰু $4x - 3y + 1 = 0 = 5x - 3z + 2$ ... ...(ii)

(ii) নম্বৰ ৰেখাডাল থকা যিকোনো সমতলৰ সমীকৰণ,

$4x - 3y + 1 + k(5x - 3z + 2) = 0$

অৰ্থাৎ, $(4 + 5k)x - 3y - 3kz + (1 + 2k) = 0$ ... ...(iii)

যদি kৰ কিবামানৰ বাবে (iii) নম্বৰ সমতলখনত (i) নম্বৰ ৰেখাডাল থাকে, (i) আৰু (ii) ৰেখা দুডাল এক সমতলীয় হ'ব।

এতিয়া (iii) নম্বৰ সমতলখনত (i) নম্বৰ ৰেখাডাল থাকিবলৈ হ'লে,

$Al + Bm + Cn = 0$ আৰু $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$ (প্ৰচলিত চিনত)

অৰ্থাৎ, $(4 + 5k).2 + (-3).3 + (-3k).4 = 0$ ... ...(iv)

আৰু $(4 + 5k).1 - 3.2 - 3k.3 + (1 + 2k) = 0$ ... ...(v)

$(iv) \Rightarrow 8 + 10k - 9 - 12k = 0 \Rightarrow -2k = 1 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$

$(v) \Rightarrow 4 + 5k - 6 - 9k + 1 + 2k = 0 \Rightarrow -2k = 1 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$

গতিকে, $k = -\frac{1}{2}$ৰ বাবে (iv) আৰু (v) চৰ্ত দুটা সিদ্ধ হয় আৰু সেয়েহে, $k = -\frac{1}{2}$ৰ বাবে, (iii) নম্বৰ সমতলখনত (i) আৰু (ii) ৰেখা দুডাল থাকিব।

$k = -\frac{1}{2}$ৰ বাবে (iii) হ'বগৈ, $\left(4-\frac{5}{2}\right)x - 3y - 3.\left(-\frac{1}{2}\right)z + \left(1-2.\frac{1}{2}\right) = 0$

অৰ্থাৎ, $\frac{3x}{2} - 2y + \frac{3}{2}z = 0$

অৰ্থাৎ, $x - 2y + z = 0$

গতিকে (i) আৰু (ii) ৰেখা দুডাল এক সমতলীয় কিয়নো উভয়ে $x - 2y + z = 0$ সমতলখনত থাকে।

১১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্ৰদত্ত ৰেখা দুডাল হ'ল,

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-2}{-2}=k_1 \text{ (ধৰা হ'ল)} \quad \text{... ... ...(i)}$$

আৰু $\frac{x-3}{1}=\frac{y-6}{2}=\frac{z+3}{-3}=k_2$ (ধৰা হ'ল) ... ...(ii)

(i)ৰ পৰা, $x = 3k_1 - 1, y = 3k_1 + 1, z = 2 - 2k_1$;

গতিকে (i) নম্বৰ ৰেখা ডালত $(3k_1 - 1, 3k_1 + 1, 2 - 2k_2)$ এটা স্বেচ্ছ বিন্দু।

(ii)ৰ পৰা, $x = k_2 + 3, y = 2k_2 + 6, z = -3k_2 - 3$;

গতিকে (ii) নম্বৰ ৰেখাডালত $(k_2 + 3, 2k_2 + 6, -3k_2 - 3)$ এটা স্বেচ্ছ বিন্দু।

(i) আৰু (ii) ৰেখা দুডালে কটাকটি কৰিবলৈ হ'লে, k_2 আৰু k_2ৰ কিবা মানৰ বাবে এই বিন্দু দুটা একে হ'ব লাগিব,

$3k_1 - 1 = k_2 + 3$ ... ...(iii)

$3k_1 + 1 = 2k_2 + 6$ ... ...(iv)

$2 - 2k_1 = -3k_2 - 3$ ... ...(v)

(iii) আৰু (iv) সমাধান কৰি আমি পাওঁ, $k_2 = -1$ আৰু $k_1 = 1$। আকৌ k_1 আৰু k_2ৰ এই মানে (v) সিদ্ধ কৰে। গতিকে (i) আৰু (ii) ৰেখা দুডালে (3.1 – 1, 3.1 + 1, 2 – 2.1) অৰ্থাৎ, (2, 4, 0) বিন্দুত কটাকটি কৰে। যিহেতু ৰেখা দুডালে কটাকটি কৰে, গতিকে সিহঁত এক সমতলীয়।

দেখা গ'ল যে (i) আৰু (ii) প্ৰদত্ত ৰেখা দুডাল এক সমতলীয়। সিহঁতৰ ছেদ বিন্দুৰ স্থানাংক হ'ল (2, 4, 0).

১২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $3x - 4y + 5 = 0 = 6x - 2y + z + 9 = 0$ ... ...(i)

উপৰিউক্ত ৰেখা ডালৰ সমান্তৰাল আৰু মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাৰ সমীকৰণ হ'ল,

$3x - 4y = 0, 6x - 2y + z = 0$

$\Rightarrow 3x = 4y, 2.4y - 2y + z = 0$

$\Rightarrow 3x = 4y, 6y = -z$

$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{3}, \frac{y}{3} = -\frac{z}{18}$

$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = -\frac{z}{18}$

এই ৰেখাডালৰ দিশানুপাত 4, 3, –18. (i) নম্বৰ ৰেখাডাল এই ৰেখাডালৰ সমান্তৰাল।

গতিকে (i) নম্বৰ ৰেখাডালৰো দিশানুপাত 4, 3, –18.

(i)ত $y = 0$ বহুৰাই আমি পাওঁ, $3x + 5 = 0, 6x + z + 9 = 0$

$$\Rightarrow x = -\frac{5}{3}, z = -6x - 9 = 10 - 9 = 1.$$

গতিকে (i) নম্বৰ ৰেখাডাল $\left(-\frac{5}{3}, 0, 1\right)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যায়।

(i) নম্বৰ ৰেখাডালৰ সমমিত আকাৰৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$\frac{x-\left(-\frac{5}{3}\right)}{4} = \frac{y-0}{3} = \frac{z-1}{-18} \quad \text{... ... ...(ii)}$$

আকৌ z-অক্ষৰ দিশাংক (0, 0, 1) আৰু ই (0, 0, 0) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়। গতিকে, সমমিত আকাৰত z-অক্ষৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$\frac{x-0}{0}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-0}{1} \qquad \text{... ... ...(iii)}$$

গতিকে z-অক্ষ আৰু প্ৰদত্ত ৰেখাডালৰ মাজৰ S.D.

(ii) আৰু (iii)ৰ মাজৰ S.D. = $\frac{|\Delta|}{k}$

যি'ত, $\Delta = \begin{vmatrix} 0-\left(-\frac{5}{3}\right) & 0-0 & 0-1 \\ 4 & 3 & -18 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \frac{5}{3} & 0 & -1 \\ 4 & 3 & -18 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 5$

তাৰ পাছত আমি k উলিয়াম আৰু S.D. (এইখিনি নিজে কৰক)

k = 5, S.D = 1.

১৩নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্ৰদত্ত ৰেখা দুডাল হ'ল, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{3}$ আৰু

$$\frac{x-4}{2}=\frac{y-6}{3}=\frac{z-8}{4}$$

ইয়াত, $\Delta = \begin{vmatrix} 4-1 & 6-1 & 8-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

$= 3(8-9) - 5(4-6) + 7(3-4)$

$= -3 + 10 - 7 = 0$

আৰু $k = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}^2}$

$= \sqrt{1+1+4}$

$= \sqrt{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় S.D = $\frac{|\Delta|}{k} = \frac{0}{\sqrt{6}} . = 0$

যিহেতু, S.D = 0. গতিকে ৰেখা দুডাল এক সমতলীয় আৰু ইহঁতে কটাকটি কৰে।

১৪নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-5}{4}$ ৰেখাডাল $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 4, 5)$ বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু ইয়াৰ দিশানুপাত 1, 3, 4; যিহেতু $\sqrt{1^2+3^2+4^2} = \sqrt{26}$

ৰেখাডালৰ দিশাংক হ'ব, $l = \frac{1}{\sqrt{26}}, \ m = \frac{3}{\sqrt{26}}, \ n = \frac{4}{\sqrt{26}}$

যদি উপৰিউক্ত ৰেখাডালৰ পৰা প্রদত্ত বিন্দু $(x', y', z') = (1, 2, 3)$ৰ দূৰত্ব d হয়, তেনেহ'লে,

$$d^2 = \begin{vmatrix} x'-\alpha & y'-\beta \\ l & m \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y'-\beta & z'-\gamma \\ m & n \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'-\gamma & x'-\alpha \\ n & l \end{vmatrix}^2$$

অর্থাৎ, $d^2 = \begin{vmatrix} 1-2 & 2-4 \\ \frac{1}{\sqrt{26}} & \frac{3}{\sqrt{26}} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2-4 & 3-5 \\ \frac{3}{\sqrt{26}} & \frac{4}{\sqrt{26}} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 3-5 & 1-2 \\ \frac{4}{\sqrt{26}} & \frac{1}{\sqrt{26}} \end{vmatrix}^2$

$$= \left(-\frac{3}{\sqrt{26}} + \frac{2}{\sqrt{26}}\right)^2 + \left(-\frac{8}{\sqrt{26}} + \frac{6}{\sqrt{26}}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{26}} + \frac{4}{\sqrt{26}}\right)^2$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{26}}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{26}}\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{26}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{26} + \frac{4}{26} + \frac{4}{26}$$

$$= \frac{9}{26}$$

$\therefore d = \frac{3}{\sqrt{26}}$

১৫নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ প্রথম ৰেখাডাল হ'ল, $x = az + b, \ y = cz + d$

অর্থাৎ, $x - b = az, \ y - d = cz$

অর্থাৎ, $\frac{x-b}{a} = \frac{y-d}{c} = \frac{z-0}{1}$

দ্বিতীয় ৰেখাডাল হ'ল, $x = a'z + b', \ y = c'z + d'$

অর্থাৎ, $\frac{x-b'}{a'} = \frac{y-d'}{c'} = \frac{z-0}{1}$

ৰেখা দুডাল এক সমতলীয় হ'ব যদি,

$$\begin{vmatrix} b-b' & d-d' & 0 \\ a & c & 1 \\ a' & c' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

অর্থাৎ, $\begin{vmatrix} b-b' & d-d' & 0 \\ a-a' & c-c' & 0 \\ a' & c' & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (R_2 - R_3)$

অর্থাৎ, $(b - b')(c - c') - (a - a')(d - d') = 0$

অর্থাৎ, $(b - b')(c - c') = (a - a')(d - d')$

এটোৰেই নির্ণেয় চর্ত।



৮.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ kৰ কি মানৰ বাবে $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-2}{2k} = \frac{z-3}{2}$ আৰু $\frac{x-1}{3k} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-6}{-5}$ ৰেখা দুডাল একসমতলীয় হ'ব?

প্ৰশ্ন ২ ঃ $\frac{x-6}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{-1}$ আৰু $x + 5y - 2z = 6$, $6x - 4y + 5z = 2$ ৰেখা দুডালৰ মাজৰ কোণ নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ ঃ $(-1, 3, 9)$ বিন্দুৰ পৰা $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+2}{3}$ ৰেখাডালৰ ওপৰত টনা লম্বৰ দৈর্ঘ্য নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ আৰু $\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{5}$ ৰেখা দুডাল এক সমতলীয়। এই ৰেখা দুডাল থকা সমতলখনৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৫ ঃ $\frac{x-3}{1} = \frac{y-5}{-2} = \frac{z-7}{1}$ আৰু $\frac{x}{-3} = \frac{y+9}{2} = \frac{z-2}{4}$ ৰেখা দুডালৰ মাজৰ হ্ৰস্বতম দূৰত্ব (S.D) নির্ণয় কৰক।

*** ***** ***

কাকতৰ নাম .....
পাঠ্যবিষয়ৰ সাঙ্কেতিক সংখ্যা .....

আভ্যন্তৰীণ গুণগত আশ্বাসন কেন্দ্ৰ (CIQA)

কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

নগৰ কাৰ্য্যালয়, হাউছফেড চৌহদ, গুৱাহাটী-৭৮১০০৬

পাঠ্যবিষয় সন্দর্ভত শিক্ষার্থীৰ সঁহাৰি

প্ৰিয় শিক্ষার্থী,

ওপৰত উল্লেখ কৰা পাঠ্যবিষয়টোৰ সন্দর্ভত আপোনাৰ বহুমূলীয়া মতামত আৰু মন্তব্য বিচৰা হৈছে। আপোনাৰ সঁহাৰিয়ে আমাক ভৱিষ্যৎ স্ব-শিকন সামগ্ৰীবোৰৰ মান উন্নত কৰাত সহায় কৰিব। অনুগ্ৰহ কৰি তলৰ প্ৰবিৱৰণবোৰৰ বিপৰীতে আপোনাৰ মতামত উপযুক্তভাৱে প্ৰতিফলিত কৰা বিকল্পটোত চিন দিয়ক। মন্তব্যৰ সৈতে সম্পূৰ্ণ সঁহাৰি জনোৱাৰ পাছত পৃষ্ঠাটো ফালি তলৰ ঠিকনাত ডাকযোগে প্ৰেৰণ কৰে যেন।

সঞ্চালক, আভ্যন্তৰীণ গুণগত আশ্বাসন কেন্দ্ৰ, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়
হাউছফেড পৰিসৰ, দিশপুৰ, গুৱাহাটী-৭৮১০০৬
ই-মেইল ঠিকনা ঃ ciqa@kkhsou.in

১) পাঠ্যবিষয়ৰ অন্তর্ভুক্ত অধ্যায়বোৰ পঢ়িবলৈ আপুনি আনুমানিকভাৱে কিমান ঘণ্টা ব্যয় কৰিলে? ☐☐☐

২) খণ্ডটো অধ্যয়ন কৰাৰ অন্তত তলৰ প্ৰবিৱৰণবোৰ সন্দর্ভত আপোনাৰ মতামত ব্যাখ্যা কৰক (✓ চিন দিয়ক) ঃ

ক্ৰমাঙ্ক	প্ৰবিৱৰণ	দৃঢ়ভাৱে একমত	একমত	একমতো নহয়/ অসন্মতো নহয়	অসন্মত	দৃঢ়ভাৱে অসন্মত
I)	পাঠ্যবিষয়ৰ স্ব-শিকন সামগ্ৰীবোৰে প্ৰতিটো অধ্যায়ৰ আৰম্ভণিতে ধার্য্য কৰি লোৱা শিকন উদ্দেশ্যবোৰ পূৰণ কৰিব পাৰিছে					
II)	স্ব-শিকন সামগ্ৰীত সন্নিৱিষ্ট অধ্যায়বোৰে মোৰ শৈক্ষিক প্ৰয়োজনীয়তা আৰু প্ৰত্যাশা পূৰণ কৰিব পাৰিছে					
III)	অধ্যায় লেখক/ লেখিকাসকলৰ পাঠ্যবিষয়ত সন্নিৱিষ্ট পাঠসমূহৰ উত্তম জ্ঞান আছে					
IV)	অধ্যায়বোৰত সন্নিৱিষ্ট পাঠবোৰৰ ভাষা আৰু বিষয়বস্তু মই সহজে বুজি পোৱা ধৰণে উপস্থাপন কৰা হৈছে					
V)	অধ্যায়বোৰত কার্য্যকলাপত ভাগ ল'ব পৰাকৈ/অনুশীলনীত অংশগ্ৰহণ কৰিব পৰাকৈ পর্য্যাপ্ত সুযোগ আছে					
VI)	ধাৰণাবোৰ স্পষ্ট কৰিবলৈ পর্য্যাপ্ত চিত্ৰ (ৰেখাচিত্ৰ, তালিকা ইত্যাদি) সংলগ্ন কৰা হৈছে					
VII)	পাঠবোৰত সন্নিৱিষ্ট বিষয়বস্তুসমূহ চিত্তাকর্ষক, প্ৰাসঙ্গিক আৰু শেহতীয়া তথ্যভিত্তিক					
VIII)	'অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ' শিতানৰ প্ৰশ্নবোৰ যথেষ্ট উপযোগী					
IX)	'আৰ্হি প্ৰশ্ন' আৰু 'অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান' শিতান দুটাই মোক যথেষ্ট উপকৃত কৰিছে					

অতিৰিক্ত মন্তব্য (অনুগ্ৰহ কৰি মুকলিমূৰীয়াকৈ মতামত আগবঢ়াওক) ঃ

১) আপোনাৰ মতে স্ব-শিকন সামগ্ৰীবোৰৰ কোনকেইটা দিশ সবাতোকৈ ফলপ্ৰসূ হৈছে?

.....

.....

২) স্ব-শিকন সামগ্ৰীবোৰৰ সামগ্ৰিক গুণ উন্নত কৰিবলৈ কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ে কেনে ধৰণৰ পৰিৱর্তন/ উন্নতি সাধন কৰিব পাৰে বুলি আপুনি ভাবে?

.....

.....

প্ৰ-পত্ৰ পূৰাবলৈ সময় উলিওৱাৰ বাবে আপোনাক ধন্যবাদ জনালোঁ।