GMA S5-01

Exam. Code: MAP5A

স্থানাংক জ্যামিতি আৰু ভেক্টৰৰ বিশ্লেষণ

পঞ্চম ষাণ্মাসিক

গণিত

খণ্ড ঃ ২



কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

বিষয় বিশেষজ্ঞ মণ্ডলী

অধ্যাপক নন্দৰাম দাস, গণিত বিভাগ, গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়
ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা, গণিত বিভাগ, কটন মহাবিদ্যালয়

সমন্বয়ৰক্ষী ঃ হৰেকৃষ্ণ ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

প্রস্তুতি গোটৰ সদস্য

অধ্যায়	*অৱিহণা যোগাইছে*	*ভাষান্তৰকাৰী*
৯, ১০ আৰু ১১	অধ্যাপক তৰুণ চৰকাৰ অৱসৰপ্রাপ্ত উপাধ্যক্ষ আৰু মুৰব্বী অধ্যাপক গণিত বিভাগ, কটন কলেজ, গুৱাহাটী	ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা (অধ্যায় ৯, ১০, ১১, ১২, ১৩, ১৪ আৰু ১৫)
১২, ১৩, ১৪ আৰু ১৫	হৰেকৃষ্ণ ডেকা কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়	ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা

সম্পাদনা ঃ

বিষয়বস্তু সম্পাদনা ঃ ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা, প্রাক্তন মুৰব্বী, গণিত বিভাগ, কটন কলেজ
গাঁথনিক সম্পাদনা ঃ হৰেকৃষ্ণ ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

জুন, ২০১৯ ISBN: 978-93-89123-32-6

This Self Learning Material (SLM) of the Krishna Kanta Handiqui State University is made available under a Creative Commons Attribution-Non Commercial-ShareAlike4.0 License (International): http.//creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0.

কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ৰ হৈ পঞ্জীয়কৰ দ্বাৰা মুদ্রিত আৰু প্রকাশিত।

মুখ্য কার্যালয় ঃ পাটগাঁও, ৰাণী গেট, গুৱাহাটী-৭৮১ ০১৭; Web : www.kkhsou.in
উপ-মুখ্য কার্যালয় ঃ হাউচ্‌ফেড কমপ্লেক্স, দিচপুৰ, গুৱাহাটী-৭৮১ ০০৬

এই শিক্ষণ সামগ্রী প্রস্তুতিৰ বাবে আর্থিক অনুদান আগবঢ়োৱা
দূৰ শিক্ষা ব্যুৰো, বিশ্ববিদ্যালয় অনুদান আয়োগৰ ওচৰত বিশ্ববিদ্যালয় কৃতজ্ঞ।

বিষয়সূচী

পৃষ্ঠা নং

অধ্যায় ৯ ঃ **গোলক** **১৮৯ - ২০০**

গোলক ঃ নির্দিষ্ট কেন্দ্র আৰু নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলকৰ সমীকৰণ, গোলকৰ সাধাৰণ সমীকৰণ, গোলকৰ সমীৰণৰ ব্যাস ৰূপ

অধ্যায় ১০ ঃ **শংকু** **২০১ - ২১৪**

শংকু ঃ নির্দিষ্ট শীর্ষ বিন্দু আৰু নির্দিষ্ট নির্দেশিত বক্র বিশিষ্ট শংকুৰ সমীকৰণ, x, y, zৰ দ্বিতীয় মাত্রাৰ সুষম সমীকৰণৰ কক্ষপথ, সম বৃত্তীয় শংকু

অধ্যায় ১১ ঃ **বেলন** **২১৫ - ২২৪**

বেলনৰ সংজ্ঞা, বেলনৰ সমীকৰণ

অধ্যায় ১২ ঃ **ভেক্টৰৰ পৰিচয়** **২২৫ - ২৪৬**

ভেক্টৰ আৰু স্কেলাৰ, বিভিন্ন ধৰণৰ ভেক্টৰ, ভেক্টৰত প্রক্রিয়া, ভেক্টৰৰ যোগ, ভেক্টৰৰ বিয়োগ ভেক্টৰক স্কেলাৰেৰে পূৰণ, বিভাজন সূত্র, ভেক্টৰৰ উপাংশ

অধ্যায় ১৩ ঃ **ভেক্টৰৰ পূৰণ - ১** **২৪৭ - ২৬০**

দুটা ভেক্টৰৰ পূৰণ, স্কেলাৰ বা ডট্ পূৰণ, ভেক্টৰ বা ক্রছ পূৰণ

অধ্যায় ১৪ ঃ **ভেক্টৰৰ পূৰণ - ২** **২৬১ - ২৭০**

তিনিটা ভেক্টৰৰ পূৰণঃ স্কেলাৰ ত্রিপূৰণ, ভেক্টৰ ত্রিপূৰণ ঃ চাৰিটা ভেক্টৰৰ পূৰণ, চাৰিটা ভেক্টৰৰ স্কেলাৰ পূৰণ, চাৰিটা ভেক্টৰৰ ভেক্টৰ পূৰণ

অধ্যায় ১৫ ঃ **ভেক্টৰ কলনগণিত** **২৭১ - ২৯৩**

স্কেলাৰ আৰু ভেক্টৰ বিন্দু ফলন, ভেক্টৰ অৱকল সংকাৰক (ডেল), গ্রেডিয়েণ্ট, ডাইভাৰজেনছ আৰু কার্ল, কার্ল আৰু আনুষংগিক অভেদ, লাপ্লাছিয় সংকাৰক

খণ্ড পৰিচয়

এই খণ্ডটি ‘স্থানাংক জ্যামিতি আৰু ভেক্টৰৰ বিশ্লেষণ’ পাঠ্যবিষয়টিৰ দ্বিতীয় খণ্ড। এই খণ্ডটি সৰ্বমুঠ সাতটা অধ্যায়েৰে গঠিত।

এই পাঠ্যবিষয়ৰ নৱম,দশম আৰু একাদশ অধ্যায়টিত গোলক, শংকু আৰু বেলনৰ সাধাৰণ সমীকৰণৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।

এই খণ্ডটিৰ দ্বাদশ অধ্যায়টিত অধ্যায়টিত ভেক্টৰৰ বিষয়ে পৰিচয় কৰাই দিয়া হৈছে। এই অধ্যায়টিত বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ ভেক্টৰ, ভেক্টৰৰ যোগ, বিয়োগ, ভেক্টৰক স্কেলাৰেৰে পূৰণ আদিৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।

ত্ৰয়োদশ অধ্যায়টিত ভেক্টৰৰ পূৰণৰ বিষয়ে পৰিচয় কৰাই দিয়া হৈছে। এই অধ্যায়টিত দুটা ভেক্টৰৰ পূৰণৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।

চতুৰ্দশ অধ্যায়ত অধ্যায়টিত তিনিটা ভেক্টৰৰ পূৰণ আৰু চাৰিটা ভেক্টৰৰ পূৰণৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।

পঞ্চৰ্দশ তথা অন্তিম অধ্যায়টিত ভেক্টৰৰ কলনগণিতৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হৈছে। ভেক্টৰৰ অৱকল সংকাৰক, গ্ৰেডিয়েণ্ট, ডাইভাৰজেনছ, কার্ল আৰু সিহঁতৰ আনুসংগিক অভেদৰ বিষয়েও এই অধ্যায়টিত আলোচনা কৰা হৈছে।

এই খণ্ডটি অধ্যয়ন কৰোঁতে মূল পাঠত ‘জানি থোৱা ভাল’ বাকচবোৰৰ মূল পাঠৰ সৈতে জড়িত কিছু গুৰুত্বপূৰ্ণ তথ্যৰ সম্ভেদ আছে। প্ৰতিটো অধ্যায়ত থকা ‘অনুশীলন’সমূহে অধ্যয়ন অধিক সক্ৰিয় আৰু ফলপ্ৰসূ হোৱাত সহায় কৰিব। আকৌ, ‘অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ’যোগে আগবঢ়োৱা প্ৰশ্নাৱলীয়ে অধ্যয়নৰ অগ্ৰগতি সম্পৰ্কে স্ব-পৰীক্ষণৰ সুবিধা দিব। অধ্যয়নৰ লগে লগে উক্ত প্ৰশ্নাৱলীৰ উত্তৰসমূহ লিখি শেষত দিয়া ‘অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান’ৰ সৈতে ৰিজাই চোৱাটো অধিক লাভদায়ক হ’ব। অধ্যায়বোৰৰ শেষত ‘আৰ্হি প্ৰশ্ন’ হিচাপে কেইটিমান প্ৰশ্নৰ আৰ্হিও তুলি দিয়া হৈছে।

অধ্যায় ৯ ঃ গোলক

অধ্যায় গাঁথনি

৯.১ উদ্দেশ্য

৯.২ পৰিচয়

৯.৩ গোলক

৯.৩.১ নির্দিষ্ট কেন্দ্র আৰু নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলকৰ সমীকৰণ

৯.৩.২ গোলকৰ সাধাৰণ সমীকৰণ

৯.৩.৩ গোলকৰ সমীকৰণৰ ব্যাস ৰূপ

৯.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৯.৫ অধিক জানিবলৈ

৯.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৯.৭ আৰ্হি প্রশ্ন

৯.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- গোলক আৰু ইয়াৰ সমীকৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

৯.২ পৰিচয়

ষষ্ঠ অধ্যায়ত ত্রিমাত্রিক স্থানাংক প্রণালী সম্বন্ধে আলোচনা কৰিছিলোঁ। লগতে সপ্তম আৰু অষ্টম অধ্যায়ত বিভিন্ন আকাৰত সমতলৰ সমীকৰণ সম্বন্ধে, ৰেখাৰ সমীকৰণ সম্বন্ধে আলোচনা কৰিছিলোঁ। এই অধ্যায়ত আমি গোলক আৰু ইয়াৰ সমীৰকৰণ সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম।

৯.৩ গোলক

সংজ্ঞা ঃ যদি এটা বিন্দুৰে অন্তৰিকক্ষত এনেদৰে চলাচল কৰে যে এটা নির্দিষ্ট বিন্দুৰ পৰা ইয়াৰ দূৰত্ব সদায় ধ্রুৱক। তেনেহ'লে, তেনে বিন্দুৰ কক্ষপথক গোলক (Space) বোলে। নির্দিষ্ট বিন্দুটোক কেন্দ্র (Centre) আৰু ধ্রুৱক দূৰত্বক (Radius) বোলে।

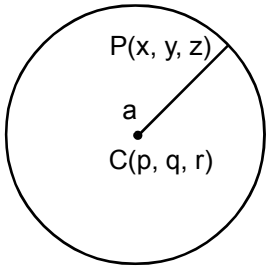
৯.৩.১ নির্দিষ্ট কেন্দ্র আৰু নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট গোলকৰ সমীকৰণ

ধৰা হ'ল, C(p, q, r) কেন্দ্র আৰু 'a' গোলকটোৰ ব্যাসার্ধ।

ধৰা হ'ল, P(x, y, z) গোলকটোত যিকোনো এটা বিন্দু। গতিকে, CP = a

$\Rightarrow CP^2 = a^2$

$\Rightarrow (x-p)^2 + (y-q)^2 + (z-r)^2 = a^2$



চিত্ৰ ঃ ৯.১

যিহেতু গোলকটোৰ ওপৰৰ যিকোনো বিন্দুৰে এই সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে, এইটোৱেই গোলকটোৰ সমীকৰণ।

টোকা ঃ গোলকৰ কেন্দ্ৰ মূল বিন্দু হ'লে আৰু ব্যাসার্ধ a হ'লে গোলকটোৰ সমীকৰণ হ'ল, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

৯.৩.২ গোলকৰ সাধাৰণ সমীকৰণ

তলৰ সমীকৰণটো লোৱা হ'ল,

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

য'ত u, v, w আৰু d স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক।

সমীকৰণটোক এনেদৰে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি,

$$(x^2 + 2ux + u^2) + (y^2 + 2vy + v^2) + (z^2 + 2wz + w^2) = u^2 + v^2 + w^2 - d$$

অর্থাৎ, $(x+u)^2 + (y+v)^2 + (z+w)^2 = u^2 + v^2 + w^2 - d$

অর্থাৎ, $\{x-(-u)\}^2 + \{y-(-v)\}^2 + \{z-(-w)\}^2 = \left(\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}\right)^2$

গতিকে ই এটা গোলকৰ সমীকৰণ বুজায় আৰু ইয়াৰ কেন্দ্ৰ $(-u, -v, -w)$ আৰু ব্যাসার্ধ $\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$.

টোকা ঃ

i) $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ সমীকৰণটোক গোলকৰ সাধাৰণ সমীকৰণ বুলি কোৱা হয়। ইয়াত চাৰিটা স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক u, v, w আৰু d আছে। গতিকে, এটা বিশেষ গোলক জানিবলৈ হ'লে চাৰিটা স্বতন্ত্ৰ চর্তৰ প্ৰয়োজন।

ii) ওপৰৰ সমীকৰণটোৰে বুজোৱা গোলকটো বাস্তৱ হ'ব যদি $u^2 + v^2 + w^2 \geq d$ আৰু কাল্পনিক হ'ব যদি $u^2 + v^2 + w^2 > d$. অৱশ্যে যদি $u^2 + v^2 + w^2 = d$, ই এটা বিন্দু হ'বগৈ।

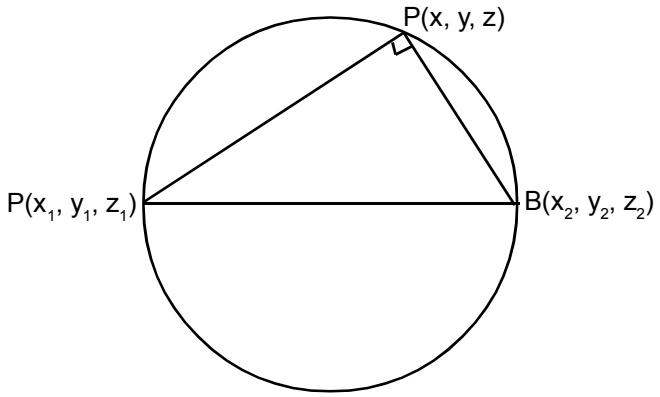
iii) $ax^2 + ay^2 + az^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ আকাৰৰ সমীকৰণক,

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\left(\frac{u}{a}\right)x + 2\left(\frac{v}{a}\right)y + 2\left(\frac{w}{a}\right)z + \frac{d}{a} = 0$$

আকাৰত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। ইয়ে এটা গোলকৰ সমীকৰণ বুজায়। ইয়াৰ কেন্দ্ৰ, $\left(-\frac{u}{a}, -\frac{v}{a}, -\frac{w}{a}\right)$ আৰু ব্যাসার্ধ $\sqrt{\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{a^2} + \frac{w^2}{a^2} - \frac{d}{a^2}}$.

৯.৩.৩ গোলকৰ সমীকৰণৰ ব্যাস ৰূপ

ধৰা হ'ল, এটা গোলকৰ ব্যাসৰ মূৰ বিন্দু দুটা $A(x_1, y_1, z_1)$ আৰু $B(x_2, y_2, z_2)$. ধৰা হ'ল, $P(x, y, z)$ গোলকটোত যিকোনো এটা বিন্দু। তেনেহ'লে $\angle APB$ এটা সমকোণ।



চিত্ৰ ঃ ৯.২

এতিয়া APৰ দিশানুপাত $x - x_1, y - y_1, z - z_1$ আৰু BPৰ দিশানুপাত,

$x - x_2, y - y_2, z - z_2$.

এতিয়া, AP আৰু BP পৰস্পৰ লম্ব। গতিকে,

$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2) = 0$

এইটোৱেই গোলকটোৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।

এটা নির্দিষ্ট বৃত্তৰ মাজেৰে যোৱা গোলকৰ সমীকৰণ ঃ

সহজে দেখুৱাব পাৰি যে এখন সমতলৰ দ্বাৰা গোলকৰ ছেদ এটা বৃত্ত। $S = 0$ এটা গোলকৰ সমীকৰণ হ'লে আৰু $L = 0$ এখন সমতলৰ সমীকৰণ হ'লে, $S = 0$ আৰু $L = 0$ সমীকৰণ দুটাই একেলগে এটা বৃত্তৰ সমীকৰণ বুজায়, অর্থাৎ যিটো বৃত্তত $L = 0$ সমতলখনে $S = 0$ গোলকক কাটে। $S = 0$ আৰু $L = 0$ সমীকৰণেৰে বুজোৱা বৃত্ত দিয়া থাকিলে, $S + \lambda L = 0$ সমীকৰণে বৃত্তৰ মাজেৰে যোৱা গোলক বুজায়। স্বেচ্ছ ধ্ৰুৱক λৰ বিভিন্ন মানৰ বাবে, আমি বৃত্তটোৰ মাজেৰে যোৱা বিভিন্ন গোলক পাম।

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ ঃ এটা গোলকৰ কেন্দ্ৰ $(-1, 3, 2)$ আৰু ব্যাসার্ধ 5. গোলকটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে এটা গোলকৰ কেন্দ্ৰ (p, q, r) আৰু ব্যাসার্ধ a হ'লে, গোলকটোৰ সমীকৰণ $(x - p)^2 + (y - q)^2 + (z - r)^2 = a^2$.

এই ক্ষেত্ৰত গোলকটোৰ কেন্দ্ৰ (–1, 3, 2) আৰু ব্যাসার্ধ 5.

∴ গোলকটোৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$\{x - (-1)\}^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 5^2$$

অর্থাৎ, $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 2)^2 = 25$

অর্থাৎ, $(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 6y + 9) + (z^2 - 4z + 4) = 25$

অর্থাৎ, $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 4z - 11 = 0$

উদাহৰণ ২ ঃ $2(x^2 + y^2 + z^2) - 2x + 4y - 6z - 15 = 0$ গোলকটোৰ কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসার্ধ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ গোলকটোৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$2(x^2 + y^2 + z^2) - 2x + 4y - 6z - 15 = 0$$

অর্থাৎ, $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 3y - \frac{15}{2} = 0$

গোলকৰ সাধাৰণ সমীকৰণ $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ৰ লগত তুলনা কৰি আমি পাওঁ,

$$2u = -1,\ 2v = 2,\ 2w = -3,\ d = -\frac{15}{2}$$

$$\Rightarrow u = -\frac{1}{2},\ v = 1,\ w = -\frac{3}{2},\ d = -\frac{15}{2}$$

গোলকটোৰ কেন্দ্ৰ (–u, –v, –w) অর্থাৎ $\left(-\frac{1}{2}, 1, -\frac{3}{2}\right)$ আৰু

∴ সমীকৰণ হ'ল, $= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}$

$$= \sqrt{\frac{1}{4} + 1 + \frac{9}{4} + \frac{15}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 + 4 + 9 + 30}{4}} = \sqrt{11}$$

উদাহৰণ ৩ ঃ দেখুওৱাক যে P(–2, 5, 7) বিন্দুটো $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 10 = 0$ গোলকটোত নাই। P বিন্দুটো গোলকটোৰ ভিতৰত থাকিব নে বাহিৰত থাকিব নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $x = -2,\ y = 5,\ z = 7$, হ'লে, $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 10$

$$= 4 + 25 + 49 + 4 - 20 - 42 + 10$$

$$= 92 - 62 = 30 \neq 0$$

$\therefore$ সমীকৰণটো সিদ্ধ নহয় আৰু সেইবাবে P(–2, 5, 7) বিন্দুটো গোলকটোত নাই।

এতিয়া, $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 10 = 0$ গোলকটোৰ কেন্দ্ৰ C(1, 2, 3)

আৰু ইয়াৰ ব্যাসার্ধ, $r = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 - 10}$

$= \sqrt{14 - 10}$

$= \sqrt{4} = 2$

এতিয়া, $CP = \sqrt{(1+2)^2 + (2-5)^2 + (3-7)^2}$

$= \sqrt{9 + 9 + 16}$

$= \sqrt{34} > 2$

অর্থাৎ, CP > r; $\therefore$ P বিন্দুটো গোলকটোৰ বাহিৰত আছে।

উদাহৰণ ৪ ঃ এটা গোলকৰ ব্যাসৰ মূৰ বিন্দু দুটা (2, –3, 1) আৰু (3, –1, 2). গোলকটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক। দেখুওৱাক যে $P\left(\frac{5}{2}, -2, \frac{1}{2}\right)$ বিন্দুটো গোলকটোৰ ভিতৰত আছে।

সমাধান ঃ গোলকটোৰ ব্যাসৰ মূৰ বিন্দু দুটা হ'ল, (2, –3, 1) আৰু (3, –1, 2).

গতিকে গোলকটোৰ সমীকৰণ হ'ল,

$(x - 2)(x - 3) + \{y - (-3)\}\{y - (-1)\} + (z - 1)(z - 2) = 0$

অর্থাৎ, $(x - 2)(x - 3) + (y + 3)(y + 1) + (z - 1)(z - 2) = 0$

অর্থাৎ, $(x^2 - 5x + 6) + (y^2 + 4y + 3) + (z^2 - 3z + 2) = 0$

অর্থাৎ, $x^2 + y^2 + z^2 - 5x + 4y - 3z + 11 = 0$

ইয়াৰ কেন্দ্ৰ হ'ল, $C\left(\frac{5}{2}, -2, \frac{3}{2}\right)$ আৰু ব্যাসার্ধ হ'ল,

$$\sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 2^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 11}$$

অর্থাৎ, $\sqrt{\frac{17}{2} - 7}$

অর্থাৎ, $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

$P\left(\frac{5}{2}, -2, \frac{1}{2}\right)$ বিন্দুটো লোৱা হ'ল। এতিয়া,

$CP^2 = \left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 + (-2 + 2)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 < \frac{3}{2}$

অর্থাৎ, CP > $\sqrt{\frac{3}{2}}$; অর্থাৎ, CP < গোলকটোৰ ব্যাসার্ধ

$\therefore$ P$\left(\frac{5}{2}, -2, \frac{1}{2}\right)$ বিন্দুটো গোলকটোৰ ভিতৰত আছে।

উদাহৰণ ৫ ঃ এটা গোলকৰ স্থানাংক অক্ষ তিনিডালত ছেদাংশ ক্রমে a, b, c আৰু গোলকটো মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যায়। গোলকটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক। লগতে ইয়াৰ কেন্দ্র আৰু ব্যাসার্ধ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ প্রশ্নমতে, (0, 0, 0), (a, 0, 0), (0, b, 0) আৰু (0, 0, c) বিন্দু চাৰিটাৰ মাজেৰে যোৱা গোলকৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰিব লাগে।

ধৰা হ'ল, গোলকটোৰ সমীকৰণ,

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ ... ...(i)

(0, 0, 0), (a, 0, 0), (0, b, 0) আৰু (0, 0, c) বিন্দুকেইটাৰ মাজেৰে যায়, গতিকে এই স্থানাংক কেইটাই সমীকৰণ (i) সিদ্ধ কৰিব। সেয়েহে আমি পালোঁ,

$d = 0,\ a^2 + 2ua + d = 0,\ b^2 + 2vb + d = 0,\ c^2 + 2wc + d = 0$

$\Rightarrow d = 0,\ 2ua = -a^2,\ 2vb = -b^2,\ 2wc = -c^2$ ($d = 0$ ব্যৱহাৰ কৰি)

$\Rightarrow u = -\frac{a}{2},\ v = -\frac{b}{2},\ w = -\frac{c}{2},\ d = 0$

গতিকে (i) হ'বগৈ, $x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$

এইটোৱেই গোলকটোৰ উলিয়াবলগীয়া সমীকৰণ।

গোলকটোৰ কেন্দ্র হ'ল, (–u, –v, –w) অর্থাৎ, $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ আৰু ব্যাসার্ধ,

$$= \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

উদাহৰণ ৬ ঃ $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 11 = 0,\ 2x - 3y + 5z + 4 = 0$ বৃত্ত আৰু (1, 1, 1) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা গোলকৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 11 = 0,\ 2x - 3y + 5z + 4 = 0$ বৃত্তৰৰ মাজেৰে যোৱা যিকোনো গোলকৰ সমীকৰণ হ'ল,

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 11 + \lambda(2x - 3y + 5z + 4) = 0$

যদি (1, 1, 1) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, তেনেহ'লে,

$1 + 1 + 1 - 4 + 6 - 11 + \lambda(2 - 3 + 5 + 4) = 0$

$\Rightarrow 8\lambda = 6 \Rightarrow \lambda = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

∴ উলিয়াবলগীয়া গোলকৰ সমীকৰণটো হ'ল,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 11 + \frac{3}{4}(2x - 3y + 5z + 4) = 0$$

অর্থাৎ, $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 16x + 24y - 44 + 6x - 9y + 15z + 12 = 0$

অর্থাৎ, $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 10x + 15y + 15z - 32 = 0$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ ঃ এটা গোলকৰ কেন্দ্র (2, 0, –5) আৰু ব্যাসার্ধ 11 গোলকটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ ঃ তলৰ গোলক দুটাৰ কেন্দ্র আৰু ব্যাসার্ধ নির্ণয় কৰক।

i) $x^2 + y^2 + z^2 - 16x - 6y = 0$

ii) $3(x^2 + y^2 + z^2) + x - 5y - 2z + 1 = 0$

প্রশ্ন নং ৩ ঃ P(1,2,-1) বিন্দুটো $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ গোলকটোৰ ভিতৰত নে ওপৰত নে বাহিৰত থাকে নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ ঃ এটা গোলকৰ এডাল ব্যাসৰ মূৰ বিন্দুৰ স্থানাংক (2, –3, 4) আৰু (–2, 1, –5)। গোলকটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ ঃ $x - 2y + 3z = 12$ সমতলখনে অক্ষ তিনিডালক A, B, C বিন্দুত কাটে। OABC গোলকটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৬ ঃ (1, 0, 0), (0, 1, –1), (–1, 2, 0) আৰু (1, 2, 3) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা গোলকৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৭ ঃ যিটো গোলকত $2x + y + z + 3 = 0$ আৰু $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ এটা বৃহৎ বৃত্ত, সেই গোলকটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

[গোলকৰ কেন্দ্রৰ মাজেৰে যোৱা এখন সমতলৰ দ্বাৰা গোলকৰ ছেদক বৃহৎ বৃত্ত (Great Circle) বুলি কোৱা হয়।]



৯.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- এটা গোলকৰ কেন্দ্র মূল বিন্দু আৰু ব্যাসার্ধ a হ'লে, গোলকটোৰ সমীকৰণ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
- $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ সমীকৰণে গোলকৰ সমীকৰণ বুজায়। ইয়াৰ কেন্দ্র (–u, –v, –w) আৰু ব্যাসার্ধ $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}$.

- এটা গোলকৰ ব্যাসৰ মূৰ বিন্দু দুটা (x_1, y_1, z_1) আৰু (x_2, y_2, z_2) হ'লে গোলকটোৰ সমীকৰণ, $(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) + (z - z_1)(z - z_2) = 0$.



৯.৫ অধিক জানিবলৈ

ইংৰাজী গ্ৰন্থ ঃ

1) Jain, P. K. & Ahmad, Khalil. *Textbook of Analytical Geometry of Three Dimensions*. New Delhi: New Age International (P) Limited.
2) Khan, R. M. *Analytical Geometry of Two & Three Dimensions & Vector Analysis*. New Central Book Agency (P) Limited.
3) Kishan, Hari. *Coordinate Geometry of Two Dimensions*. New Delhi: Atlantic Publishers & Distributors.
4) Pal, Sat & Pal, Harbans. *A Textbook of Two Dimensional Geometry*. New Age International Publishers.
5) Sharma, G. C. & Jain, Madhu. *Coordinate Geometry (2D and 3D)*. Galgotia Publications Pvt Lid.
6) Sharma, A. K. *Coordinate Geometry (2D)*. New Delhi: Discovery Publishing House.
7) Vasistha, A. R. & Agrawal, *D. C. Analytical Geometry of Three Dimensions (Coordinate of Solid Geometry)*.



৯.৬ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ গোলকটোৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$(x - 2)^2 + (y - 0)^2 + (z + 5)^2 = 11^2$$

অৰ্থাৎ, $x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 + 10z + 25 = 121$

অৰ্থাৎ, $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10z - 92 = 0$

২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ i) গোলকটোৰ সমীকৰণ হ'ল, $x^2 + y^2 + z^2 - 16x - 6y = 0$

গোলকৰ সাধাৰণ সমীকৰণ অৰ্থাৎ, $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ৰ লগত তুলনা কৰি আমি পাওঁ,

$2u = -16, 2v = -6, 2w = 0, d = 0$

$\Rightarrow u = -8, v = -3, w = 0, d = 0$

$\therefore$ গোলকটোৰ কেন্দ্ৰ হ'ল, (–u, –v, –w) , অৰ্থাৎ, (8, 3, 0) আৰু

ইয়াৰ ব্যাসাৰ্ধ = $\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$ = $\sqrt{73}$

ii) গোলকটোৰ সমীকৰণ হ'ল,

$3(x^2 + y^2 + z^2) + x - 5y - 2z + 1 = 0$

অৰ্থাৎ, $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{3}x - \frac{5}{3}y - \frac{2}{3}z + \frac{1}{3} = 0$

এই ক্ষেত্ৰত, $2u = \frac{1}{3}$, $2v = -\frac{5}{3}$, $2w = -\frac{2}{3}$, $d = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow u = \frac{1}{6}$, $v = -\frac{5}{6}$, $w = -\frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{3}$

$\therefore$ এই ক্ষেত্ৰত (–u, –v, –w), অৰ্থাৎ, $\left(-\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}\right)$.

আৰু ব্যাসাৰ্ধ = $\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$

$$= \sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(-\frac{5}{6}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+25+4-12}{36}}$$

$$= \sqrt{\frac{18}{36}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

৩নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ গোলকটোৰ সমীকৰণ হ'ল, $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 3 = 0$

গতিকে, $2u = -4$, $2v = 6$, $2w = 0$, $d = -3$

$\Rightarrow u = -2$, $v = 3$, $w = 0$, $d = -3$

$\therefore$ কেন্দ্ৰ Cৰ স্থানাংক (–u, –v, –w)

অৰ্থাৎ, (2, –3, 0) আৰু ব্যাসাৰ্ধ r = $\sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$

$$= \sqrt{4+9+0+3}$$

$$= \sqrt{16} = 4$$

প্ৰদত্ত বিন্দুটো হ'ল, P(1, –2, 1)

এতিয়া, CP = $\sqrt{(1-2)^2+(-2+3)^2+(1-0)^2}$

$$= \sqrt{1+1+1}$$

$$= \sqrt{3} < 4$$

অর্থাৎ, CP < r. ∴ P(1, –2, 1) বিন্দুটো গোলকটোৰ ভিতৰত আছে।

৪নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ গোলকটোৰ নির্ণেয় সমীকৰণ হ'ল,

$$(x - 2)(x + 2) + (y + 3)(y - 1) + (z - 4)(z + 5) = 0$$

অর্থাৎ, $(x^2 - 4) + (y^2 + 2y - 3) + (z^2 + z - 20) = 0$

অর্থাৎ, $x^2 + y^2 + z^2 + 2y + z - 327 = 0$

৫নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ সমতলখনৰ সমীকৰণ হ'ল, $x - 2y + 3z = 12$

অর্থাৎ, $\frac{x}{12} - \frac{2y}{12} + \frac{3z}{12} = \frac{12}{12}$

অর্থাৎ, $\frac{x}{12} + \frac{y}{-6} + \frac{z}{4} = 1$

সমতলখনে অক্ষ তিনিডালক A, B, C বিন্দুত কাটে। গতিকে, A, B, Cৰ স্থানাংক ক্ৰমে, (12, 0, 0), (0, –6, 0), (0, 0, 4).

ধৰা হ'ল, OABC গোলকটোৰ সমীকৰণ,

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ ... ...(1)

যিহেতু ই O(0, 0, 0), A(12, 0, 0), B(0, –6, 0) আৰু C(0, 0, 4), বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, গতিকে সিহঁতৰ স্থানাংকই সমীকৰণ (1) সিদ্ধ কৰিব। গতিকে,

$$d = 0,\ 144 + 24u + d = 0,\ 36 - 12v + d = 0,\ 16 + 8w + d = 0$$

অর্থাৎ, $d = 0,\ 144 + 24u = 0,\ 36 - 12v = 0,\ 16 + 8w = 0$

অর্থাৎ, $d = 0,\ 24u = -144,\ -12v = -36,\ 8w = -16$

অর্থাৎ, $d = 0,\ u = -6,\ v = 3,\ w = -2$

(1)ত u, v, w আৰু dৰ মান বহুৱাই আমি পাওঁ,

$x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 6y - 4z = 0$, এইটোৱেই গোলকটোৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।

৬নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, গোলকটোৰ সমীকৰণ,

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$ ... ...(1)

যিহেতু গোলকটো (1, 0, 0), (0, 1, –1), (–1, 2, 0) আৰু (1, 2, 3) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, গতিকে,

$$\left.\begin{aligned} 1 + 2u + d &= 0 \\ 1 + 1 + 2v - 2w + d &= 0 \\ 1 + 4 - 2u + 4v + d &= 0 \\ 1 + 4 + 9 + 2u + 4v + 6w + d &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 1 + 2u + d &= 0 && \text{... ... ...(2)} \\ 2 + 2v - 2w + d &= 0 && \text{... ... ...(3)} \\ \text{অর্থাৎ, } 5 - 2u + 4v + d &= 0 && \text{... ... ...(4)} \\ 14 + 2u + 4v + 6w + d &= 0 && \text{... ... ...(5)} \end{aligned}\right\}$$

(3) – (2), (4) – (2) , (5) – (2) প্রয়োগ কৰি আমি পাম,

$$\left.\begin{aligned} -2u + 2v - 2w + 1 &= 0 \\ -4u + 4v + 4 &= 0 \\ 4v + 6w + 13 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 2u - 2v + 2w &= 1 \\ \text{অর্থাৎ, } u - v + 0.w &= 1 \\ 0.u + 4v + 6w &= -13 \end{aligned}\right\}$$

ক্ৰেমাৰৰ নিয়মৰ সহায়ত আমি পাম,

$$\frac{u}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -13 & 4 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{v}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{w}{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -13 \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{vmatrix}}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{1(-6-0)-1(-12-8)-13(0+2)} = \frac{v}{2(6-0)-1(6+26)}$$

$$= \frac{w}{2(13-4)-1(26-4)}$$

$$= \frac{1}{2(-6-0)-1(-12-8)}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{-6+20-26} = \frac{v}{12-32} = \frac{w}{18-22} = \frac{1}{-12+20}$$

$$\Rightarrow \frac{u}{-12} = \frac{v}{-20} = \frac{w}{-4} = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow u = -\frac{3}{2},\ v = -\frac{5}{2},\ w = -\frac{1}{2}$$

গতিকে, $(2) \Rightarrow 1 + 2 \times \left(-\frac{3}{2}\right) + d = 0$

$$\Rightarrow 1 - 3 + d = 0$$

$$\Rightarrow d = 2$$

u, v, w আৰু dৰ মান (1)ত বহুৱাই আমি পাওঁ,

$x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 5y - z + 2 = 0$

এইটোৱেই গোলকটোৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।

৭নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ যিহেতু নির্ণেয় গোলকটো $2x + y + z + 3 = 0$ আৰু

$x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$, বৃত্তৰ মাজেৰে যায়, গতিকে ইয়াৰ সমীকৰণৰ আকাৰ হ'ব,

$(x^2 + y^2 + z^2 - 9) + k(2x + y + z + 3) = 0.$

অর্থাৎ, $x^2 + y^2 + z^2 + 2kx + ky + kz + (3k - 9) = 0$ ... ...(1)

গোলকটোৰ কেন্দ্ৰ হ'ল, $\left(-k, -\frac{k}{2}, -\frac{k}{2}\right)$.

যিহেতু প্ৰদত্ত বৃত্তটো গোলকটোৰ এটা বৃহৎ বৃত্ত, বৃত্তটোৰ সমতলখন অর্থাৎ, $2x + y + z + 3 = 0$ সমতলখন গোলকটোৰ কেন্দ্ৰৰ মাজেৰে যায়। গতিকে,

$$2(-k) + \left(-\frac{k}{2}\right) + \left(-\frac{k}{2}\right) + 3 = 0$$

$\Rightarrow -3k + 3 = 0$

$\Rightarrow -3k = -3$

$\Rightarrow k = 1$

(1)ত $k = 1$ বহুৰাই আমি পাওঁ, $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + y + z - 6 = 0$

এইটোৱেই গোলকটোৰ নিৰ্ণেয় সমীকৰণ।



৯.৭ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ এটা গোলকৰ কেন্দ্ৰ (2, –3, 1) আৰু ব্যাসাৰ্ধ 6. গোলকটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ২ ঃ এটা গোলকৰ কেন্দ্ৰ (2, –2, 3) আৰু গোলকটো (7, –3, 5) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়। গোলকটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ ঃ অধোলিখিত গোলকৰ কেন্দ্ৰ আৰু ব্যাসাৰ্ধ নিৰ্ণয় কৰক।

i) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$

ii) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 4y + 2z + 3 = 0$

প্ৰশ্ন ৪ ঃ (1, 2, 3), (0, –2, 4), (4, –4, 2) আৰু (3, 1, 4) বিন্দু চাৰিটাৰ মাজেৰে যোৱা গোলকৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৫ ঃ এটা গোলক (3, 0, 2). (–1, 1, 1), (2, –5, 4) বিন্দু তিনিটাৰ মাজেৰে যায় আৰু গোলকটোৰ কেন্দ্ৰ $2x + 4y + 2z = 6$ সমতলখনত আছে। গোলকটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৬ ঃ (4, –1, 2), (0, –2, 3), (1, 5, –1), (2, 0, 1) বিন্দু চাৰিটাৰ মাজেৰে যোৱা গোলকটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৭ ঃ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $2x + 3y + 4z = 5$ বৃত্তৰ মাজেৰে আৰু মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা গোলকৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

*** ***** ***

অধ্যায় ১০ ঃ শংকু

অধ্যায় গাঁথনি

১০.১ উদ্দেশ্য

১০.২ পৰিচয়

১০.৩ শংকু

১০.৩.১ নির্দিষ্ট শীর্ষ বিন্দু আৰু নির্দিষ্ট নির্দেশিত বক্র বিশিষ্ট শংকুৰ সমীকৰণ

১০.৩.২ x, y, zৰ দ্বিতীয় মাত্রাৰ সুষম সমীকৰণৰ কক্ষপথ

১০.৩.৩ সম বৃত্তীয় শংকু

১০.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১০.৫ অধিক জানিবলৈ

১০.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১০.৭ আৰ্হি প্রশ্ন

১০.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- শংকু আৰু ইয়াৰ সমীকৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

১০.২ পৰিচয়

আগৰ অধ্যায়ত আমি গোলক আৰু ইয়াৰ সমীকৰণ সম্বন্ধে আলোচনা কৰিলোঁ। এই অধ্যায়ত আমি শংকু আৰু ইয়াৰ সমীকৰণ সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম।

১০.৩ শংকু

সংজ্ঞা ঃ শংকু (Cone) হ'ল এডাল ৰেখাৰ দ্বাৰা জনিতপৃষ্ঠ। ৰেখাডাল এটা নির্দিষ্ট বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু আন এটা চর্ত সিদ্ধ কৰে, যথা, এডাল নির্দিষ্ট বক্রক কাটে। চলমান ৰেখাডালক শংকুটোৰ জনক (Generator) বোলে, নির্দিষ্ট বিন্দুটোক শীর্ষ বিন্দু (vertex) বোলে আৰু প্রদত্ত বক্রটোক নির্দেশক বক্র (বা ভূমি বক্র) বোলে।

১০.৩.১ নির্দিষ্ট শীর্ষ বিন্দু আৰু নির্দিষ্ট নির্দেশিত বক্র বিশিষ্ট শংকুৰ সমীকৰণ

এটা শংকুৰ শীর্ষ বিন্দু (α, β, γ) আৰু ভূমি $z = 0$, $f(x, y) = 0$ বক্র হ'লে, শংকুটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰিব লাগে।

(α, β, γ) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা ৰেখাৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n} \quad \text{... ... ...(1)}$$

যদি ৰেখাডালে z = 0 সমতলক কাটে,

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=-\frac{\gamma}{n}$$

$$\Rightarrow x=\alpha-\frac{l\gamma}{n},\ y=\beta-\frac{m\gamma}{n}$$

গতিকে (1) নম্বৰ ৰেখাডালে z = 0 সমতলক $\left(\alpha-\frac{l\gamma}{n},\beta-\frac{m\gamma}{n},0\right)$

যদি (1) নম্বৰ ৰেখাডালে z = 0, f(x, y) = 0 ... ...(2)

বক্রক মিলে, $f\left(\alpha-\frac{l\gamma}{n},\beta-\frac{m\gamma}{n}\right)=0$ ... ...(3)

যদি আমি (1) আৰু (3)ৰ পৰা l, m, n অপনয়ন কৰোঁ, তেনেহ'লে আমি চলক ৰেখা (1)ৰ কক্ষপথৰ সমীকৰণ পাম। ই সদায় (α, β, γ) বিন্দুৰ মাজেৰে যাব আৰু (2) নম্বৰ বক্রক কাটিব, অর্থাৎ, আমি শংকুটোৰ সমীকৰণ পাম, আৰু ইয়াৰ শীর্ষ বিন্দু হ'ল (α, β, γ) আৰু ভূমি হ'ল (2) নম্বৰ বক্র।

(1) আৰু (3)ৰ পৰা l, m, n অপনয়ন কৰিবলৈ হ'লে (1)ৰ পৰা পাম,

$\frac{l}{n}=\frac{x-\alpha}{z-\gamma}$ আৰু $\frac{m}{n}=\frac{y-\beta}{z-\gamma}$;

$\frac{l}{n}$ আৰু $\frac{m}{n}$ৰ এই মান (3)ত বহুৰাই আমি পাওঁ,

$$f\left(\alpha-\frac{\gamma(x-\alpha)}{z-\gamma},\beta-\frac{\gamma(y-\beta)}{z-\gamma}\right)=0$$

অর্থাৎ, $f\left(\frac{\alpha z-\gamma x}{z-\gamma},\frac{\beta z-\gamma y}{z-\gamma}\right)=0$

এইটোৱেই শংকুৰ উলিয়াবলগীয়া সমীকৰণ।

১০.৩.২ x, y, zৰ দ্বিতীয় মাত্রাৰ সুষম সমীকৰণৰ কক্ষপথ

x, y আৰু zৰ দ্বিতীয় মাত্রাৰ সাধাৰণ সুষম সমীকৰণ হ'ল,

$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$ ... ...(1)

স্পষ্টতঃ এই সমীকৰণে বুজোৱা পৃষ্ঠখনত মূল বিন্দু 0 এটা বিন্দু। যদি (1)এ বুজোৱা পৃষ্ঠখনত $P(x', y', z')$ এটা বিন্দু, তেনেহ'লে,

$ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + 2fy'z' + 2gz'x' + 2hx'y' = 0$

ইয়াৰ পৰা, $k^2(ax'^2 + by'^2 + cz'^2 + 2fy'z' + 2gz'x' + 2hx'y') = 0$

অর্থাৎ, kৰ সকলো মানৰ বাবে,

$a(kx')^2 + b(ky')^2 + c(kz')^2 + 2f(ky')(kz') + 2g(kz')(kx') + 2h(kx')(ky') = 0$

দেখা গ'ল যে kৰ সকলো মানৰ বাবে (1)ৰ পৃষ্ঠত (kx', ky', kz') বিন্দুটোৱো আছে। কিন্তু (kx', ky', kz') বিন্দুটো চলক ৰেখা OPৰ এটা স্বেচ্ছ বিন্দু (আৰু চলক ৰেখাডালৰ সমীকৰণ $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$) .

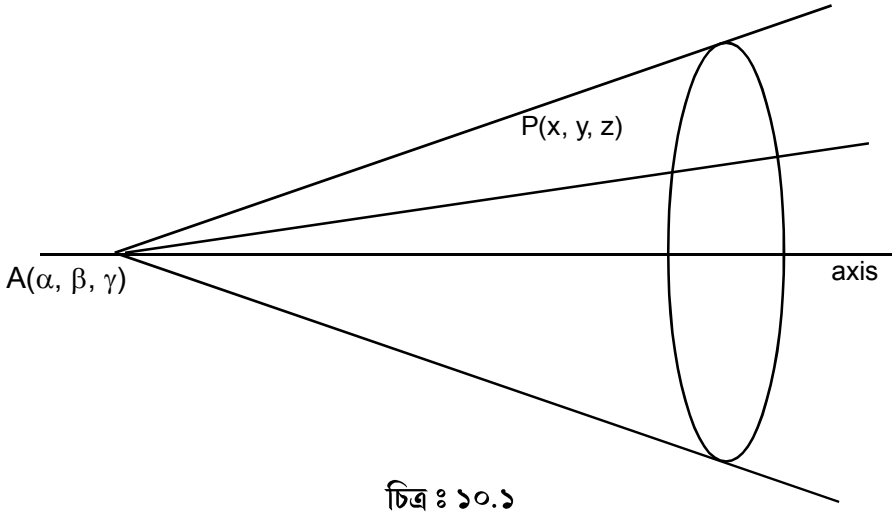
গতিকে (1) নম্বৰ পৃষ্ঠত P এটা বিন্দু হ'লে OPৰ প্রতিটো বিন্দুৱেই (1) নম্বৰ পৃষ্ঠৰ এটা বিন্দু, অর্থাৎ, (1) নম্বৰ পৃষ্ঠত গোটেইডাল ৰেখা OP থাকিব। আন কথাত (1)এ চলক ৰেখা OPএ উৎপন্ন কৰা শংকু বুজায়। ই সদায় নির্দিষ্ট বিন্দু Oৰ মাজেৰে যায়। গতিকে O হ'ল শংকুটোৰ শীর্ষ বিন্দু। দেখা গ'ল যে (1) নম্বৰ সমীকৰণৰ কক্ষপথ এটা শংকু আৰু ইয়াৰ শীর্ষ বিন্দু হ'ল মূল বিন্দু।

১০.৩.৩ সম বৃত্তীয় শংকু

সকলো অৱস্থানতে যদি শংকু এটাৰ জনকে শংকুটোৰ শীর্ষবিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা এডাল নির্দিষ্ট ৰেখাৰ লগত এটা ধ্রুৱক কোণ কৰে, তেনেহ'লে নির্দিষ্ট ৰেখাডালক অক্ষ আৰু ধ্রুৱক কোনটোক শংকুটোৰ উপ-শীর্ষ কোণ (Semi-Vertical angle) বুলি কোৱা হয়। এই শংকুটোক সম বৃত্তীয় শংকু (Right Circular Cone) বোলে।

এটা সমবৃত্তীয় শংকুৰ শীর্ষ বিন্দু

এটা সমবৃত্তীয় শংকুৰ শীর্ষ বিন্দু $A(\alpha, \beta, \gamma)$, $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ ৰেখাডাল অক্ষ আৰু θ হ'ল উপ-শীর্ষ কোণ। শংকুটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰিব লাগে।



চিত্র ঃ ১০.১

ধৰা হ'ল, সময় বৃত্তীয় শংকুটোত P(x, y, z) যিকোনো এটা বিন্দু। AP জনক ডালে শংকুটোৰ অক্ষৰ লগত ধ্ৰুৱক কোণ θ কৰে। AP ৰেখাডালৰ দিশানুপাত $x-\alpha, y-\beta, z-\gamma$ আৰু অক্ষডালৰ দিশানুপাত l, m, n, গতিকে,

$$\cos\theta = \frac{l(x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}}$$

ইয়াৰ পৰা,

$$[l(x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)]^2 = (l^2+m^2+n^2)\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2\}\cos^2\theta$$

এইটো শংকুটোত থকা যিকোনো বিন্দুৰ স্থানাংক (x, y, z)ৰ বাবে সত্য। সেয়েহে এইটোৱেই সম বৃত্তীয় শংকুটোৰ সমীকৰণ।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ এটা সম বৃত্তীয় শংকুৰ উপ-শীৰ্ষ কোণ θ, শীৰ্ষ বিন্দুটো মূল বিন্দু আৰু অক্ষৰ দিশানুপাত l, m, n হ'লে, সম বৃত্তীয় সংকুটোৰ সমীকৰণ হ'ল,

$(lx+my+nz)^2 = (l^2+m^2+n^2)(x^2+y^2+z^2) = \theta$

মূল ফলটোত $(\alpha, \beta, \gamma) = 0, 0, 0$ বহুবাই আমি এইটো পাওঁ।

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ ঃ এটা শংকুৰ শীৰ্ষ বিন্দু (0, 0, 3) আৰু ভূমি $x^2-y^2=5, z=0$ বক্ৰ হ'লে, শংকুটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ শীৰ্ষ বিন্দু (0, 0, 3)ৰ মাজেৰে যোৱা যিকোনো ৰেখাৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z-3}{n} \qquad \ldots\ \ldots\ \ldots(1)$$

ই $z=0$ সমতলক যি বিন্দুত কাটে সেই বিন্দুত $z=0$, আৰু

$$\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{-3}{n}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{3l}{n},\ y = -\frac{3m}{n}$$

গতিকে, (1) ৰেখাডালে $z=0$ সমতলক $\left(-\frac{3l}{n}, -\frac{3m}{n}, 0\right)$ বিন্দুত কাটে। (1) নম্বৰ ৰেখাডাল নিৰ্ণেয় শংকুটোৰ এডাল জনক হ'ব যদিহে ওপৰৰ বিন্দুটো ভূমি বক্ৰ $z=0$, $x^2-y^2=5$ৰ ওপৰত থাকে, অৰ্থাৎ, যদি

$$\left(-\frac{3l}{n}\right)^2-\left(-\frac{3m}{n}\right)^2 = 5$$

অৰ্থাৎ, যদি $9\left[\left(\frac{l}{n}\right)^2-\left(\frac{m}{n}\right)^2\right] = 5$ $\qquad \ldots\ \ldots\ \ldots(2)$

(1) আৰু (2)ৰ পৰা l, m আৰু n অপনয়ন কৰি আমি শংকুটোৰ সমীকৰণটো পাম।

ইয়াৰ শীৰ্ষ বিন্দু হ'ব (0, 0, 3) আৰু ভূমি হ'ব $x^2 - y^2 = 5, z = 0$.

এতিয়া (1)ৰ পৰা $\frac{l}{n} = \frac{x}{z-3}, \frac{m}{n} = \frac{y}{z-3}$;

(2)ত বহুৰাই আমি পাওঁ, $9\left[\left(\frac{x}{z-3}\right)^2 - \left(\frac{y}{z-3}\right)^2\right] = 5$

অৰ্থাৎ, $9(x^2 - y^2) = 5(z - 3)^2$; এইটোৱেই শংকুটোৰ উলিয়াবলগীয়া সমীকৰণ।

উদাহৰণ ২ ঃ এটা শংকুৰ শীৰ্ষ বিন্দুটো মূল বিন্দু আৰু শংকুটো $ax^2 + by^2 = 2z$, $lx + my + nz = p$ বক্ৰৰ মাজেৰে যায়। শংকুটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ বক্ৰটো হ'ল, $ax^2 + by^2 = 2z$ ... ...(1)

$lx + my + nz = p$ ... ...(2)

(2)ক এনেধৰণে লিখিব পাৰি, $\frac{lx + my + nz}{p} = 1$ আৰু ইয়াৰ সহায়ত

(1)ক সুষম কৰিব পাৰি, $ax^2 + by^2 - 2z\left(\frac{lx + my + nz}{p}\right)$ ... ...(3)

এতিয়া সমীকৰণ (3) সুষম। সেয়ে ই এটা শংকুৰ সমীকৰণ বুজায় আৰু ইয়াৰ শীৰ্ষ বিন্দু হ'ল মূল বিন্দু। আকৌ (1) আৰু (2) দুয়োটা সিদ্ধ হ'লে (3) ও সিদ্ধ হ'ব। ইয়াৰ অৰ্থ এইটোৱে যে (1) আৰু (2)এ নিৰ্ণয় কৰা বক্ৰত থকা প্ৰতিটো বিন্দুৱে (3) নম্বৰ পৃষ্ঠখনত থাকিব। অৰ্থাৎ, (3) নম্বৰ শংকুটো, প্ৰদত্ত বক্ৰটোৰ মাজেৰে যায় আৰু শংকুটোৰ শীৰ্ষ বিন্দু হ'ল মূল বিন্দু।

গতিকে, শংকুটোৰ নিৰ্ণেয় সমীকৰণ, $p(ax^2 + by^2) = 2z(lx + my + nz)$.

উদাহৰণ ৩ ঃ এটা শংকুৰ শীৰ্ষ বিন্দুটো মূল বিন্দু আৰু ভূমি $z = k, f(x, y) = 0$ বক্ৰ হ'লে, প্ৰমাণ কৰক যে শংকুটোৰ সমীকৰণ $f\left(\frac{xk}{z}, \frac{yk}{z}\right) = 0$.

সমাধান ঃ শংকুটোৰ শীৰ্ষ বিন্দু (0, 0, 0)ৰ মাজেৰে যোৱা যিকোনো ৰেখাৰ সমীকৰণ হ'ল, $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ ... ...(1)

এই ৰেখাডালে $z = k$ সমতলক যিটো বিন্দুত কাটে সেই বিন্দুত $z = k$, আৰু

$$\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{k}{n}$$

$$\Rightarrow x = \frac{kl}{n}, y = \frac{km}{n}$$

গতিকে (1) নম্বৰ ৰেখাডালে $z = k$ সমতলক $\left(\frac{kl}{n}, \frac{km}{n}, k\right)$ বিন্দুত কাটে। (1) নম্বৰ ৰেখাডাল শংকুটোৰ এডাল জনক যদি ই ভূমি বক্ৰ $z = k$, $f(x, y) = 0$ বক্ৰক কাটে যাৰ বাবে $\left(\frac{kl}{n}, \frac{km}{n}, k\right)$ বিন্দুটো সেই বক্ৰটোত থাকিব লাগিব,

অৰ্থাৎ যদি, $f\left(\frac{kl}{n}, \frac{km}{n}\right) = 0$ ... ...(2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা l, m আৰু n অপনয়ন কৰি শংকুটোৰ সমীকৰণ পোৱা যাব। তলত তাকে দেখুওৱা হৈছে।

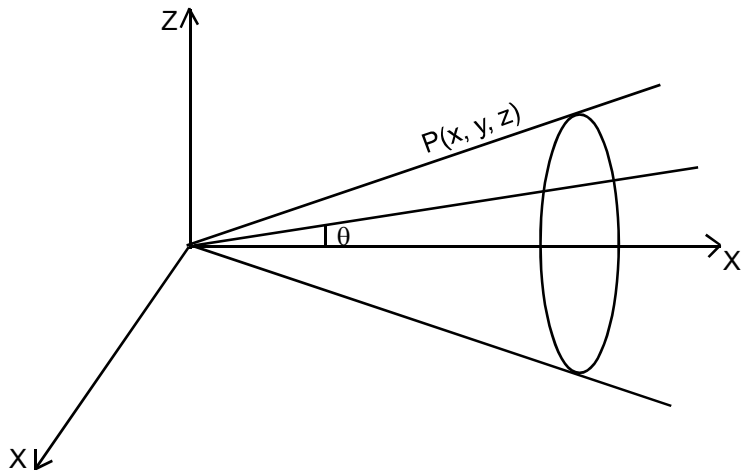
(1)ৰ পৰা, $\frac{l}{n} = \frac{x}{z}$ আৰু $\frac{m}{n} = \frac{y}{z}$;

গতিকে (2)ৰ পৰা আমি পালোঁ, $\frac{l}{n}$ আৰু $\frac{m}{n}$; $f\left(\frac{xk}{z}, \frac{yk}{z}\right) = 0$

এইটোৱেই শংকুটোৰ উলিয়াবলগীয়া সমীকৰণ।

উদাহৰণ ৪ ঃ এটা সমবৃত্তীয় শংকুৰ শীৰ্ষ বিন্দু হ'ল মূল বিন্দু, অক্ষডাল হ'ল z-অক্ষ আৰু উপ-শীৰ্ষ কোণ α। শংকুটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ মূল বিন্দু O হ'ল সমবৃত্তীয় শংকুটোৰ শীৰ্ষ বিন্দু আৰু OX হ'ল অক্ষ। ধৰা হ'ল, সম বৃত্তীয় শংকুটোত P(x, y, z) এটা বিন্দু। তেনেহ'লে OP এডাল জনক আৰু ইয়াৰ দিশানুপাত x, y, z আৰু OXৰ দিশাংক 1, 0, 0. যিহেতু সম বৃত্তীয় শংকুটোৰ α উপ-শীৰ্ষ কোণ, OPএ OXৰ লগত α কোণ কৰে।



চিত্ৰ ঃ ১০.২

$$\cos\alpha = \frac{x.1 + y.0 + z.0}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{1^2+0^2+0^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$$

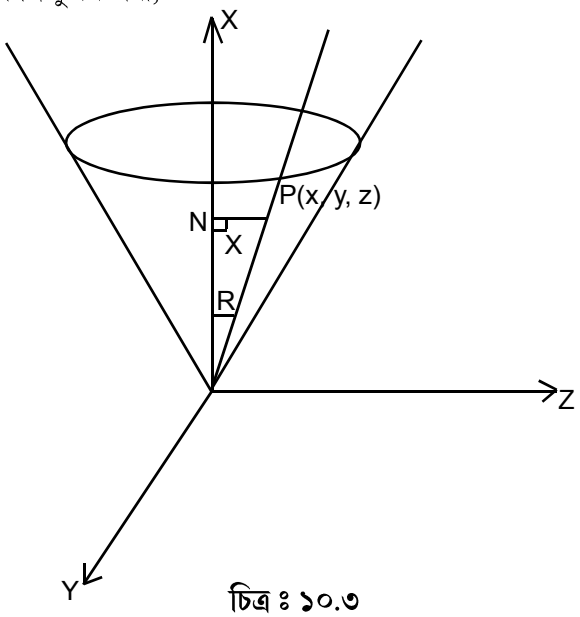
$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{x^2}{\cos^2\alpha} = x^2\sec^2\alpha$$

$$\Rightarrow y^2 + z^2 = x^2(\sec^2\alpha - 1)$$

$$\Rightarrow y^2 + z^2 = x^2\tan^2\alpha$$

গতিকে সম বৃত্তীয় শংকুটোৰ উলিয়াবলগীয়া সমীকৰণ, $y^2 + z^2 = x^2\tan^2\alpha$

বিকল্প উপায় ঃ ধৰা হ'ল, সম বৃত্তীয় শংকুটোৰ O শীর্ষ বিন্দু আৰু OX অক্ষ। ধৰা হ'ল, সম বৃত্তীয় শংকুটোত P(x, y, z) যিকোনো এটা বিন্দু আৰু $PN \perp OX$. তেনেহ'লে $ON = x$ আৰু $\angle XOP = \alpha$, যিহেতু শংকুটোৰ উপ-শীর্ষ কোণ α. এতিয়া OPN সমকোণী ত্রিভুজৰ পৰা,



চিত্র ঃ ১০.৩

গতিকে আমি পালোঁ, $\frac{OP}{ON} = \sec\alpha$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{x} = \sec\alpha$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = x^2\sec^2\alpha$$

$$\Rightarrow y^2 + z^2 = x^2(\sec^2\alpha - 1)$$

$$\Rightarrow y^2 + z^2 = x^2\tan^2\alpha$$

গতিকে, সম বৃত্তীয় শংকুটোৰ সমীকৰণ, $y^2 + z^2 = x^2\tan^2\alpha$.

উদাহৰণ ৫ ঃ এটা সম বৃত্তীয় শংকুৰ শীৰ্ষ বিন্দু (1, –2, –1), উপ শীৰ্ষ কোণ 60^0 আৰু $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z+1}{5}$ ৰেখাডাল অক্ষ হ'লে, উপবৃত্তটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে এটা সম বৃত্তীয় শংকুৰ শীৰ্ষ বিন্দু (α, β, γ), হ'লে θ উপ-শীৰ্ষকোণ হ'লে আৰু $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ ৰেখাডাল অক্ষ হ'লে,

শংকুটোৰ সমীকৰণ,

$$[l(x-\alpha) + m(y-\beta) + n(z-\gamma)]^2 = (l^2 + m^2 + n^2)\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\}\cos^2\theta$$

প্রদত্ত সমবৃত্তীয় শংকুটোৰ বাবে শীৰ্ষ বিন্দু হ'ল (1, –2, –1), উপ-শীৰ্ষ বিন্দু হ'ল 60^0 আৰু অক্ষ হ'ল, $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z+1}{5}$ ৰেখাডাল।

গতিকে শংকুটোৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$[3(x-1) + (-4)(y+2) + 5(z+1)]^2$$
$$= [3^2 + (-4)^2 + 5^2][(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2]\cos^2 60^0$$

অর্থাৎ, $(3x - 4y + 5z - 6)^2 \times [(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2] \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$

অর্থাৎ, $2(3x - 3y + 5z - 6)^2 = 25[(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2]$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ ঃ এটা শংকুৰ শীৰ্ষ বিন্দু (α, β, γ) আৰু নির্দেশিত বক্র $z = 0$, $ax^2 + by^2 = 1$. শংকুটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ ঃ এটা শংকুৰ শীৰ্ষ বিন্দু (α, β, γ) আৰু ভূমি হ'ল অধিবৃত্ত $y = 0$, $x^2 = 4az$. শংকুটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ ঃ এটা সম বৃত্তীয় শংকুৰ শীৰ্ষ বিন্দু হ'ল মূল বিন্দু, অক্ষ হ'ল $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ ৰেখাডাল আৰু উপ-শীৰ্ষ কোণ 45^0. সম বৃত্তীয় শংকুটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ ঃ এটা সম বৃত্তীয় শংকুৰ শীৰ্ষ বিন্দু হ'ল, (1, 0, –1), অক্ষ হ'ল, $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{2}$ ৰেখাডাল আৰু উপ-শীৰ্ষ কোণ 30^0.
সম বৃত্তীয় শংকুটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ ঃ এটা শংকুৰ শীৰ্ষ বিন্দু হ'ল মূল বিন্দু আৰু শংকুটো অধোলিখিত বক্রৰ মাজেৰে যায়। শংকুটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

i) $ax^2 + by^2 = 1, z = k$

ii) $8yz + 7zx - 3y + 2 = 0, 3z - 2y - 5 = 0$.

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ সম বৃত্তীয় শংকুটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

i) এটা সম বৃত্তীয় শংকুৰ শীৰ্ষ বিন্দু হ'ল মূল বিন্দু, অক্ষ OY আৰু উপ-শীৰ্ষ কোণ 45^0.

ii) এটা সম বৃত্তীয় শংকুৰ শীৰ্ষ বিন্দু হ'ল মূল বিন্দু, অক্ষ OZ আৰু উপ-শীৰ্ষ কোণ হ'ল α.



১০.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- দ্বিতীয় মাত্ৰাৰ সুষম সমীকৰণ $ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 0$এ এটা শংকুৰ সমীকৰণ বুজায় আৰু ইয়াৰ শীৰ্ষ বিন্দু হ'ল মূল বিন্দু।
- এটা সম বৃত্তীয় শংকুৰ শীৰ্ষ বিন্দু (α, β, γ), $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ ৰেখাডাল অক্ষ আৰু উপ-শীৰ্ষ কোণ θ হ'লে, শংকুটোৰ সমীকৰণ,

$[l(x-\alpha) + m(y-\beta) + n(z-\gamma)]^2 = (l^2 + m^2 + n^2)\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\}\cos^2\theta$

- এটা সম বৃত্তীয় শংকুৰ উপ-শীৰ্ষ কোণ θ, শীৰ্ষ বিন্দু হ'ল মূল বিন্দু আৰু অক্ষৰ দিশানুপাত l, m, n. সম বৃত্তীয় শংকুটোৰ সমীকৰণ হ'ল,

$(lx + my + nz)^2 = (l^2 + m^2 + n^2)(x^2 + y^2 + z^2)\cos^2\theta$.



১০.৫ অধিক জানিবলৈ

ইংৰাজী গ্ৰন্থ ঃ

1) Jain, P. K. & Ahmad, Khalil. *Textbook of Analytical Geometry of Three Dimensions*. New Delhi: New Age International (P) Limited.
2) Khan, R. M. *Analytical Geometry of Two & Three Dimensions & Vector Analysis*. New Central Book Agency (P) Limited.
3) Kishan, Hari. *Coordinate Geometry of Two Dimensions*. New Delhi: Atlantic Publishers & Distributors.
4) Pal, Sat & Pal, Harbans. *A Textbook of Two Dimensional Geometry*. New Age International Publishers.
5) Sharma, G. C. & Jain, Madhu. *Coordinate Geometry (2D and 3D)*. Galgotia Publications Pvt Lid.

6) Sharma, A. K. *Coordinate Geometry (2D)*. New Delhi: Discovery Publishing House.

7) Vasistha, A. R. & Agrawal, *D. C. Analytical Geometry of Three Dimensions (Coordinate of Solid Geometry)*.



১০.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ শংকুটোৰ শীৰ্ষ বিন্দু (α, β, γ) আৰু নিৰ্দেশিত বক্ৰ হ'ল,

$z = 0,\ ax^2 + by^2 = 1$ ... ...(1)

শীষ বিন্দু (α, β, γ)ৰ মাজেৰে যোৱা যিকোনো ৰেখাৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} \quad \text{... ... ...(2)}$$

যদি $z = 0$ সমতলক কাটে, তেনেহ'লে, $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{-\gamma}{n}$

$$\Rightarrow x - \alpha = -\frac{l\gamma}{n},\ y - \beta = -\frac{m\gamma}{n}$$

$$\Rightarrow x = \alpha - \frac{l\gamma}{n},\ y = \beta - \frac{m\gamma}{n}.$$

গতিকে, (2) ৰেখাডালে $z = 0$ সমতলক $\left(\alpha - \frac{l\gamma}{n}, \beta - \frac{m\gamma}{n}, 0\right)$ বিন্দুত কাটে।

যদি (2) নম্বৰ ৰেখাডালে (1), নম্বৰ বক্ৰক কাটে, $\left(\alpha - \frac{l\gamma}{n}, \beta - \frac{m\gamma}{n}, 0\right)$ বিন্দুটো ইয়াত থাকিব লাগিব। গতিকে আমি পালোঁ,

$$a\left(\alpha - \frac{l\gamma}{n}\right)^2 + b\left(\beta - \frac{m\gamma}{n}\right)^2 = 1 \quad \text{... ... ...(3)}$$

গতিকে, (2) নম্বৰ চলক ৰেখাডাল নিৰ্ণেয় শংকুটোৰ এডাল জনক হ'ব যদি (3) নম্বৰ চৰ্তটো সিদ্ধ হয়। (2) আৰু (3)ৰ পৰা l, m আৰু n অপনয়ন কৰি আমি শংকুটোৰ সমীকৰণ পাম।

(2)ৰ পৰা, $\frac{l}{n} = \frac{x-\alpha}{z-\gamma}$ আৰু $\frac{m}{n} = \frac{y-\beta}{z-\gamma}$;

$\frac{l}{n}$ আৰু $\frac{m}{n}$ৰ বাবে এই ৰাশি দুটা (3)ত বহুৱাই আমি পাওঁ,

$$a\left\{\alpha - \frac{\gamma(x-\alpha)}{z-\gamma}\right\}^2 + b\left\{\beta - \frac{\gamma(y-\beta)}{z-\gamma}\right\}^2 = 1$$

অর্থাৎ, $a\left(\frac{\alpha z-\gamma x}{z-\gamma}\right)^2+b\left(\frac{\beta z-\gamma y}{z-\gamma}\right)^2=1$

অর্থাৎ, $a(\alpha z-\gamma x)^2+b(\beta z-\gamma y)^2=(z-\gamma)^2$

এইটোৱেই শংকুটোৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।

২নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ শংকুটোৰ শীর্ষ বিন্দু (α, β, γ)ৰ মাজেৰে যোৱা এডাল চলক ৰেখা হ'ল,

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n} \quad \text{... ... ...(1)}$$

যদি ই $y = 0$ সমতলক কাটে, তেনেহ'লে,

$$\frac{x-\alpha}{l}=-\frac{\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$$

$$\Rightarrow x-\alpha=-\frac{l\beta}{m},\ z-\gamma=-\frac{n\beta}{m}$$

$$\Rightarrow x=\alpha-\frac{l\beta}{m},\ z=\gamma-\frac{n\beta}{m}$$

গতিকে, (1) নম্বৰ ৰেখাডালে $y = 0$ সমতলক $\left(\alpha-\frac{l\beta}{m}, 0, \gamma-\frac{n\beta}{m}\right)$ বিন্দুত কাটে।

যদি এই ৰেখাডালে $y = 0$, $x^2 = 4az$ বক্রক কাটে, তেনেহ'লে,

$$\left(\alpha-\frac{l\beta}{m}\right)^2=4a\left(\gamma-\frac{n\beta}{m}\right) \quad \text{... ... ...(2)}$$

(1) আৰু (2)ৰ পৰা, l, m আৰু n অপনয়ন কৰি আমি শংকুটোৰ সমীকৰণ পাম, ইয়াৰ শীর্ষ বিন্দু (α, β, γ) আৰু ভূমি হ'ল অধিবৃত্ত $y = 0$, $x^2 = 4az$.

(1)ৰ পৰা, $\frac{l}{m}=\frac{x-\alpha}{y-\beta}$ আৰু $\frac{n}{m}=\frac{z-\gamma}{y-\beta}$;

(2)ত বহুৰাই আমি পাওঁ, $\left\{\alpha-\left(\frac{x-\alpha}{y-\beta}\right)\beta\right\}^2=4a\left\{\gamma-\left(\frac{z-\gamma}{y-\beta}\right)\beta\right\}$

$$\text{অর্থাৎ, } \left\{\frac{\alpha y-\beta x}{y-\beta}\right\}^2=4a\left\{\frac{\gamma y-\beta z}{y-\beta}\right\}$$

অর্থাৎ, $(\alpha y-\beta x)^2=4a(y-\beta)(\gamma y-\beta z)$

এইটোৱেই শংকুটোৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।

৩নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ আমি জানো যে এটা সম বৃত্তীয় শংকুৰ শীর্ষ বিন্দু মূল বিন্দু, অক্ষ $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ ৰেখা আৰু উপ-শীর্ষ কোণ θ, হ'লে, শংকুটোৰ সমীকৰণ,

$(lx + my + nz)^2 = (l^2 + m^2 + n^2)(x^2 + y^2 + z^2)\cos^2\theta$.

এই ক্ষেত্রত শীর্ষ বিন্দু মূল বিন্দু, অক্ষ $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ ৰেখা আৰু উপ-শীর্ষ কোণ 45^0,

গতিকে, সম বৃত্তীয় সংকুটোৰ সমীকৰণ,

$$(2x + 3y + 4z)^2 = (2^2 + 3^2 + 4^2)(x^2 + y^2 + z^2)\cos^2 45^0$$

অর্থাৎ, $(2x + 3y + 4z)^2 = 29(x^2 + y^2 + z^2)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

অর্থাৎ, $2(4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy + 24yz + 16zx) = 29(x^2 + y^2 + z^2)$

অর্থাৎ, $29x^2 + 29y^2 + 29z^2 - 8x^2 - 18y^2 - 32z^2 - 24xy - 48yz - 32zx = 0$

অর্থাৎ, $21x^2 + 11y^2 - 3z^2 - 24xy - 48yz - 32zx = 0$

৪নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ আমি জানো যে এটা সম বৃত্তীয় শংকুৰ শীর্ষ বিন্দু (α, β, γ) অক্ষ

$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ ৰেখা আৰু উপ-শীর্ষ কোণ θ হ'লে, শংকুটোৰ সমীকৰণ,

$$[l(x-\alpha) + m(y-\beta) + n(z-\gamma)]^2 = (l^2 + m^2 + n^2)\{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2\}\cos^2\theta$$

এই ক্ষেত্রত শীর্ষ বিন্দ (1, 0, –1), অক্ষ $\frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{3}$ ৰেখা আৰু উপ-শীর্ষ কোণ 30^0; গতিকে সম বৃত্তীয় শংকুটোৰ সমীকৰণ।

$$[2(x-1) + (-1)y + 3(z+1)]^2 = \{2^2 + (-1)^2 + 3^2\}\{(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2\}\cos^2 30^0$$

অর্থাৎ, $(2x - y + 3z + 1)^2 = 14\{(x-1)^2 + y^2 + (z+1)\}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

অর্থাৎ, $2(2x - y + 3z + 1)^2 = 21\{(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2\}$

৫নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ i) এই ক্ষেত্রত শীর্ষ বিন্দু হ'ল মূল বিন্দু আৰু শংকুটো অধোলিখিত বক্ৰৰ মাজেৰে যায়,

$ax^2 + by^2 = 1$ ... ...(1)

আৰু $z = k$ ... ...(2)

শংকুটোৰ সমীকৰণ উলিয়াব লাগে।

(2)ক এনেদৰে লিখিব পাৰি, $\frac{z}{k} = 1$. ইয়াৰ সহায়ত (1)ক সুষম কৰা হ'ল।

গতিকে আমি পালোঁ, $ax^2 + by^2 = \left(\frac{z}{k}\right)^2$

অর্থাৎ, $k^2(ax^2 + by^2) = z^2$

এইটোৱেই শংকুটোৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।

ii) এই ক্ষেত্রত শীর্ষ বিন্দু মূল বিন্দু আৰু শংকুটো অধোলিখিত বক্ৰৰ মাজেৰে যায়,

$8yz + 7zx - 3y + 2 = 0$ ... ...(1)

$3z - 2y - 5 = 0$ ... ...(2)

(2)ক এনেদৰে লিখিব পাৰি, $3z - 2y = 0$

$$\text{বা, } \frac{3z-2y}{5} = 1 \qquad \text{... ... ...(3)}$$

(3)ৰ সহায়ত, (1)ক সুষম কৰা হ'ল। গতিকে আমি পালোঁ,

$$8yz + 7zx - 3y\left(\frac{3z-2y}{5}\right) + 2\left(\frac{3z-2y}{5}\right)^2 = 0$$

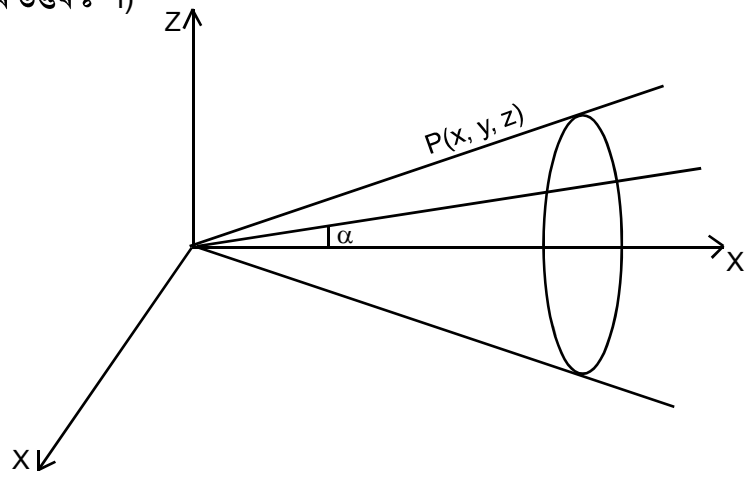
অর্থাৎ, $200yz + 175zx - 15y(3z - 2y) + 2(3z - 2y)^2 = 0$

অর্থাৎ, $200yz + 175zx - 45yz + 30y^2 + 18z^2 - 24yz + 8y^2 = 0$

অর্থাৎ, $38y^2 + 18z^2 - 131yz + 175zx = 0$

এইটোৱেই শংকুটোৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।

৬নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ i)



চিত্র ঃ ১০.৪

ধৰা হ'ল, সম বৃত্তীয় শংকুটোত P(x, y, z) যিকোনো এটা বিন্দু। OP ৰেখাডাল শংকুটোৰ এডাল জনক আৰু ইয়াৰ দিশানুপাত x, y, z. যিহেতু শংকুটোৰ OP এডাল জনক, গতিকে ই শংকুটোৰ অক্ষ OYৰ লগত 45^0 কোণ কৰে। গতিকে আমি পালোঁ,

$$\cos 45^0 = \frac{0.x + 1.y + 0.z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\sqrt{0^2+1^2+0^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

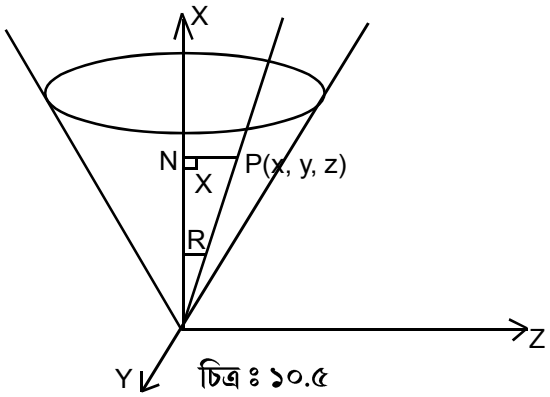
$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2y^2$

$\Rightarrow x^2 + z^2 = y^2$

গতিকে সম বৃত্তীয় শংকুটোৰ নির্ণেয় সমীকৰণ $x^2 + z^2 = y^2$.

ii)



চিত্র ঃ ১০.৫

OPৰ দিশানুপাত x, y, z; গতিকে ইয়াৰ দিশাংক,

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

গতিকে আমি পালোঁ, $\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \cos\alpha$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = \frac{z^2}{\cos^2\alpha} = z^2\sec^2\alpha$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = z^2(\sec^2\alpha - 1) = z^2\tan^2\alpha$$

যিহেতু শংকুটোত থকা প্ৰত্যেক বিন্দু P ৰ বাবে এইটো খাটে, গতিকে শংকুটোৰ নিৰ্ণেয় সমীকৰণ হ'ল, $x^2 + y^2 = z^2\tan^2\alpha$.



১০.৭ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ এটা শংকুৰ শীৰ্ষ বিন্দু মূল বিন্দু আৰু শংকুটো অধোলিখিত বক্ৰৰ মাজেৰে যায়। শংকুটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

i) $x^2 + y^2 = 4, z = 2$ ii) $x^2 + y^2 + z^2 = 9, x + y + z = 1.$

প্ৰশ্ন ২ ঃ এটা সম বৃত্তীয় শংকুৰ শীৰ্ষ বিন্দু হ'ল (1, –1, 2) আৰু অক্ষ হ'ল, $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}$ ৰেখাডাল আৰু উপ-শীৰ্ষ কোণ 45^0. সম বৃত্তীয় শংকুটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ ঃ এটা শংকুৰ শীৰ্ষ বিন্দু (3, 1, 2) আৰু নিৰ্দেশিত বক্ৰ হ'ল উপবৃত্ত $2x^2 + 3y^2 = 1, z = 0$. শংকুটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ ঃ এটা শংকুৰ শীৰ্ষ বিন্দু (α, β, γ) আৰু ভূমি $y^2 = 4ax, z = 0$. শংকুটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৫ ঃ এটা শংকুৰ শীৰ্ষ বিন্দু (0, 0, 5) আৰু নিৰ্দেশিত বক্ৰ $x^2 + 2xy + 3y^2 = 1, z = 3$. শংকুটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

*** ***** ***

অধ্যায় ১১ ঃ বেলন

অধ্যায় গাঁথনি

১১.১ উদ্দেশ্য
১১.২ পৰিচয়
১১.৩ বেলন
১১.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১১.৫ অধিক জানিবলৈ
১১.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
১১.৭ আৰ্হি প্রশ্ন

১১.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- বেলন আৰু ইয়াৰ সমীকৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

১১.২ পৰিচয়

আগৰ অধ্যায়ত শংকু আৰু ইয়াৰ সমীকৰণ সম্বন্ধে আলোচনা কৰিছিলোঁ। এই অধ্যায়ত আমি বেলন আৰু ইয়াৰ সমীকৰণ সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম।

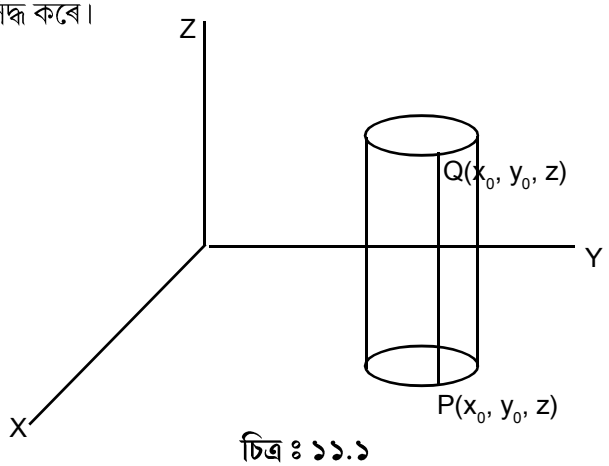
১১.৩ বেলন

সংজ্ঞা ঃ বেলন (Cylinder) হ'ল এডাল নির্দিষ্ট সৰল ৰেখাৰ সমান্তৰালকৈ ঘূৰা আৰু এটা নির্দিষ্ট সামতলিক বক্রক কটা সৰল ৰেখাই সৃষ্টি কৰা পৃষ্ঠ।চলমান ৰেখাডালক জনক বোলে আৰু প্রদত্ত বক্রটোক বেলনটোৰ নির্দেশক বক্র বোলে। চলমান ৰেখাডালৰ প্রতিটো বিশেষ অৱস্থানকো জনক বোলে।

যিবোৰ বেলনৰ নির্দেশক বক্র এটা বৃত্ত আৰু জনকবোৰ নির্দেশক বৃত্তৰ সমতলৰ ওপৰত লম্ব, তেনে বেলনক সম বৃত্তীয় বেলন (Right Circular Cylinder) বোলে। কেন্দ্রৰ মাজেৰে যোৱা নির্দেশক বৃত্তৰ সমতলৰ অভিলম্বক সম বৃত্তীয় বেলনটোৰ অক্ষ (Axis) বুলি কোৱা হয়।এনে বেলনৰ যিকোনো অভিলম্ব ছেদ বেলনটোৰ জনকৰ লম্বৰ (আৰু সেয়ে অক্ষৰ লম্বৰ) সমতলৰ ছেদ এটা বৃত্ত আৰু ই নির্দেশক বৃত্তৰ সমান্তৰাল আৰু সর্বাংগসম। যিকোনো অভিলম্ব ছেদৰ ব্যাসার্ধক সম বৃত্তীয় বেলনটোৰ ব্যাসার্ধ বুলি কোৱা হয় আৰু ই নির্দেশক বৃত্তৰ ব্যাসার্ধৰ সমান। স্পষ্টতঃ ই বেলনটোৰ ওপৰত থকা যিকোনো বিন্দুৰ অক্ষৰপৰা লম্ব দূৰত্ব।

f(x, y) = 0, f(y, z) = 0, f(z, x) = 0 আকাৰৰ সমীকৰণে বুজোৱা পৃষ্ঠ ঃ f(x, y) = 0 সমীকৰণটো লোৱা হ'ল। ইয়াত z নাই। xy-সমতলত থকা বক্ৰৰ সকলো বিন্দুৰ স্থানাংকই এই সমীকৰণটো সিদ্ধ কৰে, বক্ৰৰ দ্বিমাত্ৰিক সমীকৰণ হ'ল f(x, y) = 0। ধৰা হ'ল, এই বক্ৰত থকা কোনো বিন্দু Pৰ স্থানাংক $(x_0, y_0, 0)$। গতিকে $f(x_0, y_0) = 0$। $P(x_0, y_0, 0)$ৰ মাজেৰে OZৰ সমান্তৰালকৈ এডাল ৰেখা টনা হ'ল। ধৰা হ'ল, ৰেখাডালত Q যিকোনো এটা বিন্দু। তেনেহ'লে Q বিন্দুৰ স্থানাংক (x_0, y_0, z) য'ত PQ = z; ৰেখাডালত Q চলাচল কৰিলে z পৰিৱৰ্তিত হয়।

যিহেতু $f(x_0, y_0) = 0$, zৰ যিয়েই মান নহওক কিয়, Qৰ স্থানাংক (x_0, y_0, z)এ f(x, y) = 0 সমীকৰণ সিদ্ধ কৰে।



চিত্ৰ ঃ ১১.১

গতিকে PQ ৰেখাত থকা প্ৰত্যেক বিন্দুৰ স্থানাংকই f(x, y) = 0 সিদ্ধ কৰে আৰু সেয়ে PQৰ প্ৰতিটো বিন্দু f(x, y) = 0এ বুজোৱা পৃষ্ঠত থাকে। অৰ্থাৎ PQ ৰেখাডালেই f(x, y) = 0এ বুজোৱা পৃষ্ঠত থাকে। কিন্তু P হ'ল বক্ৰটোৰ যিকোনো এটা বিন্দু আৰু বক্ৰটোৰ দ্বিমাত্ৰিক সমীকৰণ f(x, y) = 0। গতিকে f(x, y) = 0 সমীকৰণৰ কক্ষপথ এটা বেলন আৰু ই z-সমতলত থকা বক্ৰৰ সকলো বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা z-অক্ষৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ দ্বাৰা জনিত আৰু বক্ৰৰ দ্বিমাত্ৰিক সমীকৰণ f(x, y) = 0।

গতিকে f(x, y) = 0 সমীকৰণে এটা বেলনৰ সমীকৰণ বুজায়, সমীকৰণটো z মুক্ত, বেলনটোৰ জনকবোৰ z-অক্ষৰ সমান্তৰাল আৰু নিৰ্দেশক বক্ৰ হ'ল z = 0, f(x, y) = 0। সেইদৰে f(x, y) = 0 আৰু f(z, x) = 0এ বেলন বুজায় আৰু ইয়াৰ জনকবোৰ ক্ৰমে x-অক্ষ আৰু y-অক্ষৰ সমান্তৰাল।

এটা বেলন এডাল নিৰ্দিষ্ট ৰেখা $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ দ্বাৰা জনিত আৰু নিৰ্দেশক বক্ৰটো হ'ল শাংকৰ z = 0, $ax^2 + by^2 = 1$ বেলনটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰিব লাগে ঃ ধৰা হ'ল, বেলনটোত (α, β, γ) এটা বিন্দু। এই বিন্দুটোৰ মাজেৰে বেলনটোৰ এডাল জনক আছে আৰু ই প্ৰদত্ত ৰেখা $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ৰ সমান্তৰাল।

এই জনকৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n} \quad \text{... ... ...(1)}$$

যিহেতু ই এডাল জনক, ই নির্দেশক বক্ৰ,

$z = 0,\ ax^2 + by^2 = 1$ ... ...(2)ক কাটে।

(1)ত $z = 0$ বহুৰাই আমি পাওঁ, $\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=-\frac{\gamma}{n}$

$$\Rightarrow x=\alpha-\frac{l\gamma}{n},\ y=\beta-\frac{m\gamma}{n}.$$

গতিকে ৰেখাডালে $z = 0$ সমতলক $\left(\alpha-\frac{l\gamma}{n}, \beta-\frac{m\gamma}{n}, 0\right)$, বিন্দুত কাটে, আৰু যিহেতু ৰেখাডালে বক্ৰক (2)ক কাটে, গতিকে আমি পালোঁ,

$$a\left(\alpha-\frac{l\gamma}{n}\right)^2+b\left(\beta-\frac{m\gamma}{n}\right)^2=1.$$

গতিকে বেলনটোত থকা যিকোনো বিন্দুৰ স্থানাংক (α, β, γ) ই

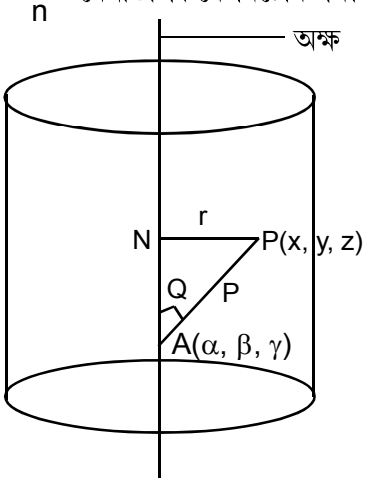
$$a\left(x-\frac{lz}{n}\right)^2+b\left(y-\frac{mz}{n}\right)^2=1$$

অর্থাৎ, $a(nx - lz)^2 + b(ny - mz)^2 = n^2$

সমীকৰণ সিদ্ধ কৰে। সেয়েহে বেলনটোৰ নির্ণেয় সমীকৰণ,

$a(nx - lz)^2 + b(ny - mz)^2 = n^2$

এটা সম বৃত্তীয় বেলনৰ অক্ষ আৰু ব্যাসার্ধ দিয়া আছে। বেলনটোৰ সমীকৰণ উলিয়াব লাগে ঃ ধৰা হ'ল, এটা সম বৃত্তীয় বেলনৰ ব্যাসার্ধ r আৰু ইয়াৰ অক্ষ হ'ল, $\frac{x-\alpha}{l}=\frac{y-\beta}{m}=\frac{z-\gamma}{n}$ ৰেখাডাল। বেলনটোৰ সমীকৰণ উলিয়াব লাগে।



চিত্ৰ ঃ ১১.২

অক্ষত $A(\alpha, \beta, \gamma)$ এটা বিন্দু। ধৰা হ'ল, সম বৃত্তীয় বেলনটোত $P(x, y, z)$ যিকোনো এটা বিন্দু। অক্ষডালৰ ওপৰত PN লম্ব টনা হ'ল। গতিকে $PN = r$, r হ'ল সম বৃত্তীয় বেলনটোৰ ব্যাসার্ধ। যদি $AP = \rho$, AP ৰেখাডালৰ দিশাংক হ'ল $\frac{x-\alpha}{\rho}, \frac{y-\beta}{\rho}, \frac{z-\gamma}{\rho}$। আকৌ, দিয়া আছে যে AN ৰেখাডালৰ (বেলনটোৰ অক্ষ) দিশানুপাত l, m, n। গতিকে ANৰ দিশাংক $\frac{l}{k}, \frac{m}{k}, \frac{n}{k}$ য'ত $k^2 = l^2 + m^2 + n^2$।

গতিকে, AP আৰু ANৰ মাজৰ কোণ θ হ'লে,

$$\cos\theta = \frac{x-\alpha}{\rho}.\frac{l}{k} + \frac{y-\beta}{\rho}.\frac{m}{k} + \frac{z-\gamma}{\rho}.\frac{n}{k}$$

$$= \frac{l(x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)}{\rho k}$$

ΔAPN সমকোণী ত্রিভুজৰ পৰা (N সমকোণ), আমি পাওঁ,

$PN = AP\sin\theta$

$\Rightarrow r = \rho\sin\theta$

$\Rightarrow r^2 = \rho^2\sin^2\theta = \rho^2(1 - \cos^2\theta)$

$$\Rightarrow r^2 = \rho^2 - \rho^2\left[\frac{l(x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)}{\rho k}\right]^2$$

$$\Rightarrow r^2 = \rho^2 - \frac{[l(x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)]^2}{k^2}$$

$$\Rightarrow (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - \frac{[l(x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)]^2}{l^2+m^2+n^2} = r^2$$

যিহেতু, $\rho^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2$ আৰু $k^2 = l^2 + m^2 + n^2$

যিহেতু ই বেলনটোৰ ওপৰত থকা যিকোনো বিন্দু P ৰ স্থানাংক (x, y, z)ৰ দ্বাৰা সিদ্ধ হয়, গতিকে প্রদত্ত সম বৃত্তীয় বেলনটোৰ সমীকৰণ,

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - \frac{[l(x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)]^2}{l^2+m^2+n^2} = r^2$$

অনুসিদ্ধান্ত ঃ এটা সম বৃত্তীয় বেলনৰ ব্যাসার্ধ r আৰু অক্ষ $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ ৰেখাডাল (ই মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যায়)। তেনেহ'লে সম বৃত্তীয় বেলনটোৰ সমীকৰণ,

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{(lx+my+nz)^2}{l^2+m^2+n^2} = r^2$$

অর্থাৎ, $(l^2 + m^2 + n^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (lx + my + nz)^2 = (l^2 + m^2 + n^2)r^2$

অর্থাৎ, $(l^2 + m^2 + n^2)(x^2 + y^2 + z^2 - r^2) = (lx + my + nz)^2$

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ঃ এটা বেলন $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{5}$ ৰেখাৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ দ্বাৰা জনিত, নির্দেশিত বক্র হ'ল অধিবৃত্ত $x = 0$, $y^2 = 8z$। বেলনটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধানঃ ধৰা হ'ল, বেলনটোত (α, β, γ) যিকোনো এটা বিন্দু। $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{5}$ ৰেখাৰ সমান্তৰাল আৰু (α, β, γ) বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা জনকৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$\frac{x-\alpha}{1} = \frac{y-\beta}{-2} = \frac{z-\gamma}{5} \quad \text{... ... ...(1)}$$

জনকডালে $x = 0$ সমতলক যি বিন্দুত কাটে তাত $x = 0$ আৰু $\frac{-\alpha}{1} = \frac{y-\beta}{-2} = \frac{z-\gamma}{5}$ ইয়াৰ পৰা $y = \beta + 2\alpha$ আৰু $z = \gamma - 5\alpha$।

গতিকে (1) নম্বৰ জনকডালে $x = 0$ সমতলক $(0, \beta + 2\alpha, \gamma - 5\alpha)$ বিন্দুত কাটে। যিহেতু এই জনকডালে ভূমি বক্র $x = 0$, $y^2 = 8z$ক কাটে, এই বিন্দুটো বক্রডালতো থাকিব। গতিকে, $(\beta + 2\alpha)^2 = 8(\gamma - 5\alpha)$।

যিহেতু (α, β, γ) বিন্দুটো বেলনটোত আছে, গতিকে বেলনটোৰ নির্ণেয় সমীকৰণ,

$(y + 2x)^2 = 8(z - 5x)$.

উদাহৰণ ২ ঃ এটা সমবৃত্তীয় বেলনৰ ব্যাসার্ধ 5, অক্ষডাল (3, 1, 5) বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু অক্ষডালৰ দিশানুপাত 2, –1, 2। সম বৃত্তীয় বেলনটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে r ব্যাসার্ধৰ এটা সম বৃত্তীয় বেলনৰ অক্ষ, $\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$ ৰেখাডাল হ'লে, বেলনটোৰ সমীকৰণ,

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 - \frac{[l(x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)]^2}{l^2+m^2+n^2} = r^2$$

এই ক্ষেত্রত সম বৃত্তীয় বেলনটোৰ অক্ষ, $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-5}{2}$ আৰু ইয়াৰ ব্যাসার্ধ 5। গতিকে সম বৃত্তীয় বেলনটোৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2 - \frac{[2(x-3)+(-1)(y-1)+2(z-5)]^2}{2^2+(-1)^2+2^2} = 5^2$$

অর্থাৎ, $9[(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-5)^2] - (2x - y + 2z - 15)^2 = 225$

অর্থাৎ, $9(x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 10z + 35) -$

$(4x^2 + y^2 + 4z^2 + 225 - 4xy + 8zx - 60x - 4yz + 30y - 60z) = 225$

অর্থাৎ, $5x^2 + 8y^2 + 5z^2 + 4yz + 4xy + 6x - 48y - 30z - 135 = 0$

উদাহৰণ ৩ ঃ এটা সম বৃত্তীয় বেলনৰ ব্যাসার্ধ $\sqrt{7}$ আৰু অক্ষ $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-2}$ ৰেখা। সম বৃত্তীয় বেলনটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে r ব্যাসার্ধৰ এটা সম বৃত্তীয় বেলনৰ অক্ষ $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ ৰেখা হ'লে, সম বৃত্তীয় বেলনটোৰ সমীকৰণ,

$(l^2 + m^2 + n^2)(x^2 + y^2 + z^2 – r^2) = (lx + my + nz)^2$.

এই ক্ষেত্রত ব্যাসার্ধ $\sqrt{7}$ আৰু অক্ষ হ'ল, $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z}{-2}$ ৰেখা।

গতিকে সম বৃত্তীয় বেলনটোৰ নির্ণেয় সমীকৰণ,

$\{1^2 + 0^2 + (–2)^2\}\{x^2 + y^2 + z^2 – (\sqrt{7})\} – \{1.x + 0.y + (–2).z\}^2$

অর্থাৎ, $5(x^2 + y^2 + z^2 – 7) = (x – 2z)^2 = x^2 + 4z^2 – 4zx$

অর্থাৎ, $4x^2 + 5y^2 + z^2 + 4zx – 35 = 0$.

উদাহৰণ ৪ ঃ এটা বেলনৰ জনকবোৰ x-অক্ষৰ সমান্তৰাল আৰু বেলনটো $2x – 3y + z = 1$ সমতল আৰু $3y^2 – 5z^2 = 12x$ পৃষ্ঠৰ কটাকটি কৰা বক্রেৰে যায়। বেলনটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

[মন কৰিবলগীয়া যে জনকবোৰ x-অক্ষৰ সমান্তৰাল আৰু সেয়ে বেলনটোৰ সমীকৰণ $f(y, z) = 0$ আকাৰৰ হ'ব, ই x মুক্ত।]

সমাধান ঃ $2x – 3y + z = 1$ ... ...(1)

সমতল আৰু $3y^2 – 5z^2 = 12x$ ... ...(2)

পৃষ্ঠই কটাকটি কৰা বক্রৰ মাজেৰে বেলনটোৰ জনকবোৰ যায়।

(1) আৰু (2)ৰ পৰা x অপনয়ন কৰিব লাগে। (1)ৰ পৰা, $x = \frac{1+3y-z}{2}$

(2)ত এই মান বহুৰাই আমি পাওঁ,

$$3y^2 – 5z^2 = 12\left(\frac{1+3y-z}{2}\right) = 6(1 + 3y –z)$$

অর্থাৎ, $3y^2 – 5z^2 – 18y + 6z – 6 = 0$ ... ...(3)

(3) সমীকৰণটো x মুক্ত। গতিকে ই এনে এটা বেলনৰ সমীকৰণ বুজায় যাৰ জনকবোৰ x-অক্ষৰ সমান্তৰাল। তদুপৰি ই সিদ্ধ হয় যেতিয়া সমীকৰণ (1) আৰু (2) একেলগে সিদ্ধ হয়। অর্থাৎ সমতল (1) আৰু (2) একেলগে সিদ্ধ হয়। অর্থাৎ সমতল (1) আৰু পৃষ্ঠ (2)এ কটাকটি কৰা বক্রৰ প্রতিটো বিন্দুৰে সমীকৰণ (3) সিদ্ধ কৰে। (3) নম্বৰ বেলনটো, যাৰ জনকবোৰ x-অক্ষৰ সমান্তৰাল, উপৰিউক্ত বক্রৰ মাজেৰে যায়। আৰু সেয়ে এইটোৱেই নির্ণেয় বেলন।

মন্তব্য ঃ উপৰিউক্ত সমাধানটোত আমি বিস্তাৰিতভাৱে যুক্তিসমূহ উনুকিয়াইছোঁ যাতে বিদ্যার্থীসকলে মূল কথাটো বুজি পায়। অৱশ্যে তলৰ উদাহৰণত দেখুওৱাৰ দৰে আমি সমাধানটো চুটিকৈ কৰিব পাৰোঁ।

উদাহৰণ ৫ ঃ এটা বেলনৰ জনকবোৰ z-অক্ষৰ সমান্তৰাল আৰু বেলনটো $lx + my + nz = p$ সমতল আৰু $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ পৃষ্ঠৰ কটাকটি কৰা বক্ৰেৰে যায়। বেলনটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ বেলনটো z-অক্ষৰ সমান্তৰাল ৰেখাৰ দ্বাৰা জনিত আৰু ই

$$lx + my + nz = p \quad \text{... ... ...(1)}$$

সমতল আৰু $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ ... ...(2)

পৃষ্ঠাৰ কটাকটি কৰা বক্ৰেৰে যায়।

(1) আৰু (2)ৰ পৰা z অপনয়ন কৰি বেলনটোৰ সমীকৰণ পোৱা যাব।

(1)ৰ পৰা, $z = \dfrac{p - lx - my}{n}$

zৰ এই মান (2)ত বহুৱাই আমি পাওঁ, $ax^2 + by^2 + c\left(\dfrac{p - lx - my}{n}\right)^2 = 1$

এইটোৱেই বেলনটোৰ নিৰ্ণেয় সমীকৰণ।



অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ১ ঃ এটা বেলনৰ জনকবোৰ y-অক্ষৰ সমান্তৰাল আৰু ই $4x + y - z = 2$ আৰু $x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 5$ বক্ৰক কাটে। বেলনটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২ ঃ এটা সম বৃত্তীয় বেলনৰ ব্যাসাৰ্ধ a আৰু অক্ষ $\dfrac{x}{l} = \dfrac{y}{m} = \dfrac{z}{n}$ ৰেখা। বেলনৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৩ ঃ এটা সময় বৃত্তীয় বেলনৰ অক্ষডাল (1, –2, 0) বিন্দুৰ মাজেৰে যায়, অক্ষডালৰ দিশানুপাত 2, 3, 6 আৰু বেলনটোৰ ব্যাসাৰ্ধ 5। সম বৃত্তীয় বেলনটোৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।



১১.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- এটা সম বৃত্তীয় বেলনৰ ব্যাসাৰ্ধ r আৰু অক্ষ হ'ল $\dfrac{x - \alpha}{l} = \dfrac{y - \beta}{m} = \dfrac{z - \gamma}{n}$ ৰেখা। সমবৃত্তীয় বেলনৰ সমীকৰণ হ'ল,

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 - \frac{[l(x - \alpha) + m(y - \beta) + n(z - \gamma)]^2}{l^2 + m^2 + n^2} = r^2$$

- এটা সম বৃত্তীয় বেলনৰ ব্যাসার্ধ r আৰু অক্ষ হ'ল $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ ৰখা (মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যোৱা)। সম বৃত্তীয় বেলনটোৰ সমীকৰণ হ'ল,
  $(l^2 + m^2 + n^2)(x^2 + y^2 + z^2 - r^2) = (lx + my + nz)^2$.



১১.৫ অধিক জানিবলৈ

ইংৰাজী গ্ৰন্থ ঃ

1) Jain, P. K. & Ahmad, Khalil. *Textbook of Analytical Geometry of Three Dimensions*. New Delhi: New Age International (P) Limited.
2) Khan, R. M. *Analytical Geometry of Two & Three Dimensions & Vector Analysis*. New Central Book Agency (P) Limited.
3) Kishan, Hari. *Coordinate Geometry of Two Dimensions*. New Delhi: Atlantic Publishers & Distributors.
4) Pal, Sat & Pal, Harbans. *A Textbook of Two Dimensional Geometry*. New Age International Publishers.
5) Sharma, G. C. & Jain, Madhu. *Coordinate Geometry (2D and 3D)*. Galgotia Publications Pvt Lid.
6) Sharma, A. K. *Coordinate Geometry (2D)*. New Delhi: Discovery Publishing House.
7) Vasistha, A. R. & Agrawal, *D. C. Analytical Geometry of Three Dimensions (Coordinate of Solid Geometry)*.



১১.৬ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ বেলনটোৰ জনকবোৰ y-অক্ষৰ সমান্তৰাল আৰু ই অধোলিখিত বক্ৰক কাটে,

$4x + y - z = 2$ ... ...(1)

আৰু $x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 5$ ... ...(2)

বেলনটোৰ সমীকৰণ উলিয়াব লাগে।

(1) আৰু (2)ৰ পৰা, y অপনয়ন কৰি বেলনটোৰ সমীকৰণ উলিওৱা হ'ব।

(1)ৰ পৰা, $y = 2 + z - 4x$. yৰ বাবে এই ৰাশিটো (2)ত বহুৱাই আমি পাওঁ,

$x^2 - 3(2 + z - 4x)^2 + 2z^2 = 5$

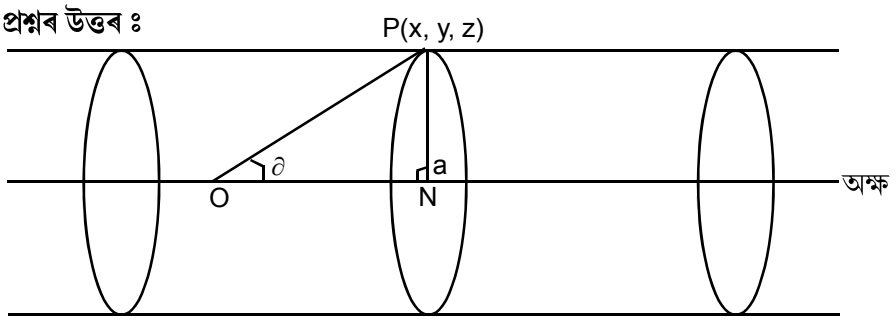
$\Rightarrow x^2 - 3(4 + z^2 + 16x^2 + 4z - 16x - 8zx) + 2z^2 = 5$

$\Rightarrow -47x^2 - z^2 + 24zx + 48x - 12z - 17 = 0$

$\Rightarrow 47x^2 + z^2 - 24zx - 48x + 12z + 17 = 0$

এইটোৱেই বেলনটোৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।

২নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ



চিত্র ঃ ১১.৩

ধৰা হ'ল, সম বৃত্তীয় বেলনটোত P(x, y, z) যিকোনো এটা বিন্দু। বেলনটোৰ ব্যাসার্ধ a আৰু অক্ষ হ'ল $\frac{x}{l} = \frac{y}{m} = \frac{z}{n}$ ৰেখা। অক্ষডাল মূল বিন্দুৰ মাজেৰে যায়। P বিন্দুৰ পৰা বেলনটোৰ অক্ষৰ ওপৰত টনা লম্ব PN হ'লে, PN = বেলনটোৰ ব্যাসার্ধ = a.

ধৰা হ'ল, $\angle PON = \theta$; চিত্রৰ পৰা,

$$\cos\theta = \frac{ON}{OP} = \frac{\sqrt{OP^2 - PN^2}}{OP}$$

আৰু সেয়ে, $\cos\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

কিন্তু OPৰ দিশানুপাত x, y, z আৰু অক্ষ ONৰ দিশানুপাত l, m, n. যিহেতু OP আৰু ONৰ মাজৰ কোণ θ, গতিকে,

$$\cos\theta = \frac{lx + my + nz}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

গতিকে আমি পালোঁ, $\frac{lx + my + nz}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

$$= \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - a^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

বর্গ কৰি আৰু বজ্রগুণন কৰি আমি পাওঁ,

$(lx + my + nz)^2 = (l^2 + m^2 + n^2)(x^2 + y^2 + z^2 - a^2)$

এইটোৱেই সম বৃত্তীয় বেলনটোৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।

৩নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ সম বৃত্তীয় বেলনটোৰ অক্ষৰ সমীকৰণ হ'ল, $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{6}$ আৰু ইয়াৰ ব্যাসার্ধ 5। গতিকে সম বৃত্তীয় বেলনটোৰ সমীকৰণ,

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-\frac{[l(x-\alpha)+m(y-\beta)+n(z-\gamma)]^2}{l^2+m^2+n^2}=r^2$$

(প্রচলিত প্রতীক মতে সূত্র)

অর্থাৎ, $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2-\frac{[2(x-1)+3(y+2)+6z]^2}{2^2+3^2+6^2}=5^2$

অর্থাৎ, $49[(x-1)^2+(y+2)^2+z^2]-(2x+3y+6z+4)^2=1225$

এইটোৱেই সম বৃত্তীয় বেলনটোৰ নির্ণেয় সমীকৰণ।



১১.৭ আৰ্হি প্রশ্ন

প্রশ্ন ১ ঃ এটা বেলনৰ জনকবোৰ $x=\frac{-y}{2}=\frac{z}{3}$ ৰেখাৰ সমান্তৰাল আৰু নির্দেশিত বক্র হ'ল উপবৃত্ত $x^2+2y^2=1, z=3$। বেলনটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ২ ঃ এটা সম বৃত্তীয় বেলনৰ ব্যাসার্ধ 2, অক্ষডাল (12, 2, 3) বিন্দুৰ মাজেৰে যায় আৰু অক্ষডালৰ দিশানুপাত 2, –3, 6। সম বৃত্তীয় বেলনটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৩ ঃ এটা সম বৃত্তীয় বেলনৰ ব্যাসার্ধ 3 আৰু অক্ষ $\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{-1}$ ৰেখা। সম বৃত্তীয় বেলনটোৰ সমীকৰণ নির্ণয় কৰক।

*** ***** ***

অধ্যায় ১২ ঃ ভেক্টৰৰ পৰিচয়

অধ্যায় গাঁথনি

১২.১ উদ্দেশ্য

১২.২ পৰিচয়

১২.৩ ভেক্টৰ আৰু স্কেলাৰ ৰাশি

১২.৪ বিভিন্ন ধৰণৰ ভেক্টৰ

১২.৫ ভেক্টৰত প্ৰক্ৰিয়া

১২.৫.১ ভেক্টৰৰ যোগ

১২.৫.২ ভেক্টৰৰ বিয়োগ

১২.৫.৩ ভেক্টৰক স্কেলাৰেৰে পূৰণ

১২.৬ বিভাজন সূত্ৰ

১২.৭ ভেক্টৰৰ উপাংশ

১২.৮ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১২.৯ অধিক জানিবলৈ

১২.১০ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১২.১১ আৰ্হি প্ৰশ্ন

১২.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- স্কেলাৰ ৰাশি আৰু ভেক্টৰ ৰাশি সম্বন্ধে জানিব
- বিভিন্ন ধৰণৰ ভেক্টৰ সম্বন্ধে অৱগত হ'ব
- এটা বিন্দুৰ অৱস্থান ভেক্টৰ সম্পৰ্কে জানিব
- এটা ভেক্টৰৰ দিশাংক আৰু দিশানুপাত সম্বন্ধে জানিব
- এটা ভেক্টৰৰ দিশাংক আৰু দিশানুপাত নিৰ্ণয় কৰিব পাৰিব
- ভেক্টৰৰ যোগ নিৰ্ধাৰণ কৰিব পাৰিব
- দুটা ভেক্টৰৰ পাৰ্থক্য নিৰ্ধাৰণ কৰিব পাৰিব
- এটা ভেক্টৰক এটা স্কেলাৰেৰে পূৰণ কৰিব পাৰিব
- এটা ভেক্টৰক উপাংশ আকাৰত প্ৰকাশ কৰিব পাৰিব
- বিভাজন সূত্ৰ জানিব।

১২.২ পৰিচয়

গণিত, পদার্থ বিজ্ঞান আৰু অভিযান্ত্রিক বিজ্ঞানত আমি প্রায়ে দুই ধৰণৰ ৰাশিৰ মুখামুখি হওঁ, যথা স্কেলাৰ বা অদিশ (Scalar) ৰাশি আৰু ভেক্টৰ বা সদিশ (Vector) ৰাশি। এই অধ্যায়ত আমি ভেক্টৰ আৰু ইয়াৰ বিভিন্ন প্রকাৰ সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম। লগতে আমি ভেক্টৰত বিভিন্ন প্রক্রিয়া সম্বন্ধেও আলোচনা কৰিম।

১২.৩ ভেক্টৰ আৰু স্কেলাৰ ৰাশি

আমি উদাহৰণসহ ভেক্টৰ আৰু স্কেলাৰৰ সংজ্ঞা দিবলৈ ওলাইছোঁ।

স্কেলাৰ (Scalar) ঃ

সংজ্ঞা ঃ যিবোৰ ৰাশিৰ অকল মানহে আছে, সেইবোৰক স্কেলাৰ বোলে।

Examples: ভৰ (Mass), আয়তন (Volume), কালি (Area), ঘনত্ব (Density), উষ্ণতা (Temperature) ইত্যাদি।

ভেক্টৰ (Vector) ঃ

সংজ্ঞা ঃ যিবোৰ ৰাশিৰ দিশ আৰু মান দুয়োটা আছে, সেইবোৰক ভেক্টৰ বোলে।

উদাহৰণ ঃ বিস্থাপন (Displacement), বেগ (Velocity), ত্বৰণ (Acceleration), ভৰবেগ (Momentum), ওজন (Weight), বল (Force) ইত্যাদি।

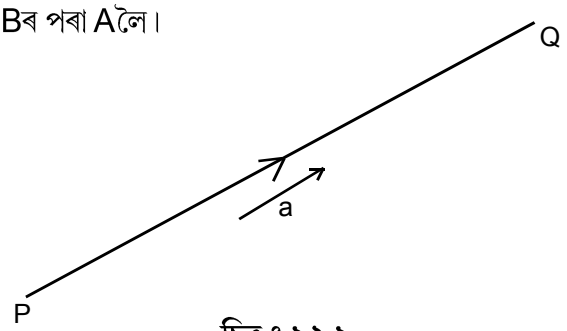
ভেক্টৰৰ প্রদর্শন ঃ ভেক্টৰ এটাক দিশযুক্ত ৰেখা খণ্ডৰ দ্বাৰা বুজোৱা হয়। ৰেখাখণ্ডডালৰ দৈর্ঘই ভেক্টৰটোৰ মান বুজায় আৰু কাঁড়ৰ দিশে ভেক্টৰটোৰ দিশ বুজায়।

যিটো ভেক্টৰৰ মান হ'ল দৈর্ঘ PQ আৰু যাৰ দিশ Pৰ পৰা Q লৈ, সেই ভেক্টৰটোক $\vec{PQ}$ ৰে বুজোৱা হয়। P বিন্দুটোক $\vec{PQ}$ ৰ আদি বিন্দু (Initial Point) আৰু Q বিন্দুটোক প্রান্ত বিন্দু (Terminal Point) বুলি কোৱা হয়।

টোকা ঃ 1) ভেক্টৰক $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ আদিৰে বুজোৱা হয়।

2) $\vec{PQ}$ ৰ মানক $|\vec{PQ}|$ বা PQৰে বুজোৱা হয়।

3) $\vec{AB}$ ৰ অভিদিশা (Sense) হ'ল Aৰ পৰা B লৈ আৰু vৰ অভিদিশা হ'ল Bৰ পৰা Aলৈ।



চিত্র ঃ ১২.১

অর্থাৎ এডাল দিশযুক্ত ৰেখাখণ্ডৰ অভিদিশা হ'ল ইয়াৰ আদি বিন্দুৰ পৰা প্রান্ত বিন্দুলৈ।

অৱস্থান ভেক্টৰ ঃ মূল বিন্দু O(0, 0, 0) সাপেক্ষে অন্তৰিক্ষত এটা বিন্দু P(x, y, z) লোৱা হ'ল। $\vec{OP}$ ভেক্টৰৰ আদি বিন্দু O আৰু প্ৰান্ত বিন্দু P। $\vec{OP}$ ক O সাপেক্ষে Pৰ অৱস্থান ভেক্টৰ (Position Vector) বুলি কোৱা হয়।

$\vec{OP}$ (বা $\vec{r}$)ৰ মান হ'ল $|\vec{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

১২.৪ বিভিন্ন ধৰণৰ ভেক্টৰ

i) **শূন্য ভেক্টৰ ঃ** যিবোৰ ভেক্টৰৰ মান শূন্য আৰু দিশ অনিৰ্ণেয়, তেনে ভেক্টৰক শূন্য ভেক্টৰ (Zero বা (Null Vector) বোলে। ইয়াক $\vec{0}$ ৰে বুজোৱা হয়। এই ক্ষেত্ৰত আদি বিন্দু আৰু প্ৰান্ত বিন্দু একেটাই। গতিকে $\vec{AA}$, $\vec{BB}$ আদি শূন্য ভেক্টৰ। শূন্য ভেক্টৰৰ বাহিৰে অন্য ভেক্টৰক প্ৰকৃত ভেক্টৰ (Proper Vectors) বোলে।

ii) **একক ভেক্টৰ ঃ** যিবোৰ ভেক্টৰৰ মান এক (অৰ্থাৎ এক একক), তেনে ভেক্টৰক একক ভেক্টৰ (Unit Vector). বোলে। এটা নিৰ্দিষ্ট ভেক্টৰ $\vec{a}$ ৰ দিশৰ একক ভেক্টৰক $\hat{a}$ ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা হ'ল, $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ i.e., $\vec{a} = |\vec{a}|\hat{a}$

অৰ্থাৎ, ভেক্টৰ (Vector) = (মান)(একক ভেক্টৰ) [(Magnitude)(Unit Vector)]

সেইদৰে, $\hat{b} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$, $\hat{c} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}$ ইত্যাদি।

iii) **সম আদি ভেক্টৰ ঃ** যিবিলাক ভেক্টৰৰ আদি বিন্দু একেটাই, তেনে ভেক্টৰক সম আদি ভেক্টৰ (Co-Initial Vectors) বোলে।

iv) **সম প্ৰান্ত ভেক্টৰ ঃ** যিবিলাক ভেক্টৰৰ প্ৰান্ত বিন্দু একেটাই, তেনে ভেক্টৰক সম প্ৰান্ত ভেক্টৰ (Co-Terminus Vectors) বোলে।

v) **একৰেখীয়া বা সমান্তৰাল ভেক্টৰ ঃ** যিবিলাক ভেক্টৰৰ ক্ৰিয়া ৰেখা একে বা সমান্তৰাল, তেনে ভেক্টৰক একৰেখীয় বা সমান্তৰাল (Collinear or Parallel Vectors) বোলে।

vi) **এক সমতলীয় ভেক্টৰ ঃ** যিবিলাক ভেক্টৰ একেখন সমতলৰ সমান্তৰাল বা একেখন সমতলত থাকে, তেনে ভেক্টৰক এক সমতলীয় ভেক্টৰ (Coplanar Vectors) বোলে।

vii) **ঋণাত্মক ভেক্টৰ ঃ** যি ভেক্টৰৰ মান $\vec{a}$ ৰ ঋণাত্মক ভেক্টৰ (Negative Vector) বোলে। ইয়াক $-\vec{a}$ ৰে বুজোৱা হয়। যদি $\vec{AB} = \vec{a}$, তেনেহ'লে $\vec{BA} = -\vec{a}$.
অৰ্থাৎ, $\vec{AB} = -\vec{BA} = \vec{PQ} = -\vec{QP}$ ইত্যাদি।

viii) **সমান ভেক্টৰ ঃ** দুটা ভেক্টৰ $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ক সমান ভেক্টৰ (Equal Vectors) বুলি কোৱা হয় যদি সিহঁতৰ মান আৰু দিশ সমান। ইয়াক $\vec{a} = \vec{b}$ ৰে বুজোৱা হয়।

উদাহৰণ ১ঃ তলৰ ৰাশিবোৰৰ কোনবোৰ স্কেলাৰ আৰু কোনবোৰ ভেক্টৰ? যুক্তি দিব।
(a) কাল পর্য্যায় (Time period), (b) দূৰত্ব (Distance), (c) বেগ (Velocity), (d) ভৰ (Mass), (e) উষ্ণতা (Temperature), (f) বল (Force)।

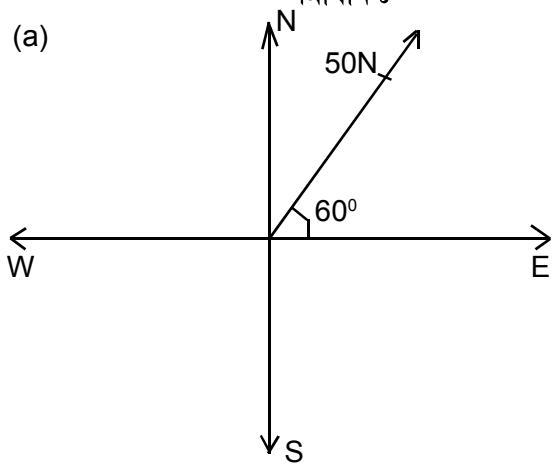
সমাধান ঃ

a) কাল পর্য্যায় এটা স্কেলাৰ ৰাশি, কিয়নো ইয়াৰ মাত্র মানহে আছে।
b) দূৰত্ব এটা স্কেলাৰ ৰাশি, কিয়নো ইয়াৰ মাত্র মানহে আছে।
c) বেগ এটা ভেক্টৰ ৰাশি, কিয়নো ইয়াৰ দিশ আৰু মান দুয়োটা আছে।
d) ভৰ এটা স্কেলাৰ ৰাশি, কিয়নো ইয়াৰ মাত্র মান আছে।
e) উষ্ণতা এটা স্কেলাৰ ৰাশি, কিয়নো ইয়াৰ মাত্র মান আছে।
f) বল এটা ভেক্টৰ ৰাশি, কিয়নো ইয়াৰ দিশ আৰু মান দুয়োটা আছে।

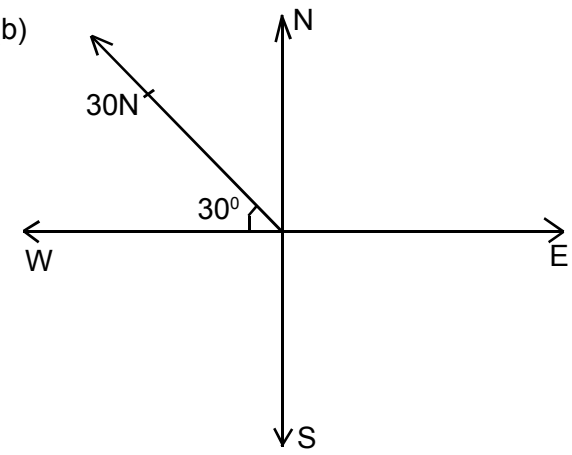
উদাহৰণ ২ ঃ লৈখিকভাৱে প্রদর্শন কৰক।

a) পূবৰ 60^0 উত্তৰ দিশত 50N বল।
b) পশ্চিমৰ 30^0 উত্তৰ দিশত 30km বিস্থাপন।

সমাধান ঃ



চিত্র ঃ ১২.২



চিত্র ঃ ১২.৩



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ তলৰ কোনবোৰ স্কেলাৰ আৰু কোনবোৰ ভেক্টৰ ৰাশি? যুক্তি দিব।

a) ঘনত্ব b) ওজন c) ভৰবেগ
d) কৰা কার্য্য e) আয়তন f) ত্বৰণ

প্রশ্ন নং ১ ঃ লৈখিকভাৱে প্রদর্শন কৰক

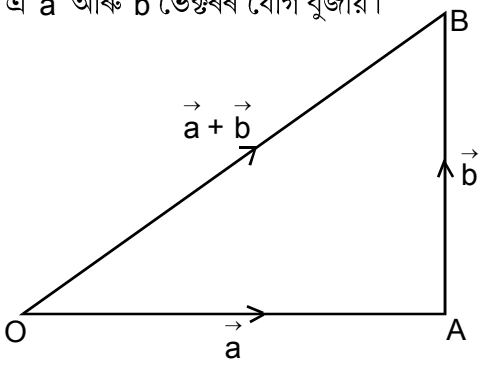
a) উত্তৰৰ 45^0 পশ্চিম দিশত 100N বল
b) পূবৰ 60^0 দক্ষিণ দিশত 50km বিস্থাপন

১২.৫ ভেক্টৰত প্ৰক্ৰিয়া

১২.৫.১ ভেক্টৰৰ যোগ

ধৰা হ'ল, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$ দুটা প্ৰদত্ত ভেক্টৰ। এতিয়া আমি OB সংলগ্ন কৰোঁ।

তেতিয়া $\vec{OB}$ এ $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ভেক্টৰৰ যোগ বুজায়।



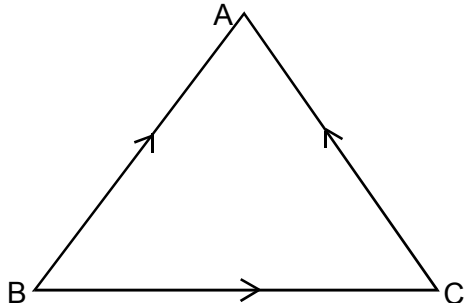
চিত্ৰ ঃ ১২.৪

ইয়াক এনেদৰে লিখা হয়, $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

অৰ্থাৎ, $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{a} + \vec{b}$.

ইয়াক ভেক্টৰৰ যোগৰ ত্ৰিভুজ বিধি (Triangle Law of Addition of Vectors) বুলি কোৱা হয়।

ABC ত্ৰিভুজত ভেক্টৰৰ যোগৰ ত্ৰিভুজ বিধি খটুৱাই আমি পাওঁ,



চিত্ৰ ঃ ১২.৫

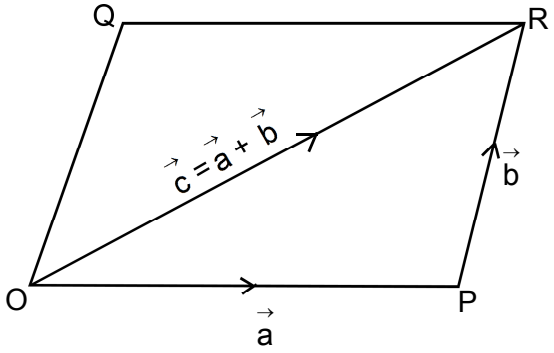
$$\vec{BC} + \vec{CA} = \vec{BA}$$

বা, $\vec{BC} + \vec{CA} = -\vec{AB}$

বা, $\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB} = \vec{0}$

ভেক্টৰৰ যোগৰ সামান্তৰিক বিধি ঃ যদি $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ভেক্টৰ দুটাক এটা সামান্তৰিকৰ সন্নিহিত বাহুৰ দ্বাৰা মান আৰু দিশত বুজোৱা হয়, তেনেহ'লে সিহঁতৰ যোগফল $\vec{c}$ ক চিত্ৰত দেখুওৱাৰ দৰে সামান্তৰিকটোৰ কৰ্ণৰ দ্বাৰা বুজোৱা হয়।

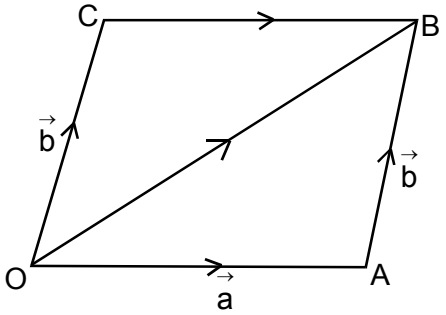
আমি পালোঁ, $\vec{OP} + \vec{PR} = \vec{OR}$



চিত্ৰ ঃ ১২.৬

ভেক্টৰৰ যোগৰ ধৰ্ম ঃ

ধৰ্ম 1: ভেক্টৰৰ যোগ ক্ৰম বিনিময়, অৰ্থাৎ যদি $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ দুটা ভেক্টৰ তেনেহ'লে, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.



চিত্ৰ ঃ ১২.৭

ধৰা হ'ল, $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{AB}$

OAB ত্ৰিভুজৰ পৰা, $\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$ (ভেক্টৰৰ যোগৰ বিধিৰ পৰা)

$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \vec{OB}$ ... ...(1)

আমি OABC সামান্তৰিকটো সম্পূৰ্ণ কৰিলোঁ।

$\vec{CB} = \vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OC} = \vec{AB} = \vec{b}$

OCB ত্ৰিভুজৰ পৰা, $\vec{OC} + \vec{CB} = \vec{OB}$

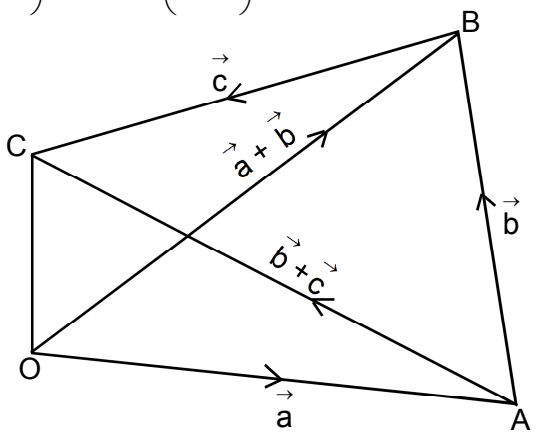
$\Rightarrow \vec{b} + \vec{a} = \vec{OB}$ ... ...(2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

$\therefore$ ভেক্টৰৰ যোগ ক্ৰম বিনিময়।

ধর্ম ১ ঃ ভেক্টৰৰ যোগে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে, অর্থাৎ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ভেক্টৰ তিনিটাৰ

বাবে, $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$



চিত্র ঃ ১২.৮

ধৰা হ'ল, $\vec{OA}=\vec{a}$, $\vec{AB}=\vec{b}$, $\vec{BC}=\vec{c}$

O আৰু B, O আৰু C, A আৰু C সংযোগ কৰা হ'ল।

OAB ত্রিভুজৰ পৰা,, $\vec{OA}+\vec{AB}=\vec{OB}$

$\Rightarrow \vec{a}+\vec{b}=\vec{OB}$ ... ...(1)

OBC ত্রিভুজৰ পৰা, $\vec{OB}+\vec{BC}=\vec{OC}$

$\Rightarrow \left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{OC}$ ... ...(2) [(1)ৰ সহায়ত]

ABC ত্রিভুজৰ পৰা, $\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC}$

$\Rightarrow \vec{b}+\vec{c}=\vec{AC}$ ... ...(3)

OAC ত্রিভুজৰ পৰা, $\vec{OA}+\vec{AC}=\vec{OC}$

$\Rightarrow \vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{OC}$ ... ...(4) [(2)ৰ সহায়ত]

(2) আৰু (4)ৰ পৰা, আমি পালোঁ, $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

$\therefore$ ভেক্টৰৰ যোগে সাহচর্য্য বিধি মানি চলে।

ধর্ম ২ ঃ যোগাত্মক এককৰ অস্তিত্ব ঃ প্রত্যেক ভেক্টৰ $\vec{a}$ ৰ বাবে $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}$,

য'ত $\vec{0}$ হ'ল শূন্য ভেক্টৰ।

ধৰা হ'ল, $\vec{OA} = \vec{a}$, তেনেহ'লে, $\vec{a} + \vec{0} = \vec{OA} + \vec{AA} = \vec{OA} = \vec{a}$

$\therefore \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$

আকৌ, $\vec{0} + \vec{a} = \vec{OO} + \vec{OA} = \vec{OA} = \vec{a}$

$\therefore \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

$\therefore \vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a}$

ধৰ্ম ৩ ঃ যোগাত্মক বিপৰীতৰ অস্তিত্ব ঃ প্ৰত্যেক ভেক্টৰ $\vec{a}$ ৰ বাবে এটা ভেক্টৰ $-\vec{a}$ যাতে $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} = (-\vec{a}) + \vec{a}$

ধৰা হ'ল, $\vec{OA} = \vec{a}$, তেনেহ'লে, $\vec{OA} = -\vec{a}$

$\therefore \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{OA} + \vec{AO} = \vec{OO} = \vec{O}$

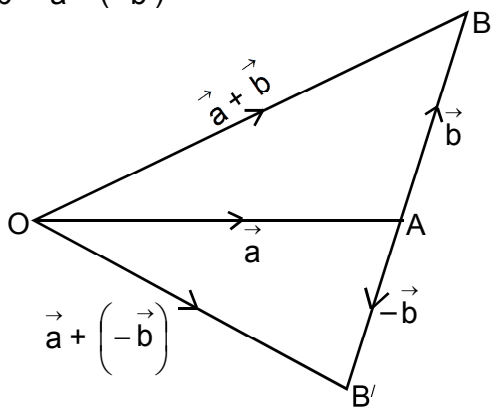
$(-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{AO} + \vec{OA} = \vec{AA} = \vec{O}$

সেয়েহে, $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0} = (-\vec{a}) + \vec{a}$

১২.৫.২ ভেক্টৰৰ বিয়োগ

ধৰা হ'ল, $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ দুটা প্ৰদত্ত ভেক্টৰ। তেনেহ'লে $\vec{a}$ আৰু $-\vec{b}$ ৰ ভেক্টৰ যোগক $\vec{a}$ ৰ পৰা $\vec{b}$ ৰ ভেক্টৰ বিয়োগ বুলি কোৱা হয় আৰু ইয়াক $\vec{a} - \vec{b}$ ৰে বুজোৱা হয়।

অৰ্থাৎ, $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$



চিত্ৰ ঃ ১২.৯

ধৰা হ'ল, $\vec{a} = \vec{OA}$, $\vec{b} = \vec{AB}$

তেনেহ'লে, $\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = \vec{a} + \vec{b}$

BAক B/লৈ এনেদৰে বঢ়োৱা হ'ল যাতে, AB = AB/

$\therefore \vec{AB'} = -\vec{BA} = -\vec{b}$

ভেক্টৰৰ যোগৰ ত্ৰিভুজ বিধি মতে,

$\vec{OB'} = \vec{OA} + \vec{AB'} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b}$

১২.৫.৩ ভেক্টৰক স্কেলাৰেৰে পূৰণ

ধৰা হ'ল, a এটা স্কেলাৰ আৰু $\vec{a}$ এটা ভেক্টৰ। তেনেহ'লে, $m\vec{a}$ ভেক্টৰৰ সংজ্ঞা হ'ল এনেধৰণৰ, $-m\vec{a}$ আৰু $\vec{a}$ ৰ আধাৰ একে, $m\vec{a}$ ৰ মান $\vec{a}$ ৰ মানৰ |m| গুণ, যদি m ধনাত্মক $\vec{a}$ আৰু $m\vec{a}$ ৰ দিশ একে, যদি m ঋণাত্মক $\vec{a}$ আৰু $m\vec{a}$ ৰ দিশ বিপৰীত। $\vec{a}$ এটা ভেক্টৰ হ'লে $5\vec{a}$ ভেক্টৰৰ মান $\vec{a}$ ৰ মানৰ 5 গুণ আৰু $5\vec{a}$ ৰ দিশ $\vec{a}$ ৰ দিশৰ সৈতে একে। কিন্তু $-5\vec{a}$ ভেক্টৰৰ মান $\vec{a}$ ৰ মানৰ 5 গুণ আৰু $-5\vec{a}$ ৰ দিশ $\vec{a}$ ৰ দিশৰ বিপৰীত।

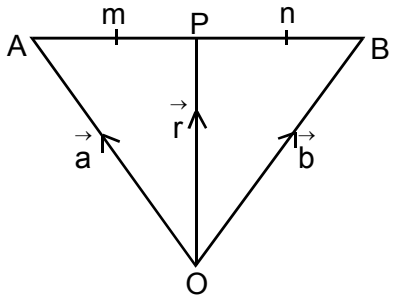
ভেক্টৰক স্কেলাৰেৰে পূৰণৰ ধৰ্ম ঃ

$\vec{a}$, $\vec{b}$ ভেক্টৰ আৰু m, n স্কেলাৰৰ বাবে.

i) $m(-\vec{a}) = (-m)\vec{a} = -(m\vec{a})$ ii) $(-m)(-\vec{a}) = m\vec{a}$

iii) $m(n\vec{a}) = (mn)\vec{a} = n(m\vec{a})$ iv) $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$

v) $m(\vec{a} + \vec{b}) = m\vec{a} + n\vec{b}$



চিত্ৰ ঃ ১২.১০

১২.৬ বিভাজন সূত্ৰ

ধৰা হ'ল A আৰু B দুটা বিন্দু আৰু ইয়াৰ অৱস্থান ভেক্টৰ ক্ৰমে $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ । ধৰা হ'ল, P বিন্দুৱে ABক m : n অনুপাতত অন্তঃভাৱে বিভক্ত কৰিছে। তেনেহ'লে P বিন্দুৰ অৱস্থান ভেক্টৰ হ'ল, $\vec{OP} = \frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল, O মূল বিন্দু।

তেনেহ'লে, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$

ধৰা হ'ল, O সাপেক্ষে Pৰ অৱস্থান ভেক্টৰ $\vec{r}$ অর্থাৎ, $\vec{OP} = \vec{r}$

ধৰা হ'ল P বিন্দুৱে ABক m : n অনুপাতত অন্তঃভাৱে ভাগ কৰে।

তেনেহ'লে, $\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$

$\Rightarrow nAP = mPB$

$\Rightarrow n\vec{AP} = m\vec{PB}$

$\Rightarrow n(\vec{OP} - \vec{OA}) = m(\vec{OB} - \vec{OP})$

$\Rightarrow n(\vec{r} - \vec{a}) = m(\vec{b} - \vec{r})$

$\Rightarrow n\vec{r} - n\vec{a} = m\vec{b} - m\vec{r}$

$\Rightarrow n\vec{r} + m\vec{r} = m\vec{b} + n\vec{a}$

$\Rightarrow (m+n)\vec{r} = m\vec{b} + n\vec{a}$

$\Rightarrow \vec{r} = \frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$

টোকা ঃ যদি P বিন্দু ABৰ মধ্য বিন্দু হয়, তেনেহ'লে P বিন্দুৱে ABক 1 : 1 অনুপাতত ভাগ কৰে।

$\vec{OP} = \frac{1.\vec{b}+1.\vec{a}}{1+1} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

বিভাজন সূত্ৰ বহিঃ বিভাজন ঃ ধৰা হ'ল, A আৰু B দুটা বিন্দু আৰু ইয়াৰ অৱস্থান ভেক্টৰ ক্ৰমে $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$. ধৰা হ'ল, P বিন্দুৱে ABক m : n অনুপাতত বহির্বিভক্ত কৰে। তেনেহ'লে,

Pৰ অৱস্থান ভেক্টৰ $\vec{OP} = \frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল, O মূল বিন্দু।

তেনেহ'লে, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$

ধৰা হ'ল, O সাপেক্ষে Pৰ অৱস্থান ভেক্টৰ $\vec{r}$ অর্থাৎ, $\vec{OP} = \vec{r}$

ধৰা হ'ল, P বিন্দুৱে ABক m : n অনুপাতত বহির্বিভক্ত কৰে।

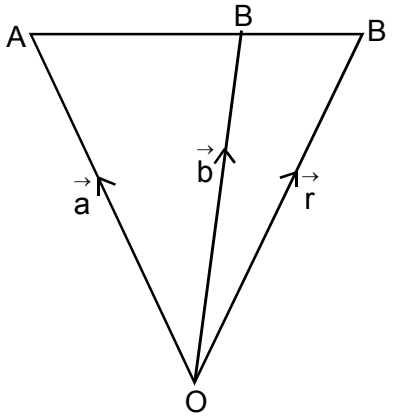
তেনেহ'লে, $\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$

$\Rightarrow nAP = mPB$

$\Rightarrow n\vec{AP} = -m\vec{PB}$ [$\vec{AP}$ আৰু $\vec{PB}$ বিপৰীত দিশত আছে]

$\Rightarrow n(\vec{OP} - \vec{OA}) = -m(\vec{OB} - \vec{OP})$

$$\Rightarrow n(\vec{r}-\vec{a}) = m(\vec{r}-\vec{b})$$
$$\Rightarrow m\vec{b}-n\vec{a} = m\vec{r}-n\vec{r}$$
$$\Rightarrow m\vec{b}-n\vec{a} = (m-n)\vec{r}$$
$$\Rightarrow \vec{r} = \frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$$



চিত্ৰ ঃ ১২.১১

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ঃ P আৰু Qৰ অৱস্থান ভেক্টৰ ক্ৰমে $\vec{OP} = 3\vec{a}-2\vec{b}$ আৰু $\vec{OQ} = \vec{a}+\vec{b}$ । R বিন্দুৱে PQক 2 : 1 অনুপাতত (i) অন্তঃবিভক্ত, (ii) বহির্বিভক্ত কৰে। R বিন্দুৰ অৱস্থান ভেক্টৰ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ

i) $\vec{OR} = \frac{2\vec{OQ}+\vec{OP}}{2+1} = \frac{2\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)}{3} = \frac{5\vec{a}}{3}$

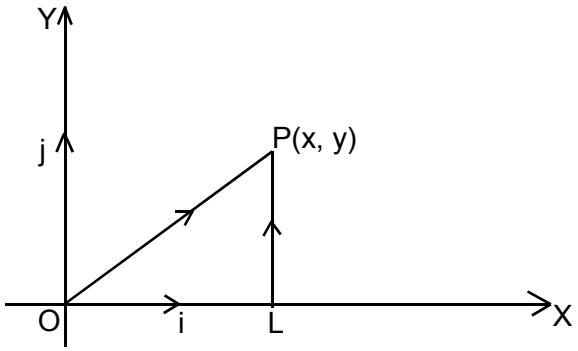
ii) $\vec{OR} = \frac{2\vec{OQ}-\vec{OP}}{2-1} = \frac{2\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\left(3\vec{a}-2\vec{b}\right)}{1} = -\vec{a}+4\vec{b}$

১২.৭ ভেক্টৰৰ উপাংশ

আয়তীয় স্থানাংক প্ৰণালীত ভেক্টৰ ঃ

উপপাদ্য ১২.৭.১ঃ যদি দ্বিমাত্ৰিক সমতলত P(x, y) এটা বিন্দু হ'লে $\vec{OP} = x\hat{i}+y\hat{j}$, য'ত $\hat{i}$ আৰু $\hat{j}$ হ'ল ক্ৰমে x-অক্ষৰ দিশত একক ভেক্টৰ।

প্ৰমাণ ঃ



চিত্ৰ ঃ ১২.১২

ধৰা হ'ল, চিত্ৰত দেখুওৱাৰ দৰে OX আৰু OY স্থানাংক অক্ষ সাপেক্ষে সমতলত P(x, y) এটা বিন্দু।

OXৰ ওপৰত PL লম্ব টনা হ'ল।

তেনেহ'লে, OL = x আৰু LP = y

ধৰা হ'ল, OX আৰু OYৰ দিশত ক্ৰমে $\hat{i}$ আৰু $\hat{j}$ দুটা একক ভেক্টৰ।

তেনেহ'লে, $\vec{OL} = x\hat{i}$ আৰু $\vec{LP} = y\hat{j}$

$\vec{OL}$ আৰু $\vec{LP}$ ভেক্টৰক $\vec{OP}$ ভেক্টৰৰ ক্ৰমে x-অক্ষ আৰু y-অক্ষৰ দিশত উপাংশ (Components) বুলি কোৱা হয়।

ভেক্টৰৰ যোগৰ বিধিৰ পৰা, $\vec{OP} = \vec{OL} + \vec{LP} = x\hat{i} + y\hat{j} = \vec{r}$ (ধৰা হ'ল)

$\therefore \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$

এতিয়া, $OP^2 = OL^2 + LP^2 = x^2 + y^2$

$\Rightarrow OP = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\Rightarrow |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

দেখা গ'ল যে সমতলস্থ এটা বিন্দু Pৰ স্থানাংক (x, y) হ'লে,

i) $\vec{r} = \vec{OP} = x\hat{i} + y\hat{j}$

ii) $|\vec{r}| = |\vec{OP}| = |x\hat{i} + y\hat{j}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

iii) x-অক্ষৰ দিশত $\vec{OP}$ ৰ উপাংশ $x\hat{i}$ আৰু y-অক্ষৰ দিশত $\vec{OP}$ ৰ উপাংশ $y\hat{j}$।

Aআৰু Bৰ স্থানাংকৰ সহায়ত $\vec{AB}$ ৰ উপাংশ ঃ ধৰা হ'ল, XOY সমতলত $A(x_1, y_1)$ আৰু $B(x_2, y_2)$ যিকোনো দুটা বিন্দু। ধৰা হ'ল x-অক্ষ আৰু y-অক্ষৰ দিশত ক্ৰমে $\hat{i}$ আৰু $\hat{j}$ একক ভেক্টৰ।

$AN = x_2 - x_1$, $BN = y_2 - y_1$

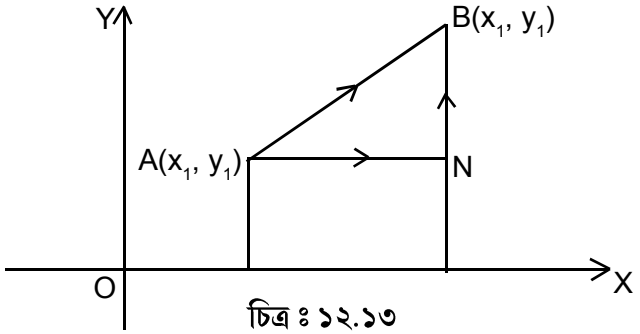
$\therefore \vec{AN} = (x_2 - x_1)\hat{i}$, $\vec{BN} = (y_2 - y_1)\hat{j}$

ভেক্টৰৰ যোগৰ বিধিৰ পৰা, $\vec{AB} = \vec{AN} + \vec{BN} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j}$

x-অক্ষৰ দিশত $\vec{AB}$ ৰ উপাংশ = $(x_2 - x_1)\hat{i}$

y-অক্ষৰ দিশত $\vec{AB}$ ৰ উপাংশ = $(y_2 - y_1)\hat{j}$

$\vec{AB}$ ৰ মান = $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



চিত্ৰ ঃ ১২.১৩

উপাংশৰ সহায়ত ভেক্টৰৰ যোগ, বিয়োগ, ভেক্টৰক স্কেলাৰেৰে পূৰণ আৰু ভেক্টৰৰ সমতা ঃ ধৰা হ'ল, $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j}$ আৰু $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j}$, তেনেহ'লে,

i) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j}) + (b_1\hat{i} + b_2\hat{j}) = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j}$

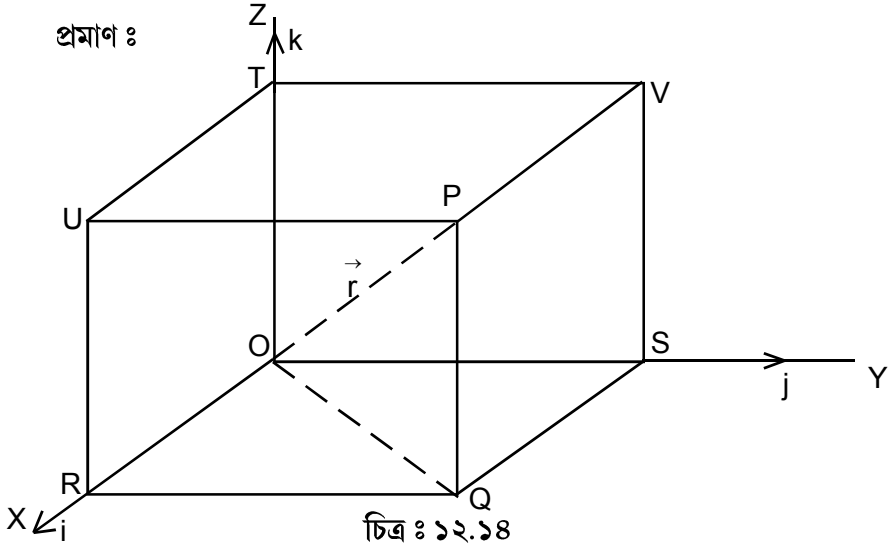
ii) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1\hat{i} + a_2\hat{j}) - (b_1\hat{i} + b_2\hat{j}) = (a_1 - b_1)\hat{i} + (a_2 - b_2)\hat{j}$

iii) $m\vec{a} = m(a_1\hat{i} + a_2\hat{j}) = ma_1\hat{i} + ma_2\hat{j}$, য'ত m এটা ধ্ৰুৱক।

iv) $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow a_1\hat{i} + a_2\hat{j} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} \Rightarrow a_1 = b_1$ আৰু $a_2 = b_2$.

উপপাদ্য ১২.৭.২ঃ যদি অন্তৰিক্ষত থকা এটা বিন্দু Pৰ স্থানাংক (x, y, z) হ'লে, ইয়াৰ অৱস্থান ভেক্টৰ $\vec{r}$ হ'ব $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ আৰু $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, য'ত $\hat{i}$, $\hat{j}$ আৰু $\hat{k}$ হ'ল ক্ৰমে OX, OY আৰু OZৰ দিশত একক ভেক্টৰ।

প্ৰমাণ ঃ



চিত্ৰ ঃ ১২.১৪

ধৰা হ'ল, OX, OY, OZ তিনিডাল পৰস্পৰ লম্ব অক্ষ। OX, OY, OZৰ দিশত ক্ৰমে $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$ একক ভেক্টৰ। ধৰা হ'ল, অন্তৰিক্ষত P(x, y, z) যিকোনো এটা বিন্দু আৰু ধৰা হ'ল, $\vec{OP} = \vec{r}$।

XOY সমতলত PQ লম্ব টনা হ'ল আৰু OXৰ ওপৰত QR লম্ব টনা হ'ল।

তেনেহ'লে, OR = x; RQ = y; QP = z.

$\therefore \vec{OR} = x\hat{i}$, $\vec{RQ} = y\hat{j}$, $\vec{QP} = z\hat{k}$

এতিয়া, $\vec{OP} = \vec{OQ} + \vec{QP} = \vec{OR} + \vec{RQ} + \vec{QP}$

দেখা গ'ল যে P বিন্দুৰ স্থানাংক (x, y, z) হ'লে আৰু Pৰ অৱস্থান ভেক্টৰ $\vec{r}$ হ'লে,

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

OQP সমকোণী ত্ৰিভুজৰ পৰা, $OP^2 = OQ^2 + QP^2$

ORQ সমকোণী ত্ৰিভুজৰ পৰা, $OQ^2 = OR^2 + RQ^2$

$\therefore OP^2 = OR^2 + RQ^2 + QP^2$

$\Rightarrow OP^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$\Rightarrow OP = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\therefore r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

উপাংশৰ সহায়ত ভেক্টৰৰ যোগ, বিয়োগ, ভেক্টৰক স্কেলাৰেৰে পূৰণ আৰু ভেক্টৰৰ সমতা ঃ ধৰা হ'ল, $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ আৰু $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ দুটা ভেক্টৰ। তেনেহ'লে,

i) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$

ii) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\hat{i} + (a_2 - b_2)\hat{j} + (a_3 - b_3)\hat{k}$

iii) $k\vec{a} = k(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) = ka_1\hat{i} + ka_2\hat{j} + ka_3\hat{k}$, য'ত k এটা স্কেলাৰ।

iv) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$

$\Rightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3$.

v) দুটা ভেক্টৰ $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ একৰেখীয় হ'ব যদি আৰু যদিহে এটা অশূন্য স্কেলাৰ λ থাকে, যাতে $\vec{b} = \lambda\vec{a}$।

যদি $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ আৰু $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, তেনেহ'লে ভেক্টৰ দুটা একৰেখীয় হ'ব যদি আৰু যদিহে,

$b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k} = \lambda(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k})$

$\Leftrightarrow b_1 = \lambda a_1, b_2 = \lambda a_2, b_3 = \lambda a_3$

$\Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \lambda$

(x_1, y_1, z_1) আৰু (x_2, y_2, z_2) বিন্দুদ্বয় সংযোগী ভেক্টৰ ঃ

ধৰা হ'ল $A(x_1, y_1, z_1)$ আৰু $B(x_2, y_2, z_2)$ যিকোনো দুটা বিন্দু।

তেনেহ'লে, $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$

$= (x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}) - (x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k})$

$= (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$

$\vec{AB}$ ৰ মান $= |\vec{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ ঃ ধৰা হ'ল, O মূল বিন্দু আৰু xy সমতলত P(4, –3) এটা বিন্দু। $\vec{OP}$ ক $\hat{i}$ আৰু $\hat{j}$ ৰ সহায়ত প্ৰকাশ কৰক। লগতে $|\vec{OP}|$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ Pৰ অৱস্থান ভেক্টৰ $-4\hat{i} + 3\hat{j}$

$\therefore \vec{OP} = -4\hat{i} + 3\hat{j}$

$\Rightarrow |\vec{OP}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = 5$

উদাহৰণ ২ঃ $\vec{PQ}$ ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰক যদি P, Qৰ স্থানাংক ক্ৰমে (2, 3) আৰু (5, –3). লগতে $\vec{PQ}$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $\vec{PQ}$ = Qৰ অৱস্থান ভেক্টৰ – Pৰ অৱস্থান ভেক্টৰ

$= (5\hat{i} - 3\hat{j}) - (2\hat{i} + 3\hat{j})$

$= 3\hat{i} - 6\hat{j}$.

আৰু $|\vec{PQ}| = |3\hat{i} - 6\hat{j}| = \sqrt{3^2 + (-6)^2} = \sqrt{45}$

উদাহৰণ ৩ ঃ যদি $\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j}$, $\vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$ আৰু $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j}$, $\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ ভেক্টৰৰ উপাংশ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ইয়াত $\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = (2\hat{i} - 3\hat{j}) - 2(3\hat{i} + 2\hat{j}) + (\hat{i} + \hat{j})$

$= 3\hat{i} - 6\hat{j}$

$\therefore \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ ৰ উপাংশ হ'ল –3, –6.

উদাহৰণ ৪ ঃ যদি $\vec{a} = \hat{i} - 2\hat{j}$ আৰু $\vec{b} = 2\hat{i} - 2\hat{j}$, $3\vec{a} - 2\vec{b}$ ভেক্টৰৰ সমান্তৰাল একক ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{b} = 3(\hat{i} - 2\hat{j}) - 2(2\hat{i} - 2\hat{j})$

$= 3\hat{i} - 6\hat{j} - 4\hat{i} - 4\hat{j}$

$= -\hat{i} - 10\hat{j}$

$\therefore |\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + (-10)^2} = \sqrt{101}$

এতিয়া, $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{-\hat{i} - 10\hat{j}}{\sqrt{101}}$

$\therefore \vec{v}$ ৰ সমান্তৰাল একক ভেক্টৰ হ'ল $\pm\hat{v}$ অৰ্থাৎ, $\pm\frac{-\hat{i} - 10\hat{j}}{\sqrt{101}}$.

উদাহৰণ ৫ ঃ যদি $|\vec{a}| = 2$, $|4\vec{a}|$, $|0\vec{a}|$ আৰু $|(-5)\vec{a}|$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $|\vec{a}| = 2$

$\therefore |4\vec{a}| = 4|\vec{a}| = 4 \times 2 = 8,$

$|0\vec{a}| = |\vec{0}| = 0$ আৰু $|(-5)\vec{a}| = |(-5)||\vec{a}| = 5 \times 2 = 10.$

উদাহৰণ ৬ ঃ দুটা বিন্দুৰ অৱস্থান ভেক্টৰ ক্ৰমে $\vec{x}$ আৰু $\vec{y}$ । যি বিন্দুৱে এই বিন্দু দুটা সংযোগী ৰেখাখণ্ডক 2 : 3 অনুপাতত অন্তঃভাৱে ভাগ কৰে, সেই বিন্দুৰ অৱস্থান নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল বিন্দুটোৰ অৱস্থান ভেক্টৰ $\vec{r}$ ।

$\therefore \vec{r} = \frac{3\vec{x} + 2\vec{y}}{3+2}$

$= \frac{1}{5}\left(3\vec{x} + 2\vec{y}\right)$

উদাহৰণ ৭ ঃ এটা ভেক্টৰৰ মান 5 একক আৰু ভেক্টৰটো $2\hat{i} - \hat{j}$ ভেক্টৰৰ সমান্তৰাল। ভেক্টৰটো নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j}$, তেনেহ'লে, $|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$

$\therefore \vec{a}$ ৰ সমান্তৰাল একক ভেক্টৰ $= \hat{a} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\hat{i} - \hat{j}) = \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{j}$

গতিকে, নিৰ্ণেয় ভেক্টৰ $= 5\hat{a} = 5\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{j}\right) = 2\sqrt{5}\hat{i} - \sqrt{5}\hat{j}$.

উদাহৰণ ৮ ঃ ধৰা হ'ল, $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ আৰু $\vec{b} = -\hat{i} + \hat{j}$. $\vec{a} + \vec{b}$ ৰ দিশত এটা একক ভেক্তৰ নির্ণয় কৰক যাৰ মান 7 একক।

সমাধান ঃ ইয়াত, $\vec{a} + \vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} + (-\hat{i} + \hat{j}) = 3\hat{j} + 3\hat{k} = \vec{c}$

$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ দিশত একক ভেক্টৰ

$$\hat{c} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{1}{\sqrt{18}}(3\hat{j} + 3\hat{k})$$

$$= \frac{3}{3\sqrt{2}}\hat{j} + \frac{3}{3\sqrt{2}}\hat{k}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}$$

$\therefore$ উলিয়াবলগীয়া ভেক্টৰ 7 আৰু $\hat{c} = 7\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k}\right) = \frac{7}{\sqrt{2}}\hat{j} + \frac{7}{\sqrt{2}}\hat{k}$.

উদাহৰণ ৯ ঃ (1, –1) আৰু (–2, m) আৰু $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ হ'লে, mৰ কি মানৰ বাবে $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ একৰেখীয়া হ'ব?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $\vec{a} = \hat{i} - \hat{j}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + m\hat{j}$

দুটা ভেক্টৰ $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ একৰেখীয়া হ'ব যদি এটা অশূন্য স্কেলাৰ λ থাকে,

যাতে $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ অর্থাৎ, $\hat{i} - \hat{j} = \lambda(-2\hat{i} + m\hat{j}) = -2\lambda\hat{i} + m\lambda\hat{j}$

উভয়পক্ষৰ উপাংশ তুলনা কৰি আমি পাওঁ,

$1 = -2\lambda, -1 = m\lambda$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}, m = -\frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}, m = 2$$

উদাহৰণ ১০ ঃ P আৰু Q বিন্দু দুটাৰ অৱস্থান ভেক্টৰ ক্ৰমে $2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ আৰু $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$। যদি R বিন্দুৱে P, Q সংযোগী ৰেখাখণ্ডক (i) অন্তঃভাৱে, (ii) বহির্ভাৱে 2 : 1 অনুপাতত ভাগ কৰে, R বিন্দুৰ অৱস্থান ভেক্টৰ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ i) R বিন্দুৱে PQক 2 : 1 অনুপাতত অন্তঃবিভক্ত কৰে। গতিকে R বিন্দুৰ অৱস্থান ভেক্টৰ,

$$\vec{OR} = \frac{2\left(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}\right)+1\left(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right)}{2+1} = \frac{4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}}{3} = \frac{4}{3}\hat{i}+\frac{5}{3}\hat{j}+\frac{1}{3}\hat{k}$$

ii) R বিন্দুৱে PQক 2 : 1 অনুপাতত বহির্বিভক্ত কৰে। গতিকে R বিন্দুৰ অৱস্থান ভেক্টৰ,

$$\vec{OR} = \frac{2\left(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}\right)-1\left(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right)}{2-1}$$

$$= 3\hat{j} + 3\hat{k}$$

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ



প্রশ্ন নং ৩ঃ ধৰা হ'ল, $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ আৰু $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$ হ'লে, মান নির্ণয় কৰক।

(i) $\vec{a}$, (ii) $\vec{b}$, (iii) $\vec{a}+\vec{b}$, (iv) $\vec{a}-\vec{b}$.

প্রশ্ন নং ৪ঃ $3\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ ৰ দিশত একক ভেক্টৰ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ দেখুওৱাক যে $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ আৰু $\vec{b} = 4\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টৰ দুটা একৰেখীয়।



১২.৮ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- যিবোৰ ৰাশিৰ অকল মানহে আছে, সেইবোৰক স্কেলাৰ বোলে।
- যিবোৰ ৰাশিৰ দিশ আৰু মান দুয়োটা আছে, সেইবোৰক ভেক্টৰ বোলে।
- যিটো ভেক্টৰৰ মান হ'ল দৈর্ঘ্য PQ আৰু যাৰ দিশ Pৰ পৰা Qলৈ, সেই ভেক্টৰটোক $\vec{PQ}$ ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ মানক $|\vec{PQ}|$ = PQৰে বুজোৱা হয়।
- যিবোৰ ভেক্টৰৰ মান শূন্য আৰু দিশ অনির্ণেয়, তেনে ভেক্টৰক শূন্য ভেক্টৰ বোলে। ইয়াক $\vec{0}$ ৰে বুজোৱা হয়।
- যিবোৰ ভেক্টৰৰ মান এক (অর্থাৎ এক একক), তেনে ভেক্টৰক একক ভেক্টৰ বোলে। এটা নির্দিষ্ট ভেক্টৰ $\vec{a}$ ৰ দিশৰ একক ভেক্টৰক $\hat{a}$ ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা হ'ল,

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

- যি ভেক্টৰৰ মান $\vec{a}$ ৰ মানৰ সমান, কিন্তু দিশ $\vec{a}$ ৰ বিপৰীত। তেনে ভেক্টৰক $\vec{a}$ ৰ ঋণাত্মক ভেক্টৰ বোলে। ইয়াক $-\vec{a}$ ৰে বুজোৱা হয়।
- দুটা ভেক্টৰ $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ক সমান ভেক্টৰ বুলি কোৱা হয় যদি সিহঁতৰ মান আৰু দিশ সমান। ইয়াক $\vec{a} = \vec{b}$ ৰে বুজোৱা হয়।
- ধৰা হ'ল, A আৰু B দুটা বিন্দু আৰু ইয়াৰ অৱস্থান ভেক্টৰ ক্ৰমে $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ । ধৰা হ'ল, P বিন্দুৱে m : n অনুপাতত অন্তঃভাৱে বিভক্ত কৰিছে। তেনেহ'লে P বিন্দুৰ অৱস্থান ভেক্টৰ হ'ল, $\vec{OP} = \frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$
- ধৰা হ'ল, A আৰু B দুটা বিন্দু আৰু ইয়াৰ অৱস্থান ভেক্টৰ ক্ৰমে $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ । ধৰা হ'ল, P বিন্দুৱে m : n অনুপাতত বহিৰ্বিভক্ত কৰে। তেনেহ'লে Pৰ অৱস্থান ভেক্টৰ, $\vec{OP} = \frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$
- অন্তৰিক্ষত থকা এটা বিন্দু Pৰ স্থানাংক (x, y, z) হ'লে, ইয়াৰ অৱস্থান ভেক্টৰ $\vec{r}$ হ'ব $x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ আৰু $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, য'ত $\hat{i}$, $\hat{j}$ আৰু $\hat{k}$ ক্ৰমে OX, OY আৰু OZৰ দিশত একক ভেক্টৰ।
- দুটা ভেক্টৰ $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ একৰেখীয়া হ'ব যদি আৰু যদিহে এটা অশূন্য স্কেলাৰ λ থাকে, যাতে $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.



১১.৫ অধিক জানিবলৈ

ইংৰাজী গ্ৰন্থ ঃ

1) Kishan, Hari. *Vector Algebra and Calculus*. New Delhi: Atlantic Publishers & Distributors (P) Ltd.
2) Narayan, Shanti. *A Textbook of Vector Calculus*.
3) Pandey, R. K. *Vector Analysis*. New Delhi: Discovery Publishing House.
4) Sharma, Anil Kumar. *Textbook of Vector Calculus*. New Delhi: Discovery Publishing House.
5) Tallack, J. C. *Introduction to Vector Analysis*. Cambridge University Press.
6) *Vector Algebra*. New Delhi: Laxmi Publications(P) Ltd.

১২.১০ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ a) ঘনত্ব এটা স্কেলাৰ ৰাশি, কিয়নো ইয়াৰ মাত্র মান আছে।

b) ওজন এটা ভেক্টৰ ৰাশি, কিয়নোইয়াৰ মান আৰু দিশ দুয়োটা আছে।

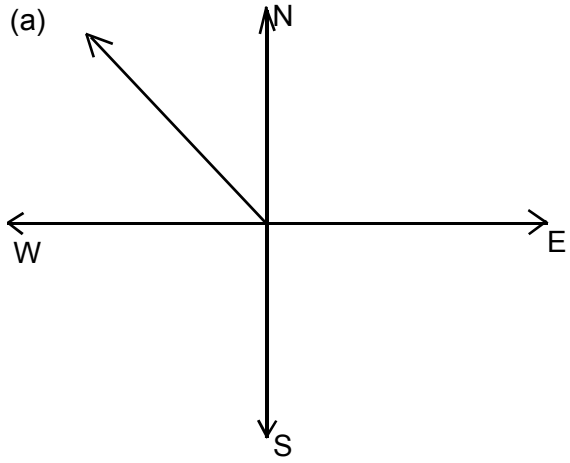
c) ভৰবেগ এটা ভেক্টৰ ৰাশি, কিয়নো ইয়াৰ মান আৰু দিশ দুয়োটা আছে।

d) কৰা কার্য্য এটা স্কেলাৰ ৰাশি, কিয়নো ইয়াৰ মাত্র মান আছে।

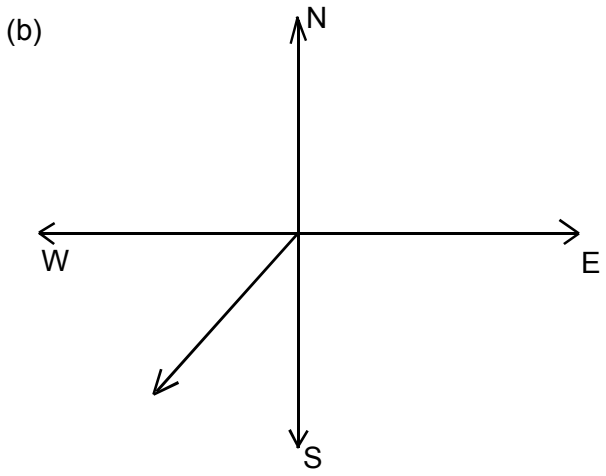
e) আয়তন এটা স্কেলাৰ ৰাশি, কিয়নো ইয়াৰ মাত্র মান আছে।

f) ত্বৰণ এটা ভেক্টৰ ৰাশি, কিয়নো ইয়াৰ দিশ আৰু মান দুয়োটা আছে।

২নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ



চিত্র ঃ ১২.১৫



চিত্র ঃ ১২.১৬

৩নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ i) $|\vec{a}| = |\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

ii) $|\vec{b}| = |2\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{38}$

iii) $\vec{a} + \vec{b} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) + (2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}) = 3\hat{i} - 5\hat{j} - 2\hat{k}$

$\therefore |\vec{a} + \vec{b}| = |3\hat{i} - 5\hat{j} - 2\hat{k}|$

$= \sqrt{3^2 + (-5)^2 + (-2)^2}$

$= \sqrt{38}$

iv) $\vec{a} - \vec{b} = (\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) - (2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}) = \hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$

$\therefore |\vec{a} - \vec{b}| = |-\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}|$

$= \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 4^2}$

$= \sqrt{26}$

৪নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, $\vec{a} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$

তেনেহ'লে, $|\vec{a}| = |3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}|$

$= \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2}$

$= 7$

$\therefore \vec{a}$ ৰ দিশৰ একক ভেক্টৰ, $\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

$= \frac{3\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}}{7}$

$= \frac{3}{7}\hat{i} - \frac{6}{7}\hat{j} + \frac{2}{7}\hat{k}$

৫নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ইয়াত $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ আৰু $\vec{b} = 4\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$

এতিয়া, $\vec{b} = 2(2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}) = 2\vec{a}$

$\therefore \vec{b}$ হ'ল $\vec{a}$ ৰ এটা স্কেলাৰ গুণিতক।

গতিকে, $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ একৰেখীয় ভেক্টৰ।



১২.১১ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ৰ সমান্তৰাল এটা একক ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ২ ঃ যদি A আৰু B ৰ অৱস্থান ভেক্টৰ ক্ৰমে $2\hat{i} + 3\hat{j} - 7\hat{k}$ আৰু $4\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$, $\vec{AB}$ আৰু $|\vec{AB}|$ নিৰ্ণয় কৰক। লগতে $\vec{AB}$ ৰ দিশাংক নিৰ্ধাৰণ কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}, 6\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ আৰু $3\hat{i} + 6\hat{j} - 2\hat{k}$ ভেক্টৰ তিনিটাই এটা সমবাহু ত্ৰিভুজৰ বাহু গঠন কৰে।

প্ৰশ্ন ৪ ঃ তলৰ প্ৰতিটো ভেক্টৰৰ মান নিৰ্ণয় কৰক।

i) $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 6\hat{k}$

ii) $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$

iii) $\vec{c} = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$

প্ৰশ্ন ৫ ঃ P আৰু Q বিন্দুৰ স্থানাংক ক্ৰমে (1, 2, 3) আৰু (4, 5, 6)। $\vec{PQ}$ ভেক্টৰৰ দিশৰ একক ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৬ ঃ দুটা বিন্দুৰ অৱস্থান ভেক্টৰ ক্ৰমে $2\vec{a} - 3\vec{b}$ আৰু $3\vec{a} - 2\vec{b}$। যি বিন্দুৱে এই বিন্দু দুটা সংযোগী ৰেখাখণ্ডক অন্তঃভাৱে আৰু বহিৰ্ভাৱে 2 : 3 অনুপাততে ভাগ কৰে, সেই বিন্দুৰ অৱস্থান ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৭ ঃ P(2, 3, 4) আৰু Q(4, 1, –2) বিন্দুদ্বয় সংযোগী ৰেখাখণ্ডৰ মধ্য বিন্দুৰ অৱস্থান ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৮ ঃ P আৰু Qৰ অৱস্থান ভেক্টৰ ক্ৰমে $\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ আৰু $-\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$। এই বিন্দু দুটা সংযোগী ৰেখাখণ্ডক যি বিন্দুৱে (i) অন্তঃভাৱে, (ii) বহিৰ্ভাৱে 2 : 1 অনুপাততে ভাগ কৰে, সেই বিন্দুৰ অৱস্থান ভেক্টৰ নিৰ্ধাৰণ কৰক।

প্ৰশ্ন ৯ ঃ A(1, 2, –3) আৰু B(–1, –2, 1) দুটা বিন্দু। $\vec{AB}$ ভেক্টৰৰ দিশাংক নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ১০ ঃ xy সমতলত A(–3, 2) এটা বিন্দু আৰু O মূল বিন্দু। $\hat{i}$ আৰু $\hat{j}$ৰ সহায়ত $\vec{OA}$ প্ৰকাশ কৰক। লগতে $|\vec{OA}|$ নিৰ্ধাৰণ কৰক।

*** ***** ***

অধ্যায় ১৩ ঃ ভেক্টৰৰ পূৰণ - ১

অধ্যায় গাঁথনি

১৩.১ উদ্দেশ্য
১৩.২ পৰিচয়
১৩.৩ দুটা ভেক্টৰৰ পূৰণ
    ১৩.৩.১ স্কেলাৰ বা ডট্ পূৰণ
    ১৩.৩.২ ভেক্টৰ বা ক্রছ পূৰণ
১৩.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১৩.৫ অধিক জানিবলৈ
১৩.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
১৩.৭ আৰ্হি প্রশ্ন

১৩.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- দুটা ভেক্টৰৰ স্কেলাৰ (বা ডট্) আৰু ভেক্টৰ (বা ক্রছ পূৰণ) সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰিব পাৰিব
- দুটা ভেক্টৰৰ মাজৰ কোণ উলিয়াব পাৰিব
- এটা ভেক্টৰৰ ওপৰত আন এটা ভেক্টৰৰ অভিক্ষেপ উলিয়াব পাৰিব
- ক্রছ পূৰণৰ সহায়ত ত্রিভুজ আৰু সামান্তৰিকৰ কালি উলিয়াব পাৰিব।

১৩.২ পৰিচয়

অধ্যায়ত আমি দুটা ভেক্টৰ কেনেদৰে যোগ কৰিব লাগে, এটা ভেক্টৰৰপৰা আন এটা ভেক্টৰ কেনেদৰে বিয়োগ কৰিব লাগে, এটা ভেক্টৰক এটা স্কেলাৰেৰে কেনেদৰে পূৰণ কৰিব লাগে সেই বিষয়ে আলোচনা কৰিছোঁ। এই অধ্যায়ত আমি আন এটা প্রক্রিয়া 'পূৰণ' সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম। আমি দুটা ভেক্টৰৰ স্কেলাৰ আৰু ভেক্টৰ পূৰণ সম্বন্ধে অধ্যয়ন কৰিম।

১৩.৩ দুটা ভেক্টৰৰ পূৰণ

দুটা ভেক্টৰৰ পূৰণৰ সংজ্ঞা দুই ধৰণে দিয়া হয়, যথা, স্কেলাৰ পূৰণ বা ডট্ পূৰণ (Scalar Product or Dot Product) আৰু ভেক্টৰ পূৰণ বা ক্রছ পূৰণ (Product Vector or Cross Product)। দুটা ভেক্টৰৰ স্কেলাৰ পূৰণ এটা স্কেলাৰ আৰু ভেক্টৰ পূৰণ এটা ভেক্টৰ।

১৩.৩.১ স্কেলাৰ বা ডট্ পূৰণ

ধৰা হ'ল, $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ দুটা অশূণ্য ভেক্টৰ আৰু ভেক্টৰ দুটাৰ মাজৰ কোণ θ। $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ৰ স্কেলাৰ পূৰণ $\vec{a}.\vec{b}$ ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াক এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হয়।

$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta,\ 0 \le \theta \le \pi$

স্কেলাৰ পূৰণৰ জ্যামিতীয় ব্যাখ্যা ঃ

ধৰা হ'ল, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$। ধৰা হ'ল, $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ৰ মাজৰ কোণ θ। OAৰ ওপৰত BL লম্ব টনা হ'ল। OLক $\vec{a}$ ৰ ওপৰত $\vec{b}$ ৰ অভিক্ষেপ (Projection) বুলি কোৱা হয়।

OLB ত্ৰিভুজৰ পৰা, $\cos\theta = \dfrac{OL}{OB}$

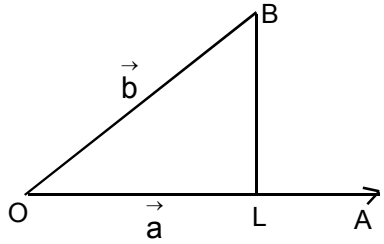
$\Rightarrow OL = (OB)\cos\theta$

$\Rightarrow OL = |\vec{b}|\cos\theta$ ... ...(1)

সংজ্ঞাৰ পৰা, $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$= |\vec{a}|OL$ [(1)ৰ সহায়ত]

$\therefore OL = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|}$



চিত্ৰ ঃ ১৩.১

$\vec{a}$ ৰ ওপৰত $\vec{b}$ ৰ অভিক্ষেপ $= \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.\vec{b} = \hat{a}.\vec{b}$

আকৌ, $\vec{b}$ ৰ ওপৰত $\vec{a}$ ৰ অভিক্ষেপ $= \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a}.\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a}.\hat{b}$

পৰ্য্যবেক্ষণ ঃ

1) ধৰা হ'ল $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ দুটা অশূণ্য ভেক্টৰ। তেনেহ'লে, $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

2) দুটা সমান ভেক্টৰৰ ডট্ পূৰণ,

$\vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos\theta = |\vec{a}||\vec{a}| = |\vec{a}|^2 = \vec{a}$

আকৌ, $(\vec{a})^2 = \vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2$.

3) ডট্ পূৰণ $\vec{a}.\vec{b}$ ধনাত্মক, ঋণাত্মক বা শূন্য হ'ব পাৰে।

   i) ভেক্টৰ দুটাৰ মাজৰ কোণ সূক্ষ্ম (অৰ্থাৎ, $0 < \theta < 90^0$) হ'লে, $\cos\theta$ ধনাত্মক। এই ক্ষেত্ৰত ডট্ পূৰণ ধনাত্মক।

   ii) ভেক্টৰ দুটাৰ মাজৰ কোণ স্থূল (অৰ্থাৎ, $90^0 < \theta < 180^0$) হ'লে, $\cos\theta$ ঋণাত্মক। এই ক্ষেত্ৰত, ডট্ পূৰণ ঋণাত্মক।

   iii) ভেক্টৰ দুটাৰ মাজৰ কোণ 90^0 (অৰ্থাৎ, $\theta = 90^0$) হ'লে, $\cos\theta = \cos 90^0 = 0$। এই ক্ষেত্ৰত, ডট্ পূৰণ শূন্য।

4) একৰেখীয় ভেক্টৰৰ স্কেলাৰ পূৰণ ঃ

   i) যদি $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ভেক্টৰ দুটা একৰেখীয় আৰু সিহঁতৰ দিশ একে, তেনেহ'লে, $\theta = 0^0$।

   গতিকে, $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}||\vec{b}|(1) = |\vec{a}||\vec{b}| = ab.$

   ii) যদি $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ভেক্টৰ দুটা একৰেখীয় আৰু সিহঁতৰ দিশ বিপৰীত, তেনেহ'লে, $\theta = \pi$।

   গতিকে, $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\pi = -|\vec{a}||\vec{b}| = -ab.$

দুটা ভেক্টৰৰ স্কেলাৰ পূৰণৰ ধৰ্ম ঃ

1) দুটা ভেক্টৰৰ স্কেলাৰ পূৰণ ক্ৰমবিনিময় (Commutative), অৰ্থাৎ, যিকোনো দুটা ভেক্টৰ $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ৰ বাবে, $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

2) যোগ প্ৰক্ৰিয়াৰ ওপৰত স্কেলাৰ পূৰণে বিতৰণ (Distributive) বিধি মানি চলে, অৰ্থাৎ, যিকোনো তিনিটা ভেক্টৰ $\vec{a}$, $\vec{b}$ আৰু $\vec{c}$ ৰ বাবে,

$\vec{a}.(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$

3) যদি 'm' এটা স্কেলাৰ আৰু $\square$, $\square$ দুটা ভেক্টৰ, তেনেহ'লে,

$(m.\square).\square = m(\square.\square) = \square.(m\square)$

4) যদি m, n দুটা স্কেলাৰ আৰু $\square$, $\square$ দুটা ভেক্টৰ, তেনেহ'লে,

$m\square.n\square = mn(\square.\square) = (mn\square).\square = \square.(mn\square)$

টোকা ঃ 1) $\square.\square = \square.\square = \square.\square = 1$

আমি পালোঁ, $\square.\square = |\square||\square|\cos 0 = (1)(1)(1) = 1$

সেইদৰে, $\square.\square = \square.\square = 1.$

2) $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$

আমি পালোঁ, $\vec{i}.\vec{j} = |\vec{i}||\vec{j}|\cos 90 = (1)(1)(0) = 0.$

সেইদৰে, $\vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{j} = 0.$

3) যিকোনো দুটা ভেক্টৰ $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ৰ বাবে,

i) $(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a})^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + (\vec{b})^2 = a^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + b^2$

ii) $(\vec{a}-\vec{b})^2 = (\vec{a})^2 + 2\vec{a}.\vec{b} + (\vec{b})^2 = a^2 - 2\vec{a}.\vec{b} + b^2$

iii) $(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = (\vec{a})^2 - (\vec{b})^2 = a^2 - b^2$

4) যদি $\vec{a}.\vec{b} = 0$, তেনেহ'লে, তিনিটা সম্ভাৱনা আছে,

i) $|\vec{a}| = 0$ অর্থাৎ, $\vec{a}$ এটা শূন্য ভেক্টৰ আৰু $\vec{b}$ যিকোনো ভেক্টৰ।

ii) $|\vec{b}| = 0$ অর্থাৎ, $\vec{b}$ এটা শূন্য ভেক্টৰ আৰু $\vec{a}$ যিকোনো ভেক্টৰ।

iii) $\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = 90^0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{a} \neq 0$, $\vec{b} \neq 0$

উপাংশৰ মাধ্যমত স্কেলাৰ পূৰণ ঃ

ধৰা হ'ল, $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

তেনেহ'লে সিহঁতৰ স্কেলাৰ পূৰণৰ সংজ্ঞা হ'ল,

$\vec{a}.\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}).(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k})$

$= a_1\vec{i}.(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) + a_2\vec{j}.(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) +$

$a_3\vec{k}.(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k})$

$= a_1b_1(\vec{i}.\vec{i}) + a_1b_2(\vec{i}.\vec{j}) + a_1b_3(\vec{i}.\vec{k}) + a_2b_1(j.\vec{i}) + a_2b_2(\vec{j}.\vec{j}) +$

$a_2b_2(\vec{j}.\vec{k}) + a_3b_1(\vec{k}.\vec{i}) + a_3b_2(\vec{k}.\vec{j}) + a_3b_3(\vec{k}.\vec{k})$

$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

অর্থাৎ, $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

দুটা ভেক্টৰৰ স্কেলাৰ পূৰণ হ'ল সিহঁতৰ অনুৰূপ উপাংশৰ পূৰণফালৰ যোগফল।

দুটা ভেক্টৰৰ মাজৰ কোণ ঃ

ধৰা হ'ল, $\vec{a}$, $\vec{b}$ ভেক্টৰ দুটাৰ মাজৰ কোণ θ.

গতিকে, $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$\Rightarrow \cos\theta = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

যদি $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$

তেনেহ'লে, $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

$|\vec{a}| =$; $|\vec{b}| =$

$\therefore \theta = \cos^{-1}$.

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ ঃ $\vec{a}.\vec{b}$ নিৰ্ণয় কৰক যদি,

i) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ আৰু $\vec{b} = 4\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$

ii) $\vec{a} = \vec{j} + 2\vec{k}$ আৰু $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$

iii) $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{k}$ আৰু $\vec{b} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$

সমাধান ঃ i) $\vec{a}.\vec{b} = (\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}).(4\vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k})$

$= (1).(4) + (-2).(-4) + (1).(7)$

$= 19$

ii) $\vec{a}.\vec{b} = (\vec{j} + 2\vec{k}).(2\vec{i} + \vec{j})$

$= (0).(2) + (1).(0) + (2).(1)$

$= 2$

iii) $\vec{a}.\vec{b} = (\vec{j} - 2\vec{k}).(2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k})$

$= (0).(2) + (1).(3) + (-2).(-2)$

$= 7$

উদাহৰণ ২ ঃ $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ আৰু $\vec{b} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ ভেক্টৰ দুটাৰ মাজৰ কোণ 'θ' নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ভেক্টৰ দুটাৰ মাজৰ কোণ 'θ' হ'লে, $\cos\theta =$

এতিয়া, $\vec{a}.\vec{b} = (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}).(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = 1 - 1 - 1 = -1$

$|\vec{a}| =$ $=$, $|\vec{b}| =$ $=$

গতিকে, $\cos\theta =$ $\therefore \theta = \cos^{-1}$.

উদাহৰণ ৩ ঃ 'm'ৰ কি মানৰ বাবে $\vec{\ }$ আৰু $\vec{\ }$ ভেক্টৰ দুটা পৰস্পৰ লম্ব ?

i) $\vec{\ }$ = m$\vec{\ }$ + 2$\vec{\ }$ + $\vec{\ }$ আৰু $\vec{\ }$ = 4$\vec{\ }$ – 9$\vec{\ }$ + 2$\vec{\ }$

ii) $\vec{\ }$ = 5$\vec{\ }$ – 9$\vec{\ }$ + 2$\vec{\ }$ আৰু $\vec{\ }$ = m$\vec{\ }$ + 2$\vec{\ }$ + $\vec{\ }$

সমাধান ঃ i) দিয়া আছে, $\vec{\ }.\vec{\ }$ = 0

$\Rightarrow$ (m$\vec{\ }$ + 2$\vec{\ }$ + $\vec{\ }$).(4$\vec{\ }$ – 9$\vec{\ }$ + 2$\vec{\ }$) = 0

$\Rightarrow$ 4m – 18 + 2 = 0

$\Rightarrow$ 4m – 16 = 0

$\Rightarrow$ 4m = 16

$\Rightarrow$ m = 4

ii) দিয়া আছে, $\vec{\ }.\vec{\ }$ = 0

$\Rightarrow$ 5m – 18 + 2 = 0

$\Rightarrow$ 5m – 16 = 0

$\Rightarrow$ m = $\frac{\ }{\ }$

উদাহৰণ ৪ ঃ 2$\vec{\ }$ + 6$\vec{\ }$ + 3$\vec{\ }$ ভেক্টৰৰ ওপৰত 7$\vec{\ }$ + $\vec{\ }$ – 4$\vec{\ }$ ভেক্টৰৰ অভিক্ষেপ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $\vec{\ }$ = 7$\vec{\ }$ + $\vec{\ }$ – 4$\vec{\ }$, $\vec{\ }$ = 2$\vec{\ }$ + 6$\vec{\ }$ + 3$\vec{\ }$

$\therefore$ $\vec{\ }$ৰ ওপৰত $\vec{\ }$ৰ অভিক্ষেপ = $\frac{\ }{\ }$ = $\frac{\ }{\ }$

= $\frac{\ }{\ }$ = $\frac{\ }{\ }$.

উদাহৰণ ৫ ঃ $\vec{\ }$ আৰু $\vec{\ }$ একক ভেক্টৰ দুটাৰ মাজৰ কোণ θ হ'লে, প্ৰমাণ কৰক যে sin$\frac{\theta}{\ }$ = $\frac{\ }{\ }$|$\vec{\ }$ – $\vec{\ }$|.

সমাধান ঃ |$\vec{\ }$ – $\vec{\ }$|^2 = $\vec{\ }^2$ + $\vec{\ }^2$ – 2$\vec{\ }.\vec{\ }$ = 1 + 1 – 2|$\vec{\ }$||$\vec{\ }$|cosθ

= 2 – 2cosθ

= 2(1 – 2cosθ)

= 2$\frac{\ }{\ }$

$\therefore$ | – | = 2sin

$\Rightarrow$ sin = | – |

উদাহৰণ ৬ ঃ যদি + + = , | | = 3, | | = 5 আৰু | | = 7, আৰু ৰ মাজৰ কোণ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, + + =

$\Rightarrow$ + = –

$\Rightarrow$ (+)^2 = (–)^2

$\Rightarrow$ ( )^2 + ( )^2 + 2 . = ( )^2

$\Rightarrow$ | |^2 + | |^2 + 2| || |cosθ = | |^2

$\Rightarrow 3^2 + 5^2 + 2(3)(5)\cos\theta = 7^2$

$\Rightarrow \cos\theta =$

$\Rightarrow \theta =$.

উদাহৰণ ৭ ঃ | | আৰু | | নিৰ্ণয় কৰক, যদি (–).(+) = 27 আৰু | | = 2| |.

সমাধান ঃ আমি পালোঁ, (–).(+) = 27

$\Rightarrow 4$| |^2 – | |^2 = 27

$\Rightarrow 3$| |^2 = 27

$\Rightarrow$ | |^2 = 9

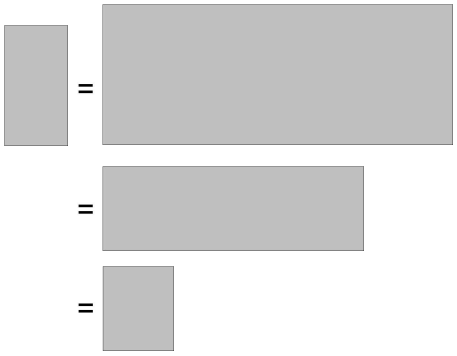
$\Rightarrow$ | | = 3

$\Rightarrow$ | | = 2| | = 2 × 3 = 6

$\therefore$ | | = 6 আৰু | | = 3.

উদাহৰণ ৮ ঃ যদি = 3 – 5 + 2 আৰু = 7 + – 2 , ৰ ওপৰত ৰ অভিক্ষেপ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ৰ ওপৰত ৰ অভিক্ষেপ =



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ তলৰ ভেক্টৰবোৰৰ মাজৰ কোণ নির্ণয় কৰক।

i) = 3 – + 2, = –4 + 2

ii) = – + 2, = –2 + 2 + 4

প্রশ্ন নং ২ঃ যদি + + = আৰু | | = 3, | | = 5, | | = 7, আৰু ৰ মাজৰ কোণ নির্ণয় কৰক।

১৩.৩.২ ক্রছ বা ভেক্টৰ পূৰণ

দুটা ভেক্টৰ আৰু ভেক্টৰ পূৰণক × ৰে বুজোৱা হয় (পঢ়োতে ক্রছ বুলি পঢ়া হয়) আৰু ইয়াক এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হয়। × = | || |sinθ, য'ত θ হ'ল আৰু ভেক্টৰৰ মাজৰ কোণ আৰু হ'ল আৰু ৰ সমতলৰ ওপৰত লম্ব একক ভেক্টৰ যাতে , আৰু এ এটা সোঁহতীয়া প্রণালী গঠন কৰে।

ভেক্টৰ পূৰণৰ ধর্ম ঃ

1) ভেক্টৰ পূৰণ ক্রমবিনিময় নহয়।

হ'ল আৰু ৰ সমতলৰ ওপৰত লম্ব একক ভেক্টৰ যাতে , আৰু এটা সোঁহতীয়া প্রণালী গঠন কৰে। – হ'ল আৰু ৰ সমতলৰ ওপৰত লম্ব একক ভেক্টৰ যাতে , , – এ এটা সোঁহতীয়া প্রণালী গঠন কৰে।

× = | || |sinθ

× = | || |sinθ(–) = –| || |sinθ = – ×

∴ × ≠ × .

2) ভেক্টৰ যোগ সাপেক্ষে ভেক্টৰ পূৰণে বিতৰণ বিধি মানি চলে, অর্থাৎ,

$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

আৰু $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

3) দুটা সমান্তৰাল ভেক্টৰৰ ভেক্টৰ পূৰণ শূন্য ভেক্টৰ।

দুটা ভেক্টৰ $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ সমান্তৰাল হ'লে, সিহঁতৰ মাজৰ কোণ $\theta = 0$ বা π. গতিকে,

$\sin\theta = 0$.

$\therefore \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\vec{n} = 0$

বিপৰীতক্ৰমে যদি দুটা অশূন্য ভেক্টৰৰ ভেক্টৰ পূৰণ শূন্য ভেক্টৰ, তেনেহ'লে ভেক্টৰ দুটা সমান্তৰাল।

4) $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\vec{n} = \vec{c}$

সেইদৰে, $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{d}$

আকৌ, $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{e}$

5) আমি পালোঁ, $\vec{i} \times \vec{j} = |\vec{i}||\vec{j}|\sin 90^0\,\vec{k} = \vec{k}$, যিহেতু $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ এ এটা সোঁহতীয়া প্ৰণালী গঠন কৰে।

$\therefore \vec{j} \times \vec{k} = -\vec{i}$

সেইদৰে, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ $\quad\quad$ $\therefore \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

আৰু $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ $\quad\quad$ $\therefore \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$

6) ধৰা হ'ল, $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, তেনেহ'লে সিহঁতৰ ভেক্টৰ পূৰণ হ'ব,

$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k})$

$= a_1b_1\vec{i} \times \vec{i} + a_1b_2\vec{i} \times \vec{j} + a_1b_3\vec{i} \times \vec{k} + a_2b_1\vec{j} \times \vec{i} + a_2b_2\vec{j} \times \vec{j} +$

$a_2b_3\vec{j} \times \vec{k} + a_3b_1\vec{k} \times \vec{i} + a_3b_2\vec{k} \times \vec{j} + a_3b_3\vec{k} \times \vec{k}$

$= 0 + a_1b_2\vec{k} - a_1b_3\vec{j} - a_2b_1\vec{k} + 0 + a_2b_3\vec{i} + a_3b_1\vec{j} - a_3b_2\vec{i} + 0$

$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$

$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

7) স্কেলাৰ আৰু ভেক্টৰ পূৰণৰ মাজৰ সম্বন্ধ ঃ

$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2\theta$

$= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2\theta)$

$= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}||\vec{b}|\cos^2\theta)^2$

$= a^2b^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2$

$\therefore (\vec{a} \times \vec{b})^2 = a^2b^2 - (\vec{a}.\vec{b})^2$

8) যদি $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ এ এটা ত্ৰিভুজৰ সন্নিহিত বাহু বুজায়, তেনেহ'লে ত্ৰিভুজটোৰ কালি $\frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$.

ধৰা হ'ল, $\vec{BA} = \vec{a}$ আৰু $\vec{BC} = \vec{b}$

আকৌ, $CD = |\vec{b}|\sin\theta$

ABC ত্ৰিভুজৰ কালি $= \frac{1}{2}AB.CD$

$= \frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

$= \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$

9) যদি $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ এ এটা সামান্তৰিকৰ সন্নিহিত বাহু বুজায়, তেনেহ'লে সামান্তৰিকটোৰ কালি $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

ধৰা হ'ল, $\vec{BA} = \vec{a}$ আৰু $\vec{BC} = \vec{b}$

আকৌ, $DE = |\vec{b}|\sin\theta$

ABCD সামান্তৰিকৰ কালি $= AB.DE.$

$= |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$

$= |\vec{a} \times \vec{b}|$

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ ঃ যদি $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ আৰু $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি পালোঁ, $\vec{a} \times \vec{b} =$

$= (3 - 2)\vec{i} - (3 - 1)\vec{j} + (2 - 1)\vec{k}$

$= \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

উদাহৰণ ২ঃ $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ আৰু $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ ভেক্টৰ দুটাৰ লম্ব একক ভেক্টৰৰ সমীকৰণ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ উভয়ৰে ওপৰত লম্ব হোৱা ভেক্টৰ হ'ল,

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1-3)\vec{i} - (-8+6)\vec{j} + (4-2)\vec{k}$$

$$= -5\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

$$\therefore |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-5)^2 + 2^2 + 6^2} = \sqrt{65}$$

$$\therefore \text{নিৰ্ণেয় একক ভেক্টৰ} = \frac{-5\vec{i} + 2\vec{j} + 6\vec{k}}{\sqrt{65}} = \frac{-5}{\sqrt{65}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{65}}\vec{j} + \frac{6}{\sqrt{65}}\vec{k}.$$

উদাহৰণ ৩ঃ প্ৰমাণ কৰক যে $|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{b}) - (\vec{a}.\vec{b})^2$

সমাধান ঃ আমি জানো যে $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$

$$\therefore |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$$

$$\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta)^2$$

$$\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2\theta)$$

$$\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2\theta)$$

$$\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta)^2$$

$$\therefore |\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (\vec{a}.\vec{a})(\vec{b}.\vec{b}) - (\vec{a}.\vec{b})^2$$

উদাহৰণ ৪ঃ যদি $|\vec{a} \times \vec{b}|$ if $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a}.\vec{b} = 12$.

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$, $\vec{a}.\vec{b} = 12$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{9}{25}}$$

এতিয়া, $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = 10 \times 2 \times \frac{4}{5} = 16$



১৩.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- ধৰা হ'ল $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ দুটা অশূন্য ভেক্টৰ আৰু ভেক্টৰ দুটাৰ মাজৰ কোণ θ, তেনেহ'লে $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ৰ স্কেলাৰ পূৰণক $\vec{a}.\vec{b}$ ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়, $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi$.
- $\vec{a}$ ৰ ওপৰত $\vec{b}$ ৰ অভিক্ষেপ = $\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\vec{a}}$ = $\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|}$ = $\vec{a}.\hat{b}$
- $\vec{b}$ ৰ ওপৰত $\vec{a}$ ৰ অভিক্ষেপ = $\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\vec{b}}$ = $\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|}$ = $\hat{a}.\vec{b}$
- ধৰা হ'ল, $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ দুটা অশূন্য ভেক্টৰ হ'লে, $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.
- ধৰা হ'ল, $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, তেনেহ'লে, $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, অর্থাৎ, দুটা ভেক্টৰৰ স্কেলাৰ পূৰণ হ'ল সিহঁতৰ অনুৰূপ উপাংশৰ পূৰণফলৰ যোগফল।
- ধৰা হ'ল, $\vec{a}$, $\vec{b}$ ভেক্টৰ দুটাৰ মাজৰ কোণ θ হ'লে, $\theta = \cos^{-1}\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$
- দুটা ভেক্টৰ $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ৰ ক্ৰছ পূৰণক $\vec{a} \times \vec{b}$ ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰসংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়। $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$, য'ত θ হ'ল $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ৰ মাজৰ কোণ যাতে $\vec{a}$, $\vec{b}$ আৰু $\hat{n}$ এটা সোঁহতীয়া প্ৰণালী গঠন কৰে।
- ধৰা হ'ল, $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$, তেনেহ'লে,

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.

১৩.৫ অধিক জানিবলৈ

ইংৰাজী গ্ৰন্থ ঃ

1) Kishan, Hari. *Vector Algebra and Calculus*. New Delhi: Atlantic Publishers & Distributors (P) Ltd.
2) Narayan, Shanti. *A Textbook of Vector Calculus*.
3) Pandey, R. K. *Vector Analysis*. New Delhi: Discovery Publishing House.
4) Sharma, Anil Kumar. *Textbook of Vector Calculus*. New Delhi: Discovery Publishing House.
5) Tallack, J. C. *Introduction to Vector Analysis*. Cambridge University Press.
6) *Vector Algebra*. New Delhi: Laxmi Publications(P) Ltd.

১৩.৬ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ i) ইয়াত, . = 3.(–4) + (–1).0 + 2.2 = –8

| | = = |

| | = = |

$\therefore \cos\theta =$ = = =

$\therefore \theta = \cos^{-1}$.

ii) নিজে চেষ্টা কৰক।

২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, আৰু ৰ মাজৰ কোণ θ তেনেহ'লে,

$\cos\theta =$ = ...(1)

যিহেতু, + + =

$\Rightarrow \square + \square = -\square$

$\Rightarrow (\square + \square)^2 = \square^2$

$\Rightarrow \square + 2\square.\square + \square^2 = \square^2$

$\Rightarrow 3^2 + 2\square.\square + 5^2 = 7^2$

$\Rightarrow \square.\square = \square = \square$

(1)ৰ পৰা, $\cos\theta = \square = \square \Rightarrow \theta = 60^0$

১৩.৭ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ দেখুওৱাক যে $|\square \times \square|^2 + |\square.\square|^2 = |\square|^2|\square|^2$.

প্ৰশ্ন ২ ঃ যদি $\square = 2\square - 3\square - \square, \square = \square + 4\square - 2\square$, দেখুওৱাক যে $\square \times \square$ আৰু $\square \times \square$.

প্ৰশ্ন ৩ ঃ সামান্তৰিকৰ কালি নিৰ্ণয় কৰক, যদি

i) সন্নিহিত বাহু দুটা $\square + 2\square - 3\square$ আৰু $3\square - 2\square + \square$.

ii) কৰ্ণ দুডাল $3\square + \square - 2\square$ আৰু $\square - 3\square + 4\square$.

প্ৰশ্ন ৪ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে i) $|\square + \square| \le |\square| + |\square|$

ii) $(\square.\square)^2 \le |\square|^2|\square|^2$.

*** ***** ***

অধ্যায় ১৪ ঃ ভেক্টৰৰ পূৰণ - ২

অধ্যায় গাঁথনি

১৪.১ উদ্দেশ্য

১৪.২ পৰিচয়

১৪.৩ তিনিটা ভেক্টৰৰ পূৰণ

১৪.৩.১ স্কেলাৰ ত্রিপূৰণ

১৪.৩.২ ভেক্টৰ ত্রিপূৰণ

১৪.৪ চাৰিটা ভেক্টৰৰ পূৰণ

১৪.৪.১ চাৰিটা ভেক্টৰৰ স্কেলাৰ পূৰণ

১৪.৪.২ চাৰিটা ভেক্টৰৰ ভেক্টৰ পূৰণ

১৪.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১৪.৬ অধিক জানিবলৈ

১৪.৭ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১৪.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

১৪.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- তিনিটা ভেক্টৰৰ পূৰণ সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰিব পাৰিব
- স্কেলাৰ আৰু ভেক্টৰ ত্রিপূৰণ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- চাৰিটা ভেক্টৰৰ পূৰণ সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰিব পাৰিব।

১৪.২ পৰিচয়

আগৰ অধ্যায়ত আমি দুটাৰ ভেক্টৰৰ স্কেলাৰ আৰু ভেক্টৰ পূৰণৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিলো। এই অধ্যায়ত আমি স্কেলাৰ ত্রিপূৰণ আৰু ভেক্টৰ ত্রিপূৰণ সম্বন্ধেও আলোচনা কৰিম। শেষত আমি চাৰিটা ভেক্টৰৰ পূৰণ সম্পর্কেও আলোচনা কৰিম।

১৪.৩ তিনিটা ভেক্টৰৰ পূৰণ

$\vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})$ আৰু $(\vec{a} \times \vec{b}).\vec{c}$ আকৃতিৰ পূৰণক ভেক্টৰক ত্রিপূৰণ (Triple Products of Vectors) বুলি কোৱা হয়।

১৪.৩.১ স্কেলাৰ ত্রিপূৰণ

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল $\vec{a}$, $\vec{b}$ আৰু $\vec{c}$ তিনিটা ভেক্টৰ। তেনেহ'লে $\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$ক $\vec{a}$, $\vec{b}$ আৰু $\vec{c}$ স্কেলাৰ ত্রিপূৰণ (Scalar Triple Product) বোলে আৰু ইয়াক $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$বে বুজোৱা হয়।

$\therefore [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})$.

টোকা ঃ $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$ এটা স্কেলাৰ ৰাশি।

স্কেলাৰ ত্রিপূৰণৰ জ্যামিতীয় অর্থ ঃ এটা আয়তীয় চৌপলৰ দাঁতি $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ হ'লে স্কেলাৰ ত্রিপূৰণ $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$এ সাংখ্যিকভাৱে চৌপলটোৰ আয়তন বুজায়।

উপাংশৰ সহায়ত স্কেলাৰ ত্রিপূৰণ ঃ

ধৰা হ'ল, $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, and $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$,

তেনেহ'লে, $\vec{b}\times\vec{c} =$

$= (b_2c_3 - b_3c_2)\vec{i} - (b_1c_3 - b_3c_1)\vec{j} + (b_1c_2 - b_2c_1)\vec{k}$

$\therefore \vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c}) = (b_2c_3 - b_3c_2)a_1 - (b_1c_3 - b_3c_1)a_2 + (b_1c_2 - b_2c_1)a_3$

$=$

স্কেলাৰ ত্রিপূৰণৰ ধর্ম ঃ

1) $\vec{a}$, $\vec{b}$ আৰু $\vec{c}$ তিনিটা ভেক্টৰ হ'লে, তেনেহ'লে,
$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = [\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}] = [\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}]$

2) স্কেলাৰ ত্রিপূৰণৰ মান একেই থাকে, কিন্তু চিন $\vec{a}$, $\vec{b}$ আৰু $\vec{c}$চক্রীয় ক্রম সলনি হয়, অর্থাৎ, $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = -[\vec{b}\,\vec{a}\,\vec{c}]$

3) যদি দুটা ভেক্টৰ সমান হয়, তেনেহ'লে স্কেলাৰ ত্রিপূৰণ শূন্য,
অর্থাৎ, $[\vec{a}\,\vec{a}\,\vec{b}] = (\vec{a}\times\vec{a}).\vec{b} = 0$

4) , আৰু তিনিটা ভেক্টৰ আৰু λ এটা স্কেলাৰ হ'লে,

$[\lambda \quad \quad \quad] = \lambda[\quad \quad \quad]$

5) যদি দুটা ভেক্টৰ সমান্তৰাল বা একেৰেখীয়া হয়, তেনেহ'লে স্কেলাৰ ত্রিপূৰণ শূন্য,

অর্থাৎ, $[\quad \quad \quad] = [\lambda \quad \quad \quad]$ যদি , ৰ সমান্তৰাল

$= \lambda[\quad \quad \quad]$

$= \lambda.0 = 0$

উদাহৰণ ১ ঃ যদি $= + + , = - + + 2$ আৰু $= 3 + + 2$,

তেন্তে $.(\times)$ৰ মান নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $\times =$

$= (1 - 2) - (-1 - 6) + (-1 - 3)$

$= - + 7 - 4$

এতিয়া, $.(\times) = (+ +).(- + 7 - 4)$

$= 1.(-1) + 1.7 + 1.(-4)$

$= -1 + 7 - 4 = 2$

উদাহৰণ ২ ঃ এটা আয়তীয় চৌপলৰ দাঁতি তিনিটা ক্রমে $= - 3 + 4$, $=$ $2 - + $ আৰু $= 3 + + $। আয়তী চৌপলটোৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে, $.(\times) =$

$= 1(1 + 1) + 3(2 - 3) + 4(2 + 3)$

$= 2 - 3 + 20 = 19$

প্রদত্ত চৌপলটো আয়তন (V) = $[\quad \quad \quad] = 19.$

উদাহৰণ ৩ ঃ প্রমাণ কৰক যে $[+ + +] = 2[\quad \quad \quad]$

সমাধান ঃ বাঁওপক্ষ = $[+ + +]$

$= (+).[(+) \times (+)]$

= (+).[× + × + × + ×]

= (+).[× + × + ×] Q × = 0

= .(×) + .(×) + .(×) +

.(×) + .(×) + .(×)

= [ ] + [ ] + [ ] + [ ] + [ ]

+ [ ]

= [ ] + [ ]

= [ ] + [ ]

= 2[ ] = সোঁপক্ষ

১৪.৩.২ ভেক্টৰ ত্রিপূৰণ

ধৰা হ'ল, , আৰু তিনিটা ভেক্টৰ। তেনেহ'লে, (×)× আৰু × (×)ক ভেক্টৰ ত্রিপূৰণ বোলে।

ভেক্টৰ ত্রিপূৰণৰ ধর্ম ঃ

1) ভেক্টৰ ত্রিপূৰণে সাহচর্য্য বিধি মানি নচলে,
   অর্থাৎ, (×)× ≠ × (×).
2) যদি , আৰু তিনিটা ভেক্টৰ হ'লে, তেনেহ'লে,
   (×)× = (.) – (.)
   সেইদৰে, × (×) = (.) – (.)

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ ঃ প্রমাণ কৰক যে,

i) (×)× + × (×) + × (×) =

ii) × (×) + × (×) + × (×) = 2

সমাধান ঃ

i) বাঁওপক্ষ = × (×) + × (×) + × (×)

= (.) – (.) + (.) – (.c) +

(.) – (.) =

ii) ধৰা হ'ল, $\vec{r} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$

$\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{r}) = (\vec{i}.\vec{r})\vec{i} - (\vec{i}.\vec{i})\vec{r} = \vec{i} - a_1\vec{i}$

সেইদৰে, $\vec{j} \times (\vec{j} \times \vec{r}) = \vec{j} - a_2\vec{j}$ আৰু $\vec{k} \times (\vec{k} \times \vec{r}) = \vec{k} - a_3\vec{k}$

$\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{r}) + \vec{j} \times (\vec{j} \times \vec{r}) = \vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{r})$

$= (\vec{i} - a_1\vec{i}) + (\vec{j} - a_2\vec{j}) + (\vec{k} - a_3\vec{k})$

$= 3\vec{i} - (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})$

$= 3\vec{i} - \vec{r}$

$= 2\vec{i}$

উদাহৰণ ২ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে,

$\vec{i} \times \{\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{r})\} = (\vec{i}.\vec{r})(\vec{i} \times \vec{i}) - (\vec{i}.\vec{i})(\vec{i} \times \vec{r})$

সমাধান ঃ $\vec{i} \times \{\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{r})\} = \vec{i} \times \{(\vec{i}.\vec{r})\vec{i} - (\vec{i}.\vec{i})\vec{r}\}$

$= (\vec{i}.\vec{r})(\vec{i} \times \vec{i}) - (\vec{i}.\vec{i})(\vec{i} \times \vec{r})$

১৪.৪ চাৰিটা ভেক্টৰৰ পূৰণ

১৪.৪.১ চাৰিটা ভেক্টৰৰ স্কেলাৰ পূৰণ

স্কেলাৰ পূৰণ $(\vec{a} \times \vec{b}).(\vec{c} \times \vec{d})$ক চাৰিটা ভেক্টৰৰ স্কেলাৰ পূৰণ বুলি কোৱা হয়।

ধৰা হ'ল, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{e}$, তেনেহ'লে,

$(\vec{a} \times \vec{b}).(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \times \vec{b}).\vec{d}$

$= \vec{d}.(\vec{a} \times \vec{b})$

$= \vec{d}.\{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})\}$

$= \vec{d}.\{(\vec{a}.\vec{c})\vec{b} - (\vec{b}.\vec{c})\vec{a}\}$

$= (\vec{a}.\vec{c})(\vec{b}.\vec{d}) - (\vec{b}.\vec{c})(\vec{a}.\vec{d})$

$=$ 

উদাহৰণ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে,

$(\vec{a} \times \vec{b}).(\vec{c} \times \vec{d}) + (\vec{b} \times \vec{c}).(\vec{a} \times \vec{d}) + (\vec{c} \times \vec{a}).(\vec{b} \times \vec{d}) = 0$

সমাধান ঃ

$(\square \times \square).(\square \times \square) = (\square.\square)(\square.\square) - (\square.\square)(\square.\square)$ ... ...(1)

$(\square \times \square).(\square \times \square) = (\square.\square)(\square.\square) - (\square.\square)(\square.\square)$ ... ...(2)

$(\square \times \square).(\square \times \square) = (\square.\square)(\square.\square) - (\square.\square)(\square.\square)$ ... ...(3)

(1), (2) আৰু (3) যোগ কৰি আমি পাওঁ,

$(\square \times \square).(\square \times \square) + (\square \times \square).(\square \times \square) + (\square \times \square).(\square \times \square) = 0$

১৪.৪.২ চাৰিটা ভেক্টৰৰ ভেক্টৰ পূৰণ

ভেক্টৰ পূৰণ $(\square \times \square) \times (\square \times \square)$ক চাৰিটা ভেক্টৰৰ ভেক্টৰ পূৰণ বুলি কোৱা হয়।

$\square$ **আৰু** $\square$**ত ভেক্টৰ পূৰণ** $(\square \times \square) \times (\square \times \square)$ ঃ ধৰা হ'ল, $\square \times \square = \square$

তেনেহ'লে, $(\square \times \square) \times (\square \times \square) = (\square \times \square) \times \square$

$= (\square.\square)\square - (\square.\square)\square$

$= (\square.\square \times \square)\square - (\square.\square \times \square)\square$

$= [\square\square\square]\square - [\square\square\square]\square$

$\square$ **আৰু** $\square$**ত ভেক্টৰ পূৰণ** $(\square \times \square) \times (\square \times \square)$ ঃ ধৰা হ'ল, $\square \times \square = \square$,

তেনেহ'লে, $(\square \times \square) \times (\square \times \square) = \square \times (\square \times \square)$

$= (\square.\square)\square - (\square.\square)\square$

$= (\square \times \square.\square)\square - (\square \times \square.\square)d$

$= [\square\square\square]\square - [\square\square\square]\square$

উদাহৰণ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে, $[\square \times \square, \square \times \square, \square \times \square] = [\square\square\square]^2$

সমাধান ঃ $[\square \times \square, \square \times \square, \square \times \square] = (\square \times \square).(\square \times \square) \times (\square \times \square)$

$= (\square \times \square).\{[\square\square\square]\square - [\square\square\square]\square\}$

$= (\square \times \square).\{[\square\square\square]\square - \square\}$

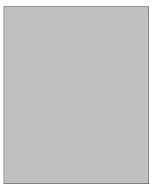
$= [\square\square\square](\square \times \square.\square)$

$= [\square\square\square][\square\square\square]$

$= [\square\square\square]^2$

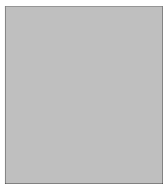
উদাহৰণ ঃ যদি $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ আৰু $\vec{d} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$, তেন্তে নির্ণয় কৰক ঃ

i) $(\vec{a} \times \vec{b}).(\vec{c} \times \vec{d})$, ii) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d})$

সমাধান ঃ আমি জানো যে, $\vec{a} \times \vec{b} =$ 

$= \vec{i}(1 + 3) - \vec{j}(2 - 1) + \vec{k}(-6 - 1)$

$= 4\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k}$

আকৌ $\vec{c} \times \vec{d} =$ 

$= \vec{i}(3 + 1) - \vec{j}(-3 - 2) + \vec{k}(1 - 2)$

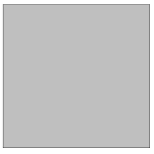
$= 4\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$

এতিয়া, i) $(\vec{a} \times \vec{b}).(\vec{c} \times \vec{d}) = (4\vec{i} - \vec{j} - 7\vec{k}).(4\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k})$

$= 4 \times 4 + (-1).5 + (-7).(-1)$

$= 18$

ii) আমি জানো যে, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}]\,\vec{c} - [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]\,\vec{d}$

এতিয়া, $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] =$ 

$= 2(-9 + 1) - 1(3 - 2) + 1(-1 + 6)$

$= -12$

আৰু $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}] =$ 

$= 2(-3 - 1) - 1(1 + 1) + 1(1 - 3)$

$= -12$

$\therefore (\square \times \square) \times (\square \times \square) = -12(-\square + \square + \square) - (-12)(2\square - \square + 3\square)$

$= 12\square - 12\square - 12\square + 24\square - 12\square + 36\square$

$= 36\square - 24\square + 24\square$

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ



প্ৰশ্ন নং ১ঃ $\square = 7\square - 2\square + 3\square$, $\square = -\square - 2\square + \square$ আৰু $\square = 2\square + 8\square + \square$, $[\square\square\square]$ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২ঃ যদি $\square = \square + 2\square - \square$, $\square = -\square - 2\square + \square$, $\square = -\square + \square$ আৰু $\square = 3\square + \square + \square$, তেন্তে নিৰ্ণয় কৰক ঃ

i) $(\square \times \square).(\square \times \square)$ ii) $(\square \times \square) \times (\square \times \square)$



১৪.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- $\square$, $\square$ আৰু $\square$ তিনিটা ভেক্টৰ হ'লে $\square.(\square \times \square)$ক $\square$, $\square$ আৰু $\square$ৰ স্কেলাৰ ত্ৰিপূৰণ বোলে আৰু ইয়াক $[\square\square\square]$ৰে বুজোৱা হয়।
- এটা আয়তীয় চৌপলৰ দাঁতি $\square$, $\square$, $\square$ হ'লে স্কেলাৰ ত্ৰিপূৰণ $[\square\square\square]$ এ সাংখ্যিকভাৱে চৌপলৰটোৰ আয়তন বুজায়।
- ধৰা হ'ল, $\square = a_1\square + a_2\square + a_3\square$, $\square = b_1\square + b_2\square + b_3\square$, আৰু $\square = c_1\square + c_2\square + c_3\square$

  তেনেহ'লে, $\square.(\square \times \square) =$.
- স্কেলাৰ পূৰণ $(\square \times \square).(\square \times \square)$ক চাৰিটা ভেক্টৰৰ স্কেলাৰ পূৰণ বুলি কোৱা হয় আৰু

  $(\square \times \square).(\square \times \square) =$
- ভেক্টৰ পূৰণ $(\square \times \square) \times (\square \times \square)$ ক চাৰিটা ভেক্টৰৰ ভেক্টৰ পূৰণ বুলি কোৱা হয়।
- $(\square \times \square) \times (\square \times \square) = [\square\square\square]\square - [\square\square\square]\square = [\square\square\square]\square - [\square\square\square]\square$

১৪.৬ অধিক জানিবলৈ

ইংৰাজী গ্ৰন্থ ঃ

1) Kishan, Hari. *Vector Algebra and Calculus*. New Delhi: Atlantic Publishers & Distributors (P) Ltd.
2) Narayan, Shanti. *A Textbook of Vector Calculus*.
3) Pandey, R. K. *Vector Analysis*. New Delhi: Discovery Publishing House.
4) Sharma, Anil Kumar. *Textbook of Vector Calculus*. New Delhi: Discovery Publishing House.
5) Tallack, J. C. *Introduction to Vector Analysis*. Cambridge University Press.
6) *Vector Algebra*. New Delhi: Laxmi Publications(P) Ltd.

১৪.৭ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ [ ] =

= 7(0 – 16) + 2(0 – 4) + 3(8 + 4)

= –112 – 8 + 36

= –84

২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ i) –38, ii) – – 19 – 8

১৪.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ যদি = 2 – 3 , = + – আৰু = 3 – . .(×) নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ২ ঃ এটা আয়তীয় চৌপলৰ দাঁতি তিনিটা + + , – + , + 2 – . আয়তী চৌপলটোৰ আয়তন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ ঃ যদি $\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ আৰু $\vec{c} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$. নিৰ্ণয় কৰক।

(i) $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ (ii) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ (iii) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c})$.

প্ৰশ্ন ৪ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে, i) $\{(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{a} \times \vec{b})\}.\vec{c} = \vec{a}.(\vec{b} \times \vec{c})$

ii) $(\vec{a} \times \vec{b}).(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{b}) = 2\vec{a}.\vec{a} \times \vec{b}$

প্ৰশ্ন ৫ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে, i) $(\vec{a} \times \vec{b}).(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a}.\vec{a} \times \vec{b})$

ii) $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{a}.\vec{a} \times \vec{b})\vec{b}$

প্ৰশ্ন ৬ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে, $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}] = 2[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$

*** ***** ***

অধ্যায় ১৫ ঃ ভেক্টৰ কলনগণিত

অধ্যায় গাঁথনি

১৫.১ উদ্দেশ্য
১৫.২ পৰিচয়
১৫.৩ স্কেলাৰ আৰু ভেক্টৰ বিন্দু ফলন
১৫.৪ ভেক্টৰ অৱকল সংকাৰক (ডেল)
১৫.৫ গ্রেডিয়েণ্ট, ডাইভাৰজেনছ আৰু কার্ল আৰু কার্ল আৰু আনুষংগিক অভেদ
১৫.৬ লাপ্লাছিয় সংকাৰক
১৫.৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১৫.৮ অধিক জানিবলৈ
১৫.৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
১৫.১০ আৰ্হি প্রশ্ন

১৫.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি—

- স্কেলাৰ আৰু ভেক্টৰ বিন্দু ফলন সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰিব পাৰিব
- ভেক্টৰ অৱকল সংকাৰক (ডেল) সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰিব পাৰিব
- গ্রেডিয়েণ্ট, ডাইভাৰজেনছ আৰু কার্ল সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰিব পাৰিব, লগতে আনুষংগিক অভেদবোৰ জানিব
- লাপ্লাছিয় সংকাৰক সম্বন্ধে জানিব।

১৫.২ পৰিচয়

দ্বাদশ অধ্যায়ত আমি ভেক্টৰৰ ধাৰণা সম্পর্কে আলোচনা কৰিছোঁ।ত্রয়োদশ আৰু চতুদর্শ অধ্যায়ত আমি ভেক্টৰৰ পূৰণ সম্পর্কে আলোচনা কৰিছোঁ। এই অধ্যায়ত আমি ভেক্টৰ কলনগণিত (vector Calculus) সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম। এটা প্রামাণিক ভেক্টৰ অৱকল সংকাৰকৰ সহায়ত আমি স্কেলাৰ বিন্দু ফলনৰ গ্রেডিয়েণ্ট, আৰু ভেক্টৰ বিন্দু ফলনৰ ডাইভাৰজেনছ আৰু কার্লৰ ধাৰণাৰ অৱতাৰণা কৰিম। এই অধ্যায়ত আমি গ্রেডিয়েণ্ট, ডাইভাৰজেনছ আৰু কার্লৰ ধর্ম সম্বন্ধেও আলোচনা কৰিম।

১৫.৩ স্কেলাৰ আৰু ভেক্টৰ বিন্দু ফলন

অন্তৰিক্ষত থকা এটা অঞ্চল Rৰ প্ৰত্যেক বিন্দু pৰ অনুৰূপে যদি $\phi(p)$ৰে বুজোৱা এটা স্কেলাৰ থাকে, তেনেহ'লে ϕক R অঞ্চলৰ বাবে এটা স্কেলাৰ বিন্দু ফলন (Scalar Point Function) বুলি কোৱা হয়।

যদি pৰ স্থানাংক (x, y, z), তেনেহ'লে $\phi(p) = \phi(x, y, z)$.

উদাহৰণ ঃ

a) এটা নিৰ্দিষ্ট অঞ্চল আগুৰি থকা তৰলৰ যিকোনো বিন্দু pত উষ্ণতা $\phi(p)$ এটা স্কেলাৰ বিন্দু ফলন।

b) এটা নিৰ্দিষ্ট অঞ্চল আগুৰি থকা বস্তুৰ (Body) যিকোনো বিন্দু pত ঘনত্ব $\phi(p)$ এটা স্কেলাৰ বিন্দু ফলন।

অন্তৰিক্ষত থকা এটা অঞ্চল Rৰ প্ৰত্যেক বিন্দু pৰ অনুৰূপে যদি $\vec{\ }(p)$ৰে বুজোৱা এটা ভেক্টৰ থাকে, তেনেহ'লে $\vec{\ }$ক R অঞ্চলৰ বাবে এটা ভেক্টৰ বিন্দু ফলন (Vector Point Function) বুলি কোৱা হয়।

যদি pৰ স্থানাংক (x, y, z) হয়, তেনেহ'লে,

$\vec{\ }(p) = \vec{\ }(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{\ } + f_2(x, y, z)\vec{\ } + f_3(x, y, z)\vec{\ }$

উদাহৰণ ঃ

a) এটা নিৰ্দিষ্ট অঞ্চলত যিকোনো সময় tত p অৱস্থানত থকা এটা কণিকাৰ বেগ $\vec{\ }(p)$ অঞ্চলটোৰ বাবে এটা ভেক্টৰ বিন্দু ফলন।

b) এটা নিৰ্দিষ্ট অঞ্চলত যিকোনো সময় tত p অৱস্থানত থকা এটা কণিকাৰ ত্বৰম $\vec{\ }(p)$ অঞ্চলটোৰ বাবে ভেক্টৰ বিন্দু ফলন।

১৫.৪ ভেক্টৰ অৱকল সংকাৰক (ডেল)

ভেক্টৰ অৱকল সংস্কাৰক ∇ [ডেল (Read) বা নেব্‌লা (Nabla)] এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হয়। $\nabla \equiv$  য'ত $\vec{\ }$, $\vec{\ }$, $\vec{\ }$ হ'ল আয়তীয় অক্ষ OX, OY আৰু OZ অৰ দিশত একক ভেক্টৰ। প্ৰতীক ∇ (ডেল)ক 'নেব্‌লা' বুলি কোৱা হয়।

১৫.৫ গ্ৰেডিয়েণ্ট, ডাইভাৰজেনছ আৰু কার্ল আৰু আনুষংগিক অভেদ

গ্ৰেডিয়েণ্ট ঃ ধৰা হ'ল, $\phi(x, y, z)$ এটা স্কেলাৰ বিন্দু ফলন আৰু ই অবিচ্ছিন্নভাৱে অৱকলনীয়। তেনেহ'লে,

$\nabla\phi \equiv$  ϕ

$=$ 

ভেক্টৰক স্কেলাৰ বিন্দুফলন ϕৰ গ্ৰেডিয়েণ্ট (Gradient) বুলি কোৱা হয় আৰু ইয়াক grad ϕৰে বুজোৱা হয়। অৰ্থাৎ, grad $\phi = \nabla\phi$.

টোকা ঃ 1) grad $\phi = \nabla\phi$ এটা ভেক্টৰ যাৰ উপাংশ তিনিটা হ'ল, , , .

2) সংকাৰক (Operator) $\nabla \equiv$  এ ϕত ক্ৰিয়া কৰে। $\nabla\phi$ক

ভেক্টৰ $\nabla \equiv$ ক এটা স্কেলাৰেৰে পূৰণ বুলি ধৰিব পাৰি।

3) $\nabla\phi \neq \phi\nabla$. ϕ আৰু ∇ৰ মাজত কোনো '.' বা '×' নবহে।

গ্ৰেডিয়েণ্টৰ ধৰ্ম ঃ

ধৰ্ম ১ ঃ যদি f আৰু g দুটা স্কেলাৰ বিন্দু ফলন, তেনেহ'লে, $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$.

প্ৰমাণ ঃ $\nabla(f + g) =$  $(f + g)$

$=$ 

$=$ 

$=$ 

$=$ 

$\therefore \nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$.

টোকা ঃ সেইদৰে দেখুৱাব পাৰি যে, $\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g$.

ওপৰৰ ফল দুটা আমি একেলগে এনেধৰণে প্ৰকাশ কৰিব পাৰোঁ,

grad $(f \pm g)$ = grad f $\pm$grad g

ধৰ্ম ২ ঃ যদি f আৰু g দুটা স্কেলাৰ বিন্দু ফলন, তেনেহ'লে, $\nabla fg = f\nabla g + g\nabla$.

প্ৰমাণ ঃ $\nabla fg =$ 

$$= \square$$

$$= \square$$

$$= \square$$

$$= \square$$

$$= \nabla f + \nabla g.$$

টোকা ঃ ওপৰৰ ফলটো এনেধৰণেও প্ৰকাশ কৰিব পাৰি,

$$\text{grad}(fg) = f \text{ grad } g + g \text{ grad } f$$

ধৰ্ম ৩ ঃ এটা ধ্ৰুৱকৰ গ্ৰেডিয়েণ্ট শূন্য ভেক্টৰ।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল, $\phi(x, y, z)$ এটা ধ্ৰুৱক। গতিকে, $\square, \square, \square$ শূন্য।

$$\therefore \nabla\phi = \square.$$

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ ঃ যদি $\phi = x^2 + y - z - 1$, (1, 0, 0) বিন্দুত grad ϕ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ grad $f = \nabla\phi$

$$= \square$$

$$= \square(x^2 + y - z - 1) + \square(x^2 + y - z - 1) + \square(x^2 + y - z - 1)$$

$$= \square(2x) + \square(1) + \square(-1)$$

$$\therefore \text{grad}\phi_{(1, 0, 0)} = 2\square + \square - \square.$$

উদাহৰণ ২ ঃ যদি $\phi = xyz$, (1, 1, 1) বিন্দুত gradϕ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $\phi = xyz$

$$\text{grad } f = \nabla\phi = \square$$

$$= \square(xyz) + \square(xyz) + \square(xyz)$$

$$= \square(yz) + \square(xz) + \square(xy)$$

$$\therefore \text{grad}\phi_{(1, 1, 1)} = \square + \square + \square.$$

উদাহৰণ ৩ ঃ যদি $\phi = \log(x^2 + y^2 + z^2)$, $\nabla\phi$ কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $\phi = \log(x^2 + y^2 + z^2)$

$\nabla\phi =$ 

$=$  $\log(x^2 + y^2 + z^2) +$  $\log(x^2 + y^2 + z^2) +$  $\log(x^2 + y^2 + z^2)$

$=$ 

$=$ 

$=$  ( $= x$  $+ y$  $+ z$ )

$=$ 

পৃষ্ঠৰ অভিলম্ব ঃ ধৰা হ'ল, $\phi(x, y, z)$ এটা স্কেলাৰ মানবিশিষ্ট ফলন আৰু ইয়াৰ অবিচ্ছিন্ন আংশিক অৱকলজ আছে। ধৰা হ'ল, $P(x_0, y_0, z_0)$ যিকোনো এটা বিন্দু। ধৰা হ'ল, $\phi(x_0, y_0, z_0) = c$। তেনেহ'লে, $\phi(x, y, z) = c$ সমীকৰণে এখন পৃষ্ঠ (Surface) বুজায়। স্পষ্টতঃ (x_0, y_0, z_0) বিন্দুটো পৃষ্ঠখনত আছে।

এই পৃষ্ঠখনত $d\phi = 0$

অর্থাৎ,  $= 0$

অর্থাৎ, $\nabla\phi.d$  $= 0$ য'ত, d  $=$  $dx +$  $dy +$  dz

$\therefore \nabla\phi$, d  ৰ ওপৰত লম্ব।

$\therefore$ পৃষ্ঠৰ $P(x_0, y_0, z_0)$ বিন্দুত টনা সকলো স্পৰ্শকৰ ওপৰত $\nabla\phi$ অভিলম্ব।

সেয়ে $\nabla\phi$এ $\phi(x, y, z) = c$ পৃষ্ঠৰ অভিলম্ব বুজায়।

সেয়ে $\phi(x, y, z) = c$ পৃষ্ঠৰ একক অভিলম্ব  হ'ল  $=$ .

দিশাত্মক অৱকলজ ঃ ধৰা হ'ল,  এটা একক ভেক্টৰ।  দিশত $\nabla\phi$ ভেক্টৰৰ উপাংশ হ'ল $\nabla\phi.$  আৰু ইয়াক  দিশত ϕৰ দিশাত্মক অৱকলজ (Directional Derivative) বুলি কোৱা হয়।

সেয়ে এটা স্কেলাৰ ফলন ϕৰ এটা বিন্দুত দিশাত্মক অৱকলজ হ'ল $\text{grad}\phi$ আৰু সেই বিন্দুটোৰ মাজেৰে যোৱা একক অভিলম্ব ভেক্টৰৰ ডট্ পূৰণ।

অর্থাৎ, দিশাত্মক অৱকলজ $= \text{grad}\phi$ 

উদাহৰণ ১ ঃ $\square + \square + \square$ দিশত (1, 1, 1) বিন্দুত f = xyzৰ দিশাত্মক অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $\square + \square + \square$ দিশত একক অভিলম্ব ভেক্টৰ $\square$ হ'ল $\square$.

এতিয়া, gradf = ∇f = $\square$

$= \square(xyz) + \square(xyz) + \square(xyz)$

$= \square(yz) + \square(xz) + \square(xy)$

$\therefore (gradf)_{(1, 1, 1)} = \square + \square + \square$.

দিশাত্মক অৱকলজ = $grad\phi_{\square} = (\square + \square + \square).\square$

$= \square$

$= \square$

$= \square$

টোকা ঃ 1) এটা বিন্দুত ϕৰ অভিলম্ব অৱকলজ (Normal Derivative)

$= |grad\phi| = |\nabla\phi|$

2) পৃষ্ঠ ϕৰ ওপৰত একক অভিলম্ব ভেক্টৰ = $\square$ = $\square$

উদাহৰণ ২ ঃ (–1, 1, 1) বিন্দুত $\phi = xy + yz + zx$ৰ অভিলম্ব অৱকলজ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ এটা বিন্দুত ϕৰ অভিলম্ব অৱকলজ = $|grad\phi| = |\nabla\phi|$

দিয়া আছে, $\phi = xy + yz + zx$

$\therefore grad\phi = \nabla\phi$

$= \square$

$= \square$

$= \square(y + z) + \square(z + x) + \square(x + y)$

$\therefore (grad\phi)_{(-1, 1, 1)} = 2\square + 0\square + 0\square$

(–1, 1, 1) বিন্দুত অভিলম্ব অৱকলজ = $|grad\phi| = \square = 2$.

উদাহৰণ ৩ ঃ (1, 1, 1) বিন্দুত $\phi = x^3 - xyz + z^3 - 1$ পৃষ্ঠৰ ওপৰত একক অভিলম্ব ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $\phi = x^3 - xyz + z^3 - 1$

$\therefore \text{grad}\phi = \nabla\phi$

$=$ 

$=$ 

$= $ $(3x^2 - yz) + $ $(-xz) + $ $(-xy + 3z^2)$

$\therefore (\text{grad}\phi)_{(1, 1, 1)} = 2$ $+$ $+ 2$ 

পৃষ্ঠ ϕৰ ওপৰত একক অভিলম্ব ভেক্টৰ = 

$=$ 

$=$ 

$=$ .

উদাহৰণ ৪ ঃ (1, 2, 5) বিন্দুত $z = x^2 + y^2$ পৰিক্ৰমজ অধিবৃত্তীয় ঘনৰ পৃষ্ঠৰ ওপৰত একক অভিলম্ব ভেক্টৰ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে, $\phi = x^2 + y^2 - z$

$\therefore \text{grad}\phi = \nabla\phi$

$=$ 

$=$ 

$= 2x$ $+ 2y$ $-$ 

$(\nabla\phi)_{(1, 2, 5)} = 2$ $+ 4$ $-$ 

$|\nabla\phi| =$  $=$ 

একক অভিলম্ব ভেক্টৰ =  $=$  $=$ .



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ যদি $\phi = 3x^2y - y^3z^2$, (1, –2, –1) বিন্দুত gradϕ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ঃ যদি $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, প্রমাণ কৰক যে, (i) $\nabla r = \frac{\vec{r}}{r}$,

(ii) $\nabla r^n = nr^{n-2}\vec{r}$, য'ত, $r = |\vec{r}|$.

প্রশ্ন নং ৩ঃ $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ দিশত (1, 1, 1) বিন্দুত $\phi = x^2yz + 4xz^2$ৰ দিশাত্মক অৱকলজ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ $2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ দিশত (1, 1, 1) বিন্দুত $\phi = 3x^2 + 2y - 3z$ৰ দিশাত্মক অৱকলজ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ (1, 1, 1) বিন্দুত $x^2 + y^2 - z = 10$ পৃষ্ঠৰ একক ভেক্টৰ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ (1, –1, 2) বিন্দুত $x^2 + xy + z^2 = 4$ পৃষ্ঠৰ একক ভেক্টৰ নির্ণয় কৰক।

ডাইভাৰজেনছঃ ধৰা হ'ল, $\vec{F}(x, y, z)$ এটা ভেক্টৰ ফলন আৰু প্রত্যেক বিন্দু (x, y, z)ত ই অবিচ্ছিন্নভাৱে অৱকলনীয়। ধৰা হ'ল, স্থানাংক অক্ষৰ দিশত ইয়াৰ উপাংশবোৰ $F_1(x, y, z)$, $F_2(x, y, z)$ আৰু $F_3(x, y, z)$।

গতিকে, $\vec{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\vec{i} + F_2(x, y, z)\vec{j} + F_3(x, y, z)\vec{k}$

ভেক্টৰ ফলন $\vec{F}$ৰ ডাইভাৰজেনছৰ (Divergence) সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$\nabla.\vec{F} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}\right)$$

$$= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

ভেক্টৰ ফলন $\vec{F}$ৰ ডাইভাৰজেনছক $\nabla.\vec{F}$ বা div $\vec{F}$ৰে বুজোৱা হয়।

টোকা ঃ 1) $\nabla.\vec{F}$ বা div $\vec{F}$ এটা স্কেলাৰ ৰাশি।

2) div $\vec{F} = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).\left(F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}\right)$.

সংজ্ঞা ঃ ছলেনয়ডীয় ভেক্টৰ ঃ এটা ভেক্টৰ $\vec{F}$ক ছলেনয়ডীয় ভেক্টৰ (Solenoidal Vector) বুলি কোৱা হয় যদি ইয়াৰ ডাইভাৰজেনছ শূন্য, অর্থাৎ, যদি div $\vec{F} = 0$, তেনেহ'লে, $\vec{F}$ক ছলেনয়ডীয় বুলি কোৱা হয়।

কার্ল ঃ (x, y, z)ৰ কার্লৰ (Curl) সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$\nabla \times$ =

=

=

সংজ্ঞা ঃ অঘূর্ণ ভেক্টৰ ঃ এটা ভেক্টৰ ক অঘূর্ণ ভেক্টৰ (Irrotational Vector) বুলি কোৱা হয় যদি ইয়াৰ কার্ল শূন্য ভেক্টৰ, অর্থাৎ, যদি curl = , তেনেহ'লে, ক অঘূর্ণ ভেক্টৰ বোলে।

টোকা ঃ 1) curl এটা ভেক্টৰ ৰাশি।

2) যদি ϕ এটা x, y, zৰ স্কেলাৰ ফলন, তেনেহ'লে, $\nabla^2\phi = (\nabla.\nabla)\phi$.

$\nabla.(\nabla\phi)$ =

=

অর্থাৎ, $\text{div}(\text{grad}\phi) = \nabla^2\phi$.

১৫.৬ লাপ্লাছিয় সংকাৰক

$\nabla^2 \equiv \nabla.\nabla$ সংকাৰকৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয় $\nabla^2 \equiv$ আৰু ইয়াক লাপ্লাছিয় সংকাৰক (Laplacian Operator) বুলি কোৱা হয়।

1) F এটা স্কেলাৰ বিন্দু ফলন হ'লে, $\nabla^2 F =$ এইটো এটা স্কেলাৰ ৰাশি।

2) এটা ভেক্টৰ বিন্দু ফলন হ'লে, ∇^2 = এইটো এটা ভেক্টৰ ৰাশি।



পিয়াৰে - চিমন

লাপ্লাছ (1749-1827) এজন ফ্ৰান্স গণিতজ্ঞ আৰু জ্যোতিবিজ্ঞানী আছিল।

লাপ্লাছ সমীকৰণ ঃ $\nabla^2 F = 0$ বা $\nabla^2 \square = 0$ক লাপ্লাছ সমীকৰণ (Laplace's Equation) বুলি কোৱা হয়।

ডাইভাৰজেনছৰ ধৰ্ম ঃ

I) $\nabla.(\square \pm \square) = \nabla.\square \pm \nabla.\square$ বা, $\text{div}(\square \pm \square) = \text{div}\square \pm \text{div}\square$

প্ৰমাণ ঃ $\nabla.(\square \pm \square) = \square$

$= \square$

$= \square$

$= \nabla.\square \pm \nabla.\square$

$\therefore \nabla.(\square \pm \square) = \nabla.\square \pm \nabla.\square$

II) $\nabla.(\phi\square) = (\nabla\phi).\square + \phi(\nabla.\square)$

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল, $\square = F_1\square + F_2\square + F_3\square$

এতিয়া, $\nabla.(\phi\square) = \nabla.(\phi F_1\square + \phi F_2\square + \phi F_3\square)$

$= \square.(\phi F_1\square + \phi F_2\square + \phi F_3\square)$

$= \square$

$= \square$

$= \square$

$= \square.(F_1\square + F_2\square + F_3\square) +$

$\square.(F_1\square + F_2\square + F_3\square)$

$= (\nabla\phi).\square + \phi(\nabla.\square)$

$\therefore \nabla.(\phi\square) = (\nabla\phi).\square + \phi(\nabla.\square)$

III) $\nabla\times(\vec{A}\pm\vec{B}) = \nabla\times\vec{A}\pm\nabla\times\vec{B}$ or, $\text{curl}(\vec{A}\pm\vec{B}) = \text{curl}\,\vec{A}\pm\text{curl}\,\vec{B}$

প্ৰমাণ ঃ $\nabla\times(\vec{A}\pm\vec{B}) =$

$=$

$=$

$= \nabla\times\vec{A}\pm\nabla\times\vec{B}$

$\therefore \nabla\times(\vec{A}\pm\vec{B}) = \nabla\times\vec{A}\pm\nabla\times\vec{B}$

IV) $\nabla\times(\phi\vec{A}) = (\nabla\phi)\times\vec{A} + \phi(\nabla\times\vec{A})$ or, $\text{curl}(\phi\vec{A}) = \text{grad}\phi\times\vec{A} + \phi\,\text{curl}\,\vec{A}$

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল, $\vec{A} = F_1\vec{i} + F_2\vec{j} + F_3\vec{k}$, $\phi\vec{A} = \phi F_1\vec{i} + \phi F_2\vec{j} + \phi F_3\vec{k}$

এতিয়া, $\nabla\times(\phi\vec{A}) =$ $\times\ (\phi F_1\vec{i} + \phi F_2\vec{j} + \phi F_3\vec{k})$

$=$

$=$ $+$ $+$

$=$ $+$

$+$

$=$ $+$

=

$\therefore \nabla\times(\phi\ ) = (\nabla\phi)\times\ + \phi(\nabla\times\ )$

V) $\nabla.(\ \times\ ) = \ .(\nabla\times\ ) - \ .(\nabla\times\ )$ বা, div(×) = curl . curl

প্ৰমাণ ঃ সংজ্ঞাৰ পৰা আমি পালোঁ, $\nabla.\ =$

$\therefore \nabla.(\ \times\ ) = \ (\ \times\ ) + \ (\ \times\ ) + \ (\ \times\ )$

=

=

=

ডট্ আৰু ক্ৰছ্ পূৰণ সালসলনি কৰি, আমি

=

=

= curl . – curl .

$\therefore$ div(×) = curl . – curl .

VI) $\nabla\times(\nabla\times\ ) = \nabla(\nabla.\ ) - \nabla^2\ $ বা, curlcurl – graddiv – Laplacian

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল, = F_1 + F_2 + F_3

$\nabla\times\ =$ × (F_1 + F_2 + F_3)

=



=



curl(curl) =



=



=



=



=



=



=



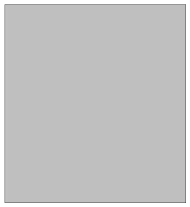
= $\nabla.(\nabla.$) – ∇^2

$\therefore \nabla\times(\nabla \times$) = $\nabla.(\nabla.$) – ∇^2

VII) $\nabla.(\nabla \times$) = 0 বা, divcurl = 0

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল, = F_1 + F_2 + F_3

$\nabla \times$ =  × (F_1 + F_2 + F_3)

$=$ 

$=$ 

এতিয়া, divcurl  $= \nabla.(\nabla \times$  $)$

$=$ 

$=$ 

$= 0$

$\therefore \text{divcurl}$  $= 0$

প্ৰয়োজনীয় ধৰ্ম (প্ৰমাণ ব্যতিৰেকে) ঃ

VIII) $\nabla($  $.$  $) =$ $\times (\nabla \times$ $) +$ $\times (\nabla \times$ $) + ($ $.\nabla)$ $+ ($ $.\nabla)$ বা,

$\text{grad}($  $.$  $) =$ $\times \text{curl}$ $+$ $\times \text{curl}$ $+ ($ $.\nabla)$ $+ ($ $.\nabla)$

IX) $\nabla \times ($  $\times$  $) =$ $(\nabla.$ $) -$ $(\nabla.$ $) + ($ $.\nabla)$ $+ ($ $.\nabla)$ বা,

$\text{curl}($  $\times$  $) =$ div $-$ div $+ ($ $.\nabla)$ $+ ($ $.\nabla)v$

ব্যাখ্যাসূচক উদাহৰণ ঃ

উদাহৰণ ১ ঃ যদি $= x^2$ $+ y^2$ $+ z^2$, $\nabla.$ আৰু $\nabla \times$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $\nabla.$ $=$ $.(x^2$ $+ y^2$ $+ z^2$ $)$

$=$

$= 2x + 2y + 2z$

$= 2(x + y + z)$

$\nabla \times$ $=$

= 

= 0 + 0 + 0

=

উদাহৰণ ২ ঃ $xy^2 + 2x^2yz - 3yz^2$ ভেক্টৰ বিন্দু ফলনৰ ডাইভাৰজেনছ আৰু কার্ল নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, $= xy^2 + 2x^2yz - 3yz^2$

div $= \nabla.$

= $.(xy^2 + 2x^2yz - 3yz^2)$

= 

$= y^2 + 2x^2z - 6yz$

curl $= \nabla \times$

= 

=  +



= (–3z² – 2x²y) – (0) + (4xyz – 2xy)

উদাহৰণ ৩ ঃ যদি $= x +y +z$, প্রমাণ কৰক যে div $= 3$ আৰু curl $=$.

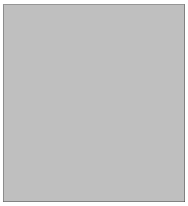
সমাধান ঃ div $= \nabla.$

= $.(x + y + z)$

= 

$= 1 + 1 + 1 = 3$

curl = ∇× =



=



+



= (0 – 0) – (0 – 0) + (0 – 0) = 0

উদাহৰণ ৪ ঃ যদি = xz^3 – $2x^2yz$ + $2yz^4$, (1, –1, 1) বিন্দুত curl নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ curl = ∇ × =



=



–



+



= (2z^4 + 2x^2y) + (3z^2x) + (–4xyz)

(1, –1, 1) বিন্দুত curl = (0) + 3 + 4 = 3 + 4

উদাহৰণ ৫ ঃ যদি = x^2y + y^2z + z^2x, curlcurl নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ curl = ∇ × =



=



–



+



= (0 – y^2) – (0 – z^2) + (0 – x^2)

= –y^2 – z^2 – x^2

curlcurl = $\nabla \times$ curl =



=



–



+



= (0 + 2z) – (–2x) – (–2y)

= 2x + 2x + 2y

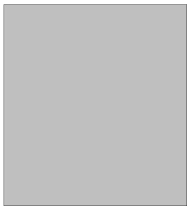
উদাহৰণ ৬ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে curl(gradϕ) =

সমাধান ঃ curl(gradϕ) = curl($\nabla\phi$) = $\nabla \times (\nabla\phi)$

=



=



=



–



+



= + + = .

উদাহৰণ ৭ ঃ x^2 + y^2 + z^2 ভেক্টাৰটো (1, 1, 2) বিন্দুত ছলেনয়ডীয় ভেক্টৰ হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, = x^2 + y^2 + z^2

$\nabla.$ = .(x^2 + y^2 + z^2)

=



= 2x + 2y + 2z

$(\nabla.)_{(1, 1, 2)}$ = 2 + 2 + 4 = 8 $\neq$ 0

$\therefore$ প্ৰদত্ত ভেক্টৰটো (1, 1, 2) বিন্দুত ছলেনয়ডীয় নহয়।



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ

প্ৰশ্ন নং ৭ঃ $(2,-1,1)$ বিন্দুত $=xyz+3x^2y+(xz^2-y^2z)$ ভেক্টৰটোৰ ডাইভাৰজেনছ আৰু কার্ল নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৮ঃ যদি $=\text{grad}(x^3+y^3+z^3-3xyz)$, div আৰু curl নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৯ঃ $=(x+3y)+(y-2z)+(x+az)$ ভেক্টৰটো ছলেনয়ডীয় হ'লে aৰ মান নির্ণয় কৰক।



১৫.৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- ভেক্টৰ অৱকল সংকাৰক [ডেল (Del) বা নেব্‌লা (Nabla)] এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হয় $\nabla \equiv$ য'ত , , হ'ল আয়তীয় অক্ষ OX, OY আৰু OZৰ দিশত একক ভেক্টৰ।
- ধৰা হ'ল, $\phi(x, y, z)$ এটা স্কেলাৰ বিন্দু ফলন আৰু ই অবিচ্ছিন্নভাৱে অৱকলনীয়। তেনেহ'লে, $\nabla\phi =$ ভেক্টৰক ϕৰ গ্ৰেডিয়েণ্ট বুলি কোৱা হয়।
- গ্ৰেডিয়েণ্টৰ ধর্ম ঃ
  - i) $\text{grad}(f \pm g) = \text{grad } f \pm \text{grad}g$
  - ii) যদি f আৰু g দুটা স্কেলাৰ বিন্দু ফলন, তেনেহ'লে, $\nabla fg = f\nabla g + g\nabla f$.
  - iii) এটা ধ্ৰুৱকৰ গ্ৰেডিয়েণ্ট শূন্য ভেক্টৰ।
- ভেক্টৰ ফলন $(x, y, z) = F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z) + F_3(x, y, z)$ৰ ডাইভাৰজেনছৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

  $\nabla.$ $=$

  $=$
- এটা ভেক্টৰ কছলেনয়ডীয় বুলি কোৱা হয় যদি ইয়াৰ ডাইভাৰজেনছ শূন্য।
- (x, y, z)ৰ কার্লৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়,

$\nabla \times$ 

= 

= 

- এটা ভেক্টৰ ক অঘূর্ণ বুলি কোৱা হয় যদি ইয়াৰ কার্ল শূন্য ভেক্টৰ।
- ডাইভাৰজেনছ আৰু কার্ল সম্পর্কীয় ধর্ম ঃ

i) $div(\quad \pm \quad) = div \pm div$

ii) $\nabla.(\phi \quad) = (\nabla\phi). + \phi(\nabla. \quad)$

iii) $curl(\quad \pm \quad) = curl \pm curl$

iv) $curl(\phi \quad) = grad\phi \times + \phi curl \quad (\nabla \times \quad)$

v) $div(\quad \times \quad) = .curl \quad - .curl$

vi) $curlcurl = graddiv - Laplacain$

vii) $divcurl = 0$

viii) $grad(\quad . \quad) = \times curl + \times curl + (.\nabla) + (.\nabla)$

ix) $curl(\quad \times \quad) = div \quad - div + (.\nabla) + (.\nabla)$

১৫.৮ অধিক জানিবলৈ

ইংৰাজী গ্রন্থ ঃ

1) Kishan, Hari. *Vector Algebra and Calculus*. New Delhi: Atlantic Publishers & Distributors (P) Ltd.
2) Narayan, Shanti. *A Textbook of Vector Calculus*.
3) Pandey, R. K. *Vector Analysis*. New Delhi: Discovery Publishing House.
4) Sharma, Anil Kumar. *Textbook of Vector Calculus*. New Delhi: Discovery Publishing House.

5) Tallack, J. C. *Introduction to Vector Analysis*. Cambridge University Press.

6) *Vector Algebra*. New Delhi: Laxmi Publications(P) Ltd.



১৫.৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\text{grad}\phi = \nabla\phi =$ $(3x^2y - y^3z^2)$

$=$ $(3x^2y - y^3z^2)$

$= (6xy) + (3x^2 - 3y^2z^2) + (-2y^3z)$

$\text{grad}\phi_{(1,-2,-1)} = -12 - 9 - 16$ at $(1, -2, -1)$

২নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $= x + y + z$

$\therefore r = | | =$

অৰ্থাৎ, $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ... ...(1)

এতিয়া, $\nabla r =$

$=$ ... ...(2)

(1)ৰ পৰা আমি পাওঁ, $2r = 2x \Rightarrow =$

$2r = 2y \Rightarrow =$

$2r = 2z \Rightarrow =$

(2)ৰ পৰা আমি পাওঁ, $\nabla r =$ $+$ $+$

$=$ $=$

$\therefore \nabla r =$

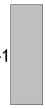
ii) $\nabla r^n =$ 

$=$ 

$=$ 

$=$ 

$= nr^{n-1}\nabla r$

$= nr^{n-1}$  (i)ৰ পৰা

$\therefore \nabla r^n = nr^{n-2}$ 

৩নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ  +  –  ৰ দিশত একক অভিলম্ব ভেক্টৰ  হ'ল .

এতিয়া, $\text{grad}\phi = \nabla\phi =$ 

$=$ 

$= $ $(2xyz + 4z^2) + $ $(x^2z) + $ $(x^2y + 8xz)$

$\therefore (\text{grad}\phi)_{(1, 1, 1)} =$ $(2 + 4) + $ $(1) + $ $(1 + 8) = 6$  $+$  $+ 9$ 

দিশাত্মক অৱকলজ $= \text{grad}\phi.$ $= (6$ $+$  $+ 9$ $).$ 

$=$  $=$ 

৪নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৫নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ দিয়া আছে, $\phi = x^2 + y^2 – z – 10$

$\therefore \text{grad}\phi = \nabla\phi =$ 

$=$ 

$= 2x$  $+ 2y$  $–$ 

$(\nabla\phi)_{(1,1,1)} = 2x\,\square + 2y\,\square - \square$

$|\nabla\phi| = \square = 3$

$\therefore$ একক অভিলম্ব ভেক্টৰ = $\square = \square = \square$.

৬নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৭নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ $\text{div}\,\square = \square(xyz) + \square(3x^2y) + \square(xz^2 - y^2z)$

$= yz + 3x^2 + 2xz - y^2$

$\therefore$ (2, –1, 1) বিন্দুত $\text{div}\,\square = -1 + 12 + 4 - 1 = 14$

$\text{curl}\,\square = \square$

$= \square(-2yz - 0) + \square(xy - z^2) + \square(6xy - xz)$

$\therefore$ (2, –1, 1) বিন্দুত $\text{curl}\,\square = 2\,\square - 3\,\square - 14\,\square$

৮নং প্রশ্নৰ উত্তৰ ঃ ধৰা হ'ল, $\phi = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$\therefore \square = \text{grad}\phi = \square(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$

$= (3x^2 - 3yz)\,\square + (3y^2 - 3zx)\,\square + 3(z^2 - 3xy)\,\square$

$\therefore \text{div}\,\square = \square(3x^2 - 3yz) + \square(3y^2 - 3zx) + \square(z^2 - 3xy)$

$= 6x + 6y + 6z$

$= 6(x + y + z)$

আৰু $\text{curl}\,\square = \square$

$= \square(-3x + 3x) + \square(-3y + 3y) + \square(-3z + 3z)$

$= \square$

৯নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰ ঃ ভেক্টৰ ছলেনয়ডীয় যদি div

এতিয়া, div =

= 1 + 1 + a

= 2 + a

∴ div = 0

⇒ 2 + a = 0

⇒ a = –2.

১৫.১০ আৰ্হি প্ৰশ্ন

প্ৰশ্ন ১ ঃ যদি = x^2z – $2y^3z^2$ + xy^2z, ∇. নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ২ ঃ যদি $\phi = 2x^3y^2z^4$, div(gradϕ) নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ ঃ (1, –1, 1) বিন্দুত xy^3 – $2x^2yz$ + $2yz^4$ ভেক্টৰটোৰ বাবে div আৰু curl নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ ঃ যদি = $3xyz^2$ + $2xy^3$ – x^2yz আৰু $\phi = 3x^2 - yz$, (1, –1, 1) বিন্দুত

i) ∇. ii) ∇.(ϕ) নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৫ ঃ যদি $\phi = 3x^2z - y^2z^3 + 4x^3y + 2x - 3y - 5$, $\nabla^2\phi$ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৬ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে = (x + 3y) + (y – 3z) + (x – 2z) ভেক্টৰটো ছলেনয়ডীয়।

প্ৰশ্ন ৭ ঃ প্ৰমাণ কৰক যে = (siny + z) + (xcosy – z) + (x – y) ভেক্টৰটো অঘূৰ্ণ।

*** ***** ***



প্ৰসঙ্গ পুথি

ইংৰাজী গ্ৰন্থ ঃ

1) Jain, P. K. and Ahmhad, K. *Textbook of Analytical Geometry of Three Dimensions*. New Delhi: New Age International (P) Ltd.
2) Khan, R. M. *Analytical Geometry Of Two & Three Dimensions & Vector Analysis*. New Central Book Agency (P) Limited.
3) Kishan, Hari. *Coordinate Geometry of Two dimensions*. New Delhi: Atlantic Publishers & Distributors.
4) Kishan, Hari. *Vector Algebra and Calculus*. New Delhi: Atlantic Publishers & Distributors (P) Ltd.
5) Narayan, Shanti. *A Textbook of Vector Calculus*.
6) Pal, Sat and Pal, Harbans. *A Textbook of Two Dimensional Geometry*. New Age International Publishers.
7) Pandey, R. K. *Vector Analysis*. New Delhi: Discovery Publishing House.
8) Sharma, G. C. and Jain, Madhu. *Coordinate Geometry (2D and 3D)*. New Delhi: Galgotia Publications Pvt Ltd.
9) Sharma, A. K. *Coordinate Geometry (2D)*. New Delhi: Discovery Publishing House.
10) Sharma, Anil Kumar. *Textbook of Vector Calculus*. New Delhi: Discovery Publishing House.
11) Tallack, J. C. *Introduction to Vector Analysis*. Cambridge University Press.
12) *Vector Algebra*. New Delhi: Laxmi Publications(P) Ltd.
13) Vasistha, A. R., Agrawal, D. C. *Analytical Geometry of Three Dimensions (Coordinate of Solid Geometry)*.

কাকতৰ নাম .....
পাঠ্যবিষয়ৰ সাঙ্কেতিক সংখ্যা .....

আভ্যন্তৰীণ গুণগত আশ্বাসন কেন্দ্ৰ (CIQA)

কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

নগৰ কাৰ্য্যালয়, হাউছফেড চৌহদ, গুৱাহাটী-৭৮১০০৬

পাঠ্যবিষয় সন্দর্ভত শিক্ষার্থীৰ সঁহাৰি

প্ৰিয় শিক্ষার্থী,

ওপৰত উল্লেখ কৰা পাঠ্যবিষয়টোৰ সন্দর্ভত আপোনাৰ বহুমূলীয়া মতামত আৰু মন্তব্য বিচৰা হৈছে। আপোনাৰ সঁহাৰিয়ে আমাক ভৱিষ্যৎ স্ব-শিকন সামগ্ৰীবোৰৰ মান উন্নত কৰাত সহায় কৰিব। অনুগ্ৰহ কৰি তলৰ প্ৰবিৱৰণবোৰৰ বিপৰীতে আপোনাৰ মতামত উপযুক্তভাৱে প্ৰতিফলিত কৰা বিকল্পটোত চিন দিয়ক। মন্তব্যৰ সৈতে সম্পূৰ্ণ সঁহাৰি জনোৱাৰ পাছত পৃষ্ঠাটো ফালি তলৰ ঠিকনাত ডাকযোগে প্ৰেৰণ কৰে যেন।

সঞ্চালক, আভ্যন্তৰীণ গুণগত আশ্বাসন কেন্দ্ৰ, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়
হাউছফেড পৰিসৰ, দিশপুৰ, গুৱাহাটী-৭৮১০০৬
ই-মেইল ঠিকনা ঃ ciqa@kkhsou.in

১) পাঠ্যবিষয়ৰ অন্তর্ভুক্ত অধ্যায়বোৰ পঢ়িবলৈ আপুনি আনুমানিকভাৱে কিমান ঘণ্টা ব্যয় কৰিলে? ☐☐☐

২) খণ্ডটো অধ্যয়ন কৰাৰ অন্তত তলৰ প্ৰবিৱৰণবোৰ সন্দর্ভত আপোনাৰ মতামত ব্যাখ্যা কৰক (✓ চিন দিয়ক) ঃ

ক্ৰমাঙ্ক	প্ৰবিৱৰণ	দৃঢ়ভাৱে একমত	একমত	একমতো নহয়/ অসন্মতো নহয়	অসন্মত	দৃঢ়ভাৱে অসন্মত
I)	পাঠ্যবিষয়ৰ স্ব-শিকন সামগ্ৰীবোৰে প্ৰতিটো অধ্যায়ৰ আৰম্ভণিতে ধাৰ্য্য কৰি লোৱা শিকন উদ্দেশ্যবোৰ পূৰণ কৰিব পাৰিছে					
II)	স্ব-শিকন সামগ্ৰীত সন্নিৱিষ্ট অধ্যায়বোৰে মোৰ শৈক্ষিক প্ৰয়োজনীয়তা আৰু প্ৰত্যাশা পূৰণ কৰিব পাৰিছে					
III)	অধ্যায় লেখক/ লেখিকাসকলৰ পাঠ্যবিষয়ত সন্নিৱিষ্ট পাঠসমূহৰ উত্তম জ্ঞান আছে					
IV)	অধ্যায়বোৰত সন্নিৱিষ্ট পাঠবোৰৰ ভাষা আৰু বিষয়বস্তু মই সহজে বুজি পোৱা ধৰণে উপস্থাপন কৰা হৈছে					
V)	অধ্যায়বোৰত কার্য্যকলাপত ভাগ ল'ব পৰাকৈ/অনুশীলনীত অংশগ্ৰহণ কৰিব পৰাকৈ পর্য্যাপ্ত সুযোগ আছে					
VI)	ধাৰণাবোৰ স্পষ্ট কৰিবলৈ পর্য্যাপ্ত চিত্ৰ (ৰেখাচিত্ৰ, তালিকা ইত্যাদি) সংলগ্ন কৰা হৈছে					
VII)	পাঠবোৰত সন্নিৱিষ্ট বিষয়বস্তুসমূহ চিত্তাকর্ষক, প্ৰাসঙ্গিক আৰু শেহতীয়া তথ্যভিত্তিক					
VIII)	'অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ' শিতানৰ প্ৰশ্নবোৰ যথেষ্ট উপযোগী					
IX)	'আৰ্হি প্ৰশ্ন' আৰু 'অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান' শিতান দুটাই মোক যথেষ্ট উপকৃত কৰিছে					

অতিৰিক্ত মন্তব্য (অনুগ্ৰহ কৰি মুকলিমূৰীয়াকৈ মতামত আগবঢ়াওক) ঃ

১) আপোনাৰ মতে স্ব-শিকন সামগ্ৰীবোৰৰ কোনকেইটা দিশ সবাতোকৈ ফলপ্ৰসূ হৈছে?

.....

.....

২) স্ব-শিকন সামগ্ৰীবোৰৰ সামগ্ৰিক গুণ উন্নত কৰিবলৈ কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ে কেনে ধৰণৰ পৰিৱর্তন/ উন্নতি সাধন কৰিব পাৰে বুলি আপুনি ভাবে?

.....

.....

প্ৰ-পত্ৰ পূৰাবলৈ সময় উলিওৱাৰ বাবে আপোনাক ধন্যবাদ জনালোঁ।