GMA S6-01

Exam. Code: MAP6A

বলবিজ্ঞান আৰু পৰিসংখ্যাৰ উপাদান

ষষ্ঠ ছেমিষ্টাৰ

গণিত

খণ্ড ঃ ২



কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

বিষয় বিশেষজ্ঞ

ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা, কটন মহাদ্যিালয়, গুৱাহাটী
অধ্যাপক নন্দৰাম দাস, গণিত বিভাগ, গুৱাহাটী বিশ্ববিদ্যালয়

সমন্বয়ৰক্ষীঃ হৰেকৃষ্ণ ডেকা, শৈক্ষিক পৰামর্শদাতা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

প্রস্তুতি গোটৰ সদস্য

অধ্যায়	*অৰিহণা যোগাইছে*	*ভাষান্তৰকাৰী*
৭, ৮, ৯,১০	ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা	ড° দিলীপ কুমাৰ শর্মা অধ্যায় ৭, ৮, ৯, ১০, ১২,১৩,১৪
১২,১৩,১৪	কটন মহাবিদ্যালয়, গুৱাহাটী	
১১	হৰেকৃষ্ণ ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়, গুৱাহাটী	অধ্যায় ১১ গীতাঞ্জলী মেধি কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

সম্পাদনাঃ

বিষয়বস্তু সম্পাদনা ঃ ড° দীপক কুমাৰ শর্মা, কটন মহাবিদ্যালয়, (অধ্যায় ১১)
হৰেকৃষ্ণ ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়
(অধ্যায় ৭, ৮, ৯, ১০, ১২ ,১৩,১৪)

গাঁথনিক সম্পাদনা ঃ হৰেকৃষ্ণ ডেকা, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

জানুৱাৰী, ২০২০

ISBN: 978-93-89559-99-6

© কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ৰ দ্বাৰা সর্বস্বত্ব সংৰক্ষিত।

This Self Learning Material (SLM) of the Krishna Kanta Handiqui State Open University is made available under a Creative Commons Attribution-Non Commercial-Share Alike 4.0 License (international): http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/

কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ৰ হৈ পঞ্জীয়কৰ দ্বাৰা মুদ্রিত আৰু প্রকাশিত।

মুখ্য কার্যালয় ঃ পাটগাঁও, ৰাণী গেট, গুৱাহাটী - ৭৮১ ০১৭; Web : www.kkhsou.in
উপ-মুখ্য কার্যালয় ঃ হাউচফেড কমপ্লেক্স, দিচপুৰ, গুৱাহাটী - ৭৮১ ০০৬

এই শিক্ষণ সামগ্রী প্রস্তুতিৰ বাবে আর্থিক অনুদান আগবঢ়োৱা
দূৰ শিক্ষা ব্যুৰো, বিশ্ববিদ্যলয় অনুদান আয়োগৰ ওচৰত বিশ্ববিদ্যালয় কৃতজ্ঞ।

খণ্ড পৰিচয়

এই খণ্ডটি ‘বল বিজ্ঞান আৰু পৰিসংখ্যাৰ উপাদান’ পাঠ্যবিষয়টিৰ দ্বিতীয় খণ্ড। এই খণ্ডটি সৰ্বমুঠ আঠটা অধ্যায়েৰে গঠিত। বিভিন্ন ধৰণৰ কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপ যেনে- সমান্তৰ মাধ্য, গুণোত্তৰ মাধ্য, হৰাত্মক মাধ্য, মধ্যমা, বহুলক, চতুর্থকৰ বিষয়ে সপ্তম অধ্যায়টিত আলোচনা কৰা হৈছে।

বিভিন্ন ধৰণৰ প্রসাৰৰ মাপ যেনে পৰিসৰ, চতুর্থক বিচলন, মাধ্যবিচলন, প্রামাণিক বিচলনৰ বিষয়ে অষ্টম অধ্যায়টিত আলোচনা কৰা হৈছে।

ঘূর্ণক অপ্রতিসাম্য আৰু ককুদতাৰ বিষয়ে নৱম অধ্যায়টিত আলোচনা কৰা হৈছে।

এই পাঠ্যক্রমৰ দশম অধ্যায়টিত সম্ভাৱিতাৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব। সম্ভাৱিতাৰ কিছুমান আকষণীয় তথ্যৰ বিষয়েও এই অধ্যায়টি আলোচনা কৰা হৈছে।

চর্তসাপেক্ষে সম্ভাৱিতা, সম্ভাৱিতাৰ গুণিতক উপপাদ্য, পূর্ণ সম্ভাৱিতা আৰু বেইজৰ উপপাদ্যৰ বিষয়ে একাদশ অধ্যায়টিত জানিব পাৰিব।

এই পাঠ্যবিষয়ৰ দ্বাদশ অধ্যায়টিত যাদৃচ্ছিক চলক আৰু সম্ভাৱিতা বণ্টনৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।

এই পাঠ্যবিষয়ৰ ত্রয়োদশ অধ্যায়টিত দ্বিপদ বণ্টন আৰু পয়ছন বণ্টনৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।

এই খণ্ডটিৰ চতুর্দশ অধ্যায়টিত অধ্যায়টিত প্রসামান্য বণ্টন, প্রসামান্য বণ্টনৰ ধর্মৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিব পাৰিব।

এই পাঠ্যবিষয়টি অধ্যয়ন কৰোতে মূল পাঠত ‘জানি থোৱা ভাল’ বাকচবোৰৰ মূল পাঠৰ সৈতে জড়িত কিছু গুৰুত্বপূর্ণ তথ্যৰ সম্ভেদ আছে। প্রতিটো অধ্যায়ত থকা ‘অগ্রগতি নিৰীক্ষণ’ যোগে আগবঢ়োৱা প্রশ্নাৱলীয়ে অধ্যয়নৰ অগ্রগতি সম্পর্কে স্ব-পৰীক্ষণৰ সুবিধা দিব। অধ্যয়নৰ লগে লগে উক্ত প্রশ্নাৱলীৰ উত্তৰসমূহ লিখি শেষত দিয়া ‘অগ্রগতিৰ খতিয়ানে’ৰ সৈতে ৰিজাই চোৱাটো অধিক লাভদায়ক হ’ব। অধ্যায়বোৰৰ শেষত ‘আৰ্হি প্রশ্ন’ হিচাপে কেইটিমান প্রশ্নৰ আৰ্হিও তুলি দিয়া হৈছে।

বিষয় সূচী

পৃষ্ঠা নং

অধ্যায় ৭ঃ **কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপ** ১০১-১২১
সমান্তৰ মাধ্য (বা মাধ্য), গুণোত্তৰ মাধ্য, হৰাত্মক মাধ্য, মধ্যমা, বহুলক, চতুর্থক।

অধ্যায ৮ঃ **প্রসাৰৰ মাপ** ১২২-১৪৬
প্রসাৰৰ ধাৰণা পৰিসৰ, চতুর্থক বিচলন, মাধ্য বিচলন, প্রামাণিক বিচলন, বিচৰণ গুণাংক।

অধ্যায় ৯ ঃ **ঘূর্ণক, অপ্রতিসাম্য আৰু ককুদতা** ১৪৭-১৬৪
ঘূর্ণক অপৰিণত আৰু কেন্দ্রীয় ঘূর্ণকৰ মাজৰ সম্বন্ধ অপ্রতিসাম্য অপ্রতিসাম্যৰ মাপ ককুদতা, ককুদতাৰ মাপ।

অধ্যায় ১০ ঃ **সম্ভাৱিতা** ১৬৫-১৮৭
প্রাথমিক পাৰিভাষিক শব্দাৱলী, সম্ভাৱিতাৰ ধ্রুপদী সংজ্ঞা, সম্ভাৱিতা স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক সংজ্ঞা, সম্ভাৱিতাৰ কেইটামান উপপাদ্য।

অধ্যায় ১১ঃ **চর্তসাপেক্ষে সম্ভাৱিতা** ১৮৮-২০৭
চর্তসাপেক্ষে সম্ভাৱিতা, সম্ভাৱিতাৰ গুণিতক উপপাদ্য, পূর্ণ সম্ভাৱিতা, বেইজৰ উপপাদ্য।

অধ্যায় ১২ঃ **যাদৃচ্ছিক চলক আৰু সম্ভাৱিতা বণ্টন** ২০৮-২২১
যাদৃচ্ছিক চলক, বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক, অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক, যাদৃচ্ছিক চলকৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন, যাদৃচ্ছিক চলকৰ মাধ্য আৰু প্রসৰণ।

অধ্যায় ১৩ঃ **তাত্ত্বিক বণ্টন I** ২২২-২৪২
বার্ণ'লি অভিপ্রয়োগ, দ্বিপদ (আৰু বার্ণ'লি) বণ্টন), পয়ছন বণ্টন।

অধ্যায় ১৪ঃ **তাত্ত্বিক বণ্টন II** ২৪৩-২৫৬
অবিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বণ্টন, প্রসামান্য বণ্টন, প্রসামান্য বণ্টনৰ ধর্ম, প্রামাণিক প্রসামান্য চলক।

অধ্যায় ৭ ঃ কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপ (MEASURES OF CENTRAL TENDENCY)

অধ্যায় গাঁথনি

৭.১ উদ্দেশ্য

৭.২ পৰিচয়

৭.৩ সমান্তৰ মাধ্য (বা মাধ্য)

৭.৪ গুণোত্তৰ মাধ্য

৭.৫ হৰাত্মক মাধ্য

৭.৬ মধ্যমা

৭.৭ বহুলক

৭.৮ চতুর্থক

৭.৯ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৭.১০ অধিক জানিবলৈ

৭.১১ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৭.১২ আৰ্হি প্রশ্ন

৭.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি তলৰ বিষয়কেইটা সম্বন্ধে জানিব পাৰিব

- সমান্তৰ মাধ্য
- গুণোত্তৰ মাধ্য
- হৰাত্মক মাধ্য
- মধ্যমা
- বহুলক
- চতুর্থক

৭.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপ (measure of central tendency), হ'ল 'এটা সংক্ষিপ্ত মাপ যিয়ে তথ্যৰ সংহতি এটা বণ্টনৰ মাজত বা কেন্দ্রত থকা এটা মাত্র মানেৰে বুজোৱাৰ প্রয়াস কৰে।' কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপ পাঁচটা, যথা, সমান্তৰ মাধ্য বা চমুকৈ মাধ্য (arithmetic mean or simply mean), গুণোত্তৰ মাধ্য (geometric mean), হৰাত্মক মাধ্য (harmonic mean), মধ্যমা (median), বহুলক (mode)। এই মাপকেইটা প্রায়েই ব্যৱহাৰ হয়। আমি এই অধ্যায়ত

এই মাপবোৰ সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম। তদুপৰি আমি চতুর্থক (quartile) সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম। পাছৰ অধ্যায়ত চতুর্থক সম্বন্ধে প্রয়োজন হ'ব।

৭.৩ সমান্তৰ মাধ্য (বা মাধ্য) (ARITHMETIC MEAN)

মাধ্যৰ দ্বাৰা আমি সমান্তৰ মাধ্যক বুজিম।

I. অসংঘৱদ্ধ তথ্যৰ মাধ্য (Mean for ungrouped data)

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ nটা পর্যবেক্ষণ। এই পর্যবেক্ষণকেইটাৰ মাধ্যক $\bar{x}$ - এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

টোকা ঃ $\sum$ হ'ল গ্রিক বর্ণমালাৰ অষ্টাদশ আখৰ (বৰফলাৰ)। উচ্চাৰণ হ'ল ছিগমা (sigma)।

উদাহৰণ 1 : 8 জন মানুহৰ উচ্চতা (ছেণ্টিমিটাৰত) হ'ল 155, 161, 164, 166, 167, 169, 171, 177. মাধ্য উচ্চতা নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ $\bar{x} = \frac{155+161+164+166+167+169+171+177}{8}$

$= \frac{1330}{8}$ = 166.25

$\therefore$ মাধ্য উচ্চতা = 166.25 cm

II. বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মাধ্য (Mean for discrete frequency distribution)

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \ldots., x_n$ এই n টা পর্যবেক্ষণৰ বাৰংবাৰতা ক্রমে $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$। এই পর্যবেক্ষণকেইটাৰ মাধ্যক $\bar{x}$-এৰে বুজোৱা হয়, আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}, \quad \text{য'ত } N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

উদাহৰণ 2 : অধোলিখিত বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মাধ্য নির্ণয় কৰক।

x_i	3	5	7	9	11	13
f_i	6	8	15	25	8	4

সমাধান ঃ $\bar{x} = \dfrac{6\times3+8\times5+15\times7+25\times9+8\times11+4\times13}{6+8+15+25+8+4}$

$= \dfrac{18+40+105+225+88+52}{6+8+15+25+8+4}$

$= \dfrac{528}{66} = 8$

III. সংঘৱদ্ধ বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মাধ্য (Mean for grouped or continuous frequency distribution)

সংঘৱদ্ধ বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মাধ্যৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}$$

য'ত x_i হ'ল অনুৰূপ শ্রেণীৰ মধ্যমান।

উদাহৰণ 3 : অধোলিখিত বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মাধ্য নির্ণয় কৰক।

গুণাংক	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
ছাত্রৰ সংখ্যা	15	17	19	27	19	12

সমাধা ঃ [এইটো এটা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টন। প্রত্যেক শ্রেণী উচ্চ সীমা সেই শ্রেণীটোৰ পৰা বাদ দিয়া হয়। উদাৰণস্বৰূপে 0–10 শ্রেণীটোত 10 -অক ধৰা নহয়। ইয়াক 10–20 শ্রেণীটো ধৰা হয়।]

শ্রেণী-অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা f_i	মধ্যমা x_i	$f_i x_i$
0–10	15	5	75
10–20	17	15	255
20–30	19	25	475
30–40	27	35	945
40–50	19	45	855
50–60	12	55	660

$N = \sum f_i = 109, \quad \sum f_i x_i = 3265$

$\therefore \bar{x} = \dfrac{\sum f_i x_i}{N} = \dfrac{3265}{109}$

= 29.954 (মোটামুটিভাৱে)

টোকা ঃ ওপৰৰ উদাহৰণটোত f_i' বোৰ আৰু x_i' বোৰ ডাঙৰ সংখ্যা। গতিকে $f_i x_i'$ বোৰ আৰু

ডাঙৰ। ডাঙৰ গণনাৰ হাত সাৰিবৰ বাবে, মাধ্য নির্ণয়ৰ ক্ষেত্রত আমি এটা চুটি নিয়ম ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰোঁ।

চুটি নিয়ম

এই নিয়মৰ সহায়ত মাধ্য $\bar{x}$ এইদৰে উলিওৱা হয়।

$$\bar{x} = a + \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - a),$$

য'ত a এটা স্বেচ্ছ সংখ্যা। ইয়াক ধৰি লোৱা মাধ্য (assumed mean) বুলি কোৱা হয়।

সমান শ্রেণী-অন্তৰালবিশিষ্ট সংঘৱদ্ধ বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ ক্ষেত্রত, ইয়াতকৈয়ো চুটি নিয়ম এটা ব্যৱহাৰ কৰা হয়। এই ক্ষেত্রত আমি ধৰি লওঁ—

$d_i = \frac{x_i - a}{h}$, য'ত h হ'ল শ্রেণী অন্তৰালৰ দৈর্ঘ্য।

মাধ্য এনেদৰে উলিওৱা হয়।

$$\bar{x} = a + h\frac{\sum f_i d_i}{N}$$

উদাহৰণ 4 : উদাহৰণ 3 ত প্রদত্ত বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মাধ্য চুটি নিয়মেৰে নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ a = 35 বুলি ধৰা হ'ল, h = 10

শ্রেণী অন্তৰাল	বাৰংবাতা f_i	মধ্যমা x_i	$d_i = \frac{xi - 35}{10}$	$f_i d_i$
0–10	15	5	–3	–45
10–20	17	15	–2	–34
20–30	19	25	–1	–19
30–40	27	35	0	0
40–50	19	45	1	19
50–60	12	55	2	24

$N = \sum f_i = 109$

$\sum f_i d_i = -55$

$\therefore \bar{x} = 35 + 10 \times \left(\frac{-55}{109}\right)$

$= 35 - \frac{550}{109}$

= 35 – 5.0459

= 29.9541

সমান্তৰ মাধ্যৰ ধর্ম

1. কিছুমান মানৰ সমান্তৰ মাধ্যৰ পৰা বিচ্যুতিৰ বীজগণিতীয় সমষ্টি শূন্য। (The algebraic sum of the deviations of a set of values from their arithmetic mean is zero.)

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ —এই n টা পর্যবেক্ষণৰ বাৰংবাৰতা ক্রমে $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$। তেনেহ'লে মাধ্য $\bar{x}$ হ'ল

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{\sum f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{N}, \qquad \text{য'ত } N = \sum_{i=1}^{n} f$$

প্রমাণ কৰিব লাগে যে $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x}) = 0$

এতিয়া, $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x}) = 0$

$$= f_1(x_1 - x) + f_2(x_2 - \bar{x}) + \ldots\ldots + f_n(x_n - \bar{x})$$

$$= (f_1x_1 - f_2x_2 + \ldots\ldots + f_nx_n) - (f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n) - \bar{x})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_ix_i - \sum_{i=1}^{n} f_i\bar{x}$$

$$= N\bar{x} - N\bar{x}$$

= 0

2. মাধ্য সাপেক্ষে ল'লে কিছুমান মানৰ বিচ্যুতিৰ বর্গৰ বীজগণিতীয় সমষ্টি সর্বনিম্ন।(The sum of the squares of the deviations of a set of values is minimum when taken about mean.)

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ — এই n টা পর্য্যবেক্ষণৰ বাৰংবাৰতা ক্রমে $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$। তেনেহ'লে মাধ্য $\bar{x}$ হ'ল।

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots\ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots + f_n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} == \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{N_i}, \qquad N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

প্রমাণ কৰিব লাগে যে $a = \bar{x}$ হ'লে $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - a)^2$ সর্বনিম্ন, য'ত a যিকোনো স্বেচ্ছ সংখ্যা।

ধৰাহ'ল $z = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - a)^2$

$$= f_1(x_1 - a)^2 + f_2(x_2 - a)^2 + ... + f_n(x_n - a)^2$$

$$= f_1(x_1 - \bar{x} + \bar{x} - a)^2 + f_2(x_2 - \bar{x} + \bar{x} - a)^2 + ... + f_n(x_n - \bar{x} + \bar{x} - a)^2$$

$$= f_1[(x_1 - \bar{x})^2 + (\bar{x} - a)^2 + 2(x_1 - x)(\bar{x} - a)^2]$$

$$+ f_2[(x_2 - \bar{x})^2 + (\bar{x} - a)^2 + 2(x_2 - \bar{x})(\bar{x} - a)] + ...$$

$$+ f_n[(x_n - \bar{x})^2 + (\bar{x} - a)^2 + 2(x_n - \bar{x})(\bar{x} - a)]$$

$$= f_1(x_1 - \bar{x})^2 + f_2(x_2 - \bar{x})^2 + ... + f_n(x_n - \bar{x})^2 + (\bar{x} - a)^2(f_1 + f_2 + ... + f_n)$$

$$+ 2(\bar{x} - a)[f_1(x_1 - \bar{x}) + f_2(x_2 - \bar{x}) + ... + f_n(x_n - \bar{x})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - a)^2 \sum_{i=1}^{n} f_i + 2(\bar{x} - a) \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})$$

আমি জানো যে $\sum_{i=1}^{n} f_i = N$ আৰু $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2 = o$ (ধর্ম 1)

$$\therefore z = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - a)^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - a)^2 N$$

যদি $a = \bar{x}$, $(\bar{x} - a)^2 = 0$

$\therefore$ $a = \bar{x}$ হ'লে, z সৰ্বনিম্ন আৰু সৰ্বনিম্ন মান হ'ল $\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2$.

৭.৪ গুণোত্তৰ মাধ্য (GEOMETRIC MEAN)

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$— এই n টা পৰ্যবেক্ষণ। ইয়াত x_i বোৰ অশূন্য আৰু ধনাত্মক। এই পৰ্যবেক্ষণকেইটাৰ গুণোত্তৰ মাধ্যক Gৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$G = (x_1 x_2 \ldots . x_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\therefore \log G = \log(x_1 x_2 \ldots . x_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$= \frac{1}{n} \log (x_1 x_2 \ldots . x_n)$$

$$= \frac{1}{n} \log [\log x_1 + \log x_2 + \ldots . + \log x_n] \qquad (1)$$

$$\therefore \text{ G = antilog } \left[\frac{1}{n}(\log x_1 + \log x_2 + \ldots . + \log x_n)\right]$$

আকৌ ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ এই n টা পৰ্যবেক্ষণৰ বাৰংবাৰতা ক্ৰমে $f_1, f_2, \ldots$

. . . ., f_n । এই পর্যবেক্ষণকেইটাৰ গুণোত্তৰ মাধ্যক G ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$G = \left(x_1^{f_1} x_2^{f_2} \ldots . x_n^{fn}\right)^{\frac{1}{N}}, \qquad \text{য'ত } N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

$$\therefore \log G = \log \left(x_1^{f_1} x_2^{f_2} \ldots . x_n^{fn}\right)^{\frac{1}{N}}$$

$$= \frac{1}{N} \log \left(x_1^{f_1} x_2^{f_2} \ldots . x_n^{fn}\right)$$

$$= \frac{1}{N} \left[\log x_1^{f_1} + \log x_2^{f_2} + \ldots . + \log x_n^{fn}\right]$$

$$= \frac{1}{N} \left[f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + \ldots . + f_n \log x_n\right] \qquad (2)$$

$$\therefore \text{ G = antilog } \left[\frac{1}{n}\left(f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + \ldots . + f_n \log x_n\right)\right]$$

(1) আৰু (2) ৰ পৰা আমি দেখিলোঁ যে n টা পর্যবেক্ষণৰ গুণোত্তৰ মাধ্যৰ ঘাতাংক = পর্যবেক্ষণকেইটাৰ ঘাতাংকৰ সমান্তৰ মাধ্য।

৭.৫ হৰাত্মক মাধ্য (HARMONIC MEAN)

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \ldots . , x_n$, - এই n টা পর্যবেক্ষণৰ প্রত্যেকেই অশূন্য।

এই পর্যবেক্ষণকেইটাৰ হৰাত্মক মাধ্যক H এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$H = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots . + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}$$

আকৌ, ধৰা হ'ল $x_i, x_2, \ldots . , x_n$ —এই n টা পর্যবেক্ষণৰ বাৰংবাৰতা ক্রমে $f_1, f_2, \ldots . , f_n$ । এই পর্যবেক্ষণকেইটাৰ হৰাত্মক মাধ্যক H এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$H = \frac{N}{\frac{f_1}{x_1} + \frac{f_2}{x_2} + \ldots . + \frac{f_n}{x_n}} \qquad \text{য'ত } N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

উদাহৰণ 5 : 7, 8, 49 অৰ সমান্তৰ মাধ্য (AM), গুণোত্তৰ মাধ্য (GM), আৰু হৰাত্মক মাধ্য (HM) নির্ণয় কৰক আৰু দেখুৱাওক যে AM > GM > HM.

সমাধান ঃ $AM = \frac{7+8+49}{3} = \frac{64}{3} = 21.3$ (মোটামুটিভাৱে)

$$GM = (7\times 8\times 49)^{\frac{1}{3}} = (7\times 2^3\times 7^2)^{\frac{1}{3}} = (2^3\times 7^3)^{\frac{1}{3}} = 2\times 7 = 14$$

$$HM = \frac{3}{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\ldots.+\frac{1}{49}} = \frac{3}{\frac{113}{392}} = 3\times\frac{392}{113} = 10.41 \text{ (মোটামুটিভাৱে)}$$

স্পষ্টত ঃ AM > GM > HM

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 1



প্রশ্ন নং ১ঃ 14.9, 10.8, 12.3, 23.3 এই পর্যবেক্ষণকেইটাৰ মাধ্য নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ঃ তলৰ তথ্যবোৰৰ মাধ্য নির্ণয় কৰক।

গুণাংক	5	10	15	20	25	30	35	40
ছাত্রৰসংখ্যা	5	7	9	10	8	6	3	2

প্রশ্ন নং ৩ঃ তলৰ বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ পৰা মাধ্য উচ্চতা নির্ণয় কৰক।

উচ্চতা (ছেমিত)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
উদ্ভিদৰ সংখ্যা	42	44	58	35	26	15

প্রশ্ন নং ৪ঃ 7, 27, 49 অৰ সমান্তৰ মাধ্য (AM), গুণোত্তৰ মাধ্য (GM), হৰাত্মক মাধ্য (HM) নির্ণয় কৰক আৰু দেখুৱাওক যে AM > GM > HM.

প্রশ্ন নং ৫ঃ যদি প্রথম কিল'মিটাৰ ঘণ্টাত 10 km দ্রুতিৰে, দ্বিতীয় কিল'মিটাৰ ঘণ্টাত 8 km দ্রুতিৰে আৰু তৃতীয় কিল'মিটাৰ ঘণ্টাত 4 km দ্রুতিৰে ভ্রমণ কৰা হয়, তেনেহ'লে গড় দ্রুতি নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ প্রথম n টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ বর্গৰ মাধ্য নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৭ঃ 3.2, 5.8, 7.9, আৰু 4.5 সংখ্যাকেইটাৰ বাৰংবাৰতা ক্রমে x, (x + 2), (x – 3), আৰু (x + 6)। যদি সিহঁতৰ মাধ্য 4.876 হয়, x অৰ মান নির্ণয় কৰক।

৭.৬ মধ্যমা (MEDIAN)

বণ্টনৰ মধ্যমা বুলি ক'লে আমি চলকৰ সেই মানটোক বুজো যিয়ে বণ্টনটোক দুটা সমান অংশত ভাগ কৰে।

I. অসংঘৱদ্ধ তথ্যৰ মধ্যমা (Median for ungrouped data)

ধৰা হ'ল n টা পর্যবেক্ষণ দিয়া আছে।

প্রথমতে আমি পর্যবেক্ষণবোৰক মানৰ ঊৰ্ধ্বক্রমত (বা অধঃ ক্রমত) সজাওঁ।

(a) ধৰা হ'ল n অযুগ্ম সংখ্যা।

এই ক্ষেত্রত, $\left(\frac{n+1}{2}\right)$তম পদটোৱেই মধ্যমা, অর্থাৎ মধ্যমা = $\left(\frac{n+1}{2}\right)$তম পদ।

(b) ধৰা হ'ল n যুগ্ম সংখ্যা।

এই ক্ষেত্রত, মধ্যম পদ দুটাৰ মাধ্যই অর্থাৎ $\frac{n}{2}$তম আৰু $\left(\frac{n}{2}+1\right)$তম পদ দুটাৰ মাধ্যই মধ্যমা।

টোকা ঃ n যুগ্ম সংখ্যা হ'লে, মধ্যম মান দুটাৰ মাজৰ যিকোনো সংখ্যাক মধ্যমা হিচাপে ল'ব পাৰি। কিন্তু সাধাৰণতে মধ্যম মান দুটাৰ মাধ্যকে মধ্যমা হিচাপে লোৱা হয়।

উদাহৰণ 6 : তলৰ পর্যবেক্ষণবোৰৰ মধ্যমা নির্ণয় কৰক।

5, 19, 42, 11, 50, 30, 21, 0, 52, 36, 27.

সমাধান ঃ তলত দেখুওৱাৰ দৰে আমি পর্যবেক্ষণবোৰক মানৰ ঊর্ধক্রমত সজাওঁ,— 0, 5, 11, 19, 21, 27, 30, 36, 42, 50, 52.

ইয়াত 11 টা পর্যবেক্ষণ (অযুগ্ম সংখ্যক পর্যবেক্ষণ)

$\therefore$ মধ্যমা = $\left(\frac{11+1}{2}\right)$তম, অর্থাৎ ষষ্ঠ পর্যবেক্ষণ = 27

উদাহৰণ 7 : তলৰ পর্যবেক্ষণবোৰৰ মধ্যমা নির্ণয় কৰক।

6, 10, 4, 3, 9, 11, 22, 18.

সমাধান ঃ তলত দেখুওৱাৰ দৰে আমি পর্যবেক্ষণবোৰক মানৰ ঊর্ধক্রমত সজাওঁ,—

3, 4, 6, 9, 10, 11, 18, 22.

ইয়াত 8 টা পর্যবেক্ষণ (যুগ্ম সংখ্যক পর্যবেক্ষণ) আছে।

$\therefore$ মধ্যমা = $\frac{8}{2}$তম আৰু $\left(\frac{8}{2}+1\right)$তম পর্যবেক্ষণৰ মাধ্য

= চতুর্থ আৰু পঞ্চম পর্যবেক্ষণৰ মাধ্য

$= \frac{9+10}{2} = \frac{19}{2} = 9.5$

II. বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা চলকৰ মধ্যমা (Median for discrete frequency distribution)

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ — এই n টা পর্যবেক্ষণৰ বাৰংবাৰতা ক্রমে $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$। এই ক্ষেত্রত সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিবেচনা কৰি মধ্যমা নির্ণয় কৰা হয়।

পোনতে আমি $N = \sum_{i=1}^{n} f$ নির্ণয় কৰোঁ। তাৰ পাছত আমি $\frac{N}{2}$ উলিয়াওঁ। $\frac{N}{2}$ তকৈ ঠিক ডাঙৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা(Cumulative Frequency) নির্ণয় কৰোঁ. x অৰ অনুৰূপ মানেই মধ্যমা।

উদাহৰণ 8 : তলৰ বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মধ্যমা নির্ণয় কৰক।

x_i	20	9	25	50	40	80
f_i	6	4	16	7	8	2

সমাধান ঃ

x_i (ঊর্ধক্রমত)	f_i	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা (c.f.)
9	4	4
29	6	10
25	16	26
40	8	34
50	7	41
80	2	43

$N = \Sigma f_i = 43$, $\frac{N}{2} = 43 = 21.5$

21.5 অতকৈ ঠিক ডাঙৰ c.f. হ'ল 26। x অৰ অনুৰূপ মান 25। মধ্যমা = 25.

III. সংঘৱদ্ধ বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মধ্যমা (Median for grouped or continuous frequency distribution)

সংঘৱদ্ধ বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মধ্যমা তলত দিয়াৰ দৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হয়–

মধ্যমা = $L + \frac{\frac{N}{2} - c}{f} \times h$

য'ত L = মধ্যমা শ্রেণীৰ নিম্নসীমা,

f = মধ্যমা শ্রেণীৰ বাৰংবাৰতা,

c = মধ্যমা শ্রেণীৰ ঠিক আগৰ শ্রেণীটোৰ c.f.

h = মধ্যমা শ্রেণীৰ দৈর্ঘ

$\frac{N}{2}$ তকৈ ঠিক ডাঙৰ c.f. অৰ অনুৰূপ শ্রেণীটোক মধ্যমা শ্রেণী বুলি কোৱা হয়, $N = \Sigma f_i$

উদাহৰণ 9 : তলৰ বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মধ্যমা নির্ণয় কৰক।

শ্রেণী অন্তৰাল	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
বাৰংবাৰতা	5	10	20	5	3

সমাধান ঃ

শ্রেণী অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা	c.f
20-30	5	5
30-40	10	15
40-50	20	35
50-60	5	40
60-70	3	43

এই ক্ষেত্ৰত $N = \Sigma f_i = 43$, $\frac{N}{2} = \frac{43}{2} = 21.5$

21.5 অতকৈ ঠিক ডাঙৰ c.f. অৰ অনুৰূপ শ্রেণী হ'ল 40-50.

∴ মধ্যমা শ্রেণী : 40 – 50

L = 40, f = 20, c = 15, h = 20

মধ্যমা $= L = \frac{\frac{N}{2} - c}{f} \times h$

$= 40 + \frac{21.5 - 15}{20} \times 10$

$= 40 + \frac{6.5}{2}$

= 40 + 3.25

= 43.25



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

প্রশ্ন নং ১ঃ তলৰ পর্যবেক্ষণবোৰৰ মধ্যমা নির্ণয় কৰক।

25, 30, 21, 55, 47, 10, 15, 17, 45, 35

প্রশ্ন নং ২ঃ তলৰ বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ পৰা মধ্যমা উচ্চতা নির্ণয় কৰক।

উচ্চতা (ছেমিত)	150	155	158	160	164	168
ছাত্ৰৰ সংখ্যা	10	14	8	15	7	11

প্রশ্ন নং ৩ঃ তলৰ বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মধ্যমা নির্ণয় কৰক।

শ্রেণী অন্তৰাল	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
বাৰংবাৰতা	7	10	16	32	24

প্রশ্ন নং ৪ঃ 8, 11, 13, 15, x+1, x+3, 30, 35, 40, 43 পর্যবেক্ষণ কেইটা ঊর্ধক্রমত

আছে, আৰু ইয়াৰ মধ্যমা 22। x অৰ মান নির্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ তলৰ বণ্টনটোৰ মধ্যমা নির্ণয় কৰক।

দৰমহা (টকাত)	2200-2300	2300-2400	2400-2500	2500-2600	2600-2700
শ্ৰমিকৰ সংখ্যা	3	5	20	10	5

৭.৭ বহুলক (MODE)

বণ্টনত যিটো মান সবাতোকৈ বেছিকৈ ওলায়, তাক বহুলক বুলি কোৱা হয়।

তলৰ পর্যবেক্ষণবোৰ লোৱা হ'ল।

6, 5, 3, 4, 3, 7, 8, 5, 9, 5, 4.

ইয়াত 5 মানটো সবাতোকৈ বেছিকৈ ওলাইছে।

∴ বণ্টনটোৰ বহুলক হ'ল 5.

টোকা ঃ যদি এটাতকৈ অধিক মানৰ একে সর্বাধিক বাৰংবাৰতা থাকে, তেনেহ'লে বহুলক সংজ্ঞাৱদ্ধ নহয়।

II. বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ বহুলক (Mode for discrete frequency distribution)

বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ ক্ষেত্ৰত, সর্বোচ্চ বাৰংবাৰতাৰ অনুৰূপে চলকৰ যিটো মান, সেইটোকে বহুলক বুলি কোৱা হয়।

তলৰ উদাহৰণটো লোৱা হ'ল।

x_i	1	2	3	4	5	6	7
f_i	10	15	20	35	16	3	1

এই ক্ষেত্ৰত, সর্বোচ্চ বাৰংবাৰতা = 35, আৰু x অৰ সর্বোচ্চ মান 4। ∴ বহুলক = 4.

তলৰ যিকোনো এটাৰ (বা একাধিকৰ) ক্ষেত্ৰত এই নিয়মটো প্ৰযোজ্য নহয়।

1. সর্বোচ্চ বাৰংবাৰতাৰ পুনৰুক্তি হয়।
2. সর্বোচ্চ বাৰংবাৰতা একেবাৰে আৰম্ভণিতে বা একেবাৰে শেষত ওলায়।
3. যদি বণ্টনটোত থাকে।

এনে ক্ষেত্ৰত, গ্ৰুপিঙৰ সহায়ত বহুলক নির্ণয় কৰা হয়। আমি সেই বিষয়ে আলোচনা নকৰোঁ।

III. সংঘৱদ্ধ বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ বহুলক (Mode for grouped or continuous frequency distribution)

সংঘৱদ্ধ বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ বহুলক এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হয়।

$$\text{বহুলক} = L + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times h,$$

য'ত L = ম'ডেল শ্ৰেণীৰ নিম্ন সীমা

h = ম'ডেল শ্রেণীৰ দৈর্ঘ

f_1 = ম'ডেল শ্রেণীৰ ঠিক আগৰ শ্রেণীটোৰ বাৰংবাৰতা

f_2 = ম'ডেল শ্রেণীৰ ঠিক পিছৰ শ্রেণীটোৰ বাৰংবাৰতা

f_m = ম'ডেল শ্রেণীৰ বাৰংবাৰতা

ম'ডেল শ্রেণী (modal class) বুলি ক'লে আমি সেই শ্রেণীক বুজিম যাৰ বাৰংবাৰতা সর্বোচ্চ বা যিটো শ্রেণীত বহুলক থাকে।

উদাহৰণ 10 : তলৰ বণ্টনটোৰ বহুলক নির্ণয় কৰক।

শ্রেণী-অন্তৰাল	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
বাৰংবাৰতা	7	10	16	32	24

সমাধান ঃ এই ক্ষেত্রত সর্বোচ্চ বাৰংবাৰতা হ'ল 32.

∴ ম'ডেল শ্রেণী হ'ল 15-20.

∴ L = 15, f_m = 32, f_1 = 16, f_2 = 24, h = 5

$$\therefore \text{বহুলক} = L + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times h$$

$$= 15 + \frac{32-16}{2\times 32 - 16 - 24} \times 5$$

$$= 15 + \frac{16}{24} \times 5$$

$$= 15 + \frac{2}{3} \times 5 \quad = 15 + \frac{10}{3} \quad = 18.3$$

মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলকৰ মাজৰ আনুভৱিক সম্বন্ধ (Empirical relation between mean, median and mode)

কোনো বণ্টনৰ মাধ্য = মধ্যমা = বহুলক হ'লে বণ্টনটোক সমমিতীয় বণ্টন (symmetrical distribution) বুলি কোৱা হয়। যদি মাধ্য, মধ্যমা, বহুলক সমান নহয়, তেনেহ'লে বণ্টনটোক অসমমিতীয় (asymmetrical) বা বিষম (skewed) বুলি কোৱা হয়। এটা নিয়মীয়া অসমমিতীয় বণ্টনৰ ক্ষেত্রত মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলকৰ মাজত এটা সম্বন্ধ আছে। পৰিসংখ্যাবিজ্ঞানী কার্ল পিয়েৰছনে (karl pearson) সম্বন্ধটো এনেদৰে প্রকাশ কৰিছে।

বহুলক = 3 মধ্যমা – 2 মাধ্য

উদাহৰণ ১১ ঃ যদি বহুলক = 25.5, মধ্যমা = 24.25, মাধ্য নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে

বহুলক = 3 মধ্যমা – 2 মাধ্য

বা, 25.5 = 3 x 24.25 – 2 মাধ্য

বা, 2 মাধ্য= 72.75 – 25.5

বা, 2 মাধ্য = 47.35

$\therefore$ মাধ্য $= \frac{47.25}{2}$

= 23.625



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 3

প্রশ্ন নং ১ঃ তলৰ বণ্টনটোৰ বহুলক নির্ণয় কৰক।

উচ্চতা (ছেমিত)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
উদ্ভিদৰ সংখ্যা	42	44	58	35	26	15

প্রশ্ন নং ২ঃ যদি বহুলক = 16, মাধ্য = 20.2, মধ্যমা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ বহুলক আৰু মাধ্যৰ মান ক্রমে 60 আৰু 66 হ'লে, মধ্যমাৰ মান নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ যদি বহুলক = 50.04, মাধ্য = 45, মধ্যমা কিমান?

প্রশ্ন নং ৫ঃ তলৰ পর্যবেক্ষণবোৰৰ মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলক নির্ণয় কৰক।

1, 2, 2, 3, 4, 7, 9.

৭.৮ চতুর্থক (QUARTILE)

চলকৰ যিবোৰ মানে পর্যবেক্ষণৰ অনুক্রমটোক সমানে চাৰি ভাগ কৰে, তাক চতুর্থক বুলি কোৱা হয়। প্রত্যেক অংশতে সমান সংখ্যক পদ থাকে। প্রথম বিন্দুটোক প্রথম চতুর্থক (Q_1), দ্বিতীয় বিন্দুটোক দ্বিতীয় চতুর্থক (Q_2, মধ্যমা), আৰু তৃতীয় বিন্দুটোক তৃতীয় চতুর্থক (Q_3) বোলে।

চতুর্থকৰ গণনা (Computation of quantiles)

I. অসংঘৱদ্ধ তথ্যৰ চতুর্থক (Quartiles for ungrouped data)

প্রথমতে আমি মানৰ ঊর্ধক্রমত পর্যবেক্ষণবোৰ সজাওঁ। ধৰাহ'ল মুঠ পর্যক্ষেণৰ সংখ্যা N। তেনেহ'লে

$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right)$তম পর্যবেক্ষণৰ মান

$Q_2 = \left(\frac{N+1}{2}\right)$তম পর্যবেক্ষণৰ মান, যদি n অযুগ্ম

$= \frac{N}{2}$ তম আৰু $\left(\frac{N+1}{2}\right)$তম পর্যবেক্ষণৰ মানৰ মাধ্য, যদি n যুগ্ম

$Q_3 = 3\left(\frac{N+1}{4}\right)$তম পর্যবেক্ষণৰ মান

II. সংঘৱদ্ধ বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ চতুর্থক (Quartiles for grouped or continuous frequency distribution)

প্রথমতে আমি প্রদত্ত বণ্টনৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা (c.f.) নির্ণয় কৰোঁ।

ধৰা হ'ল $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

আমি $\frac{iN}{4}$, উলিয়াওঁ, য'ত Q_1 অৰ বাবে i = 1, Q_2 ৰ (বা মধ্যমাৰ) বাবে i = 2, Q_3 ৰ বাবে i = 3.

তাৰ পাছত আমি $\frac{iN}{4}$অতকৈ ঠিক ডাঙৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা আৰু অনুৰূপ শ্রেণী উলিয়াওঁ। অনুৰূপ শ্রেণীটোক চতুর্থক শ্রেণী বুলি কোৱা হয়।

তলৰ সূত্রটোৰ সহায়ত আমি Q_1, Q_2, আৰু Q_3 নির্ণয় কৰিম।

$$Q_i = L + \frac{\frac{iN}{4} - c}{f} \times h$$

i = 1, 2, 3

য'ত L = চতুর্থক শ্রেণীৰ নিম্ন সীমা

f = চতুর্থক শ্রেণীৰ বাৰংবাৰতা

c = চতুর্থক শ্রেণীৰ ঠিক আগৰ শ্রেণীটোৰ c.f.

h = চতুর্থক শ্রেণীৰ দৈর্ঘ্য।



৭.৯ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \ldots., x_n$. — n টা পর্যবেক্ষণ। এই n টা পর্যবেক্ষণৰ মাধ্যক $\bar{x}$ -এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots. + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — n টা পর্যবেক্ষণৰ বাৰংবাৰতা ক্রমে $f_1, f_2, \ldots, f_n$। এই পর্যবেক্ষণকেইটাৰ মাধ্যৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_nx_n}{f_1 + f_2 + \ldots + f_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{N}$$

সংঘৱদ্ধ বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মাধ্যৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_ix_i}{N}, \qquad N = \sum_{i=1}^{n} f$$

য'ত x_i হ'ল অনুৰূপ শ্রেণীৰ মধ্যমান।

- বণ্টনৰ মধ্যমা বুলি ক'লে আমি চলকৰ সেই মানটোক বুজো যিয়ে বণ্টনটোক দুটা সমান অংশত ভাগ কৰে।

  আমি পর্যবেক্ষণবোৰক মানৰ ঊর্ধক্রমত (বা অধঃক্রমত) সজাওঁ। পর্যবেক্ষণৰ সংখ্যা n হ'লে আৰু n অযুগ্ম হ'লে, $\left(\frac{N+1}{2}\right)$তম পদটোৱেই মধ্যমা। n যুগ্ম হ'লে $\frac{n}{2}$তম পদ আৰু $\left(\frac{n}{2}+1\right)$তম পদ দুটাৰ মাধ্যই মধ্যমা।

  সংঘৱদ্ধ বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ মধ্যমা তলত দিয়াৰ দৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হয়।

  $$\text{মধ্যমা} = L + \frac{\frac{N}{2} - c}{f} \times h$$

  য'ত L = মধ্যমা শ্রেণীৰ নিম্ন সীমা,

  f = মধ্যমা শ্রেণীৰ বাৰংবাৰতা,

  c = মধ্যমা শ্রেণীৰ ঠিক আগৰ শ্রেণীটোৰ c.f.,

  h = মধ্যমা শ্রেণীৰ দৈর্ঘ্য

  $\frac{N}{2}$তকৈ ঠিক ডাঙৰ c.f.অৰ অনুৰূপ শ্রেণীটোক মধ্যমা শ্রেণী বুলি কোৱা হয়। $N = \Sigma f_i$

- বণ্টনত যিটো মান সবাতোকৈ বেছিকৈ ওলায় তাক বহুলক বুলি কোৱা হয়।

  সংঘৱদ্ধা বা বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ বহুলক এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হয়।

  $$\text{বহুলক} = L + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times h$$

  য'ত L = ম'ডেল শ্রেণীৰ নিম্ন সীমা

  h = ম'ডেল শ্রেণীৰ দৈর্ঘ্য

  f_1 = ম'ডেল শ্রেণীৰ ঠিক আগৰ শ্রেণীটোৰ বাৰংবাৰতা

f_2 = ম'ডেল শ্রেণীৰ ঠিক পিছৰ শ্রেণীটোৰ বাৰংবাৰতা

f_m = ম'ডেল শ্রেণীৰ বাৰংবাৰতা

ম'ডেল শ্রেণী (modal class) বুলি ক'লে আমি সেই শ্রেণীক বুজিম যাৰ বাৰংবাৰতা সর্বোচ্চ বা যিটো শ্রেণীত বহুলক থাকে।



৭.১০ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

1) Statistical Methods by N.G. Das, McGraw Hill Education (India) Private Ltd. 2009
2) Probability and Statistics by G.Shanker Rao, University Press (India) private Ltd. 2011
3) Introduction to probability and Statistics by Seymour Lipschutz, John J.Schiller, Tata McGraw Hill Education private Ltd. 2005
4) Probability, Random Process, Queueing theory and Statistics by Dr. S.Rajasekaran, Prof.A.Chandrasekaran & G.Kavitha, Dhanam Publications, Chennai-60042
5) Probability and Statistics by G.Balaji, G.Balaji Publishers, Chennai-33



৭.১১ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ ১

1 নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $\bar{x} = \dfrac{14.9+10.8+12.3+23.3}{4} = \dfrac{61.3}{4} = 15.325$

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ

$$\bar{x} = \frac{5\times5+7\times10+9\times15+10\times20+8\times25+6\times30+3\times35+2\times40}{5+7+9+10+8+6+3+2}$$

$$= \frac{25+70+135+200+200+180+105+80}{50}$$

$$= \frac{995}{50} = 19.9$$

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ

শ্রেণী অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা (f_i)	মধ্যমান (x_i)	$f_i x_i$
0-10	42	5	210
10-20	44	15	660
20-30	58	25	1450
30-40	35	35	1225
40-50	26	45	1170
50-60	15	55	825

$N = \Sigma f_i = 220$, $\Sigma f_i x_i = 5540$

$\therefore \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} = \frac{5540}{220}$ = 25.18 (মোটামুটিভাৱে)

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ $AM = \frac{7+27+49}{3} = \frac{83}{3}$ = 27.67 (মোটামুটিভাৱে)

$GM = (7+27+49)^{\frac{1}{3}} = (7+3^3+7^2)^{\frac{1}{3}} = (3^3+7^3)^{\frac{1}{3}} = 3\times 7 = 21$

$HM = \frac{3}{\frac{1}{7}+\frac{1}{27}+\frac{1}{49}} = \frac{3}{\frac{265}{1323}} = 3\times\frac{1323}{265}$

$\frac{3969}{265}$ = 14.98 (মোটামুটিভাৱে)

$\therefore$ AM > GM > HM

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ প্রথম কিল'মিটাৰ অতিক্রম কৰে $\frac{1}{10}$ ঘণ্টাত

দ্বিতীয় কিল'মিটাৰ অতিক্রম কৰে $\frac{1}{8}$ ঘণ্টাত

তৃতীয় কিল'মিটাৰ অতিক্রম কৰে $\frac{1}{4}$ ঘণ্টাত

$\therefore$ দূৰত্ব (3 কিঃমিঃ) অতিক্রম কৰে $\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\right)$ ঘণ্টাত

$\therefore$ গড় দ্রুতি $= \frac{3}{\frac{1}{10}+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}}$ কিঃমিঃ/ঘণ্টাত

$= \frac{3}{\frac{19}{40}}$ কিঃমিঃ/ঘণ্টাত

$= 3 \times \frac{40}{19}$ কিঃমিঃ/ঘণ্টাত

= 6.316 কিঃমিঃ/ঘণ্টাত (মোটামুটিভাৱে)

টোকা ঃ গড় দ্রুতি হ'ল 10, 8, 4 অৰ হৰাত্মক মাধ্য।

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $\bar{x} = \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2}{n}$

$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n}$

$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $4.876 = \frac{(3.2)x + (5.8)(x+2) + (7.9)(x-3) + (4.5)(x+6)}{x + x + 2 + x - 3 + x + 6}$

বা, $4.876 = \frac{(21.4)x + 11.6 - 23.7 + 27}{4x + 5}$

বা, (4.876) (4x + 5) = (21.4)x + 14.9

বা, (19.504)x + 24.38 = (21.4)x + 14.9

বা, (21.4)x – (19.504)x = 24.38–14.9

বা, (1.896)x = 9.48

$\therefore x = \frac{9.48}{1.896} = 5$

অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ পৰ্যবেক্ষণবোৰক তলত দেখুওৱাৰ দৰে আমি মানৰ ঊৰ্ধ্বক্ৰমত লিখোঁ

10, 15, 17,21, 25, 30, 35, 45, 47, 55

মুঠতে 10 টা পৰ্যবেক্ষণ আছে (যুগ্ম সংখ্যক পৰ্যবেক্ষণ)।

$\therefore$ মধ্যমা = $\frac{10}{2}$ তম আৰু $\left(\frac{10}{2}+1\right)$ তম পদৰ মাধ্য

= 5-তম আৰু 6-তম পদৰ মাধ্য

$= \frac{25+30}{2} = \frac{55}{2} = 27.5$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ঊৰ্ধ্বক্ৰমত থকা পৰ্যবেক্ষণবোৰ হ'ল 8, 11, 13, 15, x+1, x+3, 30, 35,

40, 43.

মুঠতে 10 টা পৰ্যবেক্ষণ আছে।

∴ মধ্যমা = পঞ্চম আৰু ষষ্ঠ পর্যবেক্ষণৰ মাধ্য

$$= \frac{x+1+x+3}{2} = \frac{2x+4}{2}$$

$= x + 2.$

এতিয়া, মধ্যমা = 22 (দিয়া আছে)

∴ $x + 2 = 22$

∴ $x = 20$

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ ৩

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ বহুলক = 50.04, মাধ্য = 45 (দিয়া আছে)

আমি জানো যে

বহুলক = 3 মধ্যমা – 2 মাধ্য

বা, 50.04 = 3 মধ্যমা – 2 x 45

বা, 3 মধ্যমা = 50.04 + 90

বা, 3 মধ্যমা = 140.04

∴ মধ্যমা = $\frac{140.04}{3}$ = 46.68

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ পর্যবেক্ষণবোৰ হ'ল

1, 2, 2, 3, 4, 7, 9

মাধ্য $= \frac{1+2+2+3+4+7+9}{7} = \frac{28}{7} = 4$

মুঠতে 7 টা পর্যবেক্ষণ আছে।

মধ্যমা $= \left(\frac{7+1}{2}\right)$ তম পর্যবেক্ষণ

= চতুর্থ পর্যবেক্ষণ

= 3

বহুলক = 2

টোকা ঃ বহুলক < মধ্যমা < মাধ্য।



৭.১২ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ 1, 2, 3, ..., n পৰ্যবেক্ষণকেইটাৰ বাৰংবাৰতা ক্ৰমে 1, 2, 3, ..., n। সমান্তৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ২ঃ 2, 4, 16 আৰু 32 ৰ সমান্তৰ মাধ্য (AM), গুণোত্তৰ মাধ্য (GM), আৰু হৰাত্মক মাধ্য (HM) নিৰ্ণয় কৰক। ইয়াৰ সহায়ত দেখুওৱাক যে AM > GM > HM.

প্ৰশ্ন ৩ঃ 30 ৰ পৰা 20 টা পৰ্যবেক্ষণৰ বিচ্যুতিৰ বীজগণিতীয় সমষ্টি 2। এই পৰ্যবেক্ষণকেইটাৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ঃ 15 জন ছাত্ৰৰ মাধ্য উচ্চতা 154 ছেণ্টিমিটাৰ। পিছত দেখা গ'ল যে মাধ্য গণনা কৰোঁতে, 155 ছেণ্টিমিটাৰ পৰ্যবেক্ষণটো ভুলকৈ 125 ছেণ্টিমিটাৰ বুলি লিখা হৈছিল। শুদ্ধ মাধ্য উচ্চতা নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৫ঃ অধোলিখিত বণ্টনটোৰ মাধ্য, মধ্যমা, বহুলক নিৰ্ণয় কৰক।

শ্ৰেণী অন্তৰাল	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
বাৰংবাৰতা	3	10	17	7	6

*** ***** ***

অধ্যায় ৮ ঃ প্রসাৰৰ মাপ (MEASURES OF DISPERSION)

অধ্যায় গাঁথনি

৮.১ উদ্দেশ্য

৮.২ পৰিচয়

৮.৩ প্রসাৰৰ ধাৰণা

- ৮.৩.১ পৰিসৰ
- ৮.৩.২ চতুর্থক বিচলন
- ৮.৩.৩ মাধ্য বিচলন
- ৮.৩.৪ প্রামাণিক বিচলন
- ৮.৩.৫ বিচৰণ গুণাংক

৮.৪ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৮.৫ অধিক জানিবলৈ

৮.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৮.৭ আৰ্হি প্রশ্ন

৮.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- প্রসাৰৰ ধাৰণা আয়ত্ত কৰিব পাৰিব
- পৰিসৰৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- চতুর্থক বিচলন সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- মাধ্য বিচলনৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- প্রামাণিক বিচলনৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- বিচৰণ গুণাংক সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

৮.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

প্রসাৰ (dispersion) হ'ল তথ্য কেনেদৰে সিঁচৰতি হৈ আছে তাৰ পৰিমাণ। এটা বণ্টনৰ মানবোৰ কেনেদৰে সিঁচৰতি বা প্রসাৰ হৈ থাকে, তাৰ নির্দিষ্ট তথ্য প্রসাৰৰ মাপৰ সহায়ত পোৱা যায়। পৰিসৰ (range), চতুর্থক বিচলন (quartile deviation), মাধ্য বিচলন (mean deviation), প্রামাণিক বিচলন (standard deviation) হ'ল প্রসাৰৰ মাপ (measures of dispersion)। এই অধ্যায়ত সেইবোৰৰ বিষয়ে আলোচনা কৰা হ'ব।

৮.৩ প্রসাৰৰ ধাৰণা (CONCEPT OF DISPERSION)

তলত দুটা পর্যবেক্ষণৰ সংহতি লোৱা হ'ল ঃ

A. 25, 26, 27, 28, 29

B. 3, 7, 13, 50, 60

A আৰু B – প্রত্যেকেই পাঁচটাকৈ পর্যবেক্ষণ আছে। প্রত্যেক ক্ষেত্রতেই মাধ্য 27। কিন্তু B ৰ পর্যক্ষেণবোৰতকৈ A ৰ পর্যবেক্ষণবোৰ বেছি কেন্দ্রীভূত। যদিও মাধ্য একে, সংহতি দুটাৰ গঠন বেলেগ। A ৰ ক্ষেত্রত মাধ্যৰ পৰা সর্বোচ্চ পৰিৱর্তন 4; আনহাতেদি B ৰ ক্ষেত্রত এয়া 35। গতিকে আমি দেখিলোঁ যে কেন্দ্রীয় প্রবৃত্তিৰ মাপে এটা বণ্টনৰ স্পষ্ট ধাৰণা নিদিয়ে। এই মাপবোৰৰ পৰিপূৰক হিচাপে অন্য মাপৰ প্রয়োজন হয়। প্রসাৰ হ'ল এনে এক মাপ।

৮.৩.১ পৰিসৰ (Range)

পর্যবেক্ষণৰ সর্বোচ্চ আৰু সর্বনিম্ন মানৰ মাজৰ পার্থক্যক পৰিসৰ বুলি কোৱা হয়। অর্থাৎ পৰিসৰ =M–m, য'ত M হ'ল সর্বোচ্চ মান আৰু m হ'ল সর্বনিম্ন মান।

উদাহৰণ 1ঃ তলৰ পর্যবেক্ষণবোৰৰ পৰিসৰ নির্ণয় কৰক।

23, 16, 14, 29, 5.6, 27, 13, 59

সমাধান ঃ আমি তথ্যসমূহ ঊর্দ্ধক্রমত লিখোঁ ঃ

13, 14, 16, 23, 27, 29, 56, 59

এই ক্ষেত্রত সর্বোচ্চ মান = 59

সর্বনিম্ন মান = 13

∴ পৰিসৰ = 59 – 13 = 46

টোকা ঃ যদিও পৰিসৰ সহজে উলিয়াব পাৰি, এইটো বিশ্বাসযোগ্য মাপ নহয়। ই সমগ্র তথ্যসমূহৰ ওপৰত নির্ভৰশীল নহয়। ই প্রান্ত মান দুটাৰ ওপৰত নির্ভৰ কৰে। ওপৰৰ উদাহৰণটোত প্রান্ত মান দুটা হ'ল 13, আৰু 59। পৰিসৰ এই দুটাৰ ওপৰত নির্ভৰ কৰে।

পৰিসৰ গুণাংক ঃ পৰিসৰ গুণাংকৰ (Coefficient of range) সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়—

পৰিসৰ গুণাংক $= \frac{M-m}{M+m}$, য'ত M হ'ল সর্বোচ্চ মান আৰু m হ'ল সর্বনিম্ন মান।

উদাহৰণ 2ঃ 1 নম্বৰ উদাহৰণত দিয়া পর্যবেক্ষণসমূহৰ পৰিসৰ গুণাংক নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ এই ক্ষেত্রত M = 59, m = 13

$\therefore$ পৰিসৰ গুণাংক = $\frac{59-13}{59+13}=\frac{46}{72}=\frac{23}{36}$

৮.৩.২ চতুর্থক বিচলন (Quartile Deviation)

তৃতীয় চতুর্থক আৰু প্ৰথম চতুর্থকৰ মাজৰ পার্থক্যক আন্তঃ চতুর্থক পৰিসৰ (interquartile range) বুলি কোৱা হয় আৰু আন্তঃ চতুর্থক পৰিসৰৰ আধাক চতুর্থক বিচলন (quartile deviation, (QD) বুলি কোৱাহয়। অর্থাৎ চতুর্থক বিচলন Q হ'ল

$QD = Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$,

য'ত Q_3 হ'ল তৃতীয় চতুর্থক, আৰু Q_1 হ'ল প্ৰথম চতুর্থক।

চতুর্থক বিচলন গুণাংকৰ (Coefficient of quartile deviation) এনেদৰে দিয়া হয় চতুর্থক বিচলন গুণাংক $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

উদাহৰণ 3ঃ তলৰ তথ্যসমূহৰ চতুর্থক বিচলন নির্ণয় কৰক।

শ্ৰেণী অন্তৰাল (গুণাংক)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
ছাত্ৰৰ সংখ্যা	4	6	20	10	7	3

সমাধান ঃ আমি জানো যে $Q_1 = L + = \frac{\frac{N}{4} - c}{f} \times h$,

য'ত L হ'ল প্ৰথম চতুর্থক শ্ৰেণীৰ নিম্ন সীমা

N হ'ল মুঠ বাৰংবাৰতাৰ সংখ্যা

C হ'ল চতুর্থক শ্ৰেণীৰ ঠিক ওপৰৰ শ্ৰেণীৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা (c. f.)

f হ'ল চতুর্থক শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা

h হ'ল শ্ৰেণী অন্তৰালৰ দৈর্ঘ্য

এতিয়া,

শ্ৰেণী অন্তৰাল	ছাত্ৰৰ সংখ্যা (f)	c.f.
0-10	4	4
10-20	6	10
20-30	20	30
40-50	7	47
50-60	3	50

$\therefore$ N = 50, $\frac{N}{4} = \frac{50}{4} = 12.5$

সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা (c.f) 30 ত 12.5 আছে।

∴ প্রথম চতুর্থক শ্রেণী ঃ 20 – 30

L = 20, c = 10, f = 20, h = 10

$$\therefore Q_1 = 20 + \frac{12.5 - 10}{20} \times 10$$

$$= 20 + \frac{2.5}{2} = 20 + 1.25 = 21.25$$

আকৌ, $Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - c}{f} \times h$

$$\frac{3N}{4} = \frac{3 \times 50}{4} = 37.5$$

∴ তৃতীয় চতুর্থক শ্রেণী ঃ 30 – 40

L = 30, c = 30, f = 10 h = 10

$$\therefore Q_3 = 30 + \frac{37.5 - 30}{10} \times 10$$

= 30 + 7.5 = 37.5

∴ চতুর্থক বিচলন = $\frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{37.5 - 21.25}{2}$$

$$= \frac{16.25}{2}$$

= 8.125

টোকা ঃ প্রান্ত মানৰ দ্বাৰা চতুর্থক বিচলন প্রভাৱিত নহয়।



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

প্রশ্ন নং ১ঃ পৰিসৰৰ এটা সুবিধা আৰু এটা অসুবিধা লিখক।

প্রশ্ন নং ২ঃ তলৰ পর্যবেক্ষণবোৰৰ পৰিসৰ আৰু পৰিসৰ গুণাংক নির্ণয় কৰক।

43, 13, 26, 11, 39, 56, 7, 98, 96, 34, 65, 42 .

প্রশ্ন নং ৩ঃ প্রান্ত মানৰ দ্বাৰা চতুর্থক বিচলন প্রভাৱিত হয়নে?

প্রশ্ন নং ৪ঃ অধোলিখিত পর্যবেক্ষণসমূহৰ পৰিসৰ কি?

6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6.

প্রশ্ন নং ৫ঃ তলৰ তথ্যবোৰৰ চতুর্থক বিচলন নির্ণয় কৰক।

শ্রেণী-অন্তৰাল	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
গুণাংক	5	8	15	16	6

৮.৩.৩ মাধ্য বিচলন (Mean Deviation)

মাধ্য, মধ্যমা বা বহুলকৰ পৰা সাংখ্যিক বিচলনৰ মাধ্যক মাধ্য বিচলন (Mean deviation) বুলি কোৱা হয়।

অসংঘৱদ্ধ তথ্যৰ বাবে মাধ্য বিচলন (Mean deviation for ungrouped data)

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots x_n$ এই n টা পর্যবেক্ষণ।

ধৰা হ'ল বণ্টনটোৰ $\bar{x}$ মাধ্য, আৰু M মধ্যমা।

(A) মাধ্য সাপেক্ষে মাধ্য বিচলনক MD ($\bar{x}$) এৰে বুজোৱা হয় আৰু ই হ'ল

$$MD(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

(B) মধ্যমা সাপেক্ষে মাধ্য বিচলনক MD(M) এৰে বুজোৱা হয় আৰু ই হ'ল

$$MD(M) = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - M|}{n}$$

উদাহৰণ 4ঃ (a) মাধ্য সাপেক্ষে, (b) মধ্যমা সাপেক্ষে তলৰ পর্যবেক্ষণবোৰৰ মাধ্য বিচলন নির্ণয় কৰক।

4, 5, 7, 8, 9, 13, 16, 18

সমাধান ঃ (a) $\bar{x} = \frac{4+5+7+8+9+13+16+18}{8} = \frac{80}{8} = 10$

$\therefore (x_i - \bar{x})$ ৰ মানবোৰ হ'ল –6, –5, –3, –2, –1, 3, 6, 8.

$\therefore |x_i - \bar{x}|$ ৰ মানবোৰ হ'ল 6, 5, 3, 2, 1, 3, 6, 8.

$$\therefore MD(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{8} |x_i - \bar{x}|}{8}$$

(b) পর্যবেক্ষণবোৰ ঊর্ধ্বক্রমত লিখা হ'ল

4, 5, 7, 8, 9, 13, 16, 18.

মুঠতে 8 টা পর্যবেক্ষণ আছে।

মাধ্য $M = \frac{1}{2}$ ($\frac{8}{2}$তম পর্যবেক্ষণ + $\left(\frac{8}{2}+1\right)$ তম পর্যবেক্ষণ)

$= \frac{1}{2}$ (4 তম পর্যবেক্ষণ + 5 তম পর্যবেক্ষণ)

$= \frac{1}{2} \times (8+9) = \frac{17}{2} = 8.5$

$\therefore$ $|x_i - M|$ অৰ মানবোৰ হ'ল

–4.5, –3.5, –1.5, –0.5, 0.5, 4.5, 7.5, 9.5

$\therefore$ $(x_i - M)$ অৰ মানবোৰ হ'ল

4.5, 3.5, 1.5, 0.5, 0.5, 4.5, 7.5, 9.5

$$\therefore MD(M) = \frac{\sum_{i=1}^{8} |x_i - M|}{8}$$

$$= \frac{4.5+3.5+1.5+0.5+0.5+4.5+7.5+9.5}{8}$$

$$= \frac{32}{2} = 4$$

বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ বাবে মাধ্য বিচলন (Mean deviation for discrete frequency distribution)

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ — এই n টা পর্যবেক্ষণৰ বাৰংবাৰতা ক্রমে $f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots, f_n$ ।

(A) মাধ্য সাপেক্ষে মাধ্য বিচলনক $MD(\bar{x})$ এৰে বুজোৱা হয়, আৰু ই হ'ল

$$MD(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - \bar{x}|}{\sum_{i=1}^{n} f_i}, \quad \text{য'ত}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{N}, \quad N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

(B) মধ্যমা সাপেক্ষে মাধ্য বিচলনক MD (M), এৰে বুজোৱা হয়, আৰু ই হ'ল

$$MD(M) = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - M|}{N}$$

উদাহৰণ 5ঃ (a) মাধ্য সাপেক্ষে, (b) মধ্যমা সাপেক্ষে তলৰ বণ্টনটোৰ মাধ্য বিচলন নির্ণয় কৰক।

x_i	6	12	18	24	30	86
f_i	5	4	11	6	4	6

সমাধান ঃ

(a)

x_i	f_i	f_ix_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
6	5	30	–15	15	75
12	4	48	–9	9	36
18	11	198	–3	3	33
24	6	144	3	3	18
30	4	120	-	9	36
36	6	216	15	15	90

$$N = \sum_{i=1}^{6} f_i = 36, \quad \sum_{i=1}^{6} f_i x_i = 756$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} = \frac{756}{36} = 21$$

$$\therefore MD(\bar{x}) = \frac{\Sigma f_i \mid x_i - \bar{x} \mid}{N} = \frac{288}{36} = 8$$

(B)

x_i	f_i	cf	x_i-M	$(x_i$-M)	$f_i \lvert x_i$-M$\rvert$
6	5	5	–12	12	60
12	4	9	–6	6	24
18	11	20	0	0	0
24	6	26	6	6	36
30	4	30	12	12	48
36	6	35	18	18	104

N = 36, এটা যুগ্ম সংখ্যা

$\therefore$ মাধ্য M = $\frac{1}{2}$ [$\frac{36}{2}$তম পর্যবেক্ষণ + $\left(\frac{36}{2}+1\right)$তম পর্যবেক্ষণ]

= $\frac{1}{2}$ [18-তম পর্যবেক্ষণ +19-তম পর্যবেক্ষণ]

$$= \frac{1}{2}(18+18) = 18$$

$$\therefore MD(M) = \frac{\sum_{i=1}^{6} f_i \mid x_i - M \mid}{N} = \frac{272}{36} = 7.5$$

অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ বাবে মাধ্য বিচলন (Mean deviation for continuous frequency distribution)

(A) মাধ্য সাপেক্ষে মাধ্য বিচলনক MD ($\bar{x}$), এৰে বুজোৱা হয় আৰু ই হ'ল

$MD(\bar{x}) = \frac{\Sigma f_i \mid x_i - \bar{x} \mid}{N}$, য'ত $N = \Sigma f_i$

(B) মধ্যমা সাপেক্ষে মাধ্য বিচলনক MD (M), এৰে বুজোৱা হয় আৰু ই হ'ল

$$MD(M) = \frac{\Sigma f_i \mid x_i - M \mid}{N}$$

উদাহৰণ 6ঃ তলৰ বণ্টনটোৰ বাবে মাধ্য সাপেক্ষে মাধ্য বিচলন নির্ণয় কৰক।

শ্রেণী-অন্তৰাল (গুণাংক)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
বাৰংবাৰতা (ছাত্রৰ সংখ্যা)	6	8	14	16	4	2

সমাধান ঃ

শ্রেণী-অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা (f_i)	মধ্যবিন্দু (x_i)	f_ix_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i\lvert x_i - \bar{x} \rvert$
0–10	6	5	30	–22	22	132
10–20	8	15	120	–12	12	96
20–30	14	25	350	–2	2	28
30–40	16	35	560	8	8	128
40–50	4	45	180	18	18	72
50–60	2	55	110	28	28	56

$N = \Sigma f_i = 50, \quad \Sigma f_i x_i = 1350$

$\therefore \ x = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} = \frac{1350}{50} = 27$

$MD(\bar{x}) = \frac{\Sigma f_i \mid x_i - \bar{x} \mid}{N}$

$= \frac{512}{50} = 10.24$

উদাহৰণ 7ঃ তলৰ বণ্টনটোৰ বাবে মধ্যমা সাপেক্ষে মাধ্য বিচলন নির্ণয় কৰক।

শ্রেণী-অন্তৰাল	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
বাৰংবাৰতা	5	10	20	5	10

সমাধান ঃ

শ্রেণী-অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা (f_i)	মধ্যন্দিু (x_i)	c.f.	$\lvert x_i - M \rvert$	$f_i\lvert x_i - M \rvert$
0–10	5	5	5	20	100
10–20	10	15	15	10	100
20–30	20	25	35	0	0
30–40	5	35	40	10	50
40–50	10	45	50	20	200

ইয়াত $N = \Sigma f_i = 50$ $\therefore \frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$

25 অতকৈ ঠিক ডাঙৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা হ'ল 35 আৰু অনুৰূপ শ্রেণী-অন্তৰাল 20–30।

∴ মধ্যমা অন্তৰাল হ'ল 20–30

এতিয়া মধ্যমা = $M = L + \frac{\frac{N}{2} - c}{f} \times h$

ইয়াত L = 20, $\frac{N}{2} = 25$ c = 15, f = 20, h = 10

$\therefore M = 20 + \frac{25-15}{20} \times 10 = 20 + \frac{10}{20} \times 10 = 20 + 5 = 25$

$\therefore MD(M) = \frac{\Sigma f_i \mid x_i - M \mid}{N} = \frac{450}{50} = 9$



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

প্রশ্ন নং ১ঃ তলৰ পর্যবেক্ষণবোৰৰ বাবে মাধ্য সাপেক্ষে মাধ্য বিচলন নির্ণয় কৰক।

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

প্রশ্ন নং ২ঃ তলৰ পর্যবেক্ষণবোৰৰ বাবে মধ্যমা সাপেক্ষে মাধ্য বিচলন নির্ণয় কৰক।

2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 14

প্রশ্ন নং ৩ঃ তলৰ বণ্টনটোৰ বাবে (a) মাধ্য সাপেক্ষে, (b) মধ্যমা সাপেক্ষে মাধ্য বিচলন নির্ণয় কৰক।

x_i	5	7	9	10	12	15
f_i	8	6	2	2	2	6

প্রশ্ন নং ৪ঃ 2, 4, 6, k, 8 আৰু 15 অৰ মাধ্য 7।

(a) মধ্যমা সাপেক্ষে, (b) মধ্যমা সাপেক্ষে মাধ্য বিচলন নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ তলৰ বণ্টনটোৰ মাধ্য সাপেক্ষে মাধ্য বিচলন নির্ণয় কৰক।

শ্রেণী-অন্তৰাল	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
বাৰংবাৰতা	5	10	20	5	10

প্রশ্ন নং ৬ঃ তলৰ বণ্টটোৰ মধ্যমা সপেক্ষে মাধ্য বিচলন নির্ণয় কৰক।

শ্রেণী-অন্তৰাল	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
বাৰংবাৰতা	5	8	15	16	6

৮.৩.৪ প্রামাণিক বিচলন (Standard Deviation)

(A) অসংঘৱদ্ধ তথ্যৰ বাবে প্রামাণিক বিচলন (Standard deviation for ungrouped data)

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$– এই n টা পর্যবেক্ষণ। ধৰা হ'ল $\bar{x}$ মাধ্য।

প্রামাণিক বিচলনক (Standard deviation, SD), σ ৰে (গ্রিক ভাষাৰ আখৰ ছিগমা, সৰু ফলাৰ) বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2}$$

প্রামাণিক বিচলনৰ বর্গক প্রসৰণ (variance) বুলি কোৱা হয়।

তলৰ দেখুওৱাৰ দৰে σ ৰ সূত্রটোক সৰলীকৃত কৰিব পাৰি।

$$\text{প্রসৰণ } = \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(xi - \bar{x})^2$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left({x_i}^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - \frac{2\bar{x}}{n}\Sigma x_i + \frac{1}{n}\Sigma\bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - 2\bar{x}\,\bar{x} + \frac{1}{n}n\bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2 - 2\bar{x}^2 + \bar{x}^2$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2}{n} - \bar{x}^2$$

গতিকে, $SD = \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\bar{x_i}^2}{n} - \bar{x}^2}$

$$\text{প্রসৰণ } = \sigma^2 = \frac{\Sigma\bar{x_i}^2}{n} - \bar{x}^2$$

উদাহৰণ 8ঃ প্রথম পাঁচটা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ SD নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ প্রথম পাঁচটা স্বাভাৱিক সংখ্যা হ'ল 1, 2, 3, 4, 5.

$$\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\therefore\ \bar{x}^2 = 3^2 = 9$$

$$\frac{\Sigma x_i^{\,2}}{n} = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{5} = \frac{55}{5} = 11$$

$$\therefore \ \frac{\Sigma x_i^{\,2}}{n} - \bar{x}^2 = 11 - 9 = 2$$

$$\therefore SD = \sigma = \sqrt{2}$$

উদাহৰণ 9ঃ a, 3, 6, 11 পৰ্যবেক্ষণকেইটাৰ প্ৰামাণিক বিচলন 3.5। a নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো $\bar{x} = \frac{a+3+6+11}{4} = \frac{a+20}{4}$

$$\frac{\Sigma x_i^{\,2}}{n} = \frac{a^2+3^2+6^2+11^2}{4} = \frac{a^2+9+36+121}{4} = \frac{a^2+166}{4}$$

এতিয়া $\sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^{\,2}}{n} - \bar{x}^2$

বা, $(3.5)^2 = \frac{a^2+166}{4} - \frac{(a^2+20)^2}{4}$

বা, $\frac{49}{4} = \frac{4(a^2+166)-(a^2+40a+400)}{16}$

বা, $49 = \frac{3a^2-40a+264}{4}$

বা, $3a^2 - 40a + 264 = 196$

বা, $3a^2 - 40a + 68 = 0$

বা, $3a^2 - 6a - 34a + 68 = 0$

বা, $3a(a-2) - 34(a-2) = 0$

বা, $(a-2)(3a-34) = 0$

$\therefore$ $a - 2 = 0$ বা $3a - 34 = 0$

$\therefore$ $a = 2$ বা $a = \frac{34}{3}$

দুটা ধৰ্ম (Two properties)

ধৰ্ম ঃ যদি $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ পৰ্যবেক্ষণকেইটাৰ প্ৰতিটোকে এটা অশূন্য ধ্ৰুৱক k ৰ দ্বাৰা বঢ়োৱা হয়, প্ৰামাণিক বিচলন আৰু প্ৰসৰণ অপৰিৱৰ্তিত হৈ থাকে।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল পৰ্যবেক্ষণকেইটা $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$.

$$\therefore \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n}$$

$$\therefore SD = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

এতিয়া নতুন পৰ্যবেক্ষণকেইটা হ'ল

$y_1 = x_1 + k, y_2 = x_2 + k, \ldots\ldots., y_n = x_n + k$

$\therefore$ নতুন মাধ্য $\quad \bar{y} = \dfrac{(x_1 + k) + (x_2 + k) + \ldots. + (x_n + k)}{n}$

$$= \frac{(x_1 + n_2 + \ldots. + x_n) + (k + k + \ldots. + k)}{n}$$

$$= \frac{x_1 + n_2 + \ldots. + x_n}{n} + \frac{nk}{n}$$

$$= \bar{x} + k$$

এতিয়া নতুন $SD = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - y)^2}$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i + k - \bar{x} - k)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

= পুৰণি SD.

দেখা গ'ল যে প্ৰামাণিক বিচলন অপৰিৱৰ্তিত হৈ থাকে।

ধৰ্ম ঃ যদি $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ পৰ্যবেক্ষণকেইটাৰ প্ৰতিটোকে এটা অশূন্য ধ্ৰুৱক k ৰে পূৰণ কৰা হয়, তেনেহ'লে প্ৰামাণিক বিচলনকো সেই একেটা ধ্ৰুৱক k ৰে পূৰণ কৰিব লাগিব।

প্ৰমাণ ঃ ধৰা হ'ল পৰ্যবেক্ষণকেইটা $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$.

$$\therefore \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots. + x_n}{n}$$

$$\therefore SD = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

এতিয়া, নতুন পৰ্যবেক্ষণকেইটা হ'ল

$y_1 = kx_1, y_2 = kx_2, \ldots\ldots, y_n = kx_n$

$\therefore$ নতুন মাধ্য $\quad \bar{y} = \dfrac{kx_1 + kx_2 + \ldots. + kx_n}{n}$

$$= \frac{k(x_1 + x_2 + \ldots. + x_n)}{n}$$

$$= k\,\bar{x}$$

এতিয়া, নতুন $SD = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(k\,x_i - k\,\bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}k^2\,(x_i - \bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{k^2\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

$$= k\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

= k (পুৰণি SD)

টোকা ঃ যদি $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ পর্যবেক্ষণকেইটাৰ প্রতিটোকে এটা অশূন্য ধ্রুৱক k ৰে পূৰণ কৰা হয়, তেনেহ'লে প্রসৰণক k^2 এৰে পূৰণ কৰিব লাগিব।

(B) বিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ বাবে প্রামাণিক বিচলন (Standard deviation for discrete frequency distribution)

ধৰা হ'ল $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ পর্যবেক্ষণকেইটাৰ প্রত্যেকৰে বাৰংবাৰতা ক্রমে $f_1, f_2, \ldots\ldots, f_n$ ।

তেনেহ'লে প্রামাণিক বিচলন SD ৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$$SD = \sigma = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2, \qquad \text{য'ত } N = \Sigma f$$

উদাহৰণ 10ঃ তলৰ বণ্টনটোৰ বাবে প্রামাণিক বিচলন নির্ণয় কৰক।

x_i	5	15	25	35	45
f_i	5	4	6	3	2

সমাধান ঃ

x_i	f_i	f_ix_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
5	5	25	–16.5	272.25	136.25
15	4	60	–6.5	42.25	169
25	6	150	3.5	12.25	73.5
35	3	105	13.5	182.25	546.75
45	2	90	23.5	552.25	1104.5

এতিয়া $N = \Sigma f_i = 20,\ \Sigma f_i x_i = 430$

$$\therefore \bar{x} = \frac{430}{20} = 21.5$$

$$\therefore \Sigma f_i(x_i - \bar{x})^2 = 3255$$

$$\therefore\ SD = \sqrt{\frac{3255}{20}} = \sqrt{162.75}$$

(C) অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ বাবে প্রামাণিক বিচলন (Statdard deviation for continuous frequency distribution)

অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ বাবে প্রামাণিক বিচলন এনেদৰে সংজ্ঞাৱদ্ধ কৰা হয়।

$$SD = \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i (x_i - \bar{x})^2}$$

য'ত $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$, x_i হ'ল i -তম শ্রেণীৰ মধ্য বিন্দু।

উদাহৰণ 11ঃ তলৰ বণ্টনটোৰ বাবে প্রামাণিক বিচলন নির্ণয় কৰক।

শ্রেণী-অন্তৰাল	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
বাৰংবাৰতা	5	10	20	5	10

সমাধান ঃ

শ্রেণী-অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা (f_i)	মধ্যবিন্দু (x_i)	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
0–10	5	5	25	–21	441	2205
10–20	10	15	150	–11	121	1210
20–30	20	25	500	–1	1	20
30–40	5	35	175	9	81	405
40–50	10	45	450	19	361	3610

এতিয়া, $N = \Sigma f_i = 50,\ \Sigma f_i x_i = 1300$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} = \frac{1300}{50} = 26$$

এতিয়া, $\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2 = 7450$

$$\therefore\ SD = \sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{7450}{50}} = \sqrt{149}$$

টোকা ঃ প্রসাৰৰ মাপসমূহৰ ভিতৰত প্রামাণিক বিচলনকে উত্তম বুলি কোৱা হয়। ই বহুলভাৱে ব্যৱহৃত হয়।

চতুর্থক বিচলন, মাধ্য বিচলন আৰু প্রামাণিক বিচলনৰ মাজত এটা আনুভৱিক সম্বন্ধ (empirical relation) আছে। সেইটো হ'ল

6 QD = 5 MD = 4 SD



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 3

প্রশ্ন নং ১ঃ 5 টা পর্যবেক্ষণৰ প্রামাণিক বিচলন 13.25। যদি প্রতিটো পর্যবেক্ষণ 3ৰে বঢ়োৱা হয়, নতুন প্রামাণিক বিচলন কিমান?

প্রশ্ন নং ২ঃ 7 টা পর্যবেক্ষণৰ প্রামাণিক বিচলন 15.75। যদি প্রতিটো পর্যবেক্ষণক 2 ৰে পূৰণ কৰা হয়, তেনেহ'লে নতুন প্রামাণিক বিচলন কিমান?

প্রশ্ন নং ৩ঃ 5 টা পর্যবেক্ষণৰ প্রামাণিক বিচলন 27.45। (a) চতুর্থক বিচলন, (b) মাধ্য বিচলন কিমান?

প্রশ্ন নং ৪ঃ তলৰ পর্যবেক্ষণকেইটাৰ প্রামাণিক বিচলন নির্ণয় কৰক—

13, 16, 17, 22

প্রশ্ন নং ৫ঃ প্রথম n টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ প্রামাণিক বিচলন নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ 1, 2, a, 6 আৰু b পর্যবেক্ষণকেইটাৰ মাধ্য, আৰু প্রসৰণ ক্রমে 4.4 আৰু 8.24। a আৰু b ৰ মান নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৭ঃ তলৰ বণ্টনটোৰ বাবে প্রামাণিক বিচলন নির্ণয় কৰক।

x_i	6	10	14	18	20
f_i	2	4	7	12	5

প্রশ্ন নং ৮ঃ তলৰ বণ্টনটো বাবে প্রামাণিক বিচলন নির্ণয় কৰক।

শ্রেণী-অন্তৰাল	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
বাৰংবাৰতা	2	4	7	12	5

৮.৩.৫ বিচৰণ গুণাংক (Coefficient of Variation)

ধৰা হ'ল এটা বণ্টনৰ মাধ্য আৰু প্রামাণিক বিচলন ক্রমে $\bar{x}$ আৰু α । বিচৰণ গুণাংকৰ (coefficient of variation, CV) সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100, \quad \bar{x} \neq 0$$

পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানী কার্ল পিয়াৰছনে (Karl Pearson) এই মাপটোৰ অৱতাৰণা কৰে।

টোকা 1ঃ বিচৰণ গুণাংক (CV) এটা এককবিহীন (unitless) প্রসাৰৰ মাপ।

2. দুটা বণ্টনৰ পৰিৱর্তন তুলনা কৰিবলৈ CV য়েই সর্বোত্তম মাপ।

3. যিটো বণ্টনৰ CV কম, সেইটো অধিক সংগত (consistent) বুলি বিবেচনা কৰা হয় (পৰিৱর্তন কম)।

4. যিটো বণ্টনৰ CV বেছি, সেইটো কম সংগত বুলি বিবেচনা কৰা হয় (পৰিৱর্তন বেছি)।

উদাহৰণ 12ঃ প্রাপ্ত বয়স্কৰ (বয়স 30 বছৰ) আৰু শিশুৰ (বয়স 10 মাহ) উচ্চতাৰ মাধ্য আৰু প্রামাণিক বিচলন (SD) তলত দিয়া হ'ল।

	প্রাপ্তবয়স্ক	শিশু
মাধ্য	160 cm	60 cm
SD	10 cm	5 cm

দেখুওৱাক যে প্রাপ্তবয়স্কতকৈ শিশুৰ উচ্চতাৰ পৰিৱর্তন বেছি।

সমাধান ঃ

$$\text{CV (প্রাপ্তবয়স্ক)} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{10}{160} \times 100 = 6.25$$

$$\text{CV (শিশু)} \quad \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{5}{60} \times 100 = 8.33$$

এতিয়া CV (শিশু) > CV (প্রাপ্তবয়স্ক)

∴ প্রাপ্তবয়স্কতকৈ শিশুৰ উচ্চতাৰ পৰিৱর্তন বেছি।



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 4

প্রশ্ন নং ১ঃ 25 জন ল'ৰাৰ মাধ্য ৰক্তচাপ 120 mm Hg, আৰু প্রামাণিক বিচলন (SD)10 mm Hg। সেই একেখিনি ল'ৰাৰ মাধ্য উচ্চতা আৰু প্রামাণিক বিচলন ক্রমে 160 cm আৰু 5 cm। দেখুওৱাক যে উচ্চতাতকৈ ৰক্তচাপ বেছি পৰিৱর্তনশীল।



৮.৪ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- এটা বণ্টনৰ মানবোৰ কেনেদৰে সিঁচৰতি বা প্রসাৰ হৈ থাকে, তাৰ নির্দিষ্ট তথ্য প্রসাৰৰ মাপৰ সহায়ত পোৱা যায়।
- পৰিসৰ, চতুর্থক বিচলন, মাধ্য বিচলন, প্রামাণিক বিচলন হ'ল প্রসাৰৰ মাপ।
- পর্যবেক্ষণৰ সর্বোচ্চ আৰু সর্বনিম্ন মানৰ মাজৰ পার্থক্যক পৰিসৰ বুলি কোৱা হয়।
- তৃতীয় চতুর্থক আৰু প্রথম চতুর্থকৰ মাজৰ পার্থক্যক আন্তঃ চতুর্থক পৰিসৰ বুলি কোৱা হয় আৰু আন্তঃচতুর্থক পৰিসৰৰ আধাক চতুর্থক বিচলন বুলি কোৱা হয়। প্রান্ত মানৰ দ্বাৰা চতুর্থক বিচলন প্রভাৱিত নহয়।
- মাধ্য, মধ্যমা বা বহুলকৰণৰ পৰা সাংখ্যিক বিচলনৰ মাধ্যমক মাধ্য বিচলন বুলি কোৱা হয়।

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ পর্যবেক্ষণবোৰৰ প্রামাণিক বিচলনক (SD) σ ৰে (গ্রিক ভাষাৰ আখৰ ছিগমা, সৰু ফলাৰ) বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$$SD = \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

- $x_1, x_2, \ldots, x_n$ পর্যবেক্ষণকেইটাৰ প্রত্যেকৰে বাৰংবাৰতা ক্রমে $f_1, f_2, \ldots, f_n$। এই ক্ষেত্রত প্রামাণিক বিচলন SDৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$$SD = \sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}, \qquad \text{য'ত } N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

- প্রামাণিক বিচলনৰ বর্গক প্রসৰণ বুলি কোৱা হয়।
- বিচৰণ গুণাংকৰ (CV) সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়। $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100, \quad \bar{x} \neq 0$

য'ত σ হ'ল প্রামাণিক বিচলন আৰু $\bar{x}$ হ'ল বণ্টনটোৰ মাধ্য।

- বিচৰণ গুণাংক এটা এককবিহীন প্রসাৰৰ মাপ।
- যিটো বণ্টনৰ বিচৰণ গুণাংক কম, সেইটো অধিক সংগত বুলি বিবেচনা কৰা হয়।
- যিটো বণ্টনৰ বিচৰণ গুণাংক বেছি, সেইটো কম সংগত বুলি বিবেচনা কৰা হয়।



৮.৫ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

1) Statistical Methods by N.G. Das, McGraw Hill Education (India) Private Ltd. 2009
2) Probability and Statistics by G.Shanker Rao, University Press (India) private Ltd. 2011
3) Introduction to probability and Statistics by Seymour Lipschutz, John J.Schiller, Tata McGraw Hill Education private Ltd. 2005
4) Probability, Random Process, Queueing theory and Statistics by Dr. S.Rajasekaran, Prof.A.Chandrasekaran & G.Kavitha, Dhanam Publications, Chennai-60042
5) Probability and Statistics by G.Balaji, G.Balaji Publishers, Chennai-33



৮.৬ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ সুবিধা ঃ পৰিসৰ সহজে গণনা কৰিব পাৰি

অসুবিধা ঃ ই বিশ্বাসযোগ্য মাপ নহয়। ই সমগ্র তথ্যসমূহৰ ওপৰত নির্ভৰশীল নহয়। ই প্রান্ত মান দুটাৰ ওপৰত নির্ভৰ কৰে।

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ আমি তথ্যবোৰক ঊর্ধ্বক্রমত সজাওঁ

7, 11, 13, 26, 34, 39, 42, 56, 65, 96, 98.

এই ক্ষেত্রত সর্বোচ্চ মান = 98

সর্বনিম্ন মান = 7

∴ পৰিসৰ = 98 – 7 = 91

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ প্রান্ত মানৰ দ্বাৰা চতুর্থক বিচলন প্রভাৱিত নহয়।

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এই ক্ষেত্রত সকলোবোৰ পর্যবেক্ষণেই সমান।

সর্বোচ্চ মান = সর্বনিম্ন মান = 6.

∴ পৰিসৰ = 6 – 6 = 0

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ

শ্রেণী-অন্তৰাল	ছাত্রৰ সংখ্যা (f)	c.f.
0-10	5	5
10-20	8	13
20-30	15	28
30-40	16	44
40-50	6	50

এতিয়া, N = 50, $\frac{N}{4} = \frac{50}{4} = 12.5$

∴ প্রথম চতুর্থক শ্রেণী ঃ 10–20

∴ L = 10, c = 5, f = 8, h = 10

এতিয়া, $Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - c}{f} \times h$

$= 10 + \frac{12.5 - 5}{8} \times 10$

= 10 + 9.375 = 19.375

এতিয়া, $\frac{3N}{4} = \frac{3 \times 50}{4} = 37.5$

∴ তৃতীয় চতুর্থক শ্রেণী ঃ 30–40

L = 30, c = 28, f = 16, h = 10

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - c}{f} \times h$$

$$= 30 + \frac{37.5 - 28}{16} \times 10$$

= 30 + 5.9375 = 35.9375

∴ চতুর্থক বিচলন $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{35.9375 - 19.375}{2}$$

$$= \frac{16.5625}{2} = 8.28125$$

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ $\bar{x} = \frac{1+2+3+4+5+6+7}{7} = \frac{28}{7} = 4$

$(x_i - \bar{x})$ ৰ মানবোৰ হ'ল

–3, –2, –1, 0, 1, 2, 3

$|x_i - \bar{x}|$ ৰ মানবোৰ হ'ল

3, 2, 1, 0, 1, 2, 3

$$\therefore MD(\bar{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{7} |x_i - \bar{x}|}{7} = \frac{3+2+1+0+1+2+3}{7}$$

$$= \frac{12}{7}$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ পৰ্যবেক্ষণবোৰ ঊৰ্ধ্বক্ৰমত আছে

2, 3, 4, 7, 8, 9, 10, 11, 14

মুঠতে 9 টা পৰ্যবেক্ষণ আছে

মধ্যমা $M = \left(\frac{9+1}{2}\right)$তম পৰ্যবেক্ষণ

= 5-তম পৰ্যবেক্ষণ = 8

$(x_i - M)$ অৰ মানবোৰ হ'ল –6, –5, –4, –1, 0, 1, 2, 3, 6

$|x_i - M|$ অৰ মানবোৰ হ'ল 6, 5, 4, 1, 0, 1, 2, 3, 6

$$\therefore MD(M) = \frac{\Sigma |x_i - M|}{9}$$

$$= \frac{6+5+4+1+0+1+2+3+6}{9}$$

$$= \frac{28}{9}$$

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ আমি পালো

(a)

x_i	f_i	f_ix_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i\lvert x_i - \bar{x} \rvert$
5	8	40	–4	4	32
7	6	42	–2	2	12
9	2	18	0	0	0
10	2	20	1	1	2
12	2	24	3	3	6
15	6	90	6	6	36

$N = \Sigma f_i = 26, \ \Sigma f_i x_i = 234 \qquad \therefore \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} = \frac{234}{26} = 9$

$$\therefore MD(\bar{x}) = \frac{\Sigma f_i \mid x_i - \bar{x} \mid}{N} = \frac{88}{26} = 3.38$$

(b)

x_i	f_i	cf	$x_i - M$	$\lvert x_i - M \rvert$	$f_i\lvert x_i - M \rvert$
5	8	8	–2	2	16
7	6	14	0	0	0
9	2	16	2	2	4
10	2	18	3	3	6
12	2	20	5	5	10
15	6	26	8	8	48

N = 26, এটা যুগ্ম সংখ্যা

$\therefore$ মধ্যমা M= $\frac{1}{2}$ [$\frac{26}{2}$-তম পর্যবেক্ষণ + $\left(\frac{26}{2}+1\right)$তম পর্যবেক্ষণ]

= $\frac{1}{2}$ [13-তম পর্যবেক্ষণ + 14-তম পর্যবেক্ষণ]

$$= \frac{1}{2}(7+7) = 7$$

$$MD(M) = \frac{\Sigma f_i \mid x_i - M \mid}{N} = \frac{84}{20} = 3.23$$

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ আমি পালোঁ

$$7 = \frac{2+4+6+k+8+15}{6}$$

বা, $7 = \frac{35+k}{6}$ বা 42 = 35 + k, or k = 7

∴ পর্যবেক্ষণবোৰ হ'ল 2, 4, 6, 7, 8, 15.

(a) আমি জানো $\bar{x} = 7$

∴ $(x_i - \bar{x})$ ৰ মানবোৰ হ'ল

–5, –3, –1, 0, 1, 8

∴ $|x_i - \bar{x}|$ ৰ মানবোৰ হ'ল

5, 3, 1, 0, 1, 8

$$\therefore MD(\bar{x}) = \frac{\Sigma|x_i - \bar{x}|}{6} = \frac{5+3+1+0+1+8}{6} = \frac{18}{6} = 3$$

(b) পর্যবেক্ষণবোৰ ঊৰ্ধ্বক্রমত আছে ঃ

2, 4, 6, 7, 8, 15

মুঠতে 6 টা পর্যবেক্ষণ আছে।

মধ্যমা M = $\frac{1}{2}$ [$\frac{6}{2}$ -তম পর্যবেক্ষণ + $\left(\frac{6}{2}+1\right)$-তম পর্যবেক্ষণ]

= $\frac{1}{2}$ (তৃতীয় পর্যবেক্ষণ + চতুর্থ পর্যবেক্ষণ)

$$= \frac{1}{2} \times (6+7) = \frac{13}{2} = 6.5$$

(x_i–M) অৰ মানবোৰ হ'ল

–4.5, –2.5, –0.5, 0.5, 1.5, 8.5

∴ $|x_i - M|$ অৰ মানবোৰ হ'ল

4.5, 2.5, 0.5, 0.5, 1.5, 8.5

$$\therefore MD(M) = \frac{\Sigma|x_i - M|}{6} = \frac{4.5+2.5+0.5+0.5+1.5+8.5}{6}$$

$$= \frac{18}{6} = 3$$

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ

শ্রেণী-অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা f_i	মধ্যবিন্দু x_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
0–10	5	5	25	–21	21	105
10–20	10	15	150	–11	11	110
20–30	20	25	500	–1	1	20
30–40	5	35	175	9	9	45
40–50	10	45	450	19	19	190

এইক্ষেত্রত $N = \sum f_i = 50,$

$$\sum f_i x_i = 1300$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{1300}{50}$$

$$= 26$$

$$\therefore MD(\bar{x}) = \frac{\sum f_i |x_i - x^{-1}|}{N} = \frac{470}{50} = 94$$

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ

শ্রেণী-অন্তৰাল	বাৰংবাৰতা (f_i)	মধ্যবিন্দু (x_i)	cf	$\|x_i-M\|$	$f_i\|x_i-M\|$
0–10	6	5	5	23	115
10–20	8	15	13	13	104
20–30	15	25	28	3	45
30–40	16	35	44	7	112
40–50	6	45	50	17	102

এই ক্ষেত্রত $N = \Sigma f_i = 50 \ \therefore \frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$

25 অতকৈ ঠিক ডাঙৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা হ'ল 28, আৰু অনুৰূপ শ্রেণী-অন্তৰাল হ'ল 20–30। $\therefore$ মধ্যমা শ্রেণী ঃ 20–30.

এতিয়া মধ্যমা $M = L + \frac{\frac{N}{2} - c}{f} \times h$

ইয়াত L = 20, $\frac{N}{2} = 25$, c = 13, f = 15, h = 10

$$\therefore \ M = 20 + \frac{25-13}{15} \times 10 \ = 20 + \frac{12}{15} \times 10 \ = 20 + 8 = 28$$

$$\therefore MD(M) = \frac{\Sigma f_i \,|\, x_i - M \,|}{N} = \frac{478}{50} = 9.56$$

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 3

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ আমি জানো যে যদি প্রতিটো পর্যবেক্ষণ এটা ধ্রুৱকেৰে বঢ়োৱা হয়, প্রামাণিক বিচলন অপৰিৱর্তিত হৈ থাকে।

$\therefore$ নতুন প্রামাণিক বিচলন হ'ল 13.25.

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নতুন প্রামাণিক বিচলন = 5 x 15.75 = 78.75

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ আমি জানো যে চতুর্থক বিচলন, মাধ্য বিচলন, আৰু প্রামাণিক বিচলনৰ মাজৰ সম্পর্ক হ'ল 6 QD = 5 MD = 4 SD

ইয়াত SD = 27.45

$\therefore$ 6 QD = 4 x 27.45

বা, QD = $\frac{109.8}{6} = 18.3$

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ আমি জানো যে $\sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^{\,2}}{N} - \bar{x}^2$

এতিয়া, $\bar{x} = \frac{13+16+17+22}{4} = \frac{68}{4} = 17$

$$\therefore \ \sigma^2 = \frac{13^2+16^2+17^2+22^2}{4} - 17^2$$

$$= \frac{169+256+289+484}{4} - 289$$

$$= \frac{1198}{4} - 289 = 299.5 - 289 = 10.5$$

$$\therefore \ SD = \sigma = \sqrt{10.5}$$

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ আমি জানো যে $\sigma^2 = \frac{\Sigma x_i^{\,2}}{N} - \bar{x}^2$

এতিয়া $\bar{x} = \frac{1+2+3+\ldots..+n}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2}$

$$\frac{\Sigma x_i^{\,2}}{n} = \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots..+n^2}{n}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\therefore \ \sigma^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12}$$

$$= \frac{(n+1)[2(2n+1) - 3(n+1)]}{12}$$

$$= \frac{(n+1)(4n+2-3n-3)}{12}$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

$$\therefore \ SD = \sigma = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ আমি পালোঁ যে $\frac{1+2+a+6+b}{5}=4.4$

বা, 9 + a + b = 4.5 x 5 = 22

∴ a + b = 22 – 9 = 13 (1)

আকৌ, $\frac{1^2+2^2+a^2+6^2+b^2}{5}=(4.4)^2=8.24$

বা, $1 + 4 + a^2 + 36 + b^2 – 19.36 \times 5 = 8.24 \times 5$

বা, $41 + a^2 + b^2 – 96.8 = 41.2$

বা, $a^2 + b^2 = 97$ (2)

(1) অৰ পৰা, b = 13 – a

∴ (2)ৰ পৰা, $a^2 + (13 – a)^2 = 97$

বা, $a^2 + 169 – 26a + a^2 = 97$

বা, $2a^2 – 26a + 72 = 0$

বা, $a^2 – 13a + 36 = 0$

বা, $a^2 – 4a – 9a + 36 = 0$

বা, a(a–4) – 9(a–4) = 0

বা, (a–4) (a–9) = 0

∴ a = 4, or a = 9

যদি a = 4, b = 13 – 4 = 9

যদি a = 9, b = 13 – 9 = 4

∴ নির্ণেয় পর্যবেক্ষণ দুটা 4 আৰু 9।

৭ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৮ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 4

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ CV (ৰক্তচাপ) $=\frac{\sigma}{\bar{x}}\times 100$

$=\frac{10}{120}\times 100 = 8.3$ (মোটামুটিভাৱে)

CV (উচ্চতা) $=\frac{\sigma}{\bar{x}}\times 100 = 3.125$

$=\frac{5}{100}\times 100 = 3.125$

CV (ৰক্তচাপ) > CV (উচ্চতা)

∴ উচ্চতাতকৈ ৰক্তচাপ বেছি পৰিৱর্তনশীল।



৮.৭ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ এটা শ্ৰেণী-পৰীক্ষাত 5জন ছাত্ৰই এটা বিষয়ত 20 গুণাংকৰ ভিতৰত তলত দেখুওৱাৰ দৰে গুণাংক পালে

A	B	C	D	E
10	12	14	12	18

এই গুণাংকবোৰৰ প্ৰামাণিক বিচলন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ২ঃ (a) মাধ্য সাপেক্ষে, (b) মধ্যমা সাপেক্ষে

তলৰ তথ্যবোৰৰ মাধ্য বিচলন নিৰ্ণয় কৰক।

শ্ৰেণী-অন্তৰাল	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
বাৰংবাৰতা	120	201	150	75	25

প্ৰশ্ন ৩ঃ 7 টা পৰ্যবেক্ষণৰ মাধ্য আৰু প্ৰসৰণ ক্ৰমে 8 আৰু 16। যদি 5 টা পৰ্যবেক্ষণ 6, 8, 10, 12, 14; তেনেহ'লে আন দুটা পৰ্যবেক্ষণ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ঃ পাঁচখন খেলত A আৰু B ক্ৰিকেটাৰ দুজনৰ স্ক'ৰ এনেধৰণৰ

A :	58	59	60	54	65
B :	82	12	44	08	64

কোনজন ক্ৰিকেটাৰক বেছি সংগত (consistent) বুলি ক'ব পাৰি?

প্ৰশ্ন ৫ঃ পৰ্যবেক্ষণৰ দুটা সংহতিৰ বিচৰণ গুণাংক ক্ৰমে 58 আৰু 69। সিহঁতৰ প্ৰামাণিক বিচলন ক্ৰমে 21.2 আৰু 15.6। সমান্তৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰক।

*** ***** ***

অধ্যায় ৯ ঃ ঘূর্ণক, অপ্রতিসাম্য আৰু ককুদতা (MOMENTS, SKEWNESS AND KURTOSIS)

অধ্যায় গাঁথনি

৯.১ উদ্দেশ্য

৯.২ পৰিচয়

৯.৩ ঘূর্ণক

৯.৩.১ অপৰিণত আৰু কেন্দ্রীয় ঘূর্ণকৰ মাজৰ সম্বন্ধ

৯.৪ অপ্রতিসাম্য

৯.৪.১ অপ্রতিসাম্যৰ মাপ

৯.৫ ককুদতা

৯.৫.১ ককুদতাৰ মাপ

৯.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

৯.৭ অধিক জানিবলৈ

৯.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

৯.৯ আৰ্হি প্রশ্ন

৯.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- ঘূর্ণক সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- অপৰিণত ঘূর্ণক আৰু কেন্দ্রীয় ঘূর্ণকৰ মাজৰ সম্বন্ধ সম্পর্কে জানিব পাৰিব
- অপ্রতিসাম্য সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- অপ্রতিসাম্যৰ মাপ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- ককুদতাৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- ককুদতাৰ মাপ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

৯.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

বলবিজ্ঞানৰ ঘূর্ণকৰ ধাৰণাৰ পৰা পৰিসংখ্যাবিজ্ঞাৰ ঘূর্ণকৰ ধাৰণা আহিছে। বলবিজ্ঞানত আমি পাইছোঁ যে এটা বল f আৰু লম্ব দূৰত্ব d ৰ পূৰণফল অর্থাৎ fd ক বলটোৰ ঘূর্ণক বুলি কয়। পৰিসংখ্যাবিজ্ঞানত সদৃশ ৰাশি হ'ল f_i, আৰু $x_i - a$। ঘূর্ণক, অপ্রতিসাম্য আৰু ককুদতা,— এই তিনিটা পৰিসংখ্যাজ্ঞানৰ প্রয়োজনীয় ধাৰণা।

৯.৩ ঘূর্ণক (MOMENTS)

ধৰা হ'ল এটা চলক x এ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ মান লয় আৰু ইহঁতৰ বাৰংবাৰতা ক্ৰমে $f_1, f_2, \ldots, f_n$ ।

যিকোনো বিন্দু a সাপেক্ষে x-অৰ r-তম ঘূর্ণকক (moment) μ'_r এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$\mu'_r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^r, \quad N = \sum_{i=1}^{n} f_i \qquad (1)$$

μ'_r -অক r-তম অপৰিণত ঘূর্ণক (raw moment) বুলি কোৱা হয়।

মাধ্য $\bar{x}$ সাপেক্ষে x- অৰ ঘূর্ণকক μ_r -এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$\mu_r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^r \qquad (2)$$

μ_r -অক r-তম কেন্দ্ৰীয় ঘূর্ণক (central moment) বুলি কোৱা হয়।

টোকা ঃ অসংঘৱদ্ধ তথ্যৰ বাবে অপৰিণত ঘূর্ণক আৰু কেন্দ্ৰীয় ঘূর্ণকৰ সূত্ৰ দুটা ক্ৰমে এনেধৰণৰ

$$\mu'_r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^r \text{ আৰু } \mu_r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^r$$

অনুমিতি (Deductions)

(A) (1) অত r = 0 বহুৱাই আমি পাওঁ

$$\mu'_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i, \quad (x_i - a)^0 = 1$$

$$= \frac{1}{N} N = 1$$

(2)ত r = 0 বহুৱাই আমি পাওঁ

$$\mu_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i = \frac{1}{N} N = 1$$

অর্থাৎ, $\mu'_0 = \mu_0 = 1$, অর্থাৎ 0 তম অপৰিণত ঘূর্ণক আৰু কেন্দ্ৰীয় ঘূর্ণক এক।

(B) (1) অত r = 1 বহুৱাই আমি পাওঁ

$$\mu'_1 = \frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i - a)$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma(f_i x_i - f_i a)$$

$$= \frac{1}{N}\left[\Sigma f_i x_i - \Sigma f_i a\right]$$

এতিয়া $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i} = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} \Rightarrow \Sigma f_i x_i = N\bar{x}$

$\Sigma f_i a = a\Sigma f_i = aN$

$\therefore \mu_1' = \frac{1}{N}(N\bar{x} - aN) = \bar{x} - a = d$, (ধৰা হ'ল)

দেখা গ'ল যে প্ৰথম অপৰিণত ঘূৰ্ণক $\bar{x} - a$

(2)ত r = 1 বহুৱাই আমি পাওঁ,

$$\mu_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(f_i x_i - f_i\bar{x})$$

$$= \frac{1}{N}\left(\Sigma f_i x_i - \Sigma f_i\bar{x}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left(N\bar{x} - N\bar{x}\right) = 0$$

দেখা গ'ল যে প্ৰথম কেন্দ্ৰীয় ঘূৰ্ণক শূন্য।

(C) (1) অত r = 2 বহুৱাই আমি পাওঁ

$$\mu_2' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - a)^2$$

(2) ত r = 2 বহুৱাই আমি পাওঁ

$$\mu_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^2 = \sigma^2$$

দেখা গ'ল যে দ্বিতীয় কেন্দ্ৰীয় ঘূৰ্ণক হ'ল প্ৰসৰণ।

৯.৩.১ অপৰিণত আৰু কেন্দ্ৰীয় ঘূৰ্ণকৰ মাজৰ সম্পৰ্ক (Relation Between Raw and Central Moments)

আমি জানো যে

$\mu_2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^r$ য'ত $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

$X_i = x_i - a$, $d = \bar{x} - a$ বহুৱাই আমি পাওঁ

$\therefore X_i - d = (x_i - a) - (\bar{x} - a) = x_i - \bar{x}$

$\therefore \mu_r = \frac{1}{N}\Sigma f_i(X_i - d)^r$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f_i\left(X_i^r - {}^rC_1 X_i^{r-1}d + {}^rC_2 X_i^{r-2}d^2 - {}^rC_3 X_i^{r-3}d^3 + \ldots\ldots + (-1)^r d^r\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left[\Sigma f_i X_i^r - {}^rC_1 d\,\Sigma f_i X_i^{r-1} + {}^rC_2 d^2 \Sigma f_i X_i^{r-2} - {}^rC_3 d^3 \Sigma f_i X_i^{r-3} + \ldots\ldots + (-1)^r d^r \Sigma f_i\right]$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f_i (x_i - a)^r - {}^rC_1 d \frac{1}{N}\Sigma f_i (x_i - a)^{r-1} + {}^rC_2 d^2 \frac{1}{N}\Sigma f_i (x_i - a)^{r-2}$$

$$- {}^rC_3 d^3 \frac{1}{N}\Sigma f_i (x_i - a)^{r-3} + \ldots\ldots + (-1)^r d^r \frac{1}{N}\Sigma f_i$$

$$= \mu'_r - {}^rC_1 d\,\mu'_{r-1} + {}^rC_2 d^2 \mu'_{r-2} - {}^rC_3 d^3 \mu'_{r-3} + \ldots\ldots + (-1)^r d^r$$

$$= \mu'_r - {}^rC_1 \mu'_{r-1}\mu'_1 + {}^rC_2 d^2 \mu'_{r-2}\mu_1'^2 - {}^rC_3 d^3 \mu'_{r-3}\mu_1'^3 + \ldots\ldots + (-1)^r \mu_1'^r \quad (3)$$

অনুমিতি (Deductions)

(3)ত r = 2 বহুৱাই, আমি পাওঁ

$$\mu_2 = \mu'_2 - {}^2C_1 \mu'_1 \mu'_1 + {}^2C_2 \mu'_0 \mu_1'^2$$

$$= \mu'_2 - 2\mu_1'^2 + \mu_1'^2, \ (\mu'_0 = 1)$$

$$= \mu'_2 - \mu_1'^2 \qquad (4)$$

(3)ত r = 3 বহুৱাই, আমি পাওঁ

$$\mu_3 = \mu'_3 - {}^3C_1 \mu'_2 \mu'_1 + {}^3C_2 \mu'_1 \mu_1'^2 - {}^3C_3 \mu'_0 \mu_1'^3$$

$$= \mu'_3 - 3\mu'_2 \mu'_1 + 3\mu_1'^3 - \mu_1'^3$$

$$= \mu'_3 - 3\mu'_2 \mu'_1 + 2\mu_1'^3 \qquad (5)$$

(3)ত r = 4 বহুৱাই, আমি পাওঁ

$$\mu_4 = \mu'_4 - {}^4C_1 \mu'_3 \mu'_1 + {}^4C_2 \mu'_2 \mu_1'^2 - {}^4C_3 \mu'_1 \mu_1'^3 + {}^4C_4 \mu_{4-4}' \mu_1'^4$$

$$= \mu'_4 - 4\mu'_3 \mu'_1 + 6\mu'_2 \mu_1'^2 - 4\mu_1'^4 + \mu_1'^4$$

$$= \mu'_4 - 4\mu'_3 \mu'_1 + 6\mu'_2 \mu_1'^2 - 3\mu_1'^4 \qquad (6)$$

টোকা ঃ (4) অৰ সোঁহাতৰ সহগ দুটা হ'ল 1, –1; আৰু ইহঁতৰ যোগফল 0. (5) অৰ সোঁহাতৰ সহগবোৰ হ'ল 1, –3, 2; আৰু ইহঁতৰ যোগফল 0. (6) অৰ সোঁহাতৰ সহগবোৰ হ'ল 1, –4, 6, –3; আৰু সিহঁতৰ যোগফল 0. এইদৰে (3)ৰ সোঁহাতৰ সহগবোৰৰ যোগফল 0. তলত এইটো দেখুওৱা হৈছে।

$1 - {}^rC_1 + {}^rC_2 - {}^rC_3 + \ldots\ldots + (-1)^r = (1-1)^r = 0$

উদাহৰণ 1: এটা চলকৰ 1 সাপেক্ষে প্ৰথম ঘূর্ণক 5। মাধ্য নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো

$$\mu_1' = \frac{1}{N}\Sigma f_i (x_i - 1), \ (a = 1)$$

$$= \frac{1}{N}(\Sigma f_i x_i - \Sigma f_i)$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f_i x_i - \frac{1}{N}\Sigma f_i, \quad \left(\frac{\Sigma f_i x_i}{N} = \bar{x},\ \Sigma f_i = N\right)$$

$$= \bar{x} - 1$$

এতিয়া $\bar{x} - 1 = 5 \Rightarrow \bar{x} = 6$ অর্থাৎ মাধ্য = 6

উদাহৰণ 2: এটা চলকৰ 2 সাপেক্ষে প্রথম দুটা ঘূর্ণক ক্রমে 1, আৰু 16 । মাধ্য আৰু প্রসৰণ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে $\mu_1' = \frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i - 2)$

$$\mu_2' = \frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i - 2)^2$$

এতিয়া, $\mu_1' = \frac{1}{N}(\Sigma f_i x_i - 2f_i)$

$$= \frac{\Sigma f_i x_i}{N} - \frac{2\Sigma f_i}{N}$$

$$= \bar{x} - 2$$

এতিয়া, $\mu_1' = 1$, (দিয়া আছে)

$\therefore \bar{x} - 2 = 1$

$\Rightarrow \bar{x} = 3$

$\therefore$ মাধ্য = 3

এতিয়া, $\mu_2' = \frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i - 2)^2$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i - 3 + 1)^2$$

$$= \frac{1}{N}\Sigma f_i\left((x_i - 3)^2 + 2(x_i - 3) + 1\right)$$

$$= \frac{\Sigma f_i(x_i - 3)^2}{N} + \frac{2\Sigma f_i x_i}{N} - 5\frac{\Sigma f_i}{N}$$

এতিয়া, $\mu_2' = 16$, (দিয়া আছে; আৰু $\mu_2' = \frac{\Sigma f_i(x_i - 3)^2}{N}$, $(\bar{x} = 3)$

$\therefore 16 = \mu_2 + 2\bar{x} - 5$

বা, $16 = \mu_2 + 2 \times 3 - 5$

$\therefore \mu_2 = 15$

আমি জানো যে দ্বিতীয় কেন্দ্রীয় ঘূর্ণক হ'ল প্রসৰণ।

$\therefore$ প্রসৰণ $= \mu_2 = 15$

সংঘৱদ্ধ বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ বাবে শ্বেপার্ডৰ ঘূর্ণকৰ শুধৰণি (Sheppard's Corrections to moments for grouped frequency distributions)

সংঘৱদ্ধ বাৰংবাৰতা বণ্টনৰ বাবে ঘূর্ণক গণনা কৰাৰ সময়ত, আমি ধৰি লওঁ যে অন্তৰালৰ মধ্যবিন্দুত বাৰংবাৰতাবোৰ কেন্দ্রভূত হয়। এই ধাৰণাৰ বাবে কিছুমান ত্রুটি (errors) দেখা দিয়ে। এইবিলাকক গ্রুপিং ত্রুটি (grouping errors) বুলি কয়। ঘূর্ণকৰ সমন্বয় সাধিবলৈ পৰিসংখ্যাবিজ্ঞানী শ্বেপার্ডে (William Flectword Sheppard, 1863-1936) এটা উপায় উলিয়াই। ইয়াক শ্বেপার্ডৰ শুধৰণি (Shappard's corrections) বুলি কোৱা হয়। প্রথম চাৰিটা ক্রমৰ বাবে শ্বেপার্ডৰ শুধৰণি তলত দিয়া হ'ল।

μ_1' (শুদ্ধীকৃত) = μ_1',

μ_2' (শুদ্ধীকৃত) $= \mu_2' - \frac{h^2}{12}$,

μ_3' (শুদ্ধীকৃত) $\mu_3' - \frac{h^2}{4}\mu_1'$

μ_4' (শুদ্ধীকৃত) $= \mu_4' - \frac{h^2}{2}\mu_2' + \frac{7}{240}h^4$

আৰু, μ_2 (শুদ্ধীকৃত) $= \mu_2 - \frac{h^2}{12}$

μ_3 (শুদ্ধীকৃত) = μ_3

μ_4 (শুদ্ধীকৃত) $= \mu_4 - \frac{h^2}{12}\mu_2 + \frac{7}{240}h^4$

য'ত h হ'ল শ্রেণী-অন্তৰালৰ দৈর্ঘ্য।

পিয়াৰছনৰ β আৰু γ সহগ ঃ

কার্ল পিয়াৰছনে (Karl Pearson, 1857-1936) চাৰিটা প্রয়োজনীয় সহগ বা ঘূর্ণক অনুপাতৰ অৱতাৰণা কৰে। সেইকেইটা হ'ল

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}, \quad \gamma_1 = +\sqrt{\beta_1}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}, \quad \gamma_2 = \beta_2 - 3$$

টোকা ঃ এই চাৰিটা সহগ বক্রৰ আকৃতিৰ লগত জড়িত। এই চাৰিটা বিশুদ্ধ সংখ্যা।



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

প্রশ্ন নং ১ঃ 5 জন মানুহৰ পৰা লোৱা 1ml তেজত বেক্টেৰিয়াৰ সংখ্যা 2, 3, 7, 8, 10। মাধ্য সাপেক্ষে প্রথম, দ্বিতীয়, তৃতীয় আৰু চতুর্থ ঘূর্ণক নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ঃ মান 5 সাপেক্ষে এটা চলকৰ প্রথম চাৰিটা ঘূর্ণক হ'ল 2, 20, 40 আৰু 50। মাধ্য সাপেক্ষে অনুৰূপ ঘূর্ণক নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ মান 4 সাপেক্ষে এটা চলকৰ প্রথম চাৰিটা ঘূর্ণক ক্রমে 1, 4, 10 আৰু 45। দেখুওৱাক যে মাধ্য 5, আৰু প্রসৰণ 3 আৰু μ_3 আৰু μ_4 ক্রমে 0 আৰু 26।

প্রশ্ন নং ৪ঃ মান 5 সাপেক্ষে এটা চলকৰ মান ক্রমে –4, 22, –117, আৰু 560। শূন্য সাপেক্ষে অনুৰূপ ঘূর্ণক নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ এটা বণ্টনৰ প্রথম চাৰিটা কেন্দ্রীয় ঘূর্ণক হ'ল 0, 2.5, 0.7 আৰু 18.75। β_1, আৰু β_2 নির্ণয় কৰক।

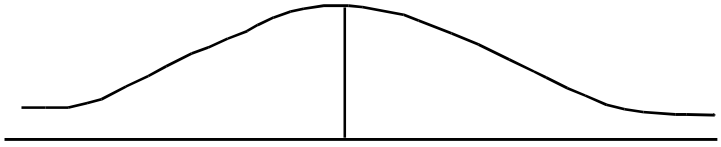
৯.৪ অপ্রতিসাম্য (SKEWNESS)

এটা বণ্টনৰ সমমিত (symmetrical) বলি কোৱা হয় যদি মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলক একে হয়। অপ্রতিসাম্যৰ (Skewness) অর্থ হ'ল সমমিতিৰ অভাৱ (lack of symmetry)।

এটা সমমিত বণ্টন এখন লেখ কাগজত সংস্থাপন কৰিলে ত্রুটিহীনভাৱে এটা বেল-আকৃতিৰ বক্ৰৰ (bell-shaped curve) সৃষ্টি হয়। যদি বাৰংবাৰতা বক্ৰটো সমমিত নহয়, তেনেহ'লে তাক বিষম বা অপ্রতিসাম্য (skew) বুলি কোৱা হয়।

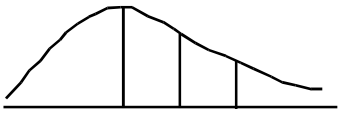
যদি বণ্টনটোৰ বক্ৰৰ সোঁপিনে এডাল দীর্ঘতৰ পুচ্ছ থাকে। তেনেহ'লে ইয়াক ধনাত্মকভাৱে বিষম (positively skew) বুলি কোৱা হয়। এই ক্ষেত্রত মাধ্য > মধ্যমা > বহুলক।

যদি বণ্টনটোৰ বক্ৰৰ বাওঁপিনে দীর্ঘতৰ পুচ্ছ থাকে, তেনেহ'লে বণ্টনটোক ঋণাত্মকভাৱে বিষম বুলি কোৱা হয়। এই ক্ষেত্রত মাধ্য < মধ্যমা < বহুলক।



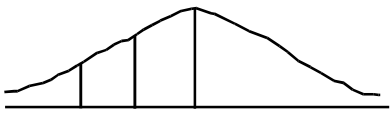
মাধ্য = মধ্যমা = বহুলক

সমমিত বক্ৰ



M_0 M_d M

ধনাত্মকভাৱে বিষম



M M_d M_0

ঋণাত্মকভাৱে বিষম

[উৎস ঃ **Biostatistics** by Dr. P N Arora and Dr. P K Malhan (Himalya Publishing House, 2010)]

৯.৪.১ অপ্রতিসাম্যৰ মাপ (Measures of Skewness)

সমমিত বক্ৰৰ পৰা এটা বক্ৰৰ বিৰূপণ (1) কিমানখিনি আৰু (2) কোনটো দিশত সেয়া নিৰূপণ কৰিবলৈ অপ্রতিসাম্যৰ মাপৰ প্রয়োজন।

অপ্রতিসাম্যৰ প্রথমমাপ (first measure of skewness) = মাধ্য – মধ্যমা

অপ্রতিসাম্যৰ দ্বিতীয় মাপ (second measure of skewness)

$= (Q_3 - \text{মধ্যমা}) - (\text{মধ্যমা} - Q_1)$

$= Q_3 + Q_1 - 2Q_2$.

কার্ল পিয়াৰছন অপ্রতিসাম্য সহগ (Karl Pearson's Coefficient of Skewness)

আমি জানো যে যদি এটা বণ্টন ধনাত্মকভাৱে বিষম, তেনেহ'লে

মাধ্য > মধ্যমা > বহুলক।

আনহাতেদি যদি এটা বণ্টন ঋণাত্মকভাৱে বিষম তেনেহ'লে

মাধ্য < মধ্যমা < বহুলক

(মাধ্য — বহুলক), এই অন্তৰক প্রামাণিক বিচলনেৰে হৰণ কৰিলে যি ৰাশি পোৱা যায়, তাক অপ্রতিসাম্যৰ সহগ হিচাপে লোৱা হয়। অর্থাৎ

$$S_k = \frac{\text{মাধ্য} - \text{বহুলক}}{\text{প্রামাণিক বিচলন}}$$

ইয়াক পিয়াৰছনৰ অপ্রতিসাম্যৰ প্রথম সহগ (pearson's first coefficient of skewness) বুলি কোৱা হয়।

আমি জানো যে তথ্যৰ সংহতি এটাৰ এটা মাত্র বহুলক নাথাকিবও পাৰে। ইয়াৰ দুটা বহুলক থাকিব পাৰে, ইয়াক কোৱা হয় দ্বিবহুলকীয় (bimodal)। ইয়াৰ বহু বহুলক থাকিব পাৰে, ইয়াক কোৱা হয় বহু-বহুলকীয় (multimodal)। এই ক্ষেত্রত বহুলক কুসংজ্ঞাৰদ্ধ (ill defined) বুলি কয়। যদি বহুলক কুসংজ্ঞাৰদ্ধ, তেনেহ'লে এটা মধ্যমীয়া অসমমিত বণ্টনৰ (moderately asymmetrical) বাবে, বহুলক = 3 মধ্যমা

– 2 মাধ্য, এই আনুভৰিক সম্বন্ধ ব্যৱহাৰ কৰি কার্ল পিয়াৰছনে উনুকিওৱা অপ্রতিসাম্যৰ দ্বিতীয় সহগ (second coefficient of skewness) এনেদৰে দিয়া হয়।

$$S_k = \frac{3\ (\text{মাধ্য} - \text{মধ্যমা})}{\text{প্রামাণিক বিচলন}}$$

টোকা ঃ উপৰিউক্ত অপ্রতিসাম্যৰ সহগ দুটা বিশুদ্ধ সংখ্যা, কিয়নো লৰ আৰু হৰ উভয়ৰে বিমা (dimension) একে। অপ্রতিসাম্যৰ প্রথম সহগৰ মান –3 আৰু 3 ৰ মাজত থাকে, আৰু দ্বিতীয় সহগৰ মান –1 আৰু 1 অৰ মাজত থাকে।

আকৌ, ঘূর্ণকৰ ওপৰত নির্ভৰ কৰি, অপ্রতিসাম্যৰ সহগ এনেদৰে দিয়া হয়

$$Sk = \frac{\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3)}{2(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)}$$

য'ত β_1, আৰু β_2 ৰ সংজ্ঞা ইতিমধ্যে দিয়া হৈছে

এতিয়া, যদি $\beta_1 = 0$ বা $\beta_2 = 0$, তেনেহ'লে $S_k = 0$। কিন্তু সংজ্ঞাৰ পৰা $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$, আৰু ই ঋণাত্মক হ'ব নোৱাৰে।

$\therefore \beta_2$ ৰ মান –3. হ'ব নোৱাৰে। গতিকে $S_k = 0$ যদি আৰু যদিহে $\beta_1 = 0$। গতিকে দেখা গ'ল যে সমমিত বণ্টনৰ বাবে $\beta_1 = 0$।

উদাহৰণ 3: এটা বণ্টনৰ কার্ল পিয়াৰছনৰ অপ্রতিসাম্যৰ প্রথম সহগ 0.32, ইয়াৰ প্রামাণিক বিচলন 6.5 আৰু মাধ্য 29.6। বণ্টনটোৰ বহুলক নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে

$$\frac{29.6 - \text{বহুলক}}{6.5} = 0.32$$

বা $\quad 29.6 - \text{বহুলক} = 2.08$

$\therefore$ বহুলক = 29.6 – 2.08

অর্থাৎ, বহুলক = 27.52

৯.৫ ককুদতা (KURTOSIS)

ককুদ শব্দৰ অন্যতম হ'ল পর্বতৰ শৃংগ। ইয়াৰ পৰা ককুদতা শব্দটো সাধিত হৈছে। ইংৰাজীত ককুদতাক kurtosis বুলি কয়। kurtosis শব্দটো গ্রিক ভাষাৰ kurtos শব্দৰ পৰা আহিছে। Kurtos শব্দৰ অর্থ হ'ল 'curved, arching'। যদি দুটা বণ্টন থাকে, তেনেহ'লে সিহঁতৰ একে মাধ্য, একে প্রামাণিক বিচলন হ'ব পাৰে। সিহঁত সমভাৱে বিষমো হ'ব পাৰে। কিন্তু এটা আনটোতকৈ বেছি জোঙা হ'ব পাৰে। এই মাপক বক্রটোৰ ককুদতা (Kurtosis) বোলা হয়। ইয়ে বক্রটোৰ জোং কিমান তাৰ ধাৰণা দিয়ে।

৯.৫.১ ককুদতাৰ মাপ (Measures of Kurtosis)

সহগ β_2 বা ইয়াৰ পৰা পোৱা γ_2 ৰ সহায়ত ককুদতাৰ মাপ বুজোৱা হয়।

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}, \quad \gamma_2 = \beta_2 - 3$$

টোকা ঃ 1. যেতিয়া $\beta_2 > 3$, বক্ৰটোক leptokurtic বুলি কয়।

2. যেতিয়া $\beta_2 = 3$, তেতিয়া বক্ৰটোক প্ৰসামান্য (normal) বা mesokurtic বুলি কয়।

3. যেতিয়া β_2 ৰ মান < 3, তেতিয়া বক্ৰটোক platykurtic বুলি কয়।

উদাহৰণ 4: এটা বণ্টনৰ প্ৰথম চাৰিটা কেন্দ্ৰীয় ঘূৰ্ণক 0, 2.5, 0.7 আৰু 18.75। বণ্টনটোৰ ককুদতা নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে $\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 2.5,\ \mu_3 = 0.7,\ \mu_4 = 18.75$

ককুদতাৰ মাপ $$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

$$= \frac{18.75}{(2.5)^2} = \frac{18.75}{6.25} = 3$$

টোকা ঃ যিহেতু $\beta_2 = 3$, বক্ৰটো প্ৰসামান্য।



অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

প্ৰশ্ন নং ১ঃ এটা বণ্টনৰ $Q_3 + Q_1 = 70$, $Q_3 - Q_1 = 30$, আৰু মাধ্য 40। অপ্ৰতিসাম্যৰ মাপ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ২ঃ x = 4 সাপেক্ষে এটা বণ্টনৰ প্ৰথম চাৰিটা ঘূৰ্ণক ক্ৰমে 1, 4, 10 আৰু 45। দেখুওৱাক যে মাধ্য 5। মাধ্য সাপেক্ষে অনুৰূপ ঘূৰ্ণকবোৰ নিৰ্ণয় কৰক। β_1 আৰু β_2 নিৰ্ণয় কৰক আৰু সেই মানবোৰ সম্পৰ্কে অভিমত দিয়ক।

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ এটা বণ্টনৰ মাধ্য = 45, মধ্যমা = 48, অপ্ৰতিসাম্যৰ সহগ = –0.4। প্ৰামাণিক বিচলন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ এটা বণ্টনৰ কার্ল পিয়াৰছনৰ অপ্ৰতিসাম্যৰ সহগ 0.4। ইয়াৰ প্ৰামাণিক বিচলন 8, আৰু মাধ্য 30। বণ্টনটোৰ বহুলক আৰু মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ এটা বণ্টনৰ প্ৰথম চাৰিটা কেন্দ্ৰীয় ঘূৰ্ণক ক্ৰমে 0, 2.3, 0.9 আৰু 15.65। বণ্টনটোৰ ককুদতা পৰীক্ষা কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ দেখুওৱাক যে তলৰ বণ্টন দুটাৰ অপ্ৰতিসাম্যৰ মাত্ৰা (degree of skewness) একে।

বণ্টন A : মাধ্য 100, মধ্যমা 90, SD 10

বণ্টন B : মাধ্য 90, মধ্যমা 80, SD 10



৯.৬ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- ধৰা হ'ল এটা চলক x এ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ মান লয় আৰু ইহঁতৰ বাৰংবাৰতা ক্ৰমে $f_1, f_2, \ldots, f_n$।

  যিকোনো বিন্দু a সাপেক্ষে x-অৰ r-তম ঘূৰ্ণকক μ_r' এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

  $$\mu_r' = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - 1)^r, \quad N = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

  μ_r' -অক r-তম অপৰিণত ঘূৰ্ণক বুলি কোৱা হয়।

  মাধ্য $\bar{x}$ সাপেক্ষে x -অৰ ঘূৰ্ণকক μ_r -এৰে বুজোৱা হয়, আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়। $\mu_r = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_i - \bar{x})^r$

  μ_r অক r-তম কেন্দ্ৰীয় ঘূৰ্ণক বুলি কোৱা হয়।
- এটা বণ্টনক সমমিত বণ্টন বুলি কোৱা হয় যদি মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলক একে হয়। অপ্রতিসাম্যৰ অর্থ হ'ল সমমিতিৰ অভাৱ।
- এটা সমমিত বণ্টন এখন লেখ কাগজত সংস্থাপন কৰিলে ত্রুটিহীনভাৱে এটা বেল-আকৃতিৰ বক্ৰৰ (bell-shaped curve) সৃষ্টি হয়। যদি বাৰংবাৰতা বক্ৰটো সমমিত নহয়, তেনেহ'লে তাক বিষম বা অপ্রতিসাম্য বুলি কোৱা হয়।
- যদি বণ্টনটোৰ বক্ৰৰ সোঁপিনে এডাল দীৰ্ঘতৰ পুচ্ছ থাকে, তেনেহ'লে ইয়াক ধনাত্মকভাৱে বিষম বুলি কোৱা হয়। এই ক্ষেত্ৰত মাধ্য > মধ্যমা > বহুলক।
- যদি বণ্টনটোৰ বক্ৰৰ বাওঁপিনে দীৰ্ঘতম পুচ্ছ থাকে, তেনেহ'লে বণ্টনটোক ঋণাত্মকভাৱে বিষম বুলি কোৱা হয়। এই ক্ষেত্ৰত মাধ্য < মধ্যমা < বহুলক।
- কার্ল পিয়াৰছনৰ অপ্রতিসাম্যৰ প্রথম সহগ হ'ল

  $$S_k = \frac{\text{মাধ্য} - \text{বহুলক}}{\text{প্রামাণিক বিচলন}}$$
- কার্ল পিয়াৰছনৰ অপ্রতিসাম্যৰ দ্বিতীয় সহগ হ'ল

  $$S_k = \frac{3\,(\text{মাধ্য} - \text{মধ্যমা})}{\text{প্রামাণিক বিচলন}}$$
- যদি দুটা বণ্টন থাকে, তেনেহ'লে সিহঁতৰ একে মাধ্য, একে প্রামাণিক বিচলন হ'ব পাৰে। সিহঁত সমভাৱে বিষমো হ'ব পাৰে। কিন্তু এটা আনটোতকৈ বেচি জোঙা হ'ব পাৰে। এই মাপক বক্ৰটোৰ ককুদতা বোলা হয়। ইয়ে বক্ৰটোৰ জোং কিমান তাৰ ধাৰণা দিয়ে।
- সহগ β_2 বা ইয়াৰ পৰা পোৱা γ_2 ৰ সহায়ত ককুদতাৰ মাপ বুজোৱা হয়

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}, \quad \gamma_2 = \beta_2 - 3$$



৯.৭ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

1) Statistical Methods by N.G. Das, McGraw Hill Education (India) Private Ltd. 2009
2) Probability and Statistics by G.Shanker Rao, University Press (India) private Ltd. 2011
3) Introduction to probability and Statistics by Seymour Lipschutz, John J.Schiller, Tata McGraw Hill Education private Ltd. 2005
4) Probability, Random Process, Queueing theory and Statistics by Dr. S.Rajasekaran, Prof.A.Chandrasekaran & G.Kavitha, Dhanam Publications, Chennai-60042
5) Probability and Statistics by G.Balaji, G.Balaji Publishers, Chennai-33



৯.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ এই ক্ষেত্রত $\bar{x} = \frac{2+3+7+8+10}{5} = 6$

আমি জানো যে মাধ্য সাপেক্ষে প্রথম ঘূর্ণক শূন্য।

$\therefore \mu_2 = 0$

$$\mu_2 = \frac{1}{N}\Sigma(x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{(2-6)^2 + (3-6)^2 + (7-6)^2 + (8-6)^2 + (10-6)^2}{5}$$

$$= \frac{16+9+1+4+16}{5} = \frac{46}{5} = 9.6$$

$$\mu_3 = \frac{(2-6)^3 + (3-6)^3 + (7-6)^3 + (8-6)^3 + (10-6)^3}{5}$$

$$= \frac{-64-27+1+8+64}{5} = \frac{-18}{5} = -3.6$$

$$\mu_4 = \frac{(2-6)^4 + (3-6)^4 + (7-6)^4 + (8-6)^4 + (10-6)^4}{5}$$

$$= \frac{256+81+1+16+256}{5} = \frac{610}{5} = 122$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে যে

$\mu_1' = 2,\ \mu_2' = 20,\ \mu_3' = 40,\ \mu_4' = 50$

এতিয়া $\mu_1 = 0$ (যিহেতু মাধ্য সাপেক্ষে প্ৰথম ঘূর্ণক শূন্য)

$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2 = 20 - 4 = 16$

$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2\mu_1'^3$

$= 40 - 3\times 20\times 2 + 2\times 2^3$

$= 40 - 120 + 16 = -64$

$\mu_4 = \mu_4' - 3\mu_3'\mu_1' + 6\mu_2'\mu_1'^2 - 3\mu_1'^4$

$= 50 - 4\times 40\times 2 + 6\times 20\times 2^2 - 3\times 2^4$

$= 50 - 320 + 480 - 48 = 162$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে যে $\mu_1' = 1,\ \mu_2' = 4,\ \mu_3' = 10,\ \mu_4' = 45$

এতিয়া $\mu_1' = \frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i - 4)$

বা, $\mu_1' = \bar{x} - 4$, সৰল কৰাৰ পিছত

$\therefore\ \bar{x} = \mu_1' + 4 = 1 + 4 = 5$

আমি জানো যে দ্বিতীয় কেন্দ্ৰীয় ঘূর্ণক হ'ল প্ৰসৰণ।

এতিয়া, $\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2 = 4 - 1 = 3$

$\therefore$ প্ৰসৰণ = 3

$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2\mu_1'^3$

$= 10 - 3\times 4\times 1 + 2\times 1$

$= 10 - 12 + 2 = 0$

$\mu_4 = \mu_4' - 3\mu_3'\mu_1' + 2\mu_2'\mu_1'^2 - 3\mu_1'^4$

$= 45 - 4\times 10\times 1 + 6\times 4\times 1 - 3\times 1$

$= 45 - 40 + 24 - 3 = 26$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে $\mu_1' = -4,\ \mu_2' = 22,\ \mu_3' = -117$

$\mu_4' = 560,$

এতিয়া, $\mu_1' = \frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i - 5)$

বা, $-4=\frac{\Sigma f_i x_i}{N}-5\frac{\Sigma f_i}{N}$

বা, $-4=\bar{x}-5$

$\therefore\ \bar{x}=\frac{\Sigma f_i x_i}{N}=-4+5=1$

$\therefore\ \left(\mu_1'\right)_0=\frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i-0)=\frac{\Sigma f_i x_i}{N}=1$

আকৌ, $\frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i-5)^2=\mu_2'$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i(x_1^2-10x_i+25)^2=22$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^2-10\frac{\Sigma f_i x_i}{N}+25\frac{\Sigma f_i}{N}=22$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^2-10\times 1+25-22$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^2=22+10-25=7$

$\therefore\ \left(\mu_2'\right)_0=\frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i-0)^2=\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^2=7$

আকৌ $\frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i-5)^3=\mu_3'$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i^3-15x_i^2+75x_i-125)=-117$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^3-15\frac{\Sigma f_i x_i^2}{N}+75\frac{\Sigma f_i x_i}{N}-125\frac{\Sigma f_i}{N}=-117$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^3-15\times 7+75\times 1-125=-117$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^3-117+105-75+125=38$

$\therefore (\mu_3')_0=\frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i-0)^3$

$=\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^3=38$

আকৌ, $\frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i-5)^4=\mu_4'$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i^4 - 20x_i^3 + 150x_i^2 - 500x_i + 625) = 560$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^4 - 20\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^3 + 150\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^2 - 500\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i + 625\frac{1}{N}\Sigma f_i = 560$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^4 - 20\times 38 + 150\times 7 - 500\times 1 + 625 = 560$

বা, $\frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^4 - 760 + 1050 - 500 + 625 = 560$

$\therefore \frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^4 = 560 + 760 - 1050 + 500 - 625 = 1820 - 1675 = 145$

$\therefore (\mu_4')_0 = \frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i - 0)^4$

$= \frac{1}{N}\Sigma f_i x_i^4 = 145$

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে যে

$\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 2.5,\ \mu_3 = 0.7,\ \mu_4 = 16.75$

এতিয়া $\beta_1 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{0.49}{15.625} = 0.03136$

$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{18.75}{6.25} = 3$

অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে যে $Q_3+Q_1 = 70$, $Q_3 - Q_1 = 30$

$\therefore 2Q_3 = 100 \Rightarrow Q_3 = 50$

$2Q_1 = 40 \Rightarrow Q_1 = 20$

আকৌ, মধ্যমা = $Q_2 = 40$.

$\therefore$ অপ্ৰতিসাম্যৰ মাপ $= Q_3 + Q_1 - 2Q_2$

$= 50 + 20 - 2 \times 40$

$= -10$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে যে

$\mu_1' = 1,\ \mu_2' = 4,\ \mu_3' = 10,\ \mu_4' = 4$

এতিয়া, $\mu_1' = \frac{1}{N}\Sigma f_i(x_i - 4)$

বা, $1 = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} - 4\frac{\Sigma f_i}{N}$

বা, $1 = \bar{x} - 4$

$\therefore\ \bar{x} = 1 + 4 = 6$

এতিয়া, $\mu_1 = 0$ (যিহেতু মাধ্য সাপেক্ষে প্রথম ঘূর্ণক শূন্য।)

$\mu_2 = \mu_2' - \mu_1'^2 = 4 - 1 = 3$

$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_2'\mu_1' + 2\mu_1'^3$

= 10 – 3 x 4 x 1 + 2 x 1 = 10 –12 + 2 = 0

$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_3'\mu_1' + 6\mu_2'\mu_1'^2 - 3\mu_1'^4$

= 45 – 4 x 10 x 1 + 6 x 4 x 1 – 3 x 1

= 45 – 40 + 24 – 3

= 26

এতিয়া $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^2} = \frac{0}{27} = 0$

$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{26}{9} < 3$

যিহেতু $\beta_1 = 0$, বণ্টনটো সমমিত।

যিহেতু $\beta_2 < 3$, বক্রটো platykurtic।

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ মাধ্য = 45, মধ্যমা = 48

অপ্রতিসাম্যৰ সহগ = – 0.4 (দিয়া আছে)

আমি জানো যে

$$\text{অপ্রতিসাম্যৰ সহগ} = \frac{3\ (\text{মাধ্য} - \text{মধ্যমা})}{\text{প্রামাণিক বিচলন}}$$

$\therefore\ -0.4 = \frac{3 \times (45 - 48)}{SD}$

$\therefore\ SD = \frac{9}{0.4} = 22.5$

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ = 0.4

SD = 8, মাধ্য = 30

আমি জানো যে

$$\text{অপ্রতিসাম্যৰ সহগ} = \frac{\text{মাধ্য} - \text{মধ্যমা}}{\text{প্রামাণিক বিচলন}}$$

বা, $0.4 = \frac{30 - \text{মধ্যমা}}{8}$

বা, 3.2 = 30 – বহুলক

$\therefore$ বহুলক = 30 – 3.2 = 26.8

আকৌ, অপ্রতিসাম্যৰ সহগ = $\frac{3\ (\text{মাধ্য} - \text{মধ্যমা})}{\text{প্রামাণিক বিচলন}}$

বা, $0.4 = \frac{3 \times (30 - \text{মধ্যমা})}{8}$

বা $3.2 = 90 - 3\ (\text{মধ্যমা})$

$\therefore$ 3(মধ্যমা) = 90 – 3.2 = 86.8

$\therefore$ মধ্যমা $= \frac{86.8}{3} = 28.93$

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে যে $\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 2.3,\ \mu_3 = 0.9,\ \mu_4 = 15.65$

ককুদতাৰ মাপ $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$

$= \frac{15.65}{(2.3)^2}$

$= \frac{15.65}{5.29} = 2.9584$

টোকা ঃ $\because\ \beta_2 < 3$, বক্ৰটো platykurtic.

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ A বণ্টনটোৰ বাবে ঃ

অপ্রতিসাম্যৰ সহগ $= \frac{3\ (\text{মাধ্য} - \text{মধ্যমা})}{\text{প্রামাণিক বিচলন}}$

$= \frac{3 \times (100 - 90)}{10} = 3$

B বণ্টনটোৰ বাবে ঃ

অপ্রতিসাম্যৰ সহগ $= \frac{3\ (\text{মাধ্য} - \text{মধ্যমা})}{\text{প্রামাণিক বিচলন}}$

$= \frac{3 \times (90 - 80)}{10} = 3$

$\therefore$ A আৰু B বণ্টন দুটাৰ অপ্রতিসাম্যৰ মাত্রা একে।



৯.৯ আৰ্হি প্রশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্রশ্ন ১ঃ অপ্রতিসাম্য বুলিলে কি বুজা যায়? অপ্রতিসাম্য মাপ কৰাৰ উদ্দেশ্য কি?

প্রশ্ন ২ঃ চমুটোকা লিখক।

(a) শ্বেপার্ডৰ ঘূর্ণকৰ শুধৰণি

(b) অপ্রতিসাম্য আৰু ককুদতা

প্রশ্ন ৩ঃ এটা বণ্টনৰ পিয়াৰছনৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ 0.5। যদি মাধ্য আৰু বহুলক ক্রমে 40 আৰু 36, বিচৰণ গুণাংক নির্ণয় কৰক। যদি মধ্যমা 42, প্রামাণিক বিচলন নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৪ঃ এটা বণ্টনৰ কার্ল পিয়াৰছনৰ অপ্রতিসাম্যৰ সহগ 0.32। ইয়াৰ প্রামাণিক বিচলন 6.5 আৰু মাধ্য 29.6। বণ্টনটোৰ মধ্যমা আৰু বহুলক নির্ণয় কৰক। যদি ওপৰৰ বণ্টনটোৰ বহুলক 24.8 হয়, প্রামাণিক বিচলন নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৫ঃ এটা সমমিত বণ্টনৰ প্রামাণিক বিচলন 5। বণ্টনটো (i) leptokurtic, (ii) mesokurtic আৰু (iii) platykurtic হ'বলৈ হ'লে মাধ্য সাপেক্ষে চতুর্থ ঘূর্ণক কি হ'ব লাগিব?

*** ***** ***

অধ্যায় ১০ ঃ সম্ভাৱিতা (PROBABILITY)

অধ্যায় গাঁথনি

১০.১ উদ্দেশ্য
১০.২ পৰিচয়
১০.৩ প্ৰাথমিক পাৰিভাষিক শব্দাৱলী
১০.৪ সম্ভাৱিতাৰ ধ্ৰুপদী সংজ্ঞা
১০.৫ সম্ভাৱিতা স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক সংজ্ঞা
১০.৬ সম্ভাৱিতাৰ কেইটামান উপপাদ্য
১০.৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১০.৮ অধিক জানিবলৈ
১০.৯ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান
১০.১০ আৰ্হি প্ৰশ্ন

১০.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- সম্ভাৱিতা অর্থ জানিব পাৰিব
- সম্ভাৱিতাৰ প্ৰাথমিক পাৰিভাষিক শব্দাৱলী জানিব পাৰিব
- সম্ভাৱিতাৰ ধ্ৰুপদী সংজ্ঞা সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- সম্ভাৱিতাৰ স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক সংজ্ঞা সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- সম্ভাৱিতাৰ কেইটামান উপপাদ্য সম্বন্ধে অৱগত হ'ব।

১০.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

সম্ভাৱিতা হ'ল অনিশ্চয়তাৰ মাপ। এই অধ্যায়ত আমি সম্ভাৱিতাৰৰ ধ্ৰুপদী সংজ্ঞা তথা স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক সংজ্ঞা সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম। লগতে আমি সম্ভাৱিতাৰ কেইটামান উপপাদ্য সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম।

১০.৩ প্ৰাথমিক পাৰিভাষিক শব্দাৱলী (BASIC TERMINOLOGIES)

সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞাৰ বাবে কিছুমান পাৰিভাষিক শব্দৰ প্ৰয়োজন। আমি সেই সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম।

1. **যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা (Random experiment) ঃ** 'অপৰিৱর্তনশীল অৱস্থা বা নিয়মাৱলীৰ মাজত বাৰে বাৰে সম্পাদন কৰা কোনো এটা পৰীক্ষা কার্যক যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা (random

experiment) বোলা হয়।' যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ ফলত এটা ফল (outcome) পোৱা যায়।

যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ কেইটামান উদাহৰণ তলত দিয়া হ'ল।

(a) 'মুদ্রা এটাৰ উৎক্ষেপণ' (Tossing a coin) এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা। যদি এটা ফেৰ নোহোৱা মুদ্রা উৎক্ষেপণ কৰা হয়, সম্ভৱপৰ ফল দুটা, মুণ্ড (head, সংক্ষেপে H) আৰু পুচ্ছ (tail, সংক্ষেপে T)। যদিও আমি জানো যে সম্ভৱপৰ ফল দুটা, কোনটো সংঘটিত হ'ব সেয়া আমি ক'ব নোৱাৰোঁ।

(b) 'লুডুগুটি এটাৰ নিক্ষেপ' (Throwing a die) এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা। লুডুগুটি এটা গোটা ঘন। ইয়াৰ পার্শ্ব (face) ছয়টাত ক্রমে এটা, দুটা, তিনিটা, চাৰিটা, পাঁচটা, ছয়টা ফুট আছে। যদি এটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰা হয়, সম্ভৱপৰ ফল ছয়টা,– 1, 2, 3, 4, 5, 6।

(c) 'ভালদৰে মিহলি তাচপাতৰ জাপ এটাৰ পৰা এখিলা তাচপাত টানি অনা' (Drawing a card from a well-shuffled pack of cards) যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ অন্যতম উদাহৰণ। এজাপ তাচপাতত 52 খিলা তাচপাত থাকে,— ইয়াৰ চাৰিটা ভাগ (Suit), ইস্কাপন (Spades), ছিৰটন (Clubs), হৰতন (Hearts) আৰু ৰোহিতন (Diamonds)। ইস্কাপন আৰু ছিৰটন ক'লা ৰঙৰ। হৰতন আৰু ৰোহিতন ৰঙা ৰঙৰ। প্রতিটো ভাগত 13 খিলাকৈ তাচপাত থাকে। ইয়াৰে 9 খনত 2 অৰ পৰা 10 অলৈ সংখ্যাকেইটাৰে একোটা নম্বৰ থাকে। তদুপৰি প্রতিটো ভাগত এখন টেক্কা (ace), এখন ৰজা (king), এখন ৰাণী (queen), এখন গোলাম (jack or knave) থাকে। গতিকে মুঠ টেক্কাৰ সংখ্যা 4 খন, ৰজাৰ সংখ্যা 4 খন, ৰাণীৰ সংখ্যা 4 খন, গোলামৰ সংখ্যা 4 খন। টেক্কা, ৰজা, ৰাণী আৰু গোলামক ফেইচ কার্ড (face card) বোলে।

2. **অভিপ্রয়োগ (Trial) ঃ** এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ কার্যসম্পাদনক অভিপ্রয়োগ (trial) বুলি কয়।

3. **ঘটনা (Event) ঃ** এটা পৰীক্ষাৰ সম্ভৱপৰ সকলো ফলৰ সংগ্রহক ঘটনা (event) বুলি কোৱা হয়।

4. **সমশক্য ঘটনা (Equally likely events) ঃ** সকলো প্রাসংগিক দিশ বিবেচনা কৰাৰ পাছত ঘটনাবোৰৰ এটাক আনটোতকৈ অগ্রাধিকাৰ দি আশা কৰাৰ কোনো কাৰণ থাকিব নোৱাৰিলে ঘটনাবোৰ সমশক্য' (equally likely events)। এটা অনভিনত মুদ্রা নিক্ষেপ কৰিলে মুণ্ড (H) আৰু পুচ্ছ (T) পোৱা ঘটনা দুটা সমশক্য।

5. **পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা (Mutually exclusive events) ঃ** ঘটনাক পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা (mutually exclusive events) বুলি কোৱা হয় যদি এটাৰ সংঘটনে আনবোৰৰ সংঘটনত বাধা আৰোপ কৰে।

এটা মুদ্রা নিক্ষেপ কৰা হ'ল। মুণ্ড (H) আৰু পুচ্ছ (T) পোৱাৰ ঘটনা পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা। মুণ্ড পালে পুচ্ছ পোৱা নাযায়, পুচ্ছ পালে মুণ্ড পোৱা নাযায়।

তাচপাত এখিলা টনা হ'ল। ৰজা পোৱাৰ ঘটনা আৰু হৰতন পোৱাৰ ঘটনা পৰস্পৰান্তৰ নহয়। হৰতনত এখিলা ৰজা আছে।

6. **নিঃশেষী ঘটনা (Exhaustive events) ঃ** 'এটা অভিপ্রয়োগত ঘটিব পৰা সম্ভৱপৰ সকলো ঘটনাক' নিঃশেষী ঘটনা (exhaustive events) বোলা হয়। মুদ্রা এটা নিক্ষেপ কৰি পোৱা নিঃশেষী ঘটনাকেইটা হ'ল মুণ্ড (H), পুচ্ছ (T)।

7. **অনুকূল ঘটনা (Favourable events) ঃ** যিবিলাক ফলৰ সহায়ত এটা ঘটনা সংঘটিত হয়, সেইবিলাকক ঘটনাটোৰ বাবে অনুকূল (favourable) বুলি কোৱা হয়। লুডুগুটি এটা নিক্ষেপ কৰা হ'ল। মৌলিক সংখ্যাৰ দৃষ্টিগোচৰতাৰ বাবে 2, 3 আৰু 5 সংখ্যাকেইটা অনুকূল (favourable)।

১০.৪ সম্ভাৱিতাৰ ধ্রুপদী সংজ্ঞা (CLASSICAL DEFINITION OF PROBABILITY)

ধৰা হ'ল n টা সমশক্য, পৰস্পৰান্তৰ আৰু নিঃশেষী ফল আছে, আৰু ইয়াৰ m টা E ঘটনাটোৰ বাবে অনুকূল। E ঘটনা সংঘটিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতাক P(E)ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$P(E) = \frac{\text{E ৰ সংঘটনৰ বাবে অনুকূল ফলৰ সংখ্যা}}{\text{সকলো সম্ভৱপৰ ফলৰ সংখ্যা}}$$

$$= \frac{m}{n}$$

ঘটনাৰ ব্যতিক্রম (Odds of an event) ঃ ধৰা হ'ল E ঘটনাটোৰ অনুকূল ফলৰ সংখ্যা m, আৰু E ৰ বাবে প্রতিকূল ফলৰ সংখ্যা n। তেনেহ'লে

(i) E ৰ সপক্ষে ব্যতিক্রম (odds in favour of E) $= \frac{m}{n}$

(ii) E ৰ বিপক্ষে ব্যতিক্রম (odds against E) $= \frac{n}{m}$

(iii) $P(E) = \frac{m}{m+n}$

উদাহৰণ 1: এটা ঘটনাৰ সংঘটনৰ সপক্ষে ব্যতিক্রম $\frac{3}{14}$। এই ঘটনাটোৰ সংঘটনৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ অনুকূল ফলৰ সংখ্যা = 3

প্রতিকূল ফলৰ সংখ্যা = 14

$\therefore$ মুঠ ফলৰ সংখ্যা = 3 + 14 = 17

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাৱিতা $= \frac{3}{17}$

উদাহৰণ 2: যদি এটা ঘটনাৰ সংঘটনৰ সম্ভাৱিতা $\frac{6}{19}$ হয়,

(i) সংঘটনৰ সপক্ষে ব্যতিক্রম

(ii) সংঘটনৰ বিপক্ষে ব্যতিক্রম নির্ণয় কৰক

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল অনুকূল ফলৰ সংখ্যা m, আৰু প্রতিকূল ফলৰ সংখ্যা n।

$\therefore$ সম্ভাৱিতা $= \frac{m}{m+n}$

কিন্তু $\frac{m}{m+n} = \frac{6}{19}$, (দিয়া আছে)

বা, 19m = 6m + 6n

বা, 13m = 6n

$\therefore \frac{m}{n} = \frac{6}{13}$

$\therefore$ (i) সপক্ষে ব্যতিক্রম $= \frac{m}{n} = \frac{6}{13}$

(ii) বিপক্ষে ব্যতিক্রম $= \frac{n}{m} = \frac{13}{6}$

১০.৫ সম্ভাৱিতাৰ স্বতঃসিদ্ধভিত্তিক সংজ্ঞা (AXIOMATIC APPROACH TO PROBABILITY)

যাদৃচ্ছিক পৰক্ষা এটাৰ সম্ভৱপৰ আটাইবোৰ ফলৰ সংহতিক **প্রতিদর্শ সমষ্টি** (sample space) বোলে। এই সংহতিটোক সাধাৰণতে ইংৰাজী বর্ণমালাৰ ৰৱফলাৰ S আখৰৰ দ্বাৰা বুজোৱা হয়। প্রতিদর্শ সমষ্টি এটাৰ প্রত্যেক মৌলক **প্রতিদর্শ বিন্দু** (sample point) বোলে।

দুটা মুদ্রা উৎক্ষেপন কৰা হয়। ফলকেইটা হ'ব HH, HT, TH, TT। HH অৰ অর্থ হ'ল প্রথম মুদ্রা আৰু দ্বিতীয় মুদ্রা দুয়োটাতে মুণ্ড (H) ওলাইছে। HT ৰ অর্থ হ'ল প্রথম মুদ্রাটোত মুণ্ড (H) ওলাইছে। দ্বিতীয় মুদ্রাটোত পুচ্ছ (T) ওলাইছে। বাকী দুটাৰ অর্থও এনেধৰণৰ। গতিকে

S = {HH, HT, TH, TT}।

প্রতিদর্শ বিন্দুকেইটা হ'ল HH, HT, TH, TT, অর্থাৎ চাৰিটা প্রতিদর্শ বিন্দু আছে।

প্রতিদর্শ সমষ্টি এটাৰ উপসংহতিক **ঘটনা** (event) বোলে।

সংজ্ঞা ঃ ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ S প্রতিদর্শ সমষ্টি আৰু $E \subset S$ অর্থাৎ E এটা ঘটনা।

E ঘটনাটো সংঘটিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতাক P(E) প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়। $P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}$

$$= \frac{\text{E ৰ মৌলৰ সংখ্যা}}{\text{S অৰ মৌলৰ সংখ্যা}}$$

টোকা ঃ $P(E)=\frac{n(E)}{n(S)} \geq 0, \because n(E) \geq 0$

উদাহৰণ 3: দুটা মুদ্ৰা একেলগে উৎক্ষেপণ কৰা হ'ল।

(i) এটা মুণ্ড ওলোৱাৰ,

(ii) দুটা মুণ্ড ওলোৱাৰ,

(iii) অন্ততঃ এটা মুণ্ড ওলোৱাৰ,

(iv) কোনো মুণ্ড নোলোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$\therefore$ S = {HH, HT, TH, TT}

(i) ধৰা হ'ল E_1 = এটা মুণ্ড ওলোৱাৰ ঘটনা

$\therefore$ E_1 = {HT, TH}

$\therefore P(E_1)=\frac{n(E_1)}{n(S)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

(ii) ধৰা হ'ল E_2 = দুটা মুণ্ড ওলোৱাৰ ঘটনা

$\therefore$ E_2 = {HH}

$\therefore P(E_2)=\frac{n(E_2)}{n(S)}=\frac{1}{4}$

(iii) ধৰা হ'ল E_3 = অন্ততঃ এটা মুণ্ড ওলোৱাৰ ঘটনা

$\therefore$ E_3 = {HT, TH, HH}

$\therefore P(E_3)=\frac{n(E_3)}{n(S)}=\frac{3}{4}$

(v) ধৰা হ'ল E_4 = এটাও মুণ্ড নোলোৱাৰ ঘটনা

$\therefore$ E_4 = {TT}

$\therefore P(E_4)=\frac{n(E_4)}{n(S)}=\frac{1}{4}$

এতিয়া আমি পুনৰ কেইটামান পাৰিভাষিক শব্দ সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম।

অসম্ভৱ ঘটনা (Impossible event) ঃ ধৰা হ'ল S এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি। আমি জানো যে $\phi \subseteq S$।

$\therefore$ ϕ এটা ঘটনা। ইয়াক অসম্ভৱ ঘটনা (impossible event) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ ঃ এটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰা হ'ল।

S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }, ই সকলো ফলৰ সংহতি।

ধৰা হ'ল E = একতকৈ সৰু সংখ্যা পোৱাৰ ঘটনা।

স্পষ্টত ঃ $E = \phi$.

$\therefore$ E এটা অসম্ভৱ ঘটনা।

টোকা ঃ অসম্ভৱ ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা শূন্য।

ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাত S এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

ধৰা হ'ল E এটা অসম্ভৱ ঘটনা, অৰ্থাৎ $E = \phi$

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{n(\phi)}{n(S)} = \frac{0}{n(S)} = 0$$

নিশ্চিত ঘটনা ঃ ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাত S এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

স্পষ্টতঃ $S \subseteq S$

$\therefore$ S এটা ঘটনা। ইয়াক নিশ্চিত ঘটনা (sure event) বুলি কোৱা হয়।

উদাহৰণ : এটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰা হ'ল।

S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

ধৰা হ'ল E= সাততকৈ সৰু এটা সংখ্যা পোৱাৰ ঘটনা

স্পষ্টত ঃ E = 5

$\therefore$ E এটা নিশ্চিত ঘটনা।

টোকা ঃ নিশ্চিত ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা এক।

ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাত S এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

ধৰা হ'ল E এটা নিশ্চিত ঘটনা, অৰ্থাৎ, E = S

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{n(S)}{n(S)} = 1$$

সৰল ঘটনা আৰু মিশ্ৰ ঘটনা (Elementary and Compound events) ঃ যিটো ঘটনাত মাত্ৰ এটাহে প্ৰতিদৰ্শ বিন্দু থাকে, তেনে ঘটনাক **সৰল ঘটনা** (elementary or simple event) বোলে।

সৰল ঘটনাৰ বাহিৰে অন্য ঘটনাক **মিশ্ৰ** ঘটনা (compound or composite event) বোলা হয়।

পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা (Mutually exclusive events) ঃ দুটা ঘটনা E_1 আৰু E_2 ক পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা (mutually exclusive events) বুলি কোৱা হয় যদি $E_1 \cap E_2 = \phi$.

টোকা ঃ (1) $E_1 \cap E_2$ ক E_1E_2 হিচাপেও লিখা হয়।

(2) যদি এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ $E_1, E_2, \ldots, E_n$ ঘটনা হয়, তেনেহ'লে $E_1, E_2, \ldots, E_n$

অক পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা বুলি কোৱা হয় যদি $E_i \cap E_j = \phi$, $i \neq j$ ।

গতিকে E_1, E_2, E_3 পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা যদি $E_1 \cap E_2 = \phi, E_2 \cap E_3 = \phi, E_3 \cap E_1 = \phi$

নিঃশেষী ঘটনা (Mutually exhaustive events) ঃ দুটা ঘটনা E_1 আৰু E_2 ক নিঃশেষী ঘটনা (mutually exhaustive events) বুলি কোৱা হয় যদি $E_1 \cup E_2 = S$, য'ত S হ'ল প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

টোকা ঃ (1) $E_1 \cup E_2$ ক $E_1 + E_2$ হিচাপেও লিখিব পাৰি, যদি $E_1 \cap E_2 = \phi$

(2) যদি এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n$ ঘটনা হয়, তেনেহ'লে $E_1, E_2, \ldots\ldots, E_n$ অক পৰস্পৰ নিঃশেষী ঘটনা বোলা হয় যদি $E_1 \cup E_2 \cup \ldots\ldots \cup E_n = S$, য'ত S হ'ল প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

পূৰক ঘটনা (Complementary event) ঃ ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি S। ধৰা হ'ল $E \subseteq S$, অৰ্থাৎ, E এটা ঘটনা। স্পষ্টতঃ E^c ও এটা ঘটনা, যিহেতু $E^c \subseteq S$ । E^c পূৰক ঘটনা (complementary event) বুলি কোৱা হয়। সাধাৰণতে ইয়াক $\overline{E}$ ৰে বুজোৱা হয়।

টোকা ঃ যদি এটা trial-অৰ ফল w হয়, আৰু $w \in E$, তেনেহ'লে ঘটনাটো সংঘটিত হোৱা বুলি কোৱা হয়। আনহাতেদি, যদি $w \notin E$, তেনেহ'লে ঘটনাটো সংঘটিত হোৱা নাই বুলি কোৱা হয়।

স্পষ্টতঃ

(i) E সংঘটিত হ'লে, $\overline{E}$ সংঘটিত নহয়,

(ii) $\overline{E}$ সংঘটিত হ'লে, E সংঘটিত নহয়।

ধৰ্ম ঃ

I. ধৰা হ'ল S এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি। ধৰা হ'ল $E_1 \subseteq S$, $E_2 \subseteq S$ অৰ্থাৎ, E_1, E_2 দুটা ঘটনা। যদি E_1, E_2 দুটা পৰস্পৰান্তৰ আৰু পৰস্পৰ নিঃশেষী ঘটনা, তেনেহ'লে $P(E_1)+P(E_2)= 1$।

প্ৰমাণ ঃ আমি জানো যে, $E_1 \cap E_2 = \phi$

আৰু $E_1 \cup E_2 = S$

ধৰা হ'ল $n(S) = x$, আৰু $n(E_1) = y$

$\therefore n(E_2) = x - y$, $\because E_1 \cap E_2 = \phi, E_2 \cup E_2 = S$

এতিয়া $P(E_1) + P(E_2) = \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)}$

$$= \frac{y}{x} + \frac{x-y}{x}$$

$$= \frac{y+x-y}{x} = \frac{x}{x} = 1$$

II. ধৰা হ'ল S এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি, আৰু $E \subseteq S$, অৰ্থাৎ E এটা ঘটনা। তেনেহ'লে $P(E)+P(\overline{E})=1$, অৰ্থাৎ $P(\overline{E})=1-P(E)$

প্ৰমাণ ঃ আমি জানো যে E আৰু $\overline{E}$ দুটা পৰস্পৰান্তৰ আৰু পৰস্পৰ নিঃশেষী ঘটনা।

$\therefore$ আগৰ ফলটোৰ পৰা আমি পাইছোঁ যে $P(E)+P(\overline{E})=1$

অৰ্থাৎ $P(\overline{E})=1-P(E)$

III. ধৰা হ'ল E এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি, আৰু E_1, E_2 দুটা ঘটনা যাতে $E_1 \subseteq E_2$। তেনেহ'লে $P(E_1) \le P(E_2)$

প্ৰমাণ ঃ আমি জানো যে $E_1 \subseteq E_2$

$\therefore n(E_1) \le n(E_2)$, ($E_1$, E_2 সসীম)

বা, $\frac{n(E_1)}{n(S)} \le \frac{n(E_2)}{n(S)}$

$\therefore P(E_1) \le P(E_2)$

IV. ধৰা হ'ল S এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি, আৰু E এটা ঘটনা, অৰ্থাৎ $E \subseteq S$। তেনেহ'লে $0 \le P(E) \le 1$

প্ৰমাণ ঃ আমি জানো যে

$\phi \subseteq E$ আৰু $E \subseteq S$

$\therefore P(\phi) \le P(E)$ আৰু $P(E) \le P(S)$

বা, $0 \le P(E)$ আৰু $P(E) \le 1$

$\therefore 0 \le P(E) \le 1$

উদাহৰণ 4: দুটা লুডুগুটি একেলগে নিক্ষেপণ কৰা হ'ল। নিক্ষেপণত সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 9 হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল S এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$\therefore$ S = { (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), ...

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

(6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

[ইয়াত (1, 1) -অৰ অৰ্থ হ'ল প্ৰথম গুটিটোত 1 ওলাইছে, দ্বিতীয় গুটিটোতো 1 ওলাইছে, (1, 2)ৰ অৰ্থ হ'ল প্ৰথম গুটিটোত 1 ওলাইছে, দ্বিতীয় গুটিটোত 2 ওলাইছে। ইত্যাদি]

$\therefore$ n (S) = 6 x 6 = 36.

ধৰা হ'ল E = যোগফল 9 ওলোৱাৰ ঘটনা।

$\therefore$ E = { (3, 6), 4, 5), (5, 4), (6, 3) }

$\therefore$ n (E) = 4

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

উদাহৰণ 5: ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ আখৰ এটা যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা হ'ল।

(i) আখৰটো ব্যঞ্জন বৰ্ণ (consonant) হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান,

(ii) আখৰটো 0 বৰ্ণটোৰ আগৰ আৰু এটা ব্যঞ্জন বৰ্ণ হোৱাৰ (বৰ্ণানুক্ৰমত) সম্ভাৱিতা কিমান,

(iii) আখৰটো 0 বৰ্ণটোৰ পিছৰ আৰু এটা ব্যঞ্জন বৰ্ণ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$\therefore$ S = {a, b, c, ..., x, y, z}

স্পষ্টতঃ n(S) = 26

(i) ধৰা হ'ল E_1 = এটা ব্যঞ্জন বৰ্ণ পোৱাৰ ঘটনা

আমি জানো যে ইংৰাজী বৰ্ণমালাত 21 টা ব্যঞ্জন বৰ্ণ আছে।

$$\therefore P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{21}{26}$$

(ii) ধৰা হ'ল E_2 = 0 বৰ্ণটোৰ আগৰ ব্যঞ্জন বৰ্ণ হোৱাৰ ঘটনা।

$\therefore$ E_2 = {b, c, d, f, g, h, j, k, l, m, n}

$n(E_2)$ = 11

$$\therefore P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{11}{26}$$

(iii) ধৰা হ'ল E_3 = 0 বৰ্ণটোৰ পিছৰ ব্যঞ্জন বৰ্ণ হোৱাৰ ঘটনা।

$\therefore$ E_3 = {p, q, r, s, t, v, w, x, y, z}

$n(E_3)$ = 10

$$\therefore P(E_3) = \frac{n(E_3)}{n(S)} = \frac{10}{26} = \frac{5}{13}$$

উদাহৰণ 6: ভালদৰে মিহলি 52 খিলা তাচপাতৰ জাপ এটাৰ পৰা 4 খিলা তাচপাত টনা হ'ল।

দুখিলা ৰজা আৰু দুখিলা ৰাণী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান ঃ 52 খিলাৰ তাচপাত এজাপৰ পৰা 4 খিলা তাচপাত $^{52}C_4$ টা উপায়ে টানি আনিব পাৰি।

ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$$\therefore n(S) = {}^{52}C_4$$

ধৰা হ'ল E = দুখিলা ৰজা আৰু দুখিলা ৰাণী পোৱাৰ ঘটনা।

2 খিলা ৰজা $^4C_2$ টা উপায়ে টানিব পাৰি।

2 খিলা ৰাণী $^4C_2$ টা উপায়ে টানিব পাৰি।

$\therefore$ 2 খিলা ৰজা আৰু 2 খিলা ৰাণী ${}^4C_2 \times {}^4C_2$ টা উপায়ে টানিব পাৰি।

$$\therefore n(E) = {}^4C_2 \times {}^4C_2$$

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$$

$$= \frac{{}^4C_2 \times {}^4C_2}{{}^{52}C_4}$$



অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

প্ৰশ্ন নং ১ঃ ভালদৰে মিহলি 52 খিলা তাচপাতৰ জাপ এটাৰ পৰা এখিলা ছিৰটন পোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্ৰশ্ন নং ২ঃ এটা বাকছত 6 টা ৰঙা, 8 টা ক'লা, 10 টা হালধীয়া, বল (ball) আছে। (i) এটা ৰঙা বল, (ii) এটা ক'লা বল, (iii) এটা বগা বল টানি অনাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ এটা মুদ্ৰা ক্ৰমাগতভাৱে তিনিবাৰ উৎক্ষেপণ কৰা হ'ল। (i) 2 টা মুণ্ড, (ii) অতি কমেও 2 টা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ প্ৰথম 150 টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ পৰা এটা সংখ্যা যাদৃচ্ছিকভাৱে বছা হ'ল। বাছি উলিওৱা সংখ্যাটো 5 অৰ গুণিতক হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ AMPLITUDE শব্দটোৰ পৰা এটা আখৰ যাদৃচ্ছিকভাৱে বছা হ'ল। আখৰটো স্ৱৰবৰ্ণ (vowel) হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ দুটা লুডুগুটি একেলগে নিক্ষেপ কৰা হ'ল। নিক্ষেপণত (i) যোগফল 6, (ii) যোগফল 12, (iii) যোগফল 18 হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্ৰশ্ন নং ৭ঃ ভালদৰে মিহলি 52 খিলা তাচপাতৰ জাপ এটাৰ পৰা দুখিলা তাচপাত যাদৃচ্ছিকভাৱে টনা হ'ল। এখিলা ৰজা আৰু আনখিলা ৰাণী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্ৰশ্ন নং ৮ঃ ভালদৰে মিহলি 52 খিলা তাচপাতৰ জাপ এটাৰ পৰা দুখিলা তাচপাত যাদৃচ্ছিকভাৱে টনা হ'ল। দুখন হৰতন পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৯ঃ এটা বাকছত 4 টা বগা, 5 টা ক'লা আৰু 6 টা সেউজীয়া বল (ball) আছে। যদি যাদৃচ্ছিকভাৱে দুটা বল টানি অনা হয়, এটাও ক'লা নোহোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ১০ঃ ইংৰাজী বৰ্ণমালাৰ এটা বৰ্ণ যাদৃচ্ছিকভাৱে বছা হ'ল। বাছি উলিওৱা আখৰটো h অৰ আগৰ আৰু স্ৱৰবৰ্ণ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ১১ঃ যিকোনো এটা লিপ ইয়াৰত 53 টা সোমবাৰ থকাৰ সম্ভাৱিতা কিমান নিৰ্ণয় কৰক।

১০.৬ সম্ভাৱিতাৰ কেইটামান উপপাদ্য (SOME THEOREMS ON PROBABILITY)

১০.৬.১ সম্ভাৱিতাৰ যোগ উপপাদ্য (Addition Theorem of Probability)

I. ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাত S এটা প্ৰতিদৰ্শন সমষ্টি। ধৰা হ'ল E_1, E_2 দুটা ঘটনা। তেনেহ'লে

$P(E_1$ বা $E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1$ আৰু $E_2)$

অৰ্থাৎ, $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

প্ৰমাণ ঃ $P(E_1 \cup E_2) = \frac{n(E_1 \cup E_2)}{n(S)}$

$$= \frac{n(E_1) + n(E_2) - (E_1 \cap E_2)}{n(S)}$$

$$= \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)} - \frac{(E_1 \cap E_2)}{n(S)}$$

$$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2$$

অনুমিতি ঃ যদি E_1, E_2 পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা, তেনেহ'লে $E_1 \cap E_2 = \phi$ আৰু $\therefore P(E_1 \cap E_2) = P(\phi) = 0$. গতিকে, দুটা পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা E_1 আৰু E_2 ৰ বাবে

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + (E_2)$

এই ক্ষেত্ৰত আমি লিখোঁ

$P(E_1 + E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

II. ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাত S এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি। ধৰা হ'ল E_1, E_2, E_3 তিনিটা ঘটনা।

তেনেহ'লে

$P(E_1$ বা E_2 বা $E_3)$

$= P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$

$= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_2 \cap E_3) - P(E_3 \cap E_1) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$

প্ৰমাণ ঃ আমি জানো যে

$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$

$$= \frac{n(E_1 \cup E_2 \cup E_3)}{n(S)}$$

$$= \frac{n(E_1) + n(E_2) + n(E_3) - n(E_1 \cap E_2) - n(E_2 \cap E_3) - n(E_3 \cap E_1) + n(E_1 \cap E_2 \cap E_3)}{n(S)}$$

$$= \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)} + \frac{n(E_3)}{n(S)} - \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(S)} - \frac{n(E_2 \cap E_3)}{n(S)} - \frac{n(E_3 \cap E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_1 \cap E_2 \cap E_3)}{n(S)}$$

$$= P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_2 \cap E_3) - P(E_3 \cap E_1) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$$

অনুমিতি ঃ যদি E_1, E_2, E_3 পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা হয়, তেনেহ'লে

$E_1 \cap E_2 = \phi,\ E_2 \cap E_3 = \phi,\ E_3 \cap E_1 = \phi,\ E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \phi$

গতিকে, তিনিটা পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা E_1, E_2 আৰু E_3 ৰ বাবে

$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$

অর্থাৎ, $P(E_1+E_2+E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3)$

সেইদৰে, যদি if E_1, E_2, E_3, ..., E_n পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা, তেনেহ'লে

$P(E_1 + E_2 + \ldots\ldots + E_n) = P(E_1) + P(E_2) + \ldots\ldots P(E_n)$.

১০.৬.২ ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা S অৰ E_1, E_2 দুটা ঘটনা। তেনেহ'লে

(i) $P\left(\overline{E_1 \cup E_2}\right) = P\left(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}\right)$

(ii) $P\left(\overline{E_1 \cap E_2}\right) = P\left(\overline{E_1} \cup \overline{E_2}\right)$

প্ৰমাণ ঃ আমি জানো যে $E_1 \subseteq S,\ E_2 \subseteq S$

দ্য মৰ্গানৰ বিধি অনুসৰি, আমি পাওঁ

$(E_1 \cup E_2)^c = {E_1}^c \cap {E_2}^c$

অর্থাৎ, $\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2$

$\therefore P\left(\overline{E_1 \cup E_2}\right) = P\left(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2\right)$

আকৌ, $(E_1 \cap E_2)^c = {E_1}^c \cup {E_2}^c$

অর্থাৎ, $\left(\overline{E_1 \cap E_2}\right) = \overline{E}_1 \cap \overline{E}_2$

$\therefore\ P\left(\overline{E_1 \cap E_2}\right) = \left(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2\right)$

উদাহৰণ 7: দুটা লুডুগুটি একেলগে নিক্ষেপ কৰা হ'ল। এটা ডাব্‌লেট বা যোগফল 8 উলিওৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদর্শ সমষ্টি।

স্পষ্টতঃ n(S) = 36 [উদাহৰণ 4 দ্ৰষ্টব্য]

ধৰা হ'ল E_1 = এটা ডাব্‌লেট পোৱাৰ ঘটনা। [ডাব্‌লেট (Doublet) শব্দৰ অর্থ এই সন্দর্ভত এনে ধৰণৰ— দুটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰাত যদি দুয়োটাতে একে সংখ্যক ফুট ওলায়, তাক doublet বুলি কয়।]

$\therefore E_1 = \{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6) \}$

ধৰা হ'ল E_2 = যোগফল 8 পোৱাৰ ঘটনা।

$\therefore E_2 = \{ (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) \}$

$E_1 \cap E_2 = \{(4, 4)\}$

গতিকে, $n(E_1) = 6$, $n(E_2) = 5$, $n(E_1 \cap E_2) = 1$

$\therefore$ $P(E_1$ বা $E_2)$

$$= P(E_1 \cup E_2)$$

$$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

$$= \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)} - \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(S)}$$

$$= \frac{6}{36} + \frac{5}{36} - \frac{1}{36}$$

$$= \frac{6+5-1}{36}$$

$$= \frac{10}{36}$$

$$= \frac{5}{18}$$

উদাহৰণ 8: দুটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰা হ'ল। প্ৰথম গুটিটোত এটা অযুগ্ম সংখ্যা বা যোগফল 8 পোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$\therefore$ $n(S) = 36$

ধৰা হ'ল E_1 = প্ৰথম গুটিটোত এটা অযুগ্ম সংখ্যা পোৱাৰ ঘটনা।

$\therefore$ $n(E_1) = 3 \times 6 = 18$

[অযুগ্ম সংখ্যা তিনিটা, 1, 3, 5। প্ৰথম গুটিটোত ইয়াৰ যিকোনো এটা পাম। দ্বিতীয় গুটিটোত 1, 2, 3, 4, 5, 6 – ইয়াৰ যিকোনো এটা পাম।]

ধৰা হ'ল E_2 = যোগফল 8 পোৱাৰ ঘটনা

$\therefore$ $E_2 = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$

$n(E_2) = 5$

$E_1 \cap E_2 = \{(3, 5), (5, 7)\}$

$n(E_1 \cap E_2) = 2$

$\therefore P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$$= \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)} - \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(S)}$$

$$= \frac{18}{36} + \frac{5}{36} - \frac{2}{36}$$

$$= \frac{18+5-2}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

উদাহৰণ 9: ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিত পৰীক্ষাত E_1, E_2, E_3 তিনিটা পৰস্পৰান্তৰ আৰু পৰস্পৰ নিঃশেষী ঘটনা। যদি $P(E_1)=\frac{3}{2}P(E_2)$ আৰু $P(E_3)=\frac{1}{2}P(E_2)$, $P(E_1)$, $P(E_2)$, আৰু $P(E_3)$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$\therefore E_1 \cup E_2 \cup E_3 = S$ ($\because$ E_1, E_2, E_3 পৰস্পৰ নিঃশেষী ঘটনা)

$\therefore P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(S)$

বা, $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = P(S)$ ($\because E_1$, E_2, E_3 পৰস্পৰ নিঃশেষী ঘটনা)

বা, $\frac{3}{2}P(E_2) + P(E_2) + \frac{1}{2}P(E_2) = 1$

বা, $\left(\frac{3}{2}+1+\frac{1}{2}\right)P(E_2) = 1$

বা, $3P(E_2) = 1$

$\therefore P(E_2) = \frac{1}{3}$

$\therefore P(E_1) = \frac{3}{2}.P(E_2) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

$P(E_3) = \frac{1}{2}.P(E_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

উদাহৰণ 10: ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ E_1, E_2 দুটা ঘটনা।

যদি $P(E_1)=\frac{1}{2}$, $P(E_2)=\frac{1}{3}$ আৰু $P(E_1 \cap E_2)=\frac{1}{6}$,

(i) $P\left(\overline{E_1 \cap E_2}\right)$, (ii) $P\left(\overline{E_1 \cup E_2}\right)$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ (i) $P\left(\overline{E_1 \cap E_2}\right)$

$= 1 - P(E_1 \cap E_2)$ $[P(\overline{E}) = 1 - P(E)]$

$= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

(ii) $P\left(\overline{E_1 \cup E_2}\right)$

$= 1 - P(E_1 \cup E_2)$

$= 1 - [P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)]$

$= 1 - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

প্রশ্ন নং ১ঃ প্রথম 150 টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা সংখ্যা বছা হ'ল। এনেদৰে বাছি উলিওৱা সংখ্যাটো 4 অৰ গুণিতক বা 5 -অৰ গুণিতক হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ঃ ভালদৰে মিহলি 52 খিলা তাচপাতৰ জাপ এটাৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে এখিলা টনা হ'ল। এনেদৰে টনা তাচপাতখিলা ইস্কাপন বা ৰজা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ E_1, E_2 দুটা ঘটনা। যদি $P(E_1) = 0.3$, $P(E_2) = 0.2$, আৰু $P(E_1 \cap E_2) = 0.1$,

(i) $P\left(\overline{E_1 \cap E_2}\right)$, (ii) $P\left(\overline{E_1 \cup E_2}\right)$ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ E_1, E_2 দুটা পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা। যদি $P(E_1$ নহয়$) = 0.45$ আৰু $P(E_1$ বা $E_2) = 0.65$, $P(E_2)$ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ E_1, E_2 দুটা ঘটনা। যদি $P(E_1) = \frac{1}{2}$, $P(E_2) = \frac{1}{3}$, $P(E_1$ আৰু $E_2) = \frac{1}{6}$, (i) $P(E_1$ বা $E_2)$

(ii) P (E_1 নহয়, E_2 নহয়) নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ দুটা লুডুগুটি একেলগে নিক্ষেপ কৰা হ'ল। সংখ্যা দুটাৰ যোগফল 3 ৰে বিভাজ্য নোহোৱা, 4 এৰেও বিভাজ্য নোহোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।



১০.৭ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- 'অপৰিৱর্তনশীল অৱস্থা বা নিয়মাৱলীৰ মাজত বাৰে বাৰে সম্পাদন কৰা কোনো এটা পৰীক্ষাকার্যক যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা বোলা হয়।' মুদ্রা এটাৰ উৎক্ষেপণ, লুডুগুটি এটাৰ নিক্ষেপ, ভালদৰে মিহলি তাচপাতৰ জাপ এটাৰ পৰা এখিলা তাচপাত টানি অনা আদি যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ উদাহৰণ।
- যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষা এটাৰ সম্ভৱপৰ আটাইবোৰ ফলৰ সংহতিক প্রতিদর্শ সমষ্টি বোলে।
- প্রতিদর্শ সমষ্টি এটাৰ উপসংহতিক ঘটনা বোলে।
- E ঘটনাটো সংঘটিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতাক P(E) প্রতীকেৰে বুজোৱা হয়, আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয় $P(E) = \frac{n(E)}{n(S)}$

য'ত n(E) এ E ৰ মৌলৰ সংখ্যা বুজায়, আৰু n(S) এ প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি S অৰ মৌলৰ সংখ্যা বুজায়।

- ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ S এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি। ধৰা হ'ল E_1, E_2 দুটা ঘটনা।

$$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap_2)$$



১০.৮ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

1) Statistical Methods by N.G. Das, McGraw Hill Education (India) Private Ltd. 2009
2) Probability and Statistics by G.Shanker Rao, University Press (India) private Ltd. 2011
3) Introduction to probability and Statistics by Seymour Lipschutz, John J.Schiller, Tata McGraw Hill Education private Ltd. 2005
4) Probability, Random Process, Queueing theory and Statistics by Dr. S.Rajasekaran, Prof.A.Chandrasekaran & G.Kavitha, Dhanam Publications, Chennai-60042
5) Probability and Statistics by G.Balaji, G.Balaji Publishers, Chennai-33



১০.৯ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

ভালদৰে মিহলি 52 খিলা তাচপাতৰ পৰা এখিলা তাচপাত $^{52}C_1$ টা উপায়ে অৰ্থাৎ 52 টা উপায়ে টানিব পাৰি।

$\therefore$ n(S) = 52

ধৰা হ'ল E = ছিৰটন এখন টনাৰ ঘটনা।

এখন ছিৰটন $^{13}C_1$ টা উপায়ে অৰ্থাৎ 13 টা উপায়ে টানিব পাৰি।

$\therefore$ n(E) = 13

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ মুঠ বলৰ সংখ্যা = 6 + 8 + 10 = 24. এটা বল $^{24}C_1$ টা উপায়ে, অৰ্থাৎ 24

টা উপায়ে টানিব পাৰি।

ñ1±ýÃ¤ S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$\therefore$ n(S) = 24

(i) ধৰা হ'ল E_1 = এটা ৰঙা বল টনাৰ ঘটনা

এটা ৰঙা বল ${}^6C_1$ টা উপায়ে, অৰ্থাৎ, 6 টা উপায়ে টানিব পাৰি।

$\therefore$ $n(E_1) = 6$

$$\therefore P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$$

(ii) ধৰা হ'ল E_2 = এটা ক'লা বল টনাৰ ঘটনা

এটা ক'লা বল ${}^8C_1$ টা উপায়ে, অৰ্থাৎ, 8 টা উপায়ে টানিব পাৰি।

$\therefore$ $n(E_2) = 8$

$$\therefore P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

(iii) ধৰা হ'ল E_3 = এটা বগা বল টনাৰ ঘটনা

বাকছটোত কোনো বগা বল নাই।

$$\therefore E_3 = \phi$$

$$\therefore P(E_3) = P(\phi) = 0$$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$\therefore$ S = {HHH, HTH, HHT, THH, HTT, TTH, THT, TTT}

(i) ধৰা হ'ল E_1 = দুটা মুণ্ড পোৱাৰ ঘটনা

$\therefore$ E_1 = { HTH, HHT, THH }

$$\therefore P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{3}{8}$$

(ii) ধৰা হ'ল E_2 = অন্ততঃ 2 দুটা মুণ্ড পোৱাৰ ঘটনা

$\therefore$ E_2 = { HTH, HHT, THH, HHH }

$$\therefore P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

প্ৰথম 150 টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ পৰা এটা সংখ্যা ${}^{150}C_1$ টা উপায়ে অৰ্থাৎ 150 টা উপায়ে বাছিব পাৰি।

$\therefore$ n(S) = 150

S = { 1, 2, 3, 4, ..., 149, 150 }

ধৰা হ'ল E = 5 অৰ গুণিতক এটা বছাৰ ঘটনা।

$\therefore$ E = { 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150 }

$\therefore$ n(E) = 30

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{30}{150} = \frac{1}{5}$$

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$\therefore$ n(S) = 9

ধৰা হ'ল E = এটা স্বৰ বৰ্ণ পোৱাৰ ঘটনা।

$\therefore$ n(E) = 4

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{4}{9}$$

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$\therefore$ n(S) = 6 x 6 = 36

(i) ধৰা হ'ল E_1 = যোগফল 6 পোৱাৰ ঘটনা।

$\therefore$ E_1 = { (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) }

$n(E_1) = 5$

$$\therefore P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{5}{36}$$

(ii) ধৰা হ'ল E_2 = যোগফল 12 পোৱাৰ ঘটনা।

$\therefore$ E_2= {(6, 6)}

$$\therefore P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

(iii) ধৰা হ'ল E_3 = যোগফল 18 পোৱাৰ ঘটনা।

স্পষ্টতঃ, $E_3 = \phi$, যোগফল 18 হ'ব নোৱাৰে।

$$\therefore P(E_3) = P(\phi) = 0$$

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দুখিলা তাচপাত $^{52}C_2$ টা উপায়ে টানিব পাৰি।

ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$$\therefore n(S) = {}^{52}C_2 = \frac{52!}{2!50!} = \frac{52 \times 51 \times 50!}{2 \times 1 \times 50!} = 26 \times 51$$

4 খিলা ৰজা আছে আৰু 4 খিলা ৰাণী আছে।

এখিলা ৰজা $^4C_1$, টা উপায়ে, অৰ্থাৎ, 4 টা উপায়ে টানিব পাৰি।

এখিলা ৰাণী ${}^4C_1$ টা উপায়ে, অর্থাৎ 4 টা উপায়ে টানিব পাৰি।

ধৰা হ'ল E = এখিলা ৰজা আৰু এখিলা ৰাণী টনাৰ ঘটনা।

$\therefore$ n(E) = 4 x 4 = 16

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{16}{26 \times 51} = \frac{8}{13 \times 51} = \frac{8}{663}$$

৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$$\therefore n(S) = {}^{52}C_2 = 26 \times 51$$

ধৰা হ'ল E = দুখন হৰতন পোৱাৰ ঘটনা

$$\therefore n(S) = {}^{13}C_2 = \frac{13!}{2!11!} = \frac{13 \times 12 \times 11!}{2 \times 1 \times 11!} = 13 \times 6$$

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{13 \times 6}{26 \times 51} = \frac{1}{17}$$

৯ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ মুঠ বলৰ সংখ্যা = 4 + 5 + 6 = 15

15 টা বলৰ পৰা দুটা বল ${}^{15}C_1$ টা উপায়ে টানিব পাৰি।

ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$$\therefore n(S) = {}^{15}C_2 = \frac{15!}{2!13!} = \frac{15 \times 14}{2 \times 1} = 15 \times 7 = 105$$

যদি বল দুটাৰ এটাও ক'লা নহয়, তেনেহ'লে বল দুটা বগা আৰু সেউজীয়া বলৰ পৰা হ'ব লাগিব।

বগা আৰু সেউজীয়া বলৰ মুঠ সংখ্যা = 4 + 6 =10

ধৰা হ'ল E = দুটা বল (এটাৰ ক'লা নহয়) টনাৰ ঘটনা।

$$\therefore n(E) = {}^{10}C_2 = \frac{10!}{2!8!} = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$$

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{45}{105} = \frac{3}{7}$$

১০ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$\therefore$ n(S) = 26

ধৰা হ'ল E = h অৰ আগৰ আৰু এটা স্বৰ বৰ্ণ হোৱাৰ ঘটনা।

$\therefore$ E = { a, e }

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{26} = \frac{1}{13}$$

১১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ আমি জানো যে এটা লিপইয়াৰত 366 দিন থাকে। 366 দিন = 52 সপ্তাহ

+ দিন। 52 সপ্তাহত 52 টা সোমবাৰ আছে।

বাকী দুটা দিন এনে ধৰণৰ হ'ব পাৰে,— ৰবিবাৰ আৰু সোমবাৰ, সোমবাৰ আৰু মংগলবাৰ, মংগলবাৰ আৰু বুধবাৰ, বুধবাৰ আৰু বৃহস্পতিবাৰ, বৃহস্পতিবাৰ আৰু শুকুৰবাৰ, শুকুৰবাৰ আৰু শনিবাৰ, শনিবাৰ আৰু ৰবিবাৰ। ওপৰৰ সাতটা সম্ভাৱনাৰ দুটাত সোমবাৰ আছে।

$\therefore$ নির্ণেয় সম্ভাৱিতা $= \frac{2}{7}$

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S প্রতিদর্শ সমষ্টি।

$\therefore$ n(S) = 150

ধৰা হ'ল E_1 = 4 অৰ গুণিতক পোৱাৰ ঘটনা।

$\therefore$ $n(E_1) = 37$

ধৰা হ'ল E_2 = 5 অৰ গুণিতক পোৱাৰ ঘটনা।

$\therefore$ $n(E_2) = 30$

$\therefore$ $E_1 \cap E_2$ = 4 আৰু 5 অৰ গুণিতক অর্থাৎ 20 পোৱাৰ ঘটনা

$\therefore$ $n(E_1 \cap E_2) = 7$

এতিয়া, $P(E_1 \cup E_2)$

$$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

$$= \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)} - \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(S)}$$

$$= \frac{37}{150} + \frac{30}{150} - \frac{7}{150}$$

$$= \frac{60}{150} = \frac{2}{5}$$

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S প্রতিদর্শ সমষ্টি।

$\therefore n(S) = {}^{52}C_1 = 52$

ধৰা হ'ল E_1 = ইস্কাপন পোৱাৰ ঘটনা

$\therefore n(E_1) = {}^{13}C_1 = 13$

ধৰা হ'ল E_2 = ৰজা পোৱাৰ ঘটনা

$\therefore n(E_2) = {}^{4}C_1 = 4$

$E_1 \cap E_2$ = ইস্কাপন আৰু ৰজা পোৱাৰ ঘটনা

$\therefore n(E_1 \cap E_2) = 1$

$\therefore$ P (ইস্কাপন বা ৰজা পোৱা)

$= P(E_1 \cup E_2)$

$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$= \frac{n(E_1)}{n(S)} + \frac{n(E_2)}{n(S)} - \frac{n(E_1 \cap E_2)}{n(S)}$

$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে যে $P(E_1) = 0.3$, $P(E_2) = 0.2$, $P(E_1 \cap E_2) = 0.1$

(i) $P\left(\overline{E_1 \cap E_2}\right) = 1 - P(E_1 \cap E_2) = 1 - 0.1 = 0.9$

(ii) $P\left(\overline{E_1 \cup E_2}\right) = 1 - P(E_1 \cup E_2)$

$= 1 - [P(E_1) + P(E_2) - P()]$

$= 1 - 0.3 - 0.2 + 0.1 = 0.6$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে যে $P(E_1$ নহয়$) = 0.45$

বা, $P(\overline{E}_1) = 0.45$

বা, $1 - P(E_1) = 0.45$

$\therefore P(E_1) = 1 - 0.45 = 0.55$

E_1, E_2 দুটা পৰস্পৰান্তৰ ঘটনা।

$\therefore P(E_1$ বা $E_2) = P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

$\therefore P(E_1) + P(E_2) = 0.65$

বা, $0.55 + P(E_2) = 0.65$

$\therefore P(E_2) = 0.65 - 0.55 = 0.1$

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে যে $P(E_1) = \frac{1}{2}$, $P(E_2) = \frac{1}{3}$

$P(E_1$ আৰু $E_2) = P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{6}$

(i) $P(E_1$ বা $E_2) = P(E_1 \cup E_2)$

$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

(ii) $P(E_1$ নহয়, E_2 ও নহয়)

$= P(\overline{E}_1$ আৰু $\overline{E}_2)$

$= P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2)$

$= P\left(\overline{E_1 \cup E_2}\right)$

$= 1 - P(E_1 \cup E_2)$

$$= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল S প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি।

$$\therefore n(S) = {}^6C_1 \times {}^6C_1 = 6 \times 6 = 36$$

ধৰা হ'ল E_1 = যোগফল 3ৰে বিভাজ্য হোৱা ঘটনা।

$\therefore$ E_1 = { (1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3), 6, 6) }

$\therefore$ n (E_1) = 12.

ধৰা হ'ল E_2 = যোগফল 4 এৰ বিভাজ্য হোৱা ঘটনা।

$\therefore$ E_2 = {(1, 3), (2, 2), (2, 6), (3, 1), (3, 5), (4,4), (5, 3), (6, 2), (6, 6)}

$\therefore$ n(E_2) = 9

$E_1 \cap E_2$ = যোগফল 3 আৰু 4 উভয়েৰে বিভাজ্য হোৱা ঘটনা।

$\therefore E_1 \cap E_2 = \{(6, 6)\}, \quad \therefore n(E_1 \cap E_2) = 1$

P(E_1 নহয়, E_2ও নহয়)

= P($\overline{E}_1$ আৰু $\overline{E}_2$)

$$= P(\overline{E}_1 \cap \overline{E}_2)$$

$$= P\left(\overline{E_1 \cup E_2}\right)$$

$$= 1 - P(E_1 \cup E_2)$$

$$= 1 - [P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)]$$

$$= 1 - \left[\frac{12}{36} + \frac{9}{36} - \frac{1}{36}\right]$$

$$= 1 - \frac{5}{9}$$

$$= \frac{4}{9}$$



১০.১০ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ একেলগে এটা মুদ্ৰা আৰু এটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰা হ'ল। প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ২ঃ মুদ্ৰা এটা নিক্ষেপ কৰা হ'ল। পুচ্ছ পোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান ?

প্ৰশ্ন ৩ঃ তিনিটা মুদ্ৰা একেলগে নিক্ষেপ কৰা হ'ল। (i) এটা মুণ্ড, (ii) অন্ততঃ এটা মুণ্ড, (iii) দুটা

মুণ্ড, (iv) অন্ততঃ দুটা মুণ্ড, (v) আটাইকেইটা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্ৰশ্ন ৪ঃ দুটা লুডুগুটি একেলগে নিক্ষেপ কৰা হ'ল। যোগফল 9 বা 11 পোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্ৰশ্ন ৫ঃ এটা সাধাৰণ বৰ্ষত (লিপইয়াৰ নহয়) 53 টা সোমবাৰ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্ৰশ্ন ৬ঃ এটা টোপোলাত পোন্ধৰটা বল (ball) আছে। প্ৰতিটো বলত 1 অৰ পৰা 15 লৈ সংখ্যাকেইটাৰ পৰা একোটা নম্বৰ দিয়া হৈছে (যিকোনো দুটা বলৰ একে নম্বৰ হ'ব নোৱাৰে)। যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা বল টোপোলাটোৰ পৰা লোৱা হ'ল। বলটোৰ নম্বৰ 3 ৰ গুণিতক বা 4 অৰ গুণিতক হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

*** ***** ***

অধ্যায় ১১ ঃ চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতা

অধ্যায় গাঁথনি

১১.১ উদ্দেশ্য
১১.২ পৰিচয়
১১.৩ চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতা
১১.৪ সম্ভাৱিতাৰ গুণিতক উপপাদ্য
১১.৫ পূর্ণ সম্ভাৱিতা
১১.৬ বেইজৰ উপপাদ্য
১১.৭ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১১.৮ অধিক জানিবলৈ
১১.৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
১১.১০ আৰ্হি প্রশ্ন

১১.১ উদ্দেশ্য

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা দাঙি ধৰিব পাৰিব
- সম্ভাৱিতাৰ গুণিতক উপপাদ্যৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব
- সম্ভাৱিতাৰ নিয়ম বর্ণনা কৰিব পাৰিব
- বেইজৰ উপপাদ্যৰ বিষয়ে জানিব পাৰিব।

১১.২ পৰিচয়

অধ্যায় ১০-ত আমি সম্ভাৱিতা আৰু ইয়াৰ সৈতে জড়িত কেইটামান গুৰুত্বপূর্ণ উপপাদ্যৰ বিষয়ে আলোচনা কৰিছো। এই অধ্যায়টিত আমি চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ ধাৰণাটো আলোচনা কৰিম। ইয়াৰ লগতে অধ্যায়টিত আশ্রিত আৰু স্বতন্ত্র ঘটনা (dependent and independent events) বিষয়েও আলোচনা কৰা হ'ব। অধ্যায়টি পঢ়ি আপোনালোকে আশ্রিত আৰু স্বতন্ত্র ঘটনা গুণিতক উপপাদ্যৰ বিষয়েও জানিব পাৰিব। অধ্যায়টিত সম্ভাৱিতাৰ নিয়ম আৰু বেইজৰ উপপাদ্যৰ আলোচনাও সামৰি লোৱা হৈছে।

১১.৩ পৰিচয়

অধ্যায় ১০-ত আমি সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰাৰ পদ্ধতিবোৰ আলোচনা কৰিছো। ধৰা হ'ল, কোনো এটা যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণত একেটা প্রতিদর্শ সমষ্টিৰ (sample space) পৰা আমি

দুটা ঘটনা লাভ কৰিছো। এতিয়া ইয়াৰে যিকোনো এটা ঘটনা আনটোৰ সম্ভাৱিতাত কিবা প্ৰভাৱ পেলাব নেকি? তলৰ উদাহৰণবোৰৰ সৈতে কথাটো পৰীক্ষা কৰি চাও আহক।

1. লুডো গুটি এটা দলিওৱাৰ যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণ

ধৰা হ'ল, S হৈছে প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি আৰু A হ'ল অযুগ্ম সংখ্যা ওলোৱা ঘটনা

$\therefore\ S=\{1,2,3,4,5,6\}$ আৰু $A=\{1,3,5\}$

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

এইবোৰ আন এটা ঘটনা ধৰি লোৱা হ'ল, B। B হ'ল সেইটো ঘটনা য'ত 3-তকৈ ডাঙৰ সংখ্যাবোৰ পোৱা যাব। অৰ্থাৎ $B=\{4,5,6\}$.

যেতিয়া আমি কওঁ যে, B ইতিমধ্যে ঘটিল, তেন্তে 3-তকৈ সৰু অথবা সমান সংখ্যাবোৰ পোৱাৰ ঘটনাটো ঘটা সম্ভৱ নহয়। অৰ্থাৎ, প্ৰতিদৰ্শন স্থানত লব্ধ উপাদনৰ সংখ্যা হ'ব মাত্ৰ 3 টা, যেনে $\{4,5,6\}$। এই তিনিওটা উপাদানৰ ভিতৰত দুটা $\{4,6\}$ হ'ল যুগ্ম সংখ্যা।

অৰ্থাৎ, আমি পালোঁ যে যদি ঘটনা B ইতিমধ্যে ঘটি যায়, তেন্তে $P(A)=\frac{2}{3}$। সেয়েহে, B ইতিমধ্যে ঘটি যোৱাৰ পাছত A-ৰ সম্ভাৱিতা হ'ব $P\left(\frac{A}{B}\right)$।

2. তিনিটা মুদ্ৰা দলিওৱাৰ যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণ

এই পৰীক্ষাৰ প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি হ'ল,

$$S=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}.$$

ধৰা হ'ল, E = অতি কমেও দুবাৰ 'টেইল' (T) ওলোৱা ঘটনা আৰু

F = প্ৰথম মুদ্ৰাটোৱে 'হেড' (H) দেখুওৱা ঘটনা

এতিয়া, ধৰা হ'ল, আমাক কোৱা হ'ল প্ৰথম মুদ্ৰাটোৱে 'হেড দেখুৱাইছে। অৰ্থাৎ, F ঘটনাটো ঘটিল। তেন্তে, এতিয়া আমি E ঘটনা ঘটাৰ সম্ভাৱিতা উলিয়াব লাগিব। F ঘটাৰ তথ্য জনাৰ লগে লগে আমি নিশ্চিত হ'লো যে প্ৰথম মুদ্ৰাটোৱে 'হেড' নেদেখুওৱা ফলাফলবোৰ E ৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয়ৰ সময়ত বিবেচনা কৰিব পৰা নাযাব। এই তথ্যই E ঘটনাৰ বাবে S সংহতিৰ পৰা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টিৰ পৰিমাণ কমাই F উপ-সংহতিৰ সমান কৰি তুলিলে। অন্য অৰ্থত, এই অতিৰিক্ত তথ্যৰ পৰা আমি গম পালো যে এই অৱস্থাটোক আমি এটা নতুন যাদৃচ্ছিক সম্পৰীক্ষা বুলি ধৰিব পাৰো য'ত প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টিত ঘটনা E-ৰ উপস্থিতিৰ অনুকূল ফলাফলবোৰহে কেৱল পোৱা যাব। অৰ্থাৎ, ঘটনা E-ৰ অনুকূল F প্ৰতিদৰ্শ ফলাফলটো হ'ব HTT। ইয়াৰ দ্বাৰা গম পোৱা গ'ল যে প্ৰতিদৰ্শ স্থান হিচাপে পৰীক্ষা কৰি চোৱাৰ পাছত E -ৰ সম্ভাৱিতা হ'ব $=\frac{1}{4}$। ঘটনা E -ৰ এই সম্ভাৱিতাকে E -ৰ চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতা বোলে [য'ত F ইতিমধ্যে সংঘটিত হৈছে]। ইয়াক P (E|F) চিহ্নৰে বুজোৱা হয়।

3. 52 খন তাচপাতৰ ডেক এটাৰ পৰা যিকোনো এখন পাত টনাৰ যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষণ

ধৰা হ'ল আমি একাদিক্ৰমে পাত টানি এখন 'কুইন' পাত পালো। প্ৰথমবাৰ টানোতে

'কুইন' পাতখন পোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল $\frac{4}{52}$ । যদি দ্বিতীয়বাৰ পাত টনাৰ আগতে এই পাতখন পুনৰ ডেকত ৰখা নহয়, তেন্তে দ্বিতীয়বাৰ টানোতে 'কুইন' পাতখন পোৱাৰ সম্ভাৱনীয়তা প্ৰথম ঘটনাটোৰ ওপৰত নির্ভৰশীল হ'ব। এতিয়া, ডেকত মাত্ৰ 3 খন 'কুইন' পাত থাকিব। অর্থাৎ, দ্বিতীয়বাৰ টানোতে 'কুইন' পাত এখন পোৱাৰ সম্ভাৱিতাও হ'ল $\frac{3}{52}$ ।

ওপৰৰ উদাহৰণটোৰ পৰা আমি বুজিলো যে কোনো এক ঘটনাৰ সম্ভাৱনা ইতিমধ্যে ঘটি যোৱা আন এক ঘটনাৰ ওপৰত নির্ভৰশীল। সেয়েহে, E ঘটনাক এটা আশ্রিত ঘটনা বুলি কোৱা হয়, য'ত A ঘটাৰ সম্ভাৱনা ইতিমধ্যে ঘটি যোৱা F ঘটনাৰ ওপৰত নির্ভৰশীল। ইয়াক $P(E \mid F)$ চিহ্নৰে বুজোৱা হয়।

ওপৰৰ উদাহৰণবোৰৰ সহায়ত আমি তলত দিয়া ধৰণে চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা দাঙি ধৰিব পাৰো ঃ

E আৰু F হ'ল প্রতিদর্শ সমষ্টি S-ৰ সহায়ত লব্ধ দুটা ঘটনা।

ধৰা হ'ল, $P(F) > 0$, এতিয়া F ইতিমধ্যে ঘটি যোৱা ঘটনা হ'লে E-ৰ চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতা হ'ব $P(E \mid F)$ । ইয়াক তলত দিয়া ধৰণে গাণিতিকভাৱে প্রকাশ কৰা হ'ব ঃ

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, P(F) > 0$$

একেদৰে $P(F \mid E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}, P(E) > 0$

টোকা ঃ (1) $P(E \mid F)$ আৰু $P(F \mid E)$ -ক তলত দিয়া ধৰণেও প্রকাশ কৰিব পাৰি ঃ

$$P(E \mid F) = \frac{n(E \cap F)}{n(F)} \quad \text{আৰু} \quad P(F \mid E) = \frac{n(E \cap F)}{n(E)} .$$

(2) $P(E \mid F)$ -ক F ঘটনাটো ঘটি যোৱাৰ পাছত E ঘটনাৰ সম্ভাৱিতা বুলি পঢ়া হয়।

চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ নিয়ম

(ক) যদি S প্রতিদর্শ সমষ্টিৰ E_1 আৰু E_2 যিকোনো দুটা ঘটনা হয় আৰু S-ৰ যিকোনো এটা ঘটনা A হয়, য'ত $P(A) \neq 0$, তেন্তে

$$P(E_1 \cup E_2 \mid A) = P(E_1 \mid A) + P(E_2 \mid A) - P(E_1 \cap E_2 \mid A)$$

আমি পাম, $P(E_1 \cup E_2 \mid A) = \frac{P((E_1 \cup E_2) \cap A)}{P(A)}$

$$= \frac{P(E_1 \cap A) \cup P(E_2 \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(E_1 \cap A) + P(E_2 \cap A) - P(E_1 \cap E_2 \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(E_1 \cap A)}{P(A)} + \frac{P(E_2 \cap A)}{P(A)} - \frac{P(E_1 \cap E_2 \cap A)}{P(A)}$$

$$= P(E_1 \mid A) + P(E_2 \mid A) - P(E_1 \cap E_2 \mid A)$$

(খ) $P(E' \mid F) = 1 - P(E \mid F)$

আমি পাম, $P(S \mid F) = 1$

$$\Rightarrow P(E' \cup E \mid F) = 1$$

$$\Rightarrow P(E' \mid F) + P(E \mid F) = 1$$

$$\Rightarrow P(E' \mid F) = 1 - P(E \mid F)$$

(গ) স্বতন্ত্র ঘটনা

যদি কোনো দুটা ঘটনাৰ অস্তিত্বই ইটোৱে সিটোক প্রভাৱিত নকৰে, তেন্তে তেনে ঘটনাক স্বতন্ত্র ঘটনা বোলে। ধৰা হ'ল, এটা মুদ্রা দলিয়াই চোৱা হ'ল। প্রথমবাৰ 'টছ' কৰোঁতে 'হেড' পোৱা ঘটনাটো দ্বিতীয়বাৰ 'টছ' কৰোতে 'হেড' পোৱা ঘটনাটোৰ প্রভাৱৰ পৰা মুক্ত অথবা স্বতন্ত্র। একে নিয়ম তাৰ পাছৰ 'টছ'বোৰৰ ক্ষেত্রতো প্রযোজ্য।

উদাহৰণ 1 ঃ এটা 52 খন তাচপাতৰ ডেকৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে এখন পাত টনা হ'ল।

ধৰা হ'ল, এচ (Ace) পাত ওলোৱাৰ ঘটনাক E-ৰে বুজোৱা হ'ল আৰু ক্লাব (club) পাত ওলোৱাৰ ঘটনাক F-ৰে বুজোৱা হ'ল। ইয়াত E আৰু F দুটা স্বতন্ত্র ঘটনা।

আশ্রিত ঘটনা

যদি কোনো এক ঘটনা আন এটা ঘটনাৰ উদ্ভৱ হোৱা কার্যক প্রভাৱিত কৰে, তেন্তে দ্বিতীয় ঘটনাটোক প্রথমটোৰ ওপৰত আশ্রিত ঘটনা বুলি কোৱা হয়। ওপৰৰ উদাহৰণটোত আমি যদি প্রথমবাৰ উলিয়াই অনা বলটো পুনৰ নভৰাও, তেন্তেই বেগৰ ভিতৰত থকা বলবোৰৰ বিন্যাস সলনি কৰিব আৰু দ্বিতীয়বাৰ বল উলিওৱাৰ সময়ত সম্ভাৱিতাক প্রভাৱিত কৰিব। অর্থাৎ, দ্বিতীয়বাৰ 'এটা ৰঙা বল' উলিওৱা ঘটনাটো প্রথমবাৰ বল উলিওৱা (ৰঙা নাইবা বগা বল) ঘটনাটোৰ ওপৰত নির্ভৰশীল। একেদৰে, আমি যদি তাচপাতৰ ডেক এটাৰ পৰা পাত এখন টানো কিন্তু পুনৰ ডেকত নভৰাও, তেন্তে তাৰ পাছত যিমানবোৰ পাত টানিম তাৰ ফলাফল প্রথমবাৰৰ পাতখিলাৰ ওপৰত নির্ভৰশীল হ'ব।

উদাহৰণ ঃ দুটা সমান ডাইচ দলিওৱা হ'ল। প্রথম গুটিটোত 3 ওলাল। তাক E ঘটনা বুলি ধৰা হ'ল। F হ'ল যোগফল 6 হোৱা ঘটনা আৰু G হ'ল যোগফল 7 হোৱা ঘটনা। ইয়াত E আৰু F হ'ল দুটা আশ্রিত ঘটনা, কিন্তু E আৰু G হ'ল দুটা স্বতন্ত্র ঘটনা।

টোকা ঃ যদি ঘটনা A আৰু B স্বতন্ত্র। তেন্তে ইয়াৰে যিকোনো এটা সংঘটনৰ সম্ভাৱিতা হ'ল $P(E \mid F) = P(E)$ আৰু $P(F \mid E) = P(F)$।

১১.৪ সম্ভাৱিতা গুণিতক উপপাদ্য

এইবাৰ আমি স্বতন্ত্ৰ আৰু আশ্ৰিত ঘটনাৰ ক্ষেত্ৰত সম্ভাৱিতাৰ গুণিতক উপপাদ্য সম্পৰ্কে আলোচনা কৰিম।

স্বতন্ত্ৰ ঘটনাৰ বাবে সম্ভাৱিতাৰ গুণিতক উপপাদ্য

যদি, E আৰু F দুটা স্বতন্ত্ৰ ঘটনা হয়, তেন্তে দুয়োটা ঘটনা ঘটাৰ সম্ভাৱিতা প্ৰতিটোৰে একক সম্ভাৱিতাৰ পূৰণফলৰ সমান।

অৰ্থাৎ, $P(E \cap F) = P(E)P(F)$.

টোকা ঃ (1) এই উপপাদ্যটো তিনিটা অথবা ততোধিক স্বতন্ত্ৰ ঘটনাৰ ক্ষেত্ৰতো সমানে প্ৰযোজ্য। ধৰা হ'ল, E, F,G..... হ'ল স্বতন্ত্ৰ ঘটনা তেন্তে

$$P(E \cap F \cap G) = P(E)P(F)P(G).$$

(2) যদি E আৰু F স্বতন্ত্ৰ হয়, তেন্তে E আৰু F -ৰ পৰিপূৰকো স্বতন্ত্ৰ হ'ব।

অৰ্থাৎ, $P\left(\bar{E} \cap \bar{F}\right) = P\left(\bar{E}\right)P\left(\bar{F}\right)$

আশ্ৰিত ঘটনাৰ বাবে সম্ভাৱিতাৰ গুণিতক উপপাদ্য

যগি E আৰু F দুটা নিৰ্ভৰশীল ঘটনা হয়, অৰ্থাৎ কোনো এটা ঘটনাৰ অস্তিত্ব আনটোৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল হয়, তেন্তে A আৰু B ঘটাৰ সম্ভাৱনা হ'ল—

$$P(E \cap F) = P(E)P(F \mid E).$$

টোকা ঃ তিনিটা ঘটনা E, F, G -ৰ ক্ষেত্ৰত,

$P(E \cap F \cap G) = P(E)P(F \mid E)P(G \mid E \cap F)$ হ'ব। অৰ্থাৎ, E, F আৰু G সংঘটিত হোৱাৰ সম্ভাৱনা হ'ল E বাৰ সংঘটিত হোৱাৰ সমান য'ত F-ৰ সম্ভাৱিতা দিয়া আছে য'ত E সংঘটিত হৈছে, G সংঘটিত হোৱাৰ সম্ভাৱনাৰ সমান য'ত E আৰু F দুয়োটা সংঘটিত হৈছে।

বিস্তৃত উদাহৰণ

উদাহৰণ 1: ধৰা হ'ল, E আৰু F দুটা ঘটনা ইয়াত, $P(E) = 0.8$, $P(F) = 0.6$, $P(E \cap F) = 0.5$. এতিয়া, (i) $P(E \cup F)$ (ii) $P(F \mid E)$ আৰু (iii) $P(E \mid F)$-ৰ মান নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ (i) $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$

$$= 0.8 + 0.6 - 0.5$$
$$= 0.9$$

(ii) $P(F \mid E) = \dfrac{P(E \cap F)}{P(E)} = \dfrac{0.5}{0.8} = \dfrac{5}{8}$

(iii) $P(E \mid F)=\frac{P(E \cap F)}{P(F)}=\frac{0.5}{0.6}=\frac{5}{6}$.

উদাহৰণ 2 : যদি $P(E)=0.5, P(F)=0.3$ আৰু $P(E \cap F)=0.15$ হয়, তেন্তে $P(E \mid F)$ৰ মান নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা অনুসৰি

$$P(E \mid F)=\frac{P(E \cap F)}{P(F)}$$

$$=\frac{0.15}{0.3}$$

$$=0.5$$

উদাহৰণ 3 : যদি $P(E)=0.9; P(F \mid E)=0.8,$ হয়, তেন্তে $P(E \cap F)$ৰ মান নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ : চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা অনুসৰি

$$P(F \mid E)=\frac{P(F \cap E)}{P(E)}$$

$$\Rightarrow P(F \cap E)=P(E).P(F \mid E)$$

$$=0.9 \times 0.8$$

$$=0.72 \cdot$$

উদাহৰণ 4 : 5 টা ৰঙা আৰু 7 টা বগা বল থকা মোনা এখনৰ পৰা 2 টা বগা বল একাদিক্রমে উলিয়াব পৰাৰ সম্ভাৱনা নির্ণয় কৰক। মোনাৰ পৰা উলিওৱা বলকেইটা পুনৰ মোনাত ভৰোৱা নহয়।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, E হ'ল প্রথমবাৰত বগা বল উলিওৱা ঘটনা F হ'ল দ্বিতীয়বাৰত বগা বল উলিওৱা ঘটনা

$$\therefore P(F \cap E)=P(E).P(F \mid E)$$

ইয়াত, $P(E)=\frac{7}{12}, P(F \mid E)=\frac{6}{11}$

$$\therefore P(F \cap E)=\frac{7}{12}.\frac{6}{11}=\frac{7}{22}.$$

উদাহৰণ 5 : কোনো এটা পৰীক্ষাত 30% ছাত্রই গণিত বিষয়ত, 20% ছাত্রই ৰসায়ন বিজ্ঞান বিষয়ত আৰু 10% ছাত্রই দুয়োটা বিষয়ত অনুতীর্ণ হৈছে। এজন ছাত্রক যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা হ'ল— যদি ছাত্রজনে ৰসায়ন বিজ্ঞানত অনুতীর্ণ হৈছে বুলি জনা যায় তেন্তে তেওঁৰ গণিতত অনুতীর্ণ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, E হ'ল গণিতত অনুতীর্ণ হোৱাৰ ঘটনা

$$\therefore P(E)=30\%=0.3$$

ধৰা হ'ল, F হ'ল ৰসায়ন বিজ্ঞানত অনুতীর্ণ হোৱাৰ ঘটনা

$$\therefore P(F) = 20\% = 0.2$$

ধৰা হ'ল, $E \cap F$ হ'ল দুয়োটা বিষয়তে অনুতীর্ণ হোৱাৰ ঘটনা

$$P(E \cap F) = 10\% = 0.1$$

ৰসায়ন বিজ্ঞানত অনুতীর্ণ হোৱা বুলি জ্ঞাত ছাত্রজনৰ গণিতত অনুতীর্ণ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল—

$$P(E \mid F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0.1}{0.2}$$

$$= 0.5 .$$

উদাহৰণ 5 : এখন মোনাত 5 টা বগা আৰু 3 টা ক'লা বল আছে। দুটাবল একাদিক্রমে মোনাৰ পৰা উলিওৱা হ'ল। বলকেইটা পুনৰ ভৰোৱা নহ'ল। দুয়োটা বল ক'লা ৰঙৰ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ প্রথমবাৰতে ক'লা বল এটা উলিওৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল—

$$P(E) = \frac{3}{5+3} = \frac{3}{8}$$

প্রথম বলটো ক'লা উলিওৱাৰ পাছত দ্বিতীয় বলটোও ক'লা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল—

$$P(F \mid E) = \frac{2}{5+2} = \frac{2}{7}$$

∴ দুয়োটা বলেই ক'লা ৰঙৰ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল—

$$P(E \cap F) = P(A) \times P(F \mid E) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28} .$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

প্রশ্ন নং ১ঃ দুটা সমান মুদ্রা দলিওৱা হ'ল। ইয়াৰে এটা হ'লেও 'মুণ্ড' হ'ব বুলি কোৱা হ'ল। দুয়োটা 'মুণ্ড' হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা বাকচত 8 টা ৰঙা আৰু 4 টা বগা বল আছে। আমি যাদৃচ্ছিকভাৱে তিনিটা বল উলিয়ালো। বলকেইটা পুনৰ বাকচত ভৰোৱা নহ'ব। তিনিওটা বলেই ৰঙা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ এটা 'ডাই' দলিওৱা হ'ল। যদি 'ডাই'টো অযুগ্ম সংখ্যাত ৰৈ যায়, তেন্তে সংখ্যাটো এটা মৌলিক সংখ্যা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন নং ৪ঃ এটা পৰিয়ালত দুটা সন্তান আছে। ইয়াৰে অতি কমেও এজনী ছোৱালী বুলি কোৱা হৈছে। দুয়োটা সন্তানেই ছোৱালী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

১১.৫ পূর্ণ সম্ভাৱিতা

পূর্ণ সম্ভাৱিতাৰ উপপাদ্য ঃ যদি E_1 আৰু E_2 দুটা পাৰস্পৰিকভাৱে অখণ্ড (mutually exclusive and exhaustive) ঘটনা আৰু $P(E_1)\neq 0$, $P(E_2)\neq 0$ হয়, তেন্তে S-ৰ যিকোনো ঘটনা A-ৰ বাবে।

$$P(A)=P(E_1)P(A\mid E_1)+P(E_2)P(A\mid E_2)$$

প্ৰমাণ ঃ যিহেতু E_1 আৰু E_2 দুটা (mutually exclusive and exhaustive) ঘটনা, আমি পাম $E_1\cup E_2=S$ আৰু $E_1\cap E_2=\phi$.

$$\therefore A=A\cap S$$
$$=A\cap(E_1\cup E_2)$$
$$=(A\cap E_1)\cup(A\cap E_2) \quad \text{.... (1)}$$

আকৌ, $(A\cap E_1)\cap(A\cap E_2)=A\cap(E_1\cap E_2)$
$$=A\cap\phi$$
$$=\phi$$

$\therefore$ $A\cap E_1$ আৰু $A\cap E_2$ হ'ল দুটা (mutually exclusive and exhaustive) ঘটনা।

$\therefore$ (1)-ৰ পৰা আমি পালোঁ

$$P(A)=P(A\cap E_1)+P(A\cap E_2)$$
$$=P(E_1)P(A\mid E_1)+P(E_2)P(A\mid E_2)$$ [সম্ভাৱিতাৰ গুণিতক উপপাদ্য]

যদি E_1, E_2 আৰু E_3 তিনিটা পৰস্পৰৰ ঘটনা (mutually exclusive and exhaustive) ঘটনা হয়, আৰু $P(E_1)\neq 0, P(E_2)\neq 0$ আৰু $P(E_3)\neq 0$ হয়, (তেন্তে, S -ৰ যিকোনো ঘটনাৰ ক্ষেত্ৰত

$$P(A)=P(E_1)P(A\mid E_1)+P(E_2)P(A\mid E_2)+P(E_3)P(A\mid E_3)$$ হ'ব।

১১.৬ বেইজৰ উপপাদ্য

ওপৰৰ শিতানবোৰত আলোচনা কৰি অহা চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ ধাৰণাটোৱে কোনো এটা ঘটনাৰ সম্ভাৱিতাৰ বিষয়ে আগতীয়াকৈ ক'বলৈ আন এক ঘটনাৰ তথ্য বিচাৰ কৰি চায়। এই ধাৰণাটোক নতুন তথ্যৰ আধাৰত সম্ভাৱিতা সংশোধনৰ বাবে আৰু কোনো বিশেষ কাৰণত কোনো এক নির্দিষ্ট প্ৰভাৱ পৰিলক্ষিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰিবলৈকো ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি। এই সম্ভাৱিতাবোৰৰ সংশোধন প্ৰক্ৰিয়াটোকে বেইজৰ উপপাদ্য বুলি কোৱা হয়। 1763 চনত জন্ম লাভ কৰা টমাছ বেইজ (Thomas Bayes) হ'ল এই উপপাদ্যৰ জনক। এই উপপাদ্যৰ দ্বাৰা কোনো নির্দিষ্ট পূর্ববতী সম্ভাৱিতা সম্পর্কে ধাৰণা কৰি লৈ পৰৱর্তী সম্ভাৱিতাবোৰ লাভ কৰা হয়। সেয়েহে বেইজৰ উপপাদ্যক অনুৱর্তী সম্ভাৱিতা (Posteriori probabilities) বুলিও জনা যায়।

বেইজৰ উপপাদ্য অথবা নিয়ম

সত্যাপন ঃ ধৰা হ'ল $E_1, E_2, E_3, \cdots, E_n$ হ'ল এটা (mutually exclusive and collectively exhaustive) ঘটনাৰ n-সংখ্যক সংহতি। $P(E_1), P(E_2), P(E_3), \cdots, P(E_n)$ হ'ল ইয়াৰ অনুৰূপ সম্ভাৱিতা। যদি A আন এটা ঘটনা হয়, য'ত P(A) শূন্যৰ সমান নহয় আৰু ইয়াৰ অনুৱৰ্তী সম্ভাৱিতা $P(A \mid E_i)$ i =1, 2..., n বুলি জ্ঞাত, তেন্তে

$$P(E_i \mid A) = \frac{P(E_i)P(A \mid E_i)}{P(E_1)P(A \mid E_1) + P(E_2)P(A \mid E_2) + \cdots + P(E_n)P(A \mid E_n)}$$

অর্থাৎ, $$P(E_i \mid A) = \frac{P(E_i)P(A \mid E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A \mid E_i)}$$

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল, এটা যাদৃচ্ছিক সম্পৰীক্ষাটোৰ S হ'ল প্রতিদর্শ সমষ্টিৰ ঘটনা

$E_1, E_2, E_3, \cdots, E_n$ হ'ল $\quad \therefore S = E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n$

$$A = A \cap S \qquad [A \subset S]$$
$$= A \cap (E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n)$$
$$= (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup \cdots (A \cap E_n) \quad [\text{ বিতৰণ বিধি}]$$
$$\Rightarrow P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + \cdots + P(A \cap E_n)$$
$$= P(E_1)P(A \mid E_1) + P(E_2)P(A \mid E_2) + \cdots + P(E_n)P(A \mid E_n)$$
$$= \sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A \mid E_i) \quad \ldots. (1)$$

এতিয়া, $P(A \cap E_i) = P(A)P(E_i \mid A)$

$$\Rightarrow P(E_i \mid A) = \frac{P(A \cap E_i)}{P(A)}$$
$$= \frac{P(E_i)P(A \mid E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)P(A \mid E_i)} \qquad [\text{ (1) ব্যৱহাৰ কৰি }]$$

টোকা ঃ (1) $P(E_1), P(E_2), \cdots, P(E_n)$ সম্ভাৱিতাক অগ্রৱর্তী সম্ভাৱিতা (a prori probabilites) বোলা হয়।

(2) $P(E_1 \mid A), P(E_2 \mid A), \cdots, P(E_n \mid A)$ সম্ভাৱিতাক অনুৱর্তী সম্ভাৱিতা (posteriori probabilities) বোলা হয়।

উদাহৰণ 1 : এখন মোনাত 6 টা ৰূপৰ আৰু 3 টা সোণৰ মুদ্রা আছে। আন এখন মোনাত 4 টা ৰূপৰ আৰু 5 টা সোণৰ মুদ্রা আছে। যাদৃচ্ছিকভাৱে এখন মোনা বাছনি কৰা হ'ল আৰু তাৰ পৰা মুদ্রা এটা বাহিৰ কৰা হ'ল। মুদ্রাটো ৰূপৰ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান ?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, E = প্ৰথম মোনাখন বাছনি কৰাৰ ঘটনা

F = দ্বিতীয় মোনাখন বাছনি কৰাৰ ঘটনা

A = ৰূপৰ মুদ্ৰা এটা বাহিৰ কৰাৰ ঘটনা

$\therefore P(E)=\frac{1}{2}$ আৰু $P(F)=\frac{1}{2}$

লগতে, $P(E|A)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$ আৰু $P(F|A)=\frac{4}{9}$

$\therefore$ প্ৰয়োজনীয় সম্ভাৱিতা $P(A)=P(E)P(A|E)+P(F)P(A|F)$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{6}{9}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}$$

$$=\frac{10}{18}$$

$$=\frac{5}{9}$$

উদাহৰণ 2 : এটা বাকচত দুটা মুদ্ৰা আছে। এটা মুদ্ৰাৰ দুয়োপিঠি 'হেড' আৰু আনটো মুদ্ৰাৰ এটা পিঠি 'হেড' আৰু আনটো 'টেইল'। যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা মুদ্ৰা বাছনি কৰা হ'ল আৰু পিঠিখন পৰীক্ষা কৰা হ'ল। যদি পিঠিখন 'হেড' পোৱা হ'ল, তেন্তে আনখন পিঠিও 'হেড' হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল E = দুয়োপিঠি 'হেড' থকা মুদ্ৰাটো বাহিৰ কৰাৰ ঘটনা

F = এখন পিঠি 'হেড' আনখন 'টেইল' থকা মুদ্ৰাটো বাহিৰ কৰাৰ ঘটনা

A = দুয়োপিঠি 'হেড' থকা মুদ্ৰাটো বাহিৰ কৰাৰ ঘটনা

এতিয়া আমি $P(E|A)$ নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।

ইয়াত, $P(E)=P(F)=\frac{1}{2}$

$$P(A|E)=1, P(A|F)=\frac{1}{2}$$

বেইজৰ উপপাদ্য মতে আমি পাম,

$$P(E|A)=\frac{P(E)P(A|E)}{P(E)P(A|E)+P(F)P(A|F)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\times 1}{\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{2}{3}.$$

উদাহৰণ 3 : ধৰা হ'ল, এটা কাৰখানাত দুটা মেচিন আছে. পুৰণি তথ্য মতে মেচিন I-এ 20% সামগ্ৰী উৎপাদন কৰে আৰু মেচিন II-ই 80% সামগ্ৰী উৎপাদন কৰে। লগতে এই তথ্যও পোৱা গৈছে যে মেচিন I-এ উৎপাদন কৰা সামগ্ৰীবোৰৰ 6% আৰু মেচিন II-এ উৎপাদন কৰা সামগ্ৰীবোৰৰ 1% ত্ৰুটিপূৰ্ণ। যদি যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা ত্ৰুটিপূৰ্ণ সামগ্ৰী তুলি লোৱা যায়,তেন্তে সেইটো মেচিন I-এ উৎপাদন কৰা সামগ্ৰী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল E_1, E_2 হ'ল ক্ৰমে মেচিন I আৰু মেচিন II ই উৎপাদন কৰা সামগ্ৰী একোবিধ তুলি লোৱাৰ ঘটনা।

ধৰা হ'ল A হ'ল ত্ৰুটিপূৰ্ণ সামগ্ৰী এবিধ তুলি লোৱা ঘটনা।

আমি জানো যে, $P(E_1)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$, $P(E_2)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$

লগতে, আমি পাম $P(A|E_1)=\frac{6}{100}$, $P(A|E_2)=\frac{1}{100}$

বেইজৰ উপপাদ্যৰ পৰা, প্ৰয়োজনীয় সম্ভাৱিতা হ'ব—

$$P(E_1|A)=\frac{P(E_1).P(A|E_1)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)}$$

$$=\frac{\frac{1}{5}.\frac{6}{100}}{\frac{1}{5}.\frac{6}{100}+\frac{4}{5}.\frac{1}{100}}=\frac{6}{6+4}=0.6.$$

উদাহৰণ 4 : A, B আৰু C মেচিন 3 টাই বোল্ট নিৰ্মাণ কৰে। A-ই B-ৰ দুগুণ বোল্ট আৰু B আৰু C-এ সমান বোল্ট নিৰ্মাণ কৰে। A আৰু B-এ নিৰ্মাণ কৰা বোল্টৰ 2% আৰু C-এ নিৰ্মাণ কৰা বোল্টৰ 4% ত্ৰুটিপূৰ্ণ। আটাইবোৰ বোল্ট এঠাইত দমাই থোৱা হৈছে। তাৰ মাজৰ পৰা টো বোল্ট তুলি অনা হ'ল। বোল্টটো ত্ৰুটিপূৰ্ণ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল E_1, E_2, E_3 হ'ল ক্ৰমে A, B আৰু C মেচিনে নিৰ্মাণ কৰা বোল্টৰ ঘটনা। ইয়াত আমি সম্ভাৱিতাক পূৰ্ণ উপপাদ্য প্ৰয়োগ কৰিব লাগিব।

B আৰু C-এ সমান সংখ্যক বোল্ট নিৰ্মাণ কৰে। A-ই B-ৰ দুগুণ বোল্ট নিৰ্মাণ কৰে।

$$\therefore\ P(E_1)=50\%=\frac{50}{100}=0.50$$

$$P(E_2)=25\%=\frac{25}{100}=0.25$$

$$P(E_3)=25\%=\frac{25}{100}=0.25$$

ধৰা হ'ল D হ'ল ত্রুটিপূর্ণ বোল্টটো তুলি অনা ঘটনা

$$P(D \mid E_1) = \frac{2}{100} = 0.02$$

$$P(D \mid E_2) = \frac{2}{100} = 0.02$$

$$P(D \mid E_3) = \frac{4}{100} = 0.04$$

সম্ভাৱিতাৰ পূর্ণ উপাপাদ্যৰ পৰা আমি পাওঁ—

$$\begin{aligned} P(D) &= P(E_1)P(D \mid E_1) + P(E_2)P(D \mid E_2) + P(E_3)P(D \mid E_3) \\ &= 0.5 \times 0.02 + 0.25 \times 0.02 + 0.25 \times 0.04 \\ &= 0.0250 \end{aligned}$$

উদাহৰণ 5 : মোনা A-ত 2 টা বগা আৰু 3 টা ৰঙা বল আছে। মোনা B-ত 4 টা বগা আৰু 5 টা ৰঙা বল আছে। এখন মোনাৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা বল উলিওৱা হ'ল। বলটো ৰঙা বুলি গম পোৱা গ'ল। বলটো মোনা B-ৰ পৰা উলিওৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি গম পালো যে মোনাৰ পৰা ৰঙা বল এটা উলিওৱা হৈছে। আমি মোনাখন B হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰিব লাগে।

ধৰা হ'ল, E_1 = মোনা A বাছনি কৰা ঘটনা

$$\therefore \quad P(E_1) = \frac{1}{2}$$

ধৰা হ'ল, E_2 = মোনা B বাছনি কৰা ঘটনা

$$\therefore \quad P(E_2) = \frac{1}{2}$$

ধৰা হ'ল, D = ৰঙা বল বাচনি কৰা ঘটনা

এতিয়া, মোনা A -ৰ পৰা ৰঙা বলটো বাছনি কৰাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল—

$$P(D \mid E_1) = \frac{3}{5}$$

একেদৰে, মোনা B -ৰ পৰা ৰঙা বলটো বাছনি কৰাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল

$$P(D \mid E_2) = \frac{5}{9}$$

আমি ৰঙা বলটো মোনা B-ৰ পৰা উলিওৱা হৈছে নেকি সেয়া পৰীক্ষা কৰিব লাগে। অর্থাৎ,

$P(E_2 \mid D)$

বেইজৰ উপপাদ্যৰ পৰা—

$$P(E_2 \mid D) = \frac{P(E_2)P(D \mid E_2)}{P(E_1)P(D \mid E_1) + P(E_2)P(D \mid E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{9}}$$

$$= \frac{\frac{5}{18}}{\frac{3}{10}+\frac{5}{18}}$$

$$= \frac{\frac{5}{18}}{\frac{27+25}{90}}$$

$$= \frac{\frac{5}{18}}{\frac{52}{90}}$$

$$= \frac{25}{52}$$

উদাহৱণ 6 : বোল্ট নির্মাণকাৰী কাৰখানা এটাত মেচিন A, B, C -এ মুঠ বোল্টৰ ক্রমে 25%, 35% আৰু 40% নির্মাণ কৰে। মুঠ নির্মাণ সামগ্রীৰ মাজৰে ক্রমে 5%, 4% আৰু 2% হ'ল ত্রুটিপূর্ণ বোল্ট। যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা বোল্ট তুলি লোৱাৰ পাছত দেখা গ'ল বোল্টটো ত্রুটিপূর্ণ। বোল্টটো মেচিন B-এ নির্মাণ কৰাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল, E_1, E_2, E_3 হ'ল ক্রমে A, B আৰু C মেচিনে বোল্ট নির্মাণ কৰা ঘটনা।

$$P(E_1) = 25\% = \frac{25}{100} = 0.25$$

$$P(E_2) = 35\% = \frac{35}{100} = 0.35$$

$$P(E_3) = 40\% = \frac{40}{100} = 0.40$$

ধৰা হ'ল, D হ'ল ত্রুটিপূর্ণ বোল্ট এটা তুলি লোৱা ঘটনা

$$\therefore\ P(D \mid E_1) = \frac{5}{100} = 0.05$$ ['A' মেচিনৰ ত্রুটিপূর্ণ বোল্ট]

$$P(D \mid E_2) = \frac{4}{100} = 0.04$$ ['B' মেচিনৰ ত্রুটিপূর্ণ বোল্ট]

$$P(D \mid E_3) = \frac{2}{100} = 0.02$$ ['C' মেচিনৰ ত্রুটিপূর্ণ বোল্ট]

এতিয়া, আমি উলিয়াব লাগে ত্রুটিপূর্ণ বোল্টটো মেচিন B-ৰ দ্বাৰা নির্মাণ কৰাৰ সম্ভাৱিতা, অর্থাৎ $P(E_2 \mid D)$।

বেইজৰ উপপাদ্য মতে,

$$P(E_2 \mid D) = \frac{P(E_2)P(D \mid E_2)}{P(E_1)P(D \mid E_1) + P(E_2)P(D \mid E_2) + P(E_3)P(D \mid E_3)}$$

$$= \frac{0.35 \times 0.04}{0.25 \times 0.05 + 0.35 \times 0.04 + 0.4 \times 0.02}$$



অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

প্রশ্ন নং ১ঃ ধৰা হ'ল এটা কাৰখানাত 2 টা মেচিন আছে. লিখিত তথ্যৰ পৰা জনা গ'ল যে মেচিন I-এ 20% আৰু মেচিন II-ই 80% সামগ্রী উৎপাদন কৰে। লগতে ইয়াকো গম পোৱা গ'ল যে মেচিন I-এ উৎপাদন কৰা 6% আৰু মেচিন II-ই উৎপাদন কৰা 1% সামগ্রী ত্রুটিপূর্ণ হয়। এনে এবিধ ত্রুটিপূর্ণ সামগ্রী যাদৃচ্ছিকভাৱে তুলি অনা হ'ল। সামগ্রীবিধ মেচিন I-এ উৎপাদন কৰাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা কাৰখানাত থকা 3 টা মেচিন ক্রমে A, B আৰু C -এ মুঠ সামগ্রীৰ ক্রমে 60%, 30% আৰু10% উৎপাদন কৰে। মেচিনকেইটাৰ নিজস্ব উৎপাদনৰ পৰিমাণ শতকৰা হিচাপত ক্রমে 2%, 3% আৰু 4% । এবিধ সামগ্রী যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰাৰ পাছত ত্রুটিপূর্ণ পোৱা গ'ল। সামগ্রীবিধ মেচিন C-ৰ উৎপাদন হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান সেয়া নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ X মোনাখনত 2 টা বগা আৰু 3 টা ৰঙা বল আছে। Y মোনাখনত 4টা বগা আৰু 5 টা ৰঙা বল আছে। যিকোনো এখন মোনাৰ পৰা যিকোনো এটা বল উলিয়াই অনা হ'ল। বলটো ৰঙা। বলটো Y মোনাখনৰ পৰা উলিওৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান সেয়া নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ A কলহত 3 টা ৰঙা আৰু 4 টা বগা বল আছে। B কলহত 4 টা ৰঙা আৰু 5 টা বগা বল আছে। যিকোনো এটা কলহৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে এটা বল উলিওৱা হ'ল। বলটো ৰঙা। বলটো B কলহৰ পৰা উলিওৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান সেয়া নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ এটা কাৰখানাৰ 3 টা উৎপাদন কেন্দ্র আছে। এই তিনিটা উৎপাদন I, II আৰু III-এ যথাক্রমে 20%, 30% আৰু 50% উৎপাদন কেন্দ্র কৰে। ত্রুটিপূর্ণ

সামগ্রী উৎপাদনৰ শতকৰা হাৰ হ'ল ক্রমে 15, 10 আৰু 2। এবিধ সামগ্রী যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছি লোৱাৰ পাছত ত্রুটিপূর্ণ পোৱা গ'ল। সামগ্রীবিধ উৎপাদন পন্থা I-ৰ দ্বাৰা উৎপাদিত হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?



১১.৭ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

- যিকোনো দুটা ঘটনা E আৰু F-ৰ বাবে, **E** ঘটনা উদ্ভৱ হোৱাৰ সম্ভাৱিতাকে (য'ত F ইতিমধ্যে ঘটি গৈছে) চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতা, E-ৰ P(E|F) বোলে। ইয়াৰ গাণিতিক প্রকাশ হ'ল $P(E \mid F)=\frac{P(E \cap F)}{P(F)}$.
- যিকোনো দুটা ঘটনাৰ মাজৰে এটা উদ্ভৱ হোৱা অথবা নোহোৱা কার্যই যদি আনটোৰ ওপৰত কোনো প্রভাৱ নেপেলায় তেন্তে তাক **স্বতন্ত্র ঘটনা** বোলে। পৰস্পৰে পৰস্পৰক প্রভাৱিত কৰা ঘটনা **আশ্রিত ঘটনা** বোলে।
- যদি E আৰু F ঘটনা দুটা স্বতন্ত্র, $P(E)>0, P(F)>0$ হয়, তেন্তে $P(E \cap F)=P(E)P(F)$ আৰু $P(E \mid F)=P(E), P(F \mid E)=P(F)$.



১১.৮ অধিক জানিবলৈ

১) Rao. G. Shanker, Probability and Statistics, Universitis Press.

২) Statistics, R.S.N. Pillai and Bagavathi S. Chand and Company Ltd. New Delhi-110055.



১১.৯ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ১

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল

E = দুয়োটা মুদ্রা 'হেড' হোৱা ঘটনা

F = অতি কমেও এটা মুদ্রা 'হেড' হোৱা ঘটনা

এতিয়া, $P(E)=\frac{3}{4}, P(E\cap F)=\frac{1}{4}, P(F)=\frac{1}{4}$

$$\therefore P(E\mid F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}.$$

চর্তসাপেক্ষ সম্ভাৱিতাৰ সংজ্ঞা ব্যৱহাৰ কৰি আমি পাম যে—

$$P(E\cap F)=P(F)P(E\mid F)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}.$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ i = 1; 2; 3, ধৰা হ'ল E_i = i-তম বলটো ৰঙা হোৱাৰ ঘটনা

এতিয়া, $P(E_1\cap E_2\cap E_3)=P(E_1)P(E_2\mid E_1)P(E_3\mid E_1E_2)$

$$=\frac{8}{12}.\frac{7}{11}.\frac{6}{10}=\frac{14}{55}.$$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ এটা ডাই ঘূৰি থকাৰ সময় প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি S হ'ল = $\{1,2,3,4,5,6\}$

ধৰা হ'ল, E = অযুগ্ম সংখ্যা ওলোৱা ঘটনা $=\{1,3,5\}$

F = মৌলিক সংখ্যা ওলোৱা ঘটনা $=\{2,3,5\}$

Then, $E\cap F=\{3,5\}$

$\therefore P(E)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}, P(F)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ আৰু $P(E\cap F)=\frac{1}{3}.$

P (অযুগ্ম সংখ্যা এটা পোৱাৰ সময়তে মৌলিক সংখ্যা)

= P (মৌলিক সংখ্যা | অযুগ্ম সংখ্যা)

$=P(E\mid F)$

$=P(E\mid F)$

$=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$

$=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ইয়াত প্রদত্ত প্রতিদর্শ সমষ্টি S হ'ল $=\{(b,b),(b,g),(g,b),(g,g)\}$

ধৰা হ'ল, E = দুয়োটা সন্তান ছোৱালী হোৱাৰ ঘটনা

F = অতি কমেও এজনী ছোৱালী সন্তান থকা ঘটনা

এতিয়া, $E=\{(g,g)\}$ আৰু $F=\{(b,g),(g,b),(g,g)\}$

$E\cap F=\{(g,g)\}$

$\therefore P(E)=\frac{3}{4}, P(E\cap F)=\frac{1}{4}$

$\therefore$ প্রয়োজনীয় সম্ভাৱিতা হ'ল $P(E\mid F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}$

$$=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}$$

অগ্রগতি নিৰীক্ষণ ২

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল, E_1, E_2 হ'ল যথাক্রমে মেচিন I আৰু II-ৰ দ্বাৰা উৎপাদিত সামগ্রীৰ মাজৰ পৰা সামগ্রী তুলি লোৱা ঘটনা।

ধৰা হ'ল A = ত্রুটিপূর্ণ সামগ্রী তুলি লোৱা ঘটনা

আমি পালো, $P(E_1)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}, P(E_2)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$

লগতে আমি পালো, $P(A\mid E_1)=\frac{6}{100}, P(A\mid E_2)=\frac{1}{100}$

বেইজৰ উপপাদ্য অনুসৰি নির্ণিত সম্ভাৱিতা হ'ল—

$$P(E_1\mid A)=\frac{P(E_1)P(A\mid E_1)}{P(E_1)P(A\mid E_1)+P(E_2)P(A\mid E_2)}$$

$$=\frac{\frac{1}{5}.\frac{6}{100}}{\frac{1}{5}.\frac{6}{100}+\frac{4}{5}.\frac{1}{100}}=\frac{6}{6+4}=0.6.$$

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল E, F, G হ'ল যথাক্রমে মেচিন A, B, C-এ উৎপাদন কৰা সামগ্রী বাছনি কৰাৰ ঘটনা।

এতিয়া আমি পাম, $P(E)=\frac{60}{100}=0.6, P(F)=\frac{30}{100}=0.3, P(G)=\frac{10}{100}=0.1$

ধৰা হ'ল, D = যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা কিন্তু ত্রুটিপূর্ণ সামগ্রী পোৱা ঘটনা।

এতিয়া,

$$P(D \mid E) = \frac{2}{100} = 0.02, P(D \mid F) = \frac{3}{100} = 0.03, P(D \mid G) = \frac{4}{100} = 0.04$$

বেইজৰ উপপাদ্য প্রয়োগ কৰি আমি পাম,

$$P(G \mid D) = \frac{P(G)P(D \mid G)}{P(E)P(D \mid E) + P(F)P(D \mid F) + P(G)P(D \mid G)}$$

$$= \frac{(0.1)(0.04)}{(0.6)(0.02) + (0.3)(0.03) + (0.1)(0.04)}$$

$$= \frac{0.004}{0.012 + 0.009 + 0.004}$$

$$= \frac{0.004}{0.025}$$

$$= 0.16 \cdot$$

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল

E_1 = X মোনাৰ পৰা বল উলিওৱা ঘটনা

E_2 : = Y মোনাৰ পৰা বল উলিওৱা ঘটনা

A = বলটো ৰঙা হোৱা ঘটনা

ইয়াত $P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$

লগতে, $P(A \mid E_1)$ = P (X মোনাৰ পৰা ৰঙা বল উলিওৱা ঘটনা)

$$= \frac{3}{5}$$

$P(A \mid E_2)$ = P (Y মোনাৰ পৰা ৰঙা বল উলিওৱা ঘটনা)

$$= \frac{5}{9}$$

বেইজৰ উপপাদ্য অনুসৰি আমি পাম,

$$P(E_2 \mid A) = \frac{P(E_1)P(A \mid E_1)}{P(E_1)P(A \mid E_1) + P(E_2)P(A \mid E_2)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{5}{9}}{\frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{5}{9}} = \frac{25}{52} \cdot$$

৪ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ নির্ণিত সম্ভাৱিতা $=\frac{28}{45}$ [বেইজৰ উপপাদ্য অনুসৰি]

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ বেইজৰ উপপাদ্য অনুসৰি,

$$P(E_1 \mid A)=\frac{P(E_1)P(A \mid E_1)}{P(E_1)P(A \mid E_1)+P(E_2)P(A \mid E_2)}$$

$$=\frac{0.2\times 0.15}{0.2\times 0.15+0.3\times 0.10+0.5\times 0.02}$$

$$=0.069\cdot$$



১১.১০ আৰ্হি প্রশ্ন

প্রশ্ন ১ঃ E আৰু F এনে দুটা ঘটনা য'ত $P(E)=\frac{1}{2}, P(F)=\frac{1}{3}$ আৰু $P(E\cap F)=\frac{1}{4}$। তলত দিয়া সম্ভাৱিতাবোৰ নির্ণয় কৰক। (i) $P(E \mid F)$,(ii) $P(E\cup F)$ আৰু (iii) $P(E' \mid F')$।

প্রশ্ন ২ঃ তিনিগৰাকী ব্যক্তি, যথাক্রমে A, B আৰু C -এ কাৰখানাত যথাক্রমে $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{6}$ অনুপাতত কেঁচামাল যোগান ধৰে। তেওঁলোকে যোগান ধৰা কেঁচামালৰ ক্রমে $5\%,6\%,8\%$ ত্রুটিপূর্ণ। মুঠ যোগানৰ পৰা যাদৃচ্ছিকভাৱে এবিধ কেঁচামাল বাছি লোৱা হ'ল। কেঁচামালবিধ A নাইবা B নাইবা C -এ যোগান ধৰাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন ৩ঃ দেখাত একে তিনিটা মুদ্রাৰ মাজৰে এটাৰ দুয়োখন পিঠি একে বাকী মুদ্রা দুটা টছ কৰিলে 'হেড' ওলোৱাৰ সম্ভাৱিতা হ'ল ক্রমে $\frac{1}{3}$ আৰু $\frac{2}{3}$। যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছি লোৱা মুদ্রা এটা টছ কৰাৰ পাছত 'হেড' ওলাল। মুদ্রাটোৰ দুয়োটা পিঠি একে হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৪ঃ অসমৰ এখন কলেজত কামৰূপ, নগাঁও আৰু যোৰহাট জিলাৰ পৰা অহা ছাত্রৰ সংখ্যা হ'ল যথাক্রমে 50%, 30% আৰু 20%। এই ছাত্রবোৰৰ মাজৰে জিলা ক্রম অনুসৰি 80%, 60% আৰু 40% ছাত্রই ধূতি পিন্ধে। ছাত্রবোৰৰ মাজৰ পৰা এজন ছাত্রক যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা হ'ল। তেওঁ ধূতি পিন্ধে। ছাত্রজন কামৰূপ জিলাৰ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন ৫ঃ X, Y আৰু Z ৰে'লগাড়ী তিনিখনে মুঠ যাত্রীৰ যথাক্রমে 25%, 35% আৰু 40%

অনা-নিয়া কৰে। অহা-যোৱা কৰা যাত্রীবোৰৰ ভিতৰত ৰে'লগাড়ীৰ ক্রম অনুসৰি 5%, 4% আৰু 3% মহিলা যাত্রী আছে। আটাইকেইখন ৰে'লগাড়ীৰ সর্বমুঠ যাত্রীৰ মাজৰ পৰা এগৰাকী যাত্রীক যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা হ'ল। যাত্রীগৰাকী মহিলা। প্রমাণ কৰা যে তেওঁ X নাইবা Y নাইবা Z ৰে'লগাড়ীৰ যাত্রী হোৱাৰ সম্ভাৱিতা যথাক্রমে $\frac{25}{69}, \frac{28}{69}$ আৰু $\frac{16}{69}$।

প্রশ্ন ৬ঃ ল'ৰা-ছোৱালীৰ তিনিটা দল আছে। প্রথম দলত 3 জনী ছোৱালী আৰু এটা ল'ৰা আছে। দ্বিতীয় দলত 2 জনী ছোৱালী আৰু 2 টা ল'ৰা আছে। তৃতীয় দলত এজনী ছোৱালী আৰু 3 টা ল'ৰা আছে। প্রতিটো দলৰ পৰা এজনক যাদৃচ্ছিকভাৱে বাছনি কৰা হ'ল। এজনী ছোৱালী আৰু 2 টা ল'ৰা বাছনি কৰাৰ সম্ভাৱিতা কিমান নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৭ঃ এখন মোনাত 5 টা বগা আৰু 7 টা ৰঙা বল আছে। যাদৃচ্ছিকভাৱে একেৰাহে দুবাৰ বল উলিওৱা হ'ল। এটা বল বগা আৰু এটা বল ৰঙা হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৮ঃ এখন দৌৰ প্রতিযোগিতাত দুগৰাকী দৌৰবিদৰ বিজয়ৰ সম্ভাৱনা ক্রমে $\frac{1}{3}$ আৰু $\frac{1}{5}$। দুয়োগৰাকীয়েই বিজয়ী নোহোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

প্রশ্ন ৯ঃ ভালদৰে মিহলাই লোৱা 52 খিলা তাচপাতৰ ডেক এটাৰ পৰা তলত দিয়া ধৰণে তাচপাত টানি উলিওৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক—

(i) এখনৰঙা কার্ড অথবা এখন এছ অথবা দুয়োটা।

(ii) এখন ডায়মণ্ড কার্ড অথবা এখন এছ অথবা দুয়োটা।

(iii) কিং অব ডায়মণ্ড কার্ড অথবা কিং অব হার্ট কার্ড অথবা দুয়োটা।

প্রশ্ন ১০ঃ 4 জন মানুহে 52 খিলা তাচপাত খেলি আছে। মাত্র এজনে চাৱিওখিলা কিং কার্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

*** ***** ***

অধ্যায় ১২ ঃ যাদৃচ্ছিক চলক আৰু সম্ভাৱিতা বণ্টন (RANDOM VARIABLES AND PROBABILITY DISTRIBUTION)

অধ্যায় গাঁথনি

১২.১ উদ্দেশ্য

১২.২ পৰিচয়

১২.৩ যাদৃচ্ছিক চলক

  ১২.৩.১ বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক

  ১২.৩.২ অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক

১২.৪ যাদৃচ্ছিক চলকৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন

  ১২.৪.১ যাদৃচ্ছিক চলকৰ মাধ্য আৰু প্রসৰণ

১২.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১২.৬ অধিক জানিবলৈ

১২.৭ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১২.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

১২.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- যাদৃচ্ছিক চলক সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- যাদৃচ্ছিক চলকৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

১২.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

তিনিটা মুদ্রা নিক্ষেপ কৰা হ'ল। কিমানটা মুণ্ড পৰিল, — সেয়া হয়তো কোনোবাই জানিব বিচাৰিব পাৰে। সেইদৰে দুটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰা হ'ল। লুডুগুটি দুটাত ওলোৱা বিন্দুকেইটাৰ যোগফলনো কি সেয়া কোনোবাই জানিব বিচাৰিব পাৰে। প্রত্যেক ক্ষেত্রতেই ফলৰ (outcome) লগত এটা বাস্তৱ সংখ্যা জড়িত হৈ আছে। যি নিয়মে প্রত্যেক ফলৰ লগত এটা বাস্তৱ সংখ্যা সংযোগ কৰে। তাক যাদৃচ্ছিক চলক (random variable) বোলে।

১০.৩ যাদৃচ্ছিক চলক (RANDOM VARIABLES)

ধৰা হ'ল এটা প্ৰদত্ত যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ (random experiment) লগত জড়িত S এটা প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টি (sample space) অৰ্থাৎ S এটা ফলৰ সংগ্ৰহ।

ধৰা হ'ল $\omega \in S$ অৰ্থাৎ ω এটা ফল।

যি নিয়ম X অৰ অধীনত S অৰ **প্ৰতিটো** মৌল ωএটা অদ্বিতীয় (unique) বাস্তৱ সংখ্যা X(ω) ৰ লগত যুক্ত হয় তাক যাদৃচ্ছিক চলক বোলে। দেখা গ'ল যে যাদৃচ্ছিক চলক এটা বাস্তৱ-মানবিশিষ্ট ফলন X, যিয়ে S অৰ প্ৰত্যেক ω কে এটা অদ্বিতীয় বাস্তৱ সংখ্যা X(ω)ৰ লগত যুক্ত কৰে।

তিনিটা মুদ্ৰা নিক্ষেপ কৰা হ'ল।

ধৰা হ'ল এই যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ লগত জড়িত প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টিটো S। গতিকে

S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

তলৰ ফলনটো লোৱা হ'ল

X : $S \to IR$, য'ত IR হ'ল বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংহতি আৰু

X(w) = ω ত থকা মুণ্ডৰ সংখ্যা, $\omega \in S$

$\therefore$ X (HHH) = 3, X(HHT) = 2, X(HTH) = 2, X(THH) = 2

X(HTT) = 1, X(THT) = 1, X(TTH) = 1, X(TTT) = 0

ইয়াত X এটা যাদৃচ্ছিক চলক।

স্পষ্টতঃ পৰিসৰ (X) = {0, 1, 2, 3}

১২.৩.১ বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক (Discrete Random Variable)

যি যাদৃচ্ছিক চলকে সসীম সংখ্যক মান বা গণনীয়ভাৱে অসীম সংখ্যক মান লয়, তাক বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক (discrete rancom variable) বোলে।

উপৰিউক্ত উদাহৰণটো বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলকৰ উদাহৰণ। এই ক্ষেত্ৰত যাদৃচ্ছিক চলক X এ চাৰিটা মান লয়, যথা 0, 1, 2, 3।

১২.৩.২ অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক (Continuours Random Variable)

যি যাদৃচ্ছিক চলকে দুটা প্ৰদত্ত সীমাৰ মাজত যিকোনো মান লয়, তেনে যাদৃচ্ছিক চলকক অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক (continuous random variable) বুলি কোৱা হয়।

ধৰা হ'ল ইলেক্‌ট্ৰিক বাল্‌বৰ সৰ্বোচ্চ আয়ুস 2000 ঘণ্টা। অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক হ'ল $X(w) = \{x : 0 \le x \le 2000\}$

১২.৪ যাদৃচ্ছিক চলকৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন (PROBABILITY DISTRIBUTION OF RANDOM VARIABLES)

যদি এটা যাদৃচ্ছিক চলকৰ মানবোৰ অনুৰূপ সম্ভাৱতাৰ সৈতে দিয়া থাকে, তেনেহ'লে এই বর্ণনাটোক যাদৃচ্ছিক চলকটোৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন (probabity distribution) বুলি কোৱা হয়।

ধৰা হ'ল এট যাদৃচ্ছিক চলক X অৰ মানবোৰ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ আৰু অনুৰূপ সম্ভাৱিতাবোৰ ক্ৰমে $p_1, p_2, \ldots, p_n$। তেনেহ'লে X অৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন এনেধৰণৰ।

X	x_1	x_2	–	– – – –	x_n
P(x)	p_1	p_2	–	– – – – – –	p_n

টোকা ঃ ওপৰৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন তেতিয়াহে সংজ্ঞাৱদ্ধ হ'ব যেতিয়া

(a) প্ৰত্যেক $p_i \geq 0$

(b) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

উদাহৰণ 1: তিনিটা মুদ্ৰা একেলগে নিক্ষেপ কৰা হ'ল। ধৰা হ'ল X এটা যাদৃচ্ছিক চলক যাতে

X(w) = w ত থকা মুণ্ডৰ সংখ্যা।

X অৰ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো লিখক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টিটো S। গতিকে

S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

এতিয়া n(S) = 8

ইয়াত X = তিনিটা মুদ্ৰা নিক্ষেপ কৰাত পোৱা মুণ্ডৰ সংখ্যা

যিহেতু মুণ্ডৰ সংখ্যা 0 বা 1 বা 2 বা 3 হ'ব পাৰে, গতিকে X অৰ সম্ভৱপৰ মানবোৰ হ'ল 0, 1, 2, 3।

$\therefore$ P(X = 0) = P (এটাও মুণ্ড নাই)

$= P(TTT) = \frac{1}{8}$

P(X=1) = P (এটা মুণ্ড পোৱা যাব)

$= P(HTT \text{ বা } THT \text{ বা } TTH) = \frac{3}{8}$

P(X=2)= P (দুটা মুণ্ড পোৱা যাব)

$= P(HHT \text{ বা } HTH \text{ বা } THH\} = \frac{3}{8}$

P(X=3) = P (তিনিটা মুণ্ড পোৱা যাব)

$= P(HHH) = \frac{1}{8}$

∴ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

টোকা ঃ ইয়াত প্ৰত্যেক $P_i > 0$

আকৌ $P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$

উদাহৰণ 2ঃ এটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰা হ'ল। যাদৃচ্ছিক চলক X অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে

$$X = \begin{cases} 1, \text{যদি ফলটো এটা যুগ্ম সংখ্যা হয়} \\ 0, \text{যদি ফলটো এটা অযুগ্ম সংখ্যা হয়} \end{cases}$$

X অৰ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো লিখক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টিটো S।

∴ S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

ইয়াত X এ দুটা মান 0, 1 লয়।

P(X = 0) = P (এটা অযুগ্ম সংখ্যা পোৱা যাব)

$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

P(X = 1) = P (এটা যুগ্ম সংখ্যা পোৱা যাব)

$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

∴ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1
P(X)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$



অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

প্ৰশ্ন নং ১ঃ এটা বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলকৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্ৰশ্ন নং ২ঃ এটা অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলকৰ উদাহৰণ দিয়ক।

প্ৰশ্ন নং ৩ঃ দুটা মুদ্ৰা একেলগে নিক্ষেপ কৰা হ'ল। যাদৃচ্ছিক চলক X অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া আছে।

X(w) = w ত থকা মুণ্ডৰ সংখ্যা

X অৰ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো লিখক।

প্ৰশ্ন নং ৪ঃ এটা লুডুগুটি দুবাৰ নিক্ষেপ কৰা হয়। 'নিক্ষেপণ যুগ্ম সংখ্যা পোৱাটো সাফল্য বুলি বিবেচনা কৰা হয়।

প্ৰশ্ন নং ৫ঃ এটা লুডুগুটি দুবাৰ নিক্ষেপ কৰা হ'ল। 'নিক্ষেপত 4 অতকৈ ডাঙৰ সংখ্যা পোৱাটো' সাফল্য বুলি বিবেচনা কৰা হয়। সাফল্যৰ সংখ্যা সম্ভাৱিতা বণ্টন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৬ঃ ভালদৰে মিহলোৱা 52 খিলা তাচপাতৰ এটা জাপৰ পৰা দুখিলা একেলগে টানি অনা হ'ল। ৰাণীৰ সংখ্যাৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৭ঃ ভালদৰে মিহলোৱা 52 খিলা তাচপাতৰ এটা জাপৰ পৰা নসলোৱাকৈ দুখিলা টনা হ'ল। ফেইচ কার্ডৰ (face cards) সংখ্যাৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন নং ৮ঃ এটা কাৰখানাত প্ৰস্তুত কৰা বাল্ডৰ 20% খুঁট থকা যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা 4 টা বাল্‌বৰ এটা প্ৰতিদৰ্শত খুঁত থকা বাল্‌বৰ সংখ্যাৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন নিৰ্ণয় কৰক।

১২.৪.১ যাদৃচ্ছিক চলকৰ মাধ্য আৰু প্ৰসৰণ (Mean and Variance of Random Variables)

ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক চলক X অৰ মানবোৰ $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, আৰু অনুৰূপ সম্ভাৱিতাবোৰ ক্ৰমে $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$।

প্ৰত্যেক $p_i \geq 0$, আৰু $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

X অৰ মাধ্যক μ ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \because \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

X অৰ মাধ্যক X অৰ প্ৰত্যাশিত মান (expected value) বুলিও কোৱা হয়। ইয়াক E(X) এৰে বুজোৱা হয়। গতিকে,

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

X অৰ প্ৰসৰণক σ^2 এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$\sigma^2 = \Sigma x_i^2 p_i - \mu^2$$

X অৰ প্ৰামাণিক বিচলনক σ ৰে বুজোৱা হয় আৰু ই হ'ল প্ৰসৰণৰ ধনাত্মক বৰ্গমূল।

উদাহৰণ 3ঃ অধোলিখিত সম্ভাৱিতা বণ্টনৰ মাধ্য আৰু প্ৰামাণিক বিচলন নিৰ্ণয় কৰক।

X	1	3	5
P(X)	0.3	0.4	0.3

সমাধান ঃ মাধ্য μ = 1 x 0.3 + 2 x 0.4 + 5 x 0.3

= 0.3 + 1.2 + 1.5

$SD = \sigma = \sqrt{\Sigma x_i^2 p_i - \mu^2}$

এতিয়া, $\Sigma x_i^2 p_i = 1\times 0.3 + 9\times 0.4 + 25\times 0.3$

= 0.3 + 3.6 + 7.5

= 11.4

$\therefore\ SD = \sigma = \sqrt{11.4 - 9} = \sqrt{2.4}$

উদাহৰণ 4ঃ এটা যাদৃচ্ছিক চলক X অৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন এনেধৰণৰ

X	0	1	2	3
P(X)	a	3a	3a	a

a ৰ মান নিৰ্ণয় কৰক। লগতে মাধ্য নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে $\Sigma p_i = 1$

$\therefore$ a + 3a + 3a + a = 1

বা, 8a = 1

$\therefore\ a = \frac{1}{8}$

দ্বিতীয় খণ্ড ঃ মাধ্য $\mu = \Sigma x_i p_i$

$$= 0\times\frac{1}{8} + 1\times\frac{3}{8} + 2\times\frac{3}{8} + 3\times\frac{1}{8}$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

উদাহৰণ 5ঃ এটা যাদৃচ্ছিক চলক X অৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন এনেধৰণৰ

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

X অৰ মাধ্য নিৰ্ণয় কৰক। লগতে (i) P (X > 3), (ii) P(0 < X < 3)

সমাধান ঃ মাধ্য $\mu = 0\times\frac{1}{16} + 1\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{3}{8} + 3\times\frac{1}{4} + 4\times\frac{1}{16}$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 2$$

(i) $P(X > 3) = P(X = 4) = \frac{1}{16}$

(ii) $P(0 < X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2)$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2+3}{8} = \frac{5}{8}$$



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

প্রশ্ন নং ১ঃ এটা যাদৃচ্ছিক চলক X অৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন এনেধৰণৰ

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

মাধ্য আৰু প্রামাণিক বিচলন নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ঃ ভালদৰে মিহলোৱা 52 খিলা তাচপাতৰ এটা জাপৰ পৰা দুখিলা একেলগে টনা হ'ল। টেক্কাৰ (aces) সংখ্যাৰ মাধ্য আৰু প্রামাণিক বিচলন নির্ণয় কৰক।



১২.৫ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- ধৰা হ'ল এটা প্রদত্ত যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ লগত জড়িত S এটা প্রতিদর্শ সমষ্টি। যি নিয়ম X অৰ অধীনত S অৰ প্রতিটো মৌল ω এটা অদ্বিতীয় বাস্তৱ সংখ্যা X(ω)ৰ লগত যুক্ত হয় তাক যাদৃচ্ছিক চলক বোলে।
- যি যাদৃচ্ছিক চলকে সসীম সংখ্যক মান বা গণনীয়ভাৱে অসীম সংখ্যক মান লয়, তাক বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক বোলে।
- যি যাদৃচ্ছিক চলকে দুটা প্রদত্ত সীমাৰ মাজত যিকোনো মান লয়, তেনে যাদৃচ্ছিক চলকক অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক বুলি কোৱা হয়।
- যদি এটা যাদৃচ্ছিক চলকৰ মানবোৰ অনুৰূপ সম্ভাৱিতাৰ সৈতে দিয়া তাকে, তেনেহ'লে এই বর্ণনাটোক যাদৃচ্ছিক চলকটোৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন বুলি কোৱা হয়।
- ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক চলক X অৰ মানবোৰ $x_1, x_2, \ldots, x_n$, আৰু অনুৰূপবোৰ সম্ভাৱিতাবোৰ ক্রমে $p_1, p_2, \ldots, p_n$।

  X অৰ মাধ্যক μ ৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়। $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$

  X অৰ প্রসৰণক σ^2 এৰে বুজোৱা হয় আৰু ইয়াৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়

$\sigma^2 = \Sigma x_i^2 p_i - \mu^2$

X অৰ প্ৰামাণিক বিচলনক σ ৰে বুজোৱা হয় আৰু ই হ'ল প্ৰসৰণৰ ধনাত্মক বৰ্গমূল।



১২.৬ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

1) Statistical Methods by N.G. Das, McGraw Hill Education (India) Private Ltd. 2009
2) Probability and Statistics by G.Shanker Rao, University Press (India) private Ltd. 2011
3) Introduction to probability and Statistics by Seymour Lipschutz, John J.Schiller, Tata McGraw Hill Education private Ltd. 2005
4) Probability, Random Process, Queueing theory and Statistics by Dr. S.Rajasekaran, Prof.A.Chandrasekaran & G.Kavitha, Dhanam Publications, Chennai-60042
5) Probability and Statistics by G.Balaji, G.Balaji Publishers, Chennai-33



১২.৭ অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

অগ্ৰগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলকৰ এটা উদাহৰণ ঃ

তিনিটা মুদ্ৰা একেলগে ভ্ৰক্ষেপ কৰা হ'ল। ধৰা হ'ল X এটা যাদৃচ্ছিক চলক যাতে X(w) = w ত থকা মুণ্ডৰ সংখ্যা।

এই ক্ষেত্ৰত যাদৃচ্ছিক চলক X এ চাৰিটা মান লয়, যথা, 0, 1, 2, 3। গতিকে এইটো এটা বিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক।

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলকৰ এটা উদাহৰণ ঃ

ধৰা হ'ল ইলেক্ট্ৰিক বাল্‌বৰ সৰ্বোচ্চ আয়ুস 2000 ঘণ্টা। অবিচ্ছিন্ন যাদৃচ্ছিক চলক হ'ল

$x(w) = \{x : 0 \le x \le 2000\}$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল প্ৰতিদৰ্শ সমষ্টিটো S।

$\therefore$ S = {HH, HT, TH, TT}

এতিয়া n(S) = 4

ইয়াত X = দুটা মুদ্রা নিক্ষেপ কৰোঁতে পোৱা মুণ্ডৰ সংখ্যা

যিহেতু মুণ্ডৰ সংখ্যা 0 বা 1 বা 2 হ'ব পাৰে, গতিকে X অৰ সম্ভাব্য মানবোৰ হ'ল 0, 1, 2।

$\therefore$ P(X = 0) = P (এটাও মুণ্ড পোৱা নাযায়)

$$= P(TT) = \frac{1}{4}$$

P (x = 1) = P (এটা মুণ্ড পোৱা যায়)

$$= P(HT \text{ বা } TH) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

P (x = 2) = P (দুটা মুণ্ড পোৱা যায়)

$$= P(HH) = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল যাদৃচ্ছিক চলকটো, অর্থাৎ সাফল্যৰ সংখ্যা X।

এটা লুডুগুটি দুবাৰ নিক্ষেপ কৰিলে সাফল্যৰ সংখ্যা 0 বা 1, বা 2 হ'ব পাৰে। গতিকে X এ 0, 1, 2 মান ল'ব পাৰে।

P(X = 0) = P (দুয়োটা নিক্ষেপতে সাফল্য নাই)

= P (প্ৰথম নিক্ষেণত সাফল্য নাই). P (দ্বিতীয় নিক্ষেপত সাফল্য নাই)

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

P(X = 1) = P (প্ৰথম নিক্ষেপত সাফল্য আৰু দ্বিতীয় নিক্ষেপত সাফল্য নাই) বা P (প্ৰথম নিক্ষেপত সাফল্য নাই আৰু দ্বিতীয় নিক্ষেপত সাফল্য)

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

P(X = 2) = P (দুয়োটা নিক্ষেপত সাফল্য)

=P(প্ৰথম নিক্ষেপত সাফল্য). P(দ্বিতীয় নিক্ষেপত সাফল্য)

$$= \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

$\therefore$ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2
P(X)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল যাদৃচ্ছিক চলকটো, অৰ্থাৎ সাফল্যৰ সংখ্যা X।

এটা লুডুগুটি দুবাৰ নিক্ষেপ কৰিলে, সাফল্যৰ সংখ্যা 0, বা 1, বা 2 হ'ব পাৰে।

∴ X এ 0, 1, 2 মান ল'ব পাৰে।

P(X = 0) = P (দুয়োটা নিক্ষেপতে সাফল্য নাই)

= P (প্ৰথম নিক্ষেপত সাফল্য নাই). P (দ্বিতীয় নিক্ষেপত সাফল্য নাই)

= P (4 অতকৈ সৰু বা সমান সংখ্যা পোৱা যায়). P (4 অতকৈ সৰু বা সমান সংখ্যা পোৱা যায়)

$$=\frac{4}{6}.\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$$

P(X = 1) = P (প্ৰথম নিক্ষেপত সাফল্য আৰু দ্বিতীয় নিক্ষেপত সাফল্য নাই) বা P (প্ৰথম নিক্ষেপত সাফল্য নাই আৰু দ্বিতীয় নিক্ষেপত সাফল্য)

= P (4 অতকৈ সৰু বা সমান এটা সংখ্যা পোৱা যায় আৰু 4 অতকৈ ডাঙৰ এটা সংখ্যা পোৱা যায়) বা P (4 তকৈ ডাঙৰ এটা সংখ্যা পোৱা যায় আৰু 4 অতকৈ সৰু বা সমান এটা সংখ্যা পোৱা যায়।

$$=\frac{4}{6}.\frac{2}{6}+\frac{2}{6}.\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$$

P(X = 2) = P (দুয়োটা নিক্ষেপত সাফল্য

= P(প্ৰথম নিক্ষেপত সাফল্য). P(দ্বিতীয় নিক্ষেপত সাফল্য)

$$=\frac{2}{6}.\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$$

∴ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2
P(X)	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$

৬ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ [তাচপাচৰ 52 খিলাৰ এটা জাপত 4খন ৰাণী (queen) কার্ড আছে।]

ধৰা হ'ল যাদৃচ্ছিক চলকটো, অৰ্থাৎ ৰাণীৰ সংখ্যা X।

দুখিলা তাচপাত টানিলে, ৰাণীৰ সংখ্যা 0, বা 1, বা 2 হ'ব পাৰে।

∴ X এ 0, 1, 2 মান ল'ব পাৰে।

P(X = 0) = P(এখনো ৰাণী পোৱা নাযায়।

= P(ৰাণী নোহোৱা 48খনৰ পৰা দুখন)

$$=\frac{{}^{48}C_2}{{}^{52}C_2}=\frac{188}{221}$$

P(X = 1) = P(এখন ৰাণী আৰু আনখন অ-ৰাণী কার্ড)

$$= \frac{{}^{4}C_1 . {}^{48}C_1}{{}^{52}C_2} = \frac{32}{221}$$

P(X = 2) = P(দুখন ৰাণী পোৱা যায়)

$$= \frac{{}^{4}C_2}{{}^{52}C_2} = \frac{1}{221}$$

∴ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2
P(X)	$\frac{188}{221}$	$\frac{32}{221}$	$\frac{1}{221}$

৭ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ [গোলাম (jack), ৰাণী (queen) আৰু ৰজা (king) ফেইচ কার্ড (face card) বোলা হয়। গোলাম 4 খন, ৰাণী 4 খন, ৰজা 4 খন। মুঠতে 12 খন ফেইচ কার্ড আছে।]

ধৰা হ'ল যাদৃচ্ছিক চলকটো X অর্থাৎ ফেইচ কার্ডৰ সংখ্যা X।

দুখিলা কার্ড টানিলে, ফেইচ কার্ডৰ সংখ্যা 0, বা 1, বা 2 হ'ব পাৰে।

∴ X এ 0, 1, 2 মান ল'ব পাৰে।

P(X = 0) = P (এখনো ফেইচ কার্ড পোৱা নাযায়)

= P (40 খন অনা-ফেইচ কার্ডৰ পৰা দুখন)

$$= \frac{{}^{40}C_2}{{}^{52}C_2} = \frac{10}{17}$$

P(X = 1) = P (এখন ফেইচ কার্ড আৰু আনখন অনা-ফেইচ কার্ড পোৱা যায়)

$$= \frac{{}^{12}C_1 . {}^{40}C_1}{{}^{52}C_2} = \frac{80}{221}$$

P(X = 2) = P (দুখন ফেইচ কার্ড পোৱা যায়)

$$= \frac{{}^{12}C_2}{{}^{52}C_2} = \frac{11}{221}$$

∴ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2
P(X)	$\frac{10}{17}$	$\frac{80}{221}$	$\frac{11}{221}$

৮ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল বাল্‌বৰ সংখ্যা 100.

∴ খুঁত থকা বাল্‌বৰ সংখ্যা 20, আৰু খুঁত নথকা বাল্‌বৰ সংখ্যা 80।

ধৰা হ'ল যাদৃচ্ছিক চলকটো অর্থাৎ খুঁত থকা বাল্‌বৰ সংখ্যা X।

যিকোনো 4 টা বাল্‌ব লোৱাত, খুঁত থকা বাল্‌বৰ সংখ্যা 0, বা 1, বা 2, বা 3, বা 4 হ'ব

পাৰে।

∴ X এ 0, 1, 2, 3, 4 মান ল'ব পাৰে।

P(X = 0) = P (এটাও খুঁত থকা বাল্‌ব নাই)

$$= \frac{^{80}C_4}{^{100}C_4}$$

P(X = 1) = P(এটা খুঁত থকা বাল্‌ব আৰু তিনিটা খুঁত নথকা বাল্‌ব লোৱা হ'ল)

$$= \frac{^{20}C_1 \times ^{80}C_3}{^{100}C_4}$$

P(X = 2) = P(দুটা খুঁত থকা বাল্ড আৰু দুটা খুঁত নথকা বাল্‌ব লোৱা হ'ল)

$$= \frac{^{20}C_2 \times ^{80}C_2}{^{100}C_4}$$

P(X = 3) = P(তিনিটা খুঁত থকা বাল্‌ব আৰু এটা খুঁত নথকা বাল্ড লোৱা হ'ল)

$$= \frac{^{20}C_3 \times ^{80}C_1}{^{100}C_4}$$

P(X = 4) = P(চাৰিটা খুঁত থকা বাল্‌ব লোৱা হ'ল)

$$= \frac{^{20}C_4}{^{100}C_4}$$

∴ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{^{80}C_4}{^{100}C_4}$	$\frac{^{20}C_1 \times ^{80}C_3}{^{100}C_4}$	$\frac{^{20}C_2 \times ^{80}C_2}{^{100}C_4}$	$\frac{^{20}C_3 \times ^{80}C_1}{^{100}C_4}$	$\frac{^{20}C_4}{^{100}C_4}$

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{10}$

মাধ্য $\mu = \Sigma x_i p_i$

$$= \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{1}{10} = \frac{5+6+1}{10}$$

$$= \frac{12}{10} = 1.2$$

$$SD = \sigma = \sqrt{\Sigma x_i^2 p_i - \mu^2}$$

এতিয়া $\Sigma x_i^2 p_i$

$$= 0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+4\times\frac{3}{10}+9\times\frac{1}{30}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{6}{5}+\frac{3}{10}=\frac{5+12+3}{10}=\frac{18}{10}=1.8$$

$$\therefore\ SD=\sigma=\sqrt{1.8-1.44}=\sqrt{0.36}=0.6$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ [52 খিলা তাচপাতৰ এটা জাপত 4 খন টেক্কা থাকে।]

ধৰা হ'ল যাদৃচ্ছিক চলকটো অর্থাৎ টেক্কাৰ সংখ্যা X।

দুখিলা তাচপাত টানি অনাত, টেক্কাৰ সংখ্যা 0, বা 1, বা 2 হ'ব পাৰে।

$\therefore$ X এ 0, 1, 2 মান ল'ব পাৰে।

P(X = 0) = P(এখনো টেক্কা নাই)

= P(টেক্কা নথকা 48 খনৰ পৰা দুখন ল'ব লাগে)

$$=\frac{{}^{48}C_2}{{}^{52}C_2}=\frac{188}{221}$$

P(X = 1) = P(এখন টেক্কা আৰু এখন টেক্কা নহয়)

$$=\frac{{}^{4}C_1\cdot{}^{48}C_1}{{}^{52}C_2}=\frac{32}{221}$$

P(X = 2) = P(দুয়োখনেই টেক্কা)

$$=\frac{{}^{4}C_2}{{}^{52}C_2}=\frac{1}{221}$$

$\therefore$ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2
P(X)	$\frac{188}{221}$	$\frac{32}{221}$	$\frac{1}{221}$

মাধ্য $\mu=\Sigma x_i p_i=0\times\frac{188}{221}+1\times\frac{32}{221}+2\times\frac{1}{221}$

$$=\frac{32}{221}+\frac{2}{221}=\frac{34}{221}=\frac{2}{13}$$

$$SD=\sigma=\sqrt{\Sigma x_i p_i-\mu^2}$$

এতিয়া $\Sigma x_i p_i$

$$=0\times\frac{188}{221}+1\times\frac{32}{221}+4\times\frac{1}{221}=\frac{32}{221}+\frac{4}{221}$$

$$= \frac{36}{221}$$

$$\therefore\ SD = \sigma = \sqrt{\frac{36}{221} - \frac{4}{169}} = \sqrt{\frac{400}{2873}}$$



১২.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ এটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰা হ'ল। X হ'ল নিক্ষেপ কৰা বিন্দুৰ সংখ্যা। সম্ভাৱিতা বণ্টনটো লিখক আৰু মাধ্য নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ২ঃ এটা মুদ্ৰা দুবাৰ নিক্ষেপ কৰা হ'ল। মুণ্ডৰ সংখ্যাৰ মাধ্য আৰু প্ৰামাণিক বিচলন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৩ঃ এটা মুদ্ৰা তিনিবাৰ নিক্ষেপ কৰা হ'ল। মুণ্ডৰ সংখ্যাৰ মাধ্য আৰু প্ৰামাণিক বিচলন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৪ঃ এটা লুডুগুটি দুবাৰ নিক্ষেপ কৰা হ'ল। 'নিক্ষেপত 3 তকৈ ডাঙৰ সংখ্যা পোৱা' সাফল্য বুলি বিবেচনা কৰা হয়। সাফল্যৰ সংখ্যাৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন নিৰ্ণয় কৰক। লগতে সাফল্যৰ সংখ্যাৰ মাধ্য আৰু প্ৰামাণিক বিচলন নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৫ঃ এযোৰ লুডুগুটিৰ চাৰিবাৰ নিক্ষেপত ডাবলেটৰ (doublet) সংখ্যাৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন নিৰ্ণয় কৰক।

[doublet শব্দৰ অৰ্থ এই সন্দৰ্ভত এনেধৰণৰ দুটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰাত যদি দুয়োটাতে একে সংখ্যক ফুট ওলায়, তাক doublet বুলি কয়।]

*** ***** ***

অধ্যায় ১৩ ঃ তাত্ত্বিক বণ্টন I (THEORETICAL DISTRIBUTION I)

অধ্যায় গাঁথনি

১৩.১ উদ্দেশ্য
১৩.২ পৰিচয়
১৩.৩ বাৰ্ণ'লি অভিপ্রয়োগ
১৩.৪ দ্বিপদ (আৰু বাৰ্ণ'লি) বণ্টন)
১৩.৫ পয়ছন বণ্টন
১৩.৬ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ
১৩.৭ অধিক জানিবলৈ
১৩.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান
১৩.৯ আৰ্হি প্রশ্ন

১৩.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- বাৰ্ণ'লি অভিপ্রয়োগ সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- দ্বিপদ (আৰু বাৰ্ণ'লি) বণ্টন সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- পয়ছন বণ্টন সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

১৩.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

এইটো অধ্যায়ত আমি তাত্ত্বিক বিচ্ছিন্ন এক চলক বণ্টন (theoretical discrete univariate distribution) সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম। যাদৃচ্ছিক চলকৰ মানবোৰ নির্দিষ্ট সম্ভাৱিতাসহ কেনেদৰে বণ্টিত হয়, সেই বিধি ইয়াৰ সহায়ত পাব পাৰি। প্রধানকৈ আমি দুটা বণ্টন সম্বন্ধে আলোচনা কৰিম, যথা দ্বিপদ বণ্টন (binomial distribution), আৰু পয়ছন বণ্টন (poisson distribution)।

১৩.৩ বাৰ্ণ'লি অভিপ্রয়োগ (BERNOULLI TRIALS)

বাৰ্ণ'লি অভিপ্রয়োগ (Bernoulli trial) এটা পৰীক্ষা আৰু ই তলৰ চর্তবোৰ সিদ্ধ কৰে।

1. সম্ভৱপৰ ফল মাত্র দুটা, যথা সফলতা (success), বা বিফলতা (failure) (এটা ঘটনাৰ সংগঠন হ'ল 'সফলতা', অসংঘটন হ'ল 'বিফলতা')।
2. প্রত্যেক অভিপ্রয়োগত সফলতাৰ (বা বিফলতাৰ) সম্ভাৱিতা একেই থাকে।
3. অভিপ্রয়োগবোৰ স্বতন্ত্র হ'ব লাগিব।

4. অভিপ্রয়োগৰ সংখ্যা সীমিত হ'ব লাগিব।
5. সফলতা আৰু বিফলতাৰ সম্ভাৱিতাৰ যোগফল 1।
6. সফলতা তথা বিফলতাৰ সম্ভাৱিতা একেবাৰে সৰু নহয়।

[গণিতজ্ঞ জেকব বার্ণ'লিৰ (Jacob Bernoulli, 1654-1705) নাম অনুসৰি এই অভিপ্রয়োগক বার্ণ'লি অভিপ্রয়োগ বুলি কোৱা হয়।]

১৩.৪ দ্বিপদ (আৰু বার্ণ'লি) বণ্টন (BINOMIAL (AND BERNOULLI) DISTRIBUTION)

ধৰা হ'ল n টা বার্ণ'লি অভিপ্রয়োগ আছে। ধৰা হ'ল যাদৃচ্ছিক চলক X এ এই অভিপ্রয়োগবোৰত সফলতাৰ সংখ্যা বুজায়। ধৰা হ'ল এটা অভিপ্রয়োগত সফলতা পোৱাৰ সম্ভাৱিতা p, আৰু বিফলতা পোৱাৰ সম্ভাৱিতা q। গতিকে $p + q = 1$। তেনেহ'লে $P(X=r)={}^nC_r\, p^r\, q^{n-r}$

প্রমাণ ঃ ধৰা হ'ল S এ এটা সফলতা বুজায়, আৰু F এটা বিফলতা বুজায়।

n টা অভিপ্রয়োত r টা সফলতা পোৱা উপায় = ${}^nC_r$

$\therefore P(X = r) = {}^nC_r \,.\, P(\underline{SSS\ldots S}$ আৰু $\underline{FFF\ldots F})$
(r বাৰ, (n - r) বাৰ)

$= {}^nC_r \,.\, \underline{P(S)\,P(S)\ldots P(S)} \,.\, \underline{P(F)\,P(F)\ldots P(F)}$
(r বাৰ, (n - r) বাৰ)

$= {}^nC_r\, p^r\, q^{n-r}$ $(P(S) = p,\ P(F) = q)$

টোকা ঃ

1. $P(x = 0) = {}^nC_0\, p^0\, q^{n-0} = q^n$

   $P(x = 1) = {}^nC_1\, p\, q^{n-1}$

   $P(x = 2) = {}^nC_2\, p^2\, q^{n-2}$

   - - - - - - - - - - - -

   - - - - - - - - - - - -

   - - - - - - - - - - - -

   $P(x = n) = {}^nC_n\, p^n\, q^{n-n} = p^n$

   $\therefore$ বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2	.....	n
P(X)	q^n	${}^nC_1\, pq^{n-1}$	${}^nC_2\, p^2q^{n-2}$	.....	p^n

2. 0, 1, 2, ..., n সফলতাৰ সম্ভাৱিতাবোৰ ক্রমে q^n, ${}^nC_1\, pq^{n-1}$, ${}^nC_2\, p^2q^{n-2}$, ..., p^n, আৰু ইহঁত ক্রমে $(q + p)^n$ দ্বিপদ ৰাশিটোৰ ক্রমাগত পদ। সেইবাবে এই বণ্টনটোক দ্বিপদ বণ্টন বুলি কোৱা হয়।

3. সম্ভাৱিতাবোৰৰ যোগফল

$= q^n, {}^nC_1\, pq^{n-1} + {}^nC_2\, p^2 q^{n-2} + \ldots + p^n$

$= (q + p)^n = 1$

4. X এ অকল অখণ্ড মান 0, 1, 2, ... , n লয়। গতিকে, দ্বিপদ বণ্টন এটা বিচ্ছিন্ন বণ্টন।

5. যিবোৰ যাদৃচ্ছিক চলকে দ্বিপদ বণ্টন মানি চলে, তেনে চলকক দ্বিপদ চলক (binomial variate) বুলি কয়।

6. আমি জানো যে

$P(X = r) = {}^nC_r\, p^r\, q^{n-r}$

গতিকে, দেখা গ'ল যে n, আৰু p(বা q) ৰ ওপৰত P(X = r) নির্ভৰ কৰে। এই ধ্রুৱক দুটাক প্রাচল (parameter) বুলি কয়। দ্বিপদ বণ্টনৰ প্রাচল দুটা।

মন্তব্য ঃ n = 1 হ'লে দ্বিপদ বণ্টনক বার্ণ'লি বণ্টন (binomial distribution) বুলি কয়।

উদাহৰণ 1 ঃ এটা মুদ্রাৰ 6 বাৰ উৎক্ষেপণত পোৱা মুণ্ডৰ সংখ্যাৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ যদি এটা মুদ্রা উৎক্ষেপণ কৰা হয়, S = { H, T}

$\therefore$ P (মুণ্ড পোৱা যায়) $= \frac{1}{2}$,

P (মুণ্ড পোৱা নাযায়) $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

ধৰা হ'ল X এ মুণ্ড সংখ্যাৰ যাদৃচ্ছিক চলক বুজায়।

6 টা অভিপ্রয়োগত মুণ্ডৰ সংখ্যা 0 বা 1 বা 2 বা 3 বা 4 বা 5 বা 6 হ'ব পাৰে।

$$P(X=0) = {}^6C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{6-0} = \frac{1}{64}$$

$$P(X=1) = {}^6C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = \frac{3}{32}$$

$$P(X=2) = {}^6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2} = \frac{15}{64}$$

$$P(X=3) = {}^6C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{6-3} = \frac{5}{16}$$

$$P(X=4) = {}^6C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{6-4} = \frac{15}{64}$$

$$P(X=5) = {}^6C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^{6-5} = \frac{3}{32}$$

$$P(X=6) = {}^6C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^{6-6} = \frac{1}{64}$$

∴ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2	3	4	5	6
P(X)	$\frac{1}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{1}{64}$

টোকা ঃ সম্ভাৱিতাবোৰৰ যোগফল

$$= \frac{1}{64} + \frac{3}{32} + \frac{15}{64} + \frac{5}{16} + \frac{15}{64} + \frac{3}{32} + \frac{1}{64} = 1$$

উদাহৰণ 2 ঃ এটা লুডুগুটি 3 বাৰ নিক্ষেপ কৰা হ'ল। অন্ততঃ এটা ছয় পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ যদি এটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰা হয়, S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6}

$$\therefore \text{ P (ছয় পোৱা যায়) } = \frac{1}{6}$$

$$\text{P (ছয় পোৱা নাযায়) } = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

ধৰা হ'ল X এ ছয়ৰ সংখ্যা বুজোৱা যাদৃচ্ছিক চলক বুজায়।

3 টা অভিপ্রয়োগত ছয়ৰ সংখ্যা 0 বা 1 বা 2 বা 3 হ'ব পাৰে।

∴ অন্ততঃ এটা ছয় পোৱাৰ সম্ভাৱিতা

= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)

$$= {}^3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1 + \left(\frac{5}{6}\right)^{3-1} + \left(3 \times \frac{1}{36} \times \frac{5}{6}\right) + \left(1 \times \frac{1}{216} \times 1\right)$$

$$= \frac{25}{72} + \frac{5}{72} + \frac{1}{216} = \frac{75+15+1}{216} = \frac{91}{216}$$

দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য ঃ

ধৰা হ'ল এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ মান লয় আৰু ইয়াৰ সম্ভাৱিতা ক্রমে $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_n$। আমি জানো যে মাধ্য μ হ'ল

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

এতিয়া দ্বিপদ বণ্টনটো লোৱা হ'ল

$P(X = r) = {}^nC_r\, p^r\, q^{n-r}, \quad r = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots, n.$

$$\therefore \mu = \sum_{r=0}^{n} r \,.\, P(X = r)$$

$$= \sum_{r=0}^{n} r \,.\, {}^nC_r\, p^r q^{n-r}$$

$$= 0 + 1.{}^{n}C_1 pq^{n-1} + 2^{n}C_2 p^2 q^{n-2} + 3^{n}C_3 p^3 q^{n-3} + ...+^{n}n.{}^{n}C_n p^n q^{n-n}$$

$$= 1.np.q^{n-1} + n(n-1)p^2 q^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2!} p^3 q^{n-3} + ... + np^n$$

$$= np\left[1.q^{n-1} + (n-1)pq^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{2!} p^2 q^{n-3} + ... + p^{n-1} \right]$$

$$= np\left[{}^{n-1}C_0\, q^{n-1} + {}^{n-1}C_1\, q^{(n-1)-1}\ p + {}^{n-1}C_2\, q^{(n-1)-2} p2 + ... + {}^{n-1}C_{n-1}\, p^{n-1} \right]$$

$$= np(q+p)n-1$$

$$= np, \quad \therefore q + p = 1$$

দ্বিপদ বণ্টনৰ প্ৰসৰণ

আমি জানো যে প্ৰসৰণ σ^2 হ'ল

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 p_i - \mu^2$$

গতিকে উপৰিউক্ত দ্বিপদ বণ্টনৰ বাবে প্ৰসৰণ

$$= \sigma^2 = \sum_{r=0}^{n} r^2 p(X = r) - \mu^2$$

$$= \sum_{r=0}^{n} r^2\ {}^{n}C_r p^r q^{n-r} - n^2 p^2$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \left[r + r(r-1) \right] {}^{n}C_r p^r q^{n-r} - n^2 p^2$$

$$= \sum_{r=0}^{n} r\,.{}^{n}C_r p^r q^{n-r} + \sum_{r=0}^{n} r(r-1)^{n} C_r p^r q^{n-r} - n^2 p^2$$

$$= np + \sum_{r=2}^{n} r(r-1)\frac{n(n-1)}{r(r-1)}\ {}^{n-2}C_{r-2} p^r q^{r-2} - n^2 p^2$$

$$= np + n(n-1)p^2 \sum_{r=2}^{n}\ {}^{n-2}C_{r-2}\ p^{r-2} q^{n-r} - n^2 p^2$$

$$= np + n(n-1)p^2 - n^2 p^2$$

$$= np + n^2 p^2 - np^2 - n^2 p^2$$

$$= np - np^2$$

$$= np(1-p)$$

$$= npr, \quad \because\ p + q = 1$$

গতিকে প্ৰসৰণ $= \sigma^2 = npq$

$$\therefore\ SD = \sigma = \sqrt{npq}$$

দ্বিপদ বণ্টনৰ আৱৰ্তক সম্বন্ধ

আমি জানো যে

$$P(X=r)={}^nC_r p^r q^{n-r}$$

$$\therefore\ P(X=r+1)={}^nC_{r+1} p^{r+1} q^{n-r-1}$$

$$\therefore \frac{P(X=r+1)}{P(X=r)} = \frac{{}^nC_{r+1} p^{r+1} q^{n-r-1}}{{}^nC_r p^r q^{n-r}}$$

$$= \frac{n!}{(r+1)!\,(n-r-1)!} \frac{r!(n-r)!}{n!} \cdot \frac{p}{q}$$

$$= \frac{n-r}{r+1} \cdot \frac{p}{q}$$

$$\therefore\ P(X=r+1) = \frac{(n-r)}{(r+1)} \cdot \frac{p}{q} \cdot P(X=r)$$

উদাহৰণ 3 ঃ এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য 5, আৰু প্ৰসৰণ 2.5। বণ্টনটো নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল X এটা দ্বিপদ বণ্টন আৰু ইয়াৰ প্ৰাচল n, আৰু p।

আমি জানো যে মাধ্য হ'ল np, আৰু প্ৰসৰণ হ'ল npq, q = 1 – p.

$\therefore$ np = 5, আৰু npq = 2.5

$\therefore$ 5q = 2.5 $\quad \Rightarrow q = \frac{2.5}{5} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ p = 1 – q = 1 – $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ n = 10

$\therefore$ বণ্টনটো হ'ল

$${}^{10}C_r \left(\frac{1}{2}\right)^r \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-r}, \qquad 0 \le r \le 10\,.$$

উদাহৰণ 4 ঃ এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য 4 আৰু প্ৰসৰণ $\frac{4}{3}$। $P(X \ge 1)$ নিৰ্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ দিয়া আছে np = 4, আৰু npq = $\frac{4}{3}$

$$\therefore\ 49 = \frac{4}{3} \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

$$\therefore\ p = 1 - q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\therefore\ \frac{2n}{3} = 4 \ \Rightarrow n = 6$$

এতিয়া $P(X \ge 1) = 1 - P(X = 0)$

$$= 1 - {}^{6}C_0 p^0 q^{6-0} = 1 - q^6 = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^6$$

$$= 1 - \frac{1}{729} = \frac{728}{729}$$

ধর্ম ঃ এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য, প্রসৰণতকৈ ডাঙৰ ঃ

› ¶± Ðধৰা হ'ল X এটা দ্বিপদ বণ্টন আৰু ইয়াৰ প্রাচল n আৰু p।

এতিয়া, মাধ্য = np

$> npq, \ \because \ 0 < q < 1$

= প্রসৰণ

উদাহৰণ 5 ঃ মাধ্য 5 আৰু প্রসৰণ 7.5 বিশিষ্ট এটা দ্বিপদ বণ্টন থাকিব পাৰেনে?

সমাধান ঃ আমি জানো যে এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য > প্রসৰণ।

এতিয়া 5 < 7.5

∴গতিকে, মাধ্য 5 আৰু প্রসৰণ 7.5 বিশিষ্ট দ্বিপদ বণ্টন থাকিব নোৱাৰে।



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

প্রশ্ন নং ১ঃ এটা মুদ্রাৰ 4 বাৰ উৎক্ষেপণত পোৱা পুচ্ছৰ সংখ্যাৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ঃ এযোৰ লুডুগুটিৰ তিনিবাৰ নিক্ষেপত পোৱা ডাবলেটৰ (doublets) সংখ্যাৰ সম্ভাৱিতা বণ্টন নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ এটা মুদ্রা 8 বাৰ উৎক্ষেপণ কৰা হ'ল। অন্ততঃ 2 টা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য 3, আৰু প্রসৰণ 2। দ্বিপদ বণ্টনটো নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ এটা দ্বিপদ যাদৃচ্ছিক চলক X অৰ বাবে n = 6, আৰু 9q(X = 4) = P(X = 2)। P নির্ণয় কৰক। লগতে বণ্টনটোৰ মাধ্য আৰু প্রসৰণ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৬ঃ ধৰা হ'ল X এটা দ্বিপদ চলক। ইয়াৰ মাধ্য, প্রামাণিক বিচলনৰ দুগুণ। যদি $P(X = 0) = \frac{1}{16}$, তেনেহ'লে X, অতি বেছি 1 হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৭ঃ এটা মুদ্রা 8 বাৰ উৎক্ষেপণ কৰা হ'ল। অন্ততঃ সাতটা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৮ঃ এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য 6 আৰু প্রামাণিক বিচলন $\sqrt{2}$ । বণ্টনটো লিখক।

প্রশ্ন নং ৯ঃ এটা দ্বিপদ চলক X অৰ প্রাচল দুটা n আৰু p, আৰু ইয়াৰ মাধ্য আৰু প্রসৰণ ক্রমে 16 আৰু 8। নির্ণয় কৰক (i) P (X = 0), (ii) P (X = 1),

(iii) $P(X \geq 2)$

প্রশ্ন নং ১০ঃ তলৰ উক্তি দুটা সত্যনে ? উত্তৰৰ যুক্তিযুক্ততা প্রতিপন্ন কৰক।

(i) এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য 6, আৰু ইয়াৰ প্রামাণিক বিচলন 3।

(ii) এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য 5, আৰু ইয়াৰ প্রসৰণ 2।

১৩.৫ পয়ছন বণ্টন (POISSON DISTRIBUTION)

ফৰাচী গণিতজ্ঞ পয়ছনৰ নাম অনুসৰি (Simeon Devis Poisson, 1781-1840)

পয়ছন বণ্টন (Poisson distribution) হ'ল দ্বিপদ বণ্টনৰ সীমাৱস্থা আৰু ই তলৰ চর্তকেইটা মানি চলে।

1. অভিপ্রয়োগৰ সংখ্যা n অসীমভাৱে ডাঙৰ, অর্থাৎ, $n \to \infty$ ।
2. প্রত্যেকটো অভিপ্রয়োগৰ সফলতাৰ ধ্রুৱক সম্ভাৱিতা p অসীমভাৱে সৰু, অর্থাৎ, $p \to 0$
3. np = m (ধৰা হ'ল) সসীম।

আমি জানো যে

$$P(r) = P(X = r) = {}^nC_r p^r q^{n-r}$$

আমি জানো যে $P(0) = q^n$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} p(0) = \lim_{n\to\infty} q^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} (1-p)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{m}{n}\right)^n, \qquad \text{np = m অৰ পৰা}$$

$$= e^{-m}$$

আকৌ আমি জানো যে $\frac{P(r+1)}{P(r)} = \frac{n-r}{r+1} \cdot \frac{p}{q}$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} \frac{P(r+1)}{P(r)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-r}{r+1} \cdot \frac{p}{q}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n-r}{r+1} \cdot \frac{\frac{m}{n}}{1-\frac{m}{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{r}{n}}{1-\frac{m}{n}} \cdot \frac{m}{r+1} = \frac{m}{r+1}$$

এতিয়া, $\lim_{n\to\infty} P(r) = \lim_{n\to\infty} \frac{P(r)}{P(r-1)} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{P(r-1)}{P(r-2)} \ldots\ldots \lim_{n\to\infty} \frac{P(1)}{P(0)} \cdot \lim_{n\to\infty} P(0)$

$$= \frac{m}{r} \cdot \frac{m}{r-1} \ldots\ldots \frac{m}{1} e^{-m}$$

$$= \frac{m^r e^{-m}}{r!}$$

সংজ্ঞা ঃ এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ পয়ছন বণ্টন মানি চলে বুলি কোৱা হয় যদি ই অঋণাত্মক মান লয় আৰু ইয়াৰ সম্ভাৱিতা এনেধৰণৰ।

$$P(X = x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!}, x = 0,1,2,...m > 0$$
$$= 0 \text{ অন্যথাই}$$

টোকা ঃ

1. X এ অকল অখণ্ড মান 0, 1, 2, ... লয়। গতিকে, পয়ছন বণ্টন এটা বিচ্ছিন্ন বণ্টন।
2. পয়ছন বণ্টনত মাত্র এটা প্রাচল আছে, যথা m.

পয়ছন বণ্টন প্রয়োগ কৰিব পৰা কেইটামান উদাহৰণ

1. 100 খন ব্লেডৰ এটা পেকেটত থকা খুঁত থকা ব্লেডৰ সংখ্যা।
2. এখন কিতাপৰ প্রত্যেক পৃষ্ঠাত থকা ছপাৰ ভুলৰ সংখ্যা।
3. হৃদৰোগ অথবা সর্পদংশনত মৃত্যুৰ সংখ্যা।
4. কোনো বছৰত ভাৰতবর্ষত সংঘটিত বিমান দুর্ঘটনাৰ সংখ্যা।
5. দিনটোৰ ব্যস্ততাপূর্ণ সময়ত পথচাৰীয়ে ৰাজআলি পাৰ হোৱা ঠাইৰে পাৰ হৈ যোৱা কাৰৰ (car) সংখ্যা।

পয়ছন বণ্টনৰ মাধ্য

মাধ্য = μ

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x P(X = x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-m} m^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-m} m m^{x-1}}{x(x-1)!}$$

$$= m e^{-m} \sum_{x=1}^{\infty} \frac{m^{x-1}}{(x-1)!}$$

$$= m e^{-m} \left[1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \ldots\infty \right]$$

$= m e^{-m} e^{m}$

$= m$

পয়ছন বণ্টনৰ প্ৰসৰণ

প্ৰসৰণ $= \sigma^2$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 P(X=x) - \mu^2$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{e^{-m}\ m^x}{x!} - m^2$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \left(x(x-1)\frac{e^{-m}\ m^x}{x!} + \frac{x e^{-m}\ m^x}{x!} \right) - m^2$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)\frac{e^{-m}\ m^x}{x(x-1)(x-2)!} + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x e^{-m}\ m^x}{x!} - m^2$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-m}\ m^2 m^{x-2}}{(x-2)!} + m - m^2$$

$$= e^{-m} m^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{m^{x-2}}{(m-2)!} + m - m^2$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x e^{-m}\ m^x}{x!} - m^2 = e^{-m} m^2 \left[1 + m + \frac{m^2}{2!} + \frac{m^3}{3!} + \ldots\ldots\infty \right] + m - m^2$$

$$= e^{-m} m^2 e^{m} + m - m^2$$

$$= m^2 + m = m^2 = m$$

টোকা ঃ পয়ছন বণ্টনৰ মাধ্য

= প্ৰসৰণ

= m

পয়ছন বণ্টনৰ আৱৰ্তক সম্বন্ধ

আমি জানো যে $P(X=x) = \frac{e^{-m} m^x}{x!},\ x = 0,1,2,\ldots.\infty$

$$\therefore P(X=x+1) = \frac{e^{-m} m^{x+1}}{(x+1)!}$$

$$\therefore \frac{P(X=x+1)}{P(X=x)} = \frac{e^{-m} m^{x+1}}{(x+1)!} \frac{x!}{e^{-m} m^x}$$

$$= \frac{m}{x+1}$$

$$\therefore P(X=x+1)=\frac{m}{x+1}P(X=x)$$

উদাহৰণ 6 ঃ এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ পয়ছন বণ্টন মানি চলে, আৰু P(X = 0) = P(X = 1) = a। বণ্টনটোৰ মাধ্য নির্ণয় কৰক। লগতে a ৰ মান নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো $P(X=x)=\frac{e^{-m}m^x}{x!}$

এতিয়া, P(X = 0) = P (X = 1), (দিয়া আছে)

$$\therefore \frac{e^{-m}m^x}{0!}=\frac{e^{-m}m^1}{1!}$$

$$\therefore m=1$$

অর্থাৎ, মাধ্য = 1

আকৌ P (X = 0) = a

বা, $e^{-m} = a$

বা, $e^{-1} = a$

অর্থাৎ, $a=\frac{1}{e}$

উদাহৰণ 7 ঃ এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ পয়ছন বণ্টন মানি চলে, আৰু P(X = 1) = 2P(X = 2)। নির্ণয় কৰক P(X = 0), $P(X\geq 0)$ ।

সমাধান ঃ P(X = 1) = 2P(X = 2), দিয়া আছে

$$\therefore \frac{e^{-m}m^1}{1!}=2\,\frac{e^{-m}m^2}{2!}$$

বা, m = 1

$$\therefore P(X=0)=\frac{e^{-1}1^0}{0!}=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

$$P(X\geq 0)$$
$$=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+....$$
$$=e^{-1}+\frac{e^{-1}}{1!}+\frac{e^{-1}}{2!}+\frac{e^{-1}}{3!}+\frac{e^{-1}}{4!}+.....$$
$$=e^{-1}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+.....\right)$$
$$=e^{-1}\ e$$
$$=e^{0}=1$$

উদাহৰণ 8 ঃ 6 টা মুদ্রা 6400 বাৰ উৎক্ষেপণ কৰা হ'ল। পয়ছন বণ্টন ব্যৱহাৰ কৰি r বাৰ 6 টা

মুণ্ড পোৱাৰ মোটামুটি সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ এই ক্ষেত্রত n = 6400

p = 6 টা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা

$$= \frac{1}{26}$$

$$\therefore\ m = np = \frac{6400}{2^6} = \frac{6400}{64} = 100$$

$$\therefore P(X = r) = \frac{e^{-m} m^r}{r!}$$

$$= \frac{e^{-100} 100^r}{r!}$$



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ

প্রশ্ন নং ১ঃ এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ পয়ছন বণ্টন মানি চলে আৰু P(X = 1) = P(X = 2)। P(X = 3) নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ পয়ছন বণ্টন মানি চলে আৰু P(X = 2) = 3 P(X = 3)। X, অন্ততঃ এক হোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ তলৰ উক্তিটো সত্য হয়নে নহয় পৰীক্ষা কৰক।

এটা পয়ছন বণ্টনৰ মাধ্য 3, আৰু প্রামাণিক বিচলন 4।

প্রশ্ন নং ৪ঃ এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ পয়ছন বণ্টন মানি চলে, আৰু P(X = 2) = 9P(X = 4)। X অৰ মাধ্য নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ পয়ছন বণ্টন মানি চলে, আৰু P(X = 2) = P(X = 3)। X অৰ প্রসৰণ নির্ণয় কৰক।



১৩.৬ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- বার্ণ'লি অভিপ্রয়োগ এটা পৰীক্ষা আৰু ই তলৰ চর্তবোৰ সিদ্ধ কৰে।
  1. সম্ভৱপৰ ফল মাত্র দুটা, যথা সফলতা বা বিফলতা (এটা ঘটনাৰ সংঘটন হ'ল 'সফলতা', অসংঘটন হ'ল 'বিফলতা')।
  2. প্রত্যেক অভিপ্রয়োগত সফলতাৰ (বা বিফলতাৰ) সম্ভাৱিতা একেই থাকে।
  3. অভিপ্রয়োগবোৰ স্বতন্ত্র হ'ব লাগিব।
  4. অভিপ্রয়োগৰ সংখ্যা সীমিত হ'ব লাগিব।
  5. সফলতা আৰু বিফলতাৰ সম্ভাৱিতাৰ যোগফল 1।

6. সফলতা তথা বিফলতাৰ সম্ভাৱিতা একেবাৰে সৰু নহয়।

- ধৰা হ'ল n টা বাৰ্ণ'লি অভিপ্ৰয়োগ আছে। ধৰা হ'ল যাদৃচ্ছিক চলক X এ এই অভিপ্ৰয়োগবোৰত সফলতাৰ সংখ্যা বুজায়। ধৰা হ'ল এটা অভিপ্ৰয়োগত সফলতা পোৱাৰ সম্ভাৱিতা p, আৰু বিফলতা পোৱাৰ সম্ভাৱিতা q। গতিকে p + q = 1। তেনেহ'লে
  $P(X = r) = {}^{n}C_{r}\, p^{r}\, q^{n-r}$
  ইয়াক দ্বিপদ বণ্টন বুলি কোৱা হয়।
- n = 1 হ'লে দ্বিপদ বণ্টনক বাৰ্ণ'লি বণ্টন বুলি কয়।
- এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য np, আৰু প্ৰসৰণ npq।
- পয়ছন বণ্টন হ'ল দ্বিপদ বণ্টনৰ সীমাৱস্থা, আৰু ই তলৰ চৰ্তকেইটা মানি চলে।
  1. অভিপ্ৰয়োগৰ সংখ্যা n অসীমভাৱে ডাঙৰ, অৰ্থাৎ, $n \to \infty$ ।
  2. প্ৰত্যেকটো অভিপ্ৰয়োগৰ সফলতাৰ ধ্ৰুৱক সম্ভাৱিতা p অসীমভাৱে সৰু, অৰ্থাৎ, $p \to 0$ ।
  3. np = m, (ধৰা হ'ল) সসীম।
- এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ পয়ছন বণ্টন মানি চলে বুলি কোৱা হয় যদি ই অঋণাত্মক মান লয় আৰু ইয়াৰ সম্ভাৱিতা এনেধৰণৰ

$$P(X=x)\begin{cases} = \dfrac{e^{-m} m^{x}}{x\,!}, & x = 0, 1, 2, \ldots, m>0 \\ = 0 \end{cases}$$

- পয়ছন বণ্টনৰ মাধ্যঅন্যথাই
  = প্ৰসৰণ
  = m



১৩.৭ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

1) Statistical Methods by N.G. Das, McGraw Hill Education (India) Private Ltd. 2009
2) Probability and Statistics by G.Shanker Rao, University Press (India) private Ltd. 2011
3) Introduction to probability and Statistics by Seymour Lipschutz, John J.Schiller, Tata McGraw Hill Education private Ltd. 2005
4) Probability, Random Process, Queueing theory and Statistics by Dr. S.Rajasekaran, Prof.A.Chandrasekaran & G.Kavitha, Dhanam Publications, Chennai-60042

5) Probability and Statistics by G.Balaji, G.Balaji Publishers, Chennai-33

১৩.৮ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ যদি এটা মুদ্রা উৎক্ষেপণ কৰা হয়, S = {H, T}

$\therefore$ P (পুচ্ছ পোৱা যায়) $\frac{1}{2}$

P (পুচ্ছ পোৱা নাযায়) $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

ধৰা হ'ল যাদৃচ্ছিক চলক X এ পুচ্ছৰ সংখ্যা বুজায়। চাৰিটা অভিপ্রয়োগত পুচ্ছৰ সংখ্যা বুজায়।

চাৰিটা অভিপ্রয়োগত পুচ্ছৰ সংখ্যা 0 বা 1 বা 2 বা 3 হ'ব পাৰে।

$$P(X=0) = {}^4C_0\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^{4-0} = \frac{1}{16}$$

$$P(X=1) = {}^4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=2) = {}^4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^{4-2} = \frac{3}{8}$$

$$P(X=3) = {}^4C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{4-3} = \frac{1}{4}$$

$$P(X=4) = {}^4C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^{4-4} = \frac{1}{16}$$

$\therefore$ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2	3	4
P(X)	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

২ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ [ডাবলেট (doublet) শব্দৰ অর্থ এই সন্দর্ভত এনেধৰণৰ— দুটা লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰাত যদি দুয়োটাতে একে সংখ্যক ফুট ওলায়, তাক doublet বুলি কয়।]

যদি এযোৰ লুডুগুটি নিক্ষেপ কৰা হয়, তেনেহ'লে 36 টা ফল পোৱা যাব।

S = { (1, 2), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), ..., (6, 1), (6, 2), (6, 3),

(6, 4), (6, 5), (6, 6)}

গতিকে n(s) = 36

সম্ভৱপৰ ডাবলেটবোৰ হ'ল (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6).

অর্থাৎ ডাবলেটৰ সংখ্যা 6.

$\therefore$ P (এটা ডাবলেট পোৱা যায়) $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$\therefore$ P (ডাবলেট পোৱা নাযায়) $= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

3 টা অভিপ্রয়োগত ডাবলেটৰ সংখ্যা 0 বা 1 বা 2 বা 3 হ'ব পাৰে।

$$P(X=0) = {}^3C_0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$P(X=1) = {}^3C_1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{72}$$

$$P(X=2) = {}^3C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{5}{6} = \frac{5}{72}$$

$$P(X=3) = {}^3C_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}$$

$\therefore$ সম্ভাৱিতা বণ্টনটো হ'ল

X	0	1	2	3
P(X)	$\frac{125}{216}$	$\frac{25}{72}$	$\frac{5}{72}$	$\frac{1}{216}$

৩ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ যদি এটা মুদ্রা উৎক্ষেপণ কৰা হয়, S = {H, T}

$\therefore$ P (মুণ্ড পোৱা যায়) $= \frac{1}{2}$

P (মুণ্ড পোৱা নাযায়) $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore P(X=r) = {}^nC_r p^r q^{n-r}$

$$= {}^8C_r\left(\frac{1}{2}\right)^r\left(\frac{1}{2}\right)^{8-r} = {}^8C_r\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$\therefore$ P (অন্ততঃ দুটা মুণ্ড পোৱা যায়)

$= P(X \geq 2)$

$= 1 - [P(X=0) + P(X=1)]$

$$=1-\left[{}^{8}C_{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{8}+{}^{8}C_{1}\left(\frac{1}{2}\right)^{8}\right]$$

$$=1-\left[\frac{1}{256}+\frac{8}{256}\right]$$

$$=1-\frac{9}{256}$$

$$=\frac{247}{256}$$

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল দ্বিপদ চলকটো X।

দিয়া আছে মাধ্য = np = 3 (1)

প্ৰসৰণ = npq = 2 (2)

(1) আৰু (2)ৰ পৰা, 3q = 2

$$\therefore\ q=\frac{2}{3}$$

$$\therefore\ p=1-q=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

আকৌ (1) অৰ পৰা, $\frac{n}{3}=3$

$$\therefore\ n=9$$

∴ বণ্টনটো হ'ল

$$P(X=r)={}^{9}C_{r}\left(\frac{1}{3}\right)^{r}\left(\frac{2}{3}\right)^{9-r},\qquad r = 0, 1, 2, 3, ... , 9.$$

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে

$9p\ (x = 4) = p(x = 2)$

বা, $9\ {}^{6}C_{4}\ p^{4}\ q^{6-4} = {}^{6}C_{2}\ p^{2}\ q^{6-2}$, (n = 6 দিয়া আছে)

বা, $9p^{2} = q^{2}$, $({}^{6}C_{4} = {}^{6}C_{2})$

বা, 3p = q

বা, 3p = 1 – p

বা 4p = 1

$$\therefore\ p=\frac{1}{4}\qquad \therefore\ q=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore\ \text{মাধ্য}\ =np=6\times\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$$

প্রসৰণ $= 6 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$

৬ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে

মাধ্য = 2 (প্রামাণিক বিচলন)

বা, $np = 2\sqrt{npq}$

বা, $n^2 p^2 = 4npq$

বা, np = 4q (1)

আকৌ, $P(X = 0) = \frac{1}{16}$ (দিয়া আছে)

$\therefore q^n = \frac{1}{16}$

বা, $q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ বা $q^n = \left(\frac{1}{4}\right)^2$

$\therefore$ যদি $q = \frac{1}{2},\ n = 4$ বা $q = \frac{1}{4},\ n = 2$

যদি $q = \frac{1}{2},\ n = 4$ তেনেহ'লে (1) অৰ পৰা

$4p = 4 \times \frac{1}{2}$ or $p = \frac{1}{2}$. $\therefore q = 1 - p = \frac{1}{2}$, যিটো সত্য।

যদি $q = \frac{1}{4},\ n = 2$ তেনেহ'লে (1) অৰ পৰা

$2p = 4 \times \frac{1}{4}$ বা 2p = 1 বা $p = \frac{1}{2}$

$\therefore\ q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ যিটো সত্য নহয়।

$\therefore\ q = \frac{1}{4},\ n = 2$ গ্রহণযোগ্য নহয়।

$\therefore n = 4,\ q = \frac{1}{4},\ p = \frac{1}{2}$

$\therefore$ P (X অৰ মান অতি বেছি 1)

$\therefore$ P(X = 0) + P(X = 1)

$= {}^4C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-0} + {}^4C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1}$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4$

$= \frac{1}{16} + \frac{4}{16}$

$= \frac{5}{16}$

৭ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ যদি এটা মুদ্রা উৎক্ষেপণ কৰা হয়, S = {H, T}

$\therefore$ P (মুণ্ড পোৱা যায়) $= \frac{1}{2}$

P (মুণ্ড পোৱা নাযায়) $= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore\ p = \frac{1}{2},\ q = \frac{1}{2}$

ধৰা হ'ল যাদৃচ্ছিক চলক X এ মুণ্ডৰ সংখ্যা বুজায়।

8 টা অভিপ্রয়োগত মুণ্ডৰ সংখ্যা 0 বা 1 বা 2 বা 3 বা 4 বা 5 বা 6 বা 7 বা 8 হ'ব পাৰে।

$\therefore$ P (অন্ততঃ 7 টা মুণ্ড পোৱা যায়)

$= P(X = 7) + P(X = 8)$

$= {}^8C_7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^{8-7} + \left(\frac{1}{2}\right)^8 \left(\frac{1}{2}\right)^{8-8}$

$= 8 \times \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^8}$

$= \frac{8}{256} + \frac{1}{256}$

$= \frac{9}{256}$

৮ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে np = 6 (1)

$\sqrt{npq} = \sqrt{2}$

$\therefore\ npq = 2$

বা 6q = 2

$\therefore q = \frac{1}{3}$

$\therefore\ p = 1 - q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\therefore$ (1)অৰ পৰা $\frac{2n}{3} = 6$ বা n = 9

$\therefore P(X = r) = {}^9C_r \left(\frac{2}{3}\right)^r \left(\frac{1}{q}\right)^{q-r}$, r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9

৯ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে np = 16, (1)

npq = 8 (2)

$\therefore 16q = 8$ বা $q = \frac{1}{2}$

$\therefore p = 1 - q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ (1)অৰ পৰা, $\frac{n}{2} = 16$ বা n = 32

(i) $P(X = 0) = {}^{32}C_0 \left(\frac{1}{2}\right)^6 \left(\frac{1}{2}\right)^{32-0}$

$= \frac{1}{2^{32}}$

(ii) $P(X = 1) = {}^{32}C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{32-1}$

$= 32 \cdot \frac{1}{2^{32}} = \frac{2^5}{2^{32}} = \frac{1}{2^{27}}$

(iii) $P(X \geq 2)$

$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$

$= 1 - \left(\frac{1}{2^{32}} + \frac{1}{2^{27}}\right)$

১০ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) মাধ্য = 6, SD = 3

$\therefore$ প্রসৰণ = 9

আমি জানো যে দ্বিপদ বণ্টনৰ ক্ষেত্রত

মাধ্য > প্রসৰণ

এই ক্ষেত্রত মাধ্য = 6, প্রসৰণ = 9

$\therefore$ উক্তিটো সত্য নহয়।

(ii) মাধ্য = 5

প্রসৰণ = 2

আমি জানো যে দ্বিপদ বণ্টনৰ ক্ষেত্রত

মাধ্য > প্রসৰণ

এই ক্ষেত্রত মাধ্য = 5, প্রসৰণ = 2

$\therefore$ উক্তিটো সত্য।

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 2

১ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ আমি জানো যে পয়ছন বণ্টনৰ বাবে

$$P(X=x)=\frac{e^{-m}\,m^{x}}{x!}$$

এতিয়া P(X=1) = P(X=2), (দিয়া আছে)

$$\therefore \frac{e^{-m}m^{1}}{1!}=\frac{e^{-m}m^{2}}{2!}$$

$\therefore$ m = 2

$$\therefore\ P(X=3)=\frac{e^{-2}\,2^{3}}{3!}=\frac{4e^{-2}}{3}=\frac{4}{3e^{2}}$$

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে

$$P(X=x)=\frac{e^{-m}\,m^{x}}{x!}$$

P (x = 2) = 3 P (x = 3)

বা, $\frac{e^{-m}\,m^{2}}{2!}=3\,.\,\frac{e^{-m}\,m^{3}}{3!}$

বা, m = 1

$\therefore\ P(X\geq x)$

$=1-P(X=0)$

$=1-\frac{e^{-1}1^{0}}{0!}$

$=1^{-e}-1\ =1-\frac{1}{e}\ =\frac{e-1}{e}=0.632$

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ আমি জানো যে এটা পয়ছন বণ্টনৰ মাধ্য = প্ৰসৰণ।

$\therefore$ প্ৰদত্ত উক্তিটো সত্য নহয়।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে $P(X=x)=\frac{e^{-m}\,m^{x}}{x\,!}$

এতিয়া P(x = 2) = 9 P(x = 4)

বা, $\frac{e^{-m}\,m^{2}}{2\,!}=9\,.\,\frac{e^{-m}\,m^{4}}{4\,!}$

বা, $\frac{m^{2}}{2}=\frac{3m^{4}}{8}$

বা, $\frac{3m^2}{4}=1$

বা, $m^2=\frac{4}{3}$

$\therefore m=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ মাধ্য = $m=\frac{2}{\sqrt{3}}$

৫ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ দিয়া আছে

P(x = 2) = P(x = 3)

বা, $\frac{e^{-m}m^2}{2!}=\frac{e^{-m}m^3}{3!}$

বা, m = 3

$\therefore$ প্রসৰণ = m = 3



১৩.৯ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্রশ্ন ১ঃ (i) মাধ্য যেতিয়া প্রসৰণতকৈ ডাঙৰ হয়,

(ii) মাধ্য যেতিয়া প্রসৰণৰ সমান হয়, তেতিয়া বিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বণ্টনৰ নাম কি?

প্রশ্ন ২ঃ দ্বিপদ বণ্টনৰ সীমাৰ ৰূপ হিচাপে পয়ছন বণ্টন নিগমন কৰক।

প্রশ্ন ৩ঃ 8 টা মুদ্রা একেলগে উৎক্ষেপণ কৰা হ'ল। অন্ততঃ 6 টা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৪ঃ ধৰা হ'ল X এটা দ্বিপদ চলক, আৰু মাধ্য = 1, প্রসৰণ = 0.75।

(i) P(x = 0), (ii) P (x > 0) নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৫ঃ কি চর্তৰ অধীনত দ্বিপদ বণ্টন এটা পয়ছন বণ্টন হয়?

প্রশ্ন ৬ঃ X পয়ছন চলক, আৰু $P(X=2)=\frac{2}{3}P(X=1)$ ।

P(x = 0) নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৭ঃ 5 টা অভিপ্রয়োগৰ বাবে এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য আৰু প্রসৰণৰ যোগফল 1.8। বণ্টনটো নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন ৮ঃ এটা দ্বিপদ বণ্টনৰ মাধ্য আৰু প্রসৰণ ক্রমে 4 আৰু $\frac{4}{3}$ । $P(X\geq 1)$ নির্ণয় কৰক।

*** ***** ***

অধ্যায় ১৪ ঃ তাত্ত্বিক বণ্টন II (THEORETICAL DISTRIBUTION II)

অধ্যায় গাঁথনি

১৪.১ উদ্দেশ্য

১৪.২ পৰিচয়

১৪.৩ অবিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বণ্টন

১৪.৪ প্রসামান্য বণ্টন

১৪.৪.১ প্রসামান্য বণ্টনৰ ধর্ম

১৪.৪.২ প্রামাণিক প্রসামান্য চলক

১৪.৫ অধ্যায়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ

১৪.৬ অধিক জানিবলৈ

১৪.৭ অগ্রগতিৰ খতিয়ান

১৪.৮ আৰ্হি প্রশ্ন

১৪.১ উদ্দেশ্য (LEARNING OBJECTIVES)

এই অধ্যায়টি অধ্যয়ন কৰি আপুনি -

- অবিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বণ্টন আৰু সম্ভাৱিতা ঘনত্ব ফলন সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- প্রসামান্য বণ্টন সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- প্রামাণিক প্রসামান্য চলক সম্বন্ধে জানিব পাৰিব
- প্রসামান্য বণ্টনৰ ধর্ম সম্বন্ধে জানিব পাৰিব।

১৪.২ পৰিচয় (INTRODUCTION)

প্রসামান্য বণ্টন (normal distribution) এটা অবিচ্ছিন্ন (continuous) বণ্টন। ই দ্বিপদ বণ্টনৰ সীমাৱস্থা। ইয়াৰ প্রভূত প্রয়োগ আছে। ই সবাতোকৈ জনপ্রিয় আৰু সঘনাই ব্যৱহৃত হোৱা বণ্টন। আব্রাহাম দ্য মইভাৰে (Abraham de Moivre, 1667–1754) 1733 চনত এইটো আৱিষ্কাৰ কৰে।

১৪.৩ অবিচ্ছিন্ন সম্ভাৱতা বণ্টন (CONTINUOUS PROBABILITY DISTRIBUTION)

যদি এটা যাদৃচ্ছিক চলক অবিচ্ছিন্ন চলক হয়, ইয়াৰ সম্ভাৱিতা বণ্টনক অবিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বণ্টন (continuous probability distribution) বুলি কোৱা হয়।

এটা অবিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বণ্টনক তালিকাভুক্তিকৰণ ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি। অবিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বণ্টনক বৰ্ণনা কৰিবলৈ এটা সমীকৰণ বা সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰা হয়। অবিচ্ছিন্ন সম্ভাৱিতা বণ্টন বৰ্ণনা কৰিবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা সমীকৰণটোক সম্ভাৱিতা ঘনত্ব ফলন (probability density function, সংক্ষেপে p.d.f.) বুলি কোৱা হয়।

১৪.৪ প্ৰসামান্য বণ্টন (NORMAL DISTRIBUTION)

দুটা চৰ্তৰ অধীনত দ্বিপদ বণ্টনৰ পৰা প্ৰসামান্য বণ্টন (normal distribution) প্ৰতিপন্ন কৰা হয়। চৰ্ত দুটা হ'ল

(i) অভিপ্ৰয়োগৰ সংখ্যা n পৰ্যাপ্তভাৱে ডাঙৰ, অৰ্থাৎ, $n \to \infty$,

আৰু (ii) p আৰু q এটাও অতি সৰু নহয়।

এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ প্ৰসামান্য বণ্টন মানি চলে বুলি কোৱা হয় যদি আৰু যদিহে ইয়াৰ সম্ভাৱিতা ঘনত্ব ফলন এনেদৰে দিয়া থাকে

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

য'ত x হ'ল X-অৰ বাস্তৱ মান, অৰ্থাৎ, $-\infty < X < \infty$

X চলকটো মাধ্য μ আৰু প্ৰসৰণ σ^2 এৰে প্ৰসামান্যভাৱে বণ্টিত হয় বুলি কোৱা হয়। প্ৰতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে লিখা হয় $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. পঢ়োতে এনেদৰে পঢ়া হয়, 'X, $N(\mu, \sigma^2)$ হিচাপে বণ্টিত হয়'।

টোকা ঃ

1. (i) অৰ দ্বাৰা বৰ্ণিত সম্ভাৱিতা ঘনত্ব ফলনত দুটা প্ৰাচল আছে, যথা, μ আৰু σ। μ যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা হ'ব পাৰে, অৰ্থাৎ, $-\infty < \mu < \infty$। আনহাতেদি σএটা ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা, অৰ্থাৎ, $\sigma > 0$।
2. আমি জানো যে সম্ভাৱিতা কেতিয়াও ঋণাত্মক হ'ব নোৱাৰে।
   $\therefore f(x) \geq 0, \forall x$
3. যদি $\mu = 0,\ \alpha = 1$, p.d.f টো হ'ল

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

এই ক্ষেত্ৰত $X \sim N(0, 1)$। এই ক্ষেত্ৰত X অক প্ৰামাণিতক প্ৰসামান্য বিচলন (standard normal variate) বুলি কোৱা হয় আৰু (2) ৰ দ্বাৰা বৰ্ণিত p.d.f অক প্ৰামাণিক প্ৰসামান্য বণ্টন (standard normal distribution) বোলে।

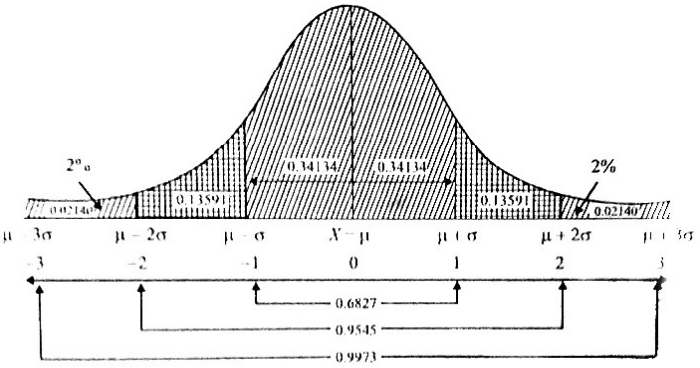
১৪.৪.১ প্রসামান্য বণ্টনৰ ধর্ম (Properties of Normal Distribution)

প্রসামান্য বণ্টনৰ বহুতো ধর্ম আছে। তলত কেইটামান দিয়া হ'ল।

1. প্রসামান্য সম্ভাৱিতা বক্ৰৰ সমীকৰণটো হ'ল

$$Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

ইয়াৰ আকৃতি তলত দিয়া ধৰণৰ। ই বেলৰ আকৃতিৰ (bell-shaped)।



[উৎস ঃ **Biostatistics** : Dr. P N Arora and Dr. P K Malhan (Himalya Publishing House, 2010)]

2. বক্ৰটো $x = \mu$ ৰেখা সাপেক্ষে সমমিত আৰু x-অৰ মান $-\infty$ আৰু $+\infty$ ৰ মাজত থাকে।

3. $x = \mu$, ত কোটি সৰ্বোচ্চ, আৰু ই হ'ল $Y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$

4. $-\infty$ ৰ পৰা ∞ সীমাৰ ভিতৰত প্রসামান্য বক্ৰৰ তলত মুঠ কালি 1, অর্থাৎ

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\, dx = 1$$

5. প্রসামান্য বক্ৰৰ তলত কালিৰ শতাংশ বণ্টন তলত দিয়া হৈছে, আৰু উপৰিউক্ত চিত্রত দেখুওৱা হৈছে।
   (i) প্রায় 68% কালি $\mu - \sigma$ আৰু $\mu + \sigma$ ৰ মাজত থাকে।
   (ii) প্রায় 95.5% কালি $\mu - 2\sigma$ আৰু $\mu + 2\sigma$ মাজত থাকে।
   (iii) প্রায় 99.7% কালি $\mu - 3\sigma$ আৰু $\mu + 3\sigma$ মাজত থাকে।
6. বক্ৰটোৰ মাত্র এটা শীর্ষ (peak) আছে, অর্থাৎ ই এটা মাত্র বহুলক বিশিষ্ট।
7. বণ্টনটো সমমিত। মাধ্য = মধ্যমা = বহুলক = μ ।
8. বক্ৰটো অনন্তস্পর্শী, অর্থাৎ, ই x-অক্ষক দুয়োটা মূৰত অসীমত মিলে।

তাত্ত্বিকভাৱে, বক্ৰটো কেতিয়াও x-অক্ষক স্পৰ্শ নকৰে।

9. বক্ৰকৰণ বিন্দু (inflexion points) হ'ল $x=\mu-\sigma$, আৰু $x=\mu+\sigma$. [য'ত ফলনটোৱে অৱতলতা সলনি কৰে, সেয়াই বক্ৰকৰণ বিন্দু।]

10. অপ্ৰতিসাম্যৰ সহগ = 0, আৰু ককুদতা = 3.

11. মাধ্য সাপেক্ষে মাধ্য বিচলন $\simeq \frac{4}{5}\sigma$

12. $Q.D.\simeq \frac{2}{3}\sigma$

১৪.৪.২ প্ৰামাণিক প্ৰসামান্য চলক (Standard Normal Variate)

ধৰা হ'ল এটা প্ৰসামান্য চলক X, $N(\mu, \alpha^2)$ হিচাপে বণ্টিত হয়। প্ৰসামান্য বক্ৰটোৰ অৱস্থান μ আৰু α ৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰে, য'ত $-\infty<\mu<\infty$, আৰু $\alpha>0$। সেয়ে কালিৰ বাবে কোনো নিয়ন্ত্ৰণক সাৰণী (master table) প্ৰস্তুত কৰিব নোৱাৰি। এটা নতুন চলক অৱতাৰণা কৰি এই অসুবিধা আঁতৰাব পাৰি। নতুন চলক Z অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়।

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

এই ক্ষেত্ৰত Z অক প্ৰামাণিক প্ৰসামান্য চলক বুলি কোৱা হয়।

এতিয়া আমি প্ৰমাণ কৰিম যে Z অৰ মাধ্য 0, আৰু প্ৰামাণিক বিচলন 1। তাৰ আগেয়ে আমি কেইটামান আনুষংগিক ধৰ্ম উল্লেখ কৰোঁ।

আমি জানো যে এটা যাদৃচ্ছিক চলক X অৰ মাধ্য হ'ল

মাধ্য $=E(X)=\Sigma x_i p_i$

আমি প্ৰমাণ কৰোঁ

(i) E(a) = a; a এটা ধ্ৰুৱক

(ii) E (aX + b) = aE(x) + b; a, b ধ্ৰুৱক

(iii) $E\left(X-\overline{X}\right)=0$

প্ৰমাণ ঃ (i) $E(a)=\Sigma a p_i$

$$=a\ \Sigma p_i$$

$$= a, \quad \because\ \Sigma p_i=1$$

(ii) $\Sigma(aX+b)=\Sigma(ax_i+b)p_i$

$$=a\Sigma x_i p_i+b\Sigma p_i$$

$$=a\,E(X)+b,\ \because\ \Sigma p_i=1$$

(iii) $E\left(X-\bar{X}\right)$

$= E(X) - E(\bar{X})$

$= \bar{X} - \bar{X}, \quad \because \bar{X}$ এটা ধ্রুৱক

= 0

আকৌ, মন কৰিব লগীয়া যে

(iv) Var (aX) = a^2 Var (X), য'ত a এটা ধ্রুৱক।

(v) Var ($aX \pm b$) = a^2 Var (X), য'ত a, b ধ্রুৱক।

এতিয়া আমি প্রমাণ কৰিম যে Z অৰ মাধ্য 0, আৰু প্রামাণিক বিচলন 1।

মাধ্য = E (Z)

$= E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$

$= \frac{1}{\sigma} E(X-\mu),$ ধর্ম (ii)

$= \frac{1}{\sigma}\left[E(X)-\mu\right],$ ধর্ম (ii)

$= \frac{1}{\sigma}[\mu-\mu]$

= 0

প্রসাৰণ = Var (Z)

$= Var\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right)$

$= \frac{1}{\sigma^2}\text{var}(X-\mu),$ ধর্ম (v)

$= \frac{1}{\sigma^2}\text{var } X,$ ধর্ম (iv)

$= \frac{1}{\sigma^2} \cdot \sigma^2$

= 1

গতিকে, $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$, N (0, 1), হিচাপে বণ্টিত হয়, অর্থাৎ Z ~ N(0, 1).

প্রসামান্য চলকৰ আটাইবোৰ ধর্ম প্রামাণিক প্রসামান্য চলকৰ ক্ষেত্রতো প্রযোজ্য $(\mu = 0,\ \sigma = 1)$।

ধৰা হ'ল Z হ'ল প্রামাণিক প্রসামান্য চলক N(0, 1)। প্রামাণিক প্রসামান্য বক্রৰ কালি এখন সাৰণীত দিয়া থাকে। এই অধ্যায়ৰ শেহত সেই সাৰণীখন সন্নিৱিষ্ট

কৰা হৈছে।

আমি জানো যে $-\infty$ ৰ পৰা ∞, এই সীমাৰ ভিতৰত প্রসামান্য বক্রৰ তলৰ সম্পূর্ণ কালি 1। Z = 0 সাপেক্ষে প্রামাণিক প্রসামান্য বক্র সমমিত। গতিকে, z = 0 ৰ বাওঁফালে কালি 0.5, আৰু z = 0 সোঁফালে কালি 0.5।

ধৰা হ'ল, আমি z = 0 আৰু z = 1.89 ৰ মাজৰ কালি উলিয়াব লাগে, অর্থাৎ, আমি $P(0 \le Z \le 1.89)$ উলিয়াব লাগে।

প্রথমতে আমি সাৰণীখনৰ একেবাৰে বাওঁপিনে 1.8 উলিয়াওঁ, আৰু সংখ্যাটো থকা শাৰীটো বাছি উলিয়াওঁ।

পাছত আমি সাৰণীখনৰ ওপৰত 0.09 উলিয়াওঁ আৰু সংখ্যাটো থকা স্তম্ভটো বাছি উলিয়াওঁ।

পাছত 1.8 থকা শাৰীটো আৰু 0.09 থকা স্তম্ভটো য'ত মিলিত হয়, সেই প্রৱিষ্টিটো উলিয়াওঁ। প্রৱিষ্টিটো 0.47062।

গতিকে $P(0 \le Z \le 1.89)$

= (z = 0 ৰ পৰা z = 1.89 অলৈ কালি)

= 0.47062.

উদাহৰণ 1 ঃ প্রামাণিক প্রসামান্য চলক Z অৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক, য'ত Z, 1.09 অতকৈ ডাঙৰ।

সমাধান ঃ আমি জানো যে $-\infty$ ৰ পৰা ∞, এই সীমাৰ ভিতৰত প্রসামান্য বক্রৰ তলৰ সম্পূর্ণ কালি 1। গতিকে, Z = 0 ৰ সোঁপিনে কালি 0.5, যিহেতু বক্রটো Z = 0 সাপেক্ষে সমমিত।

$\therefore$ P(Z > 1.09) = 0.5 – 0.36214 = 0.13786

উদাহৰণ 2 ঃ প্রামাণিক প্রসামান্য চলক Z অৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক, য'ত Z, 1.09 তকৈ সৰু।

সমাধান ঃ আমি জানো যে $-\infty$ ৰ পৰা $+\infty$, এই সীমাৰ ভিতৰত প্রসামান্য বক্রৰ তলৰ সম্পূর্ণ কালি 1। গতিকে, z = 0 ৰ বাওঁপিনে কালি 0.5, আৰু z = 0 ৰ সোঁপিনৰ কালি 0.5। আকৌ, সাৰণীৰ পৰা আমি পাওঁ যে z = 0 ৰ পৰা z = 1.09 অলৈ কালি 0.36214।

$\therefore$ P(z < 1.09)

= (z = 0 ৰ বাওঁপিনৰ কালি) + (z = 0 ৰ পৰা z = 1.09 অলৈ কালি)

= 0.5 + 0.36214

= 0.86214

উদাহৰণ 3 ঃ P(0.5 < z < 1.09) নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ আমি জানো যে z = 0 ৰ সোঁপিনে কালি 0.5। সাৰণীৰ পৰা z = 0 ৰ পৰা

z = 0.5 অলৈ কালি 0.19146। আকৌ z = 0 ৰ পৰা z = 1.09 অলৈ কালি 0.36214.

∴ P(0.5 < z < 1.09)

= (z = 0 ৰ পৰা z = 1.09 অলৈ কালি) – (z = 0 ৰ পৰা x = 0.5 অলৈ কালি)

= 0.36214 – 0.19146

= 0.17068

উদাহৰণ 4 ঃ বৃহৎ সংখ্যক জোখ-মাপ প্রসমান্যভাৱে বণ্টিত। ইয়াৰ মাধ্য 65.5 cm আৰু প্রামাণিক বিচলন 6.2 cm। 54.8 cm আৰু 68.8 cm অৰ মাজৰ জোখ-মাপৰ শতাংশ নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল বৃহৎসংখ্যক জোখ-মাপ বুজোৱা প্রসামান্য চলকটো X।

দিয়া আছে $\mu = 65.5,\ \sigma = 6.2$

এতিয়া, $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 65.5}{6.2}$

যেতিয়া, X = 54.8 $Z = \frac{54.8 - 65.5}{6.2} = \frac{-10.7}{6.2} = -1.7$

যেতিয়া, X = 68.8, $Z = \frac{68.8 - 65.5}{6.2} = 0.5$

দেখা গ'ল যে X যেতিয়া 54.8 আৰু 68.8 অৰ মাজত থাকে, Z, –1.7 আৰু 0.5 অৰ মাজত থাকে।

এতিয়া P(–1.7 < X < 0.5)

= P(–1.7 < Z < 0) + P(0 < Z < 0.5)

= 0.45543 + 0.19146

= 0.64689 = 64.69%

∴ জোখ-মাপৰ শতাংশ 64.69%

উদাহৰণ 5 ঃ এটা পৰীক্ষাৰ পৰীক্ষার্থীসকলৰ গুণাংকৰ মাধ্য 14 আৰু প্রামাণিক বিচলন 2.5। বণ্টনটো প্রসামান্য হ'লে, যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা এজন পৰীক্ষার্থীয়ে 15 গুণাংকতকৈ বেছি পোৱাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

সমাধান ঃ ধৰা হ'ল পৰীক্ষাৰ গুণাংক বুজোৱা প্রসামান্য চলকটো X।

দিয়া আছে $\mu = 14,\ \sigma = 2.5$

এতিয়া $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 14}{2.5}$

যেতিয়া X, $Z = \frac{15 - 14}{2.5} = \frac{1}{2.5} = 0.4$

∴ P(x > 15) = P(z > 0.4)

= 0.5 – (z = 0 আৰু Z = 0.4 অৰ মাজৰ কালি)

= 0.5 – 0.15542

= 0.34458.



অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

প্রশ্ন নং ১ঃ নির্ণয় কৰক (i) P (Z > 2.58), (ii) P(Z < 1.96), (iii) P (Z > –3)

প্রশ্ন নং ২ঃ এটা প্রসামান্য চলকৰ বাবে মাধ্য 50, আৰু প্রামাণিক বিচলন 5। $P(45 \le X \le 55)$ নির্ণয় কৰক, X এটা প্রসামান্য চলক।

প্রশ্ন নং ৩ঃ এটা প্রসামান্য চলকৰ মাধ্য 100, আৰু প্রামাণিক বিচলন 4। X, 92 আৰু 108 অৰ মাজত থকাৰ সম্ভাৱিতা নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৪ঃ এটা পৰীক্ষাত বিদ্যার্থীৰ গুণাংকৰ বণ্টনটো প্রসামান্য। মাধ্য 45, আৰু প্রামাণিক বিচলন 5 হ'লে, 40 আৰু 50 ৰ ভিতৰত গুণাংক পোৱা বিদ্যার্থীৰ শতাংশ নির্ণয় কৰক।

প্রশ্ন নং ৫ঃ এটা পৰীক্ষাত বিদ্যার্থীৰ গুণাংকৰ বণ্টনটো প্রসামান্য। বণ্টনটোৰ মাধ্য 45, আৰু প্রামাণিক বিচলন 10। 1000 জন বিদ্যার্থী পৰীক্ষাত অৱতীর্ণ হৈছে। (i) গুণাংক 30 তকৈ কম পোৱা, আৰু (ii) গুণাংক 80 তকৈ বেছি পোৱা বিদ্যার্থীৰ সংখ্যা নির্ণয় কৰক।



১৪.৫ অধ্যয়টিৰ পৰা আমি কি শিকিলোঁ (LET US SUM UP)

- প্রসামান্য বণ্টন এটা অবিচ্ছিন্ন বণ্টন। ই দ্বিপদ বণ্টনৰ সীমাৱস্থা।
- দুটা চর্তৰ অধীনত দ্বিপদ বণ্টনৰ পৰা প্রসামান্য বণ্টন প্রতিপন্ন কৰা হয়। চর্ত দুটা হ'ল
  - (i) অভিপ্রয়োগৰ সংখ্যা n পর্যাপ্তভাৱে ডাঙৰ, অর্থাৎ, $n \to \infty$ আৰু
  - (ii) p আৰু q এটাও অতি সৰু নহয়।

  এটা যাদৃচ্ছিক চলক X এ প্রসামান্য বণ্টন মানি চলে বুলি কোৱা হয় যদি আৰু যদিহে ইয়াৰ সম্ভাৱিতা ঘনত্ব ফলন এনেদৰে দিয়া থাকে।

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\alpha}\right)^2}$$

  য'ত x হ'ল X-অৰ বাস্তৱ মান, অর্থাৎ, $-\infty < X < \infty$

  X চলকটো মাধ্য μ আৰু প্রসৰণ σ^2 এৰে প্রসামান্যভাৱে বণ্টিত হয় বুলি কোৱা হয়। প্রতীকৰ সহায়ত ইয়াক এনেদৰে লিখা হয় $X \sim N(\mu,\ \sigma^2)$। পঢ়োতে

এনেদৰে পঢ়া হয়, 'X, $N(\mu, \sigma^2)$ হিচাপে বণ্টিত হয়'

- প্রসামান্য বক্রটো বেলৰ আকৃতিৰ (bell-shaped)। বক্রটো $x = \mu$ ৰেখা সাপেক্ষে সমমিত, আৰু x-অৰ মান $-\infty$, আৰু $+\infty$ ৰ মাজত থাকে।
- $-\infty$ ৰ পৰা ∞ সীমাৰ ভিতৰত প্রসামান্য বক্রৰ তলত মুঠ কালি 1।
- যদি এটা নতুন চলক Z অৰ সংজ্ঞা এনেদৰে দিয়া হয়, $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, তেনেহ'লে Z অক প্রামাণিক প্রসামান্য চলক বোলা হয়। Z অৰ মাধ্য 0, আৰু প্রামাণিক বিচলন 1।



১৪.৬ অধিক জানিবলৈ (FURTHER READINGS)

1) Statistical Methods by N.G. Das, McGraw Hill Education (India) Private Ltd. 2009
2) Probability and Statistics by G.Shanker Rao, University Press (India) private Ltd. 2011
3) Introduction to probability and Statistics by Seymour Lipschutz, John J.Schiller, Tata McGraw Hill Education private Ltd. 2005
4) Probability, Random Process, Queueing theory and Statistics by Dr. S.Rajasekaran, Prof.A.Chandrasekaran & G.Kavitha, Dhanam Publications, Chennai-60042
5) Probability and Statistics by G.Balaji, G.Balaji Publishers, Chennai-33



১৪.৭ অগ্রগতিৰ খতিয়ান (ANSWERS TO CHECK YOUR PROGRESS)

অগ্রগতিৰ নিৰীক্ষণ 1

১ নং প্রশ্নৰ উত্তৰঃ (i) আমি জানো যে $-\infty$ আৰু $+\infty$, এই সীমাৰ ভিতৰত প্রসামান্য বক্রৰ তলত মুঠ কালি 1। গতিকে z = 0 ৰ বাওঁপিনে কালি 0.5, আৰু z = 0 ৰ সোঁপিনে কালি 0.5। আকৌ সাৰণীৰ পৰা আমি পাওঁ যে z = 0 ৰ পৰা z = 2.58 অলৈ কালি 0.49506।

$\therefore$ P (z > 2.58)

= (z = 0 ৰ সোঁপিনে কালি) – (z = 0 ৰ পৰা z = 2.58 অলৈ কালি)

= 0.5 – 0.49506

= 0.00494

(ii) আমি জানো যে $-\infty$ আৰু $+\infty$, এই সীমাৰ ভিতৰত প্ৰসামান্য বক্ৰৰ তলত মুঠ কালি 1। গতিকে z = 0 ৰ বাওঁপিনে কালি 0.5, আৰু z = 0 ৰ সোঁপিনে কালি 0.5। আকৌ সাৰণীৰ পৰা আমি পাওঁ যে z = 0 ৰ পৰা z = 1.96 অলৈ কালি 0.47500।

$\therefore$ P (z < 1.96)

= (z = 0 ৰ বাওঁপিনে কালি) + (z = 0 ৰ পৰা z = 1.96 অলৈ কালি)

= 0.5 + 0.47500

= 0.97500

(iii) আমি জানো যে $-\infty$ আৰু ∞, এই সীমাৰ ভিতৰত প্ৰসামান্য বক্ৰৰ তলত কালি 1। গতিকে z = 0 ৰ বাওঁফালে কালি 0.5, আৰু z = 0 ৰসোঁফালে কালি 0.5।

এতিয়া P(Z > –3)

= (z = –3 ৰ পৰা z = 0 লৈ কালি) + (z = 0 ৰ সোঁপিনৰ কালি)

= (z = 0 ৰ পৰা z = 3 লৈ কালি) + (z = 0 ৰ সোঁপিনৰ কালি)

= 0.49865 + 0.5

= 0.99865

২ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ X এটা প্ৰসামান্য চলক।

দিয়া আছে $\mu = 50,\ \sigma = 5$

এতিয়া $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-50}{5}$

যেতিয়া X = 45 $Z = \frac{45-50}{5} = -1$

যেতিয়া X = 55, $Z = \frac{55-50}{5} = 1$

দেখা গ'ল যে, যেতিয়া X, 45 আৰু 55 অৰ মাজত থাকে, Z, –1 আৰু 1অৰ মাজত থাকে।

এতিয়া $P(-1 \le Z \le 1)$

$= P(-1 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 1)$

= 0.34134 + 0.34134

= 0.68268

৩ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক।

৪ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ নিজে চেষ্টা কৰক?

৫ নং প্ৰশ্নৰ উত্তৰঃ ধৰা হ'ল গুণাংক দেখুওৱা প্ৰসামান্য চলকটো X।

দিয়া আছে যে $\mu = 45,\ \sigma = 10$

এতিয়া $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-45}{10}$

যেতিয়া X = 30, $Z = \frac{30-45}{10} = \frac{-15}{10} = -1.5$

যেতিয়া X = 80, $Z = \frac{80-45}{10} = \frac{35}{10} = 3.5$

(i) এতিয়া $P(X \le 30)$

$= P(z \le .1.5)$

= (z = 0 বাওঁপিনৰ কালি) – (z = – 1.5 অৰ পৰা z = 0 লৈ কালি)

(z = 0 ৰ বাওঁপিনৰ কালি) – (z = 0 ৰ পৰা z = 1.5 অলৈ কালি)

= 0.5 – 0.43319

= 0.06681

∴ উলিয়াবলগীয়া ছাত্ৰৰ সংখ্যা

= 1000 x 0.06681

= 67 (মোটামুটিভাৱে)

(ii) $P(Z \ge 80)$

$= P(Z \ge 3.5)$

= (z = 0 ৰ সোঁপিনৰ কালি) – (z = 0 ৰ পৰা z = 3.5 অলৈ কালি)

= 0.5 – 0.49977

= 0.00023

এতিয়া 1000 x 0.00023 = 0.23

∴ 80 তকৈ অধিক গুণাংক পোৱা কোনো বিদ্যার্থী নাই।



১৪.৮ আৰ্হি প্ৰশ্ন (MODEL QUESTIONS)

প্ৰশ্ন ১ঃ প্ৰামাণিক প্ৰসামান্য চলকৰ সংজ্ঞা লিখক, আৰু এই চলকটোৰ সম্ভাৱিতা ঘনত্ব ফলনটো লিখক।

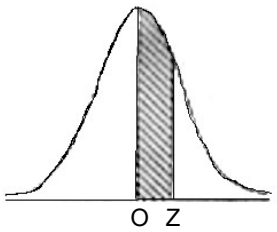
প্ৰশ্ন ২ঃ কি চৰ্তৰ অধীনত দ্বিপদ বণ্টনৰ সীমাৱস্থা হিচাপে প্ৰসামান্য বণ্টন পাব পাৰি?

প্ৰশ্ন ৩ঃ নিৰ্ণয় কৰক (i) $P(Z \le -1.96)$ (ii) $P(Z \le 1.96$ (iii) $P(Z > 2.58)$

প্ৰশ্ন ৪ঃ এটা প্ৰসামান্য চলক X অৰ মাধ্য 50 আৰু প্ৰামাণিক বিচলন 5। $P(40 \le X \le 60)$ নিৰ্ণয় কৰক।

প্ৰশ্ন ৫ঃ এটা প্ৰসামান্য চলকৰ মাধ্য 50 আৰু প্ৰামাণিক বিচলন 4। মুঠ বাৰংবাৰতাৰ কিমান শতাংশ 42.16 আৰু 57.84 অৰ মাজত থাকে?

প্রশ্ন ৬ঃ এটা অবিচ্ছিন্ন চলক X এ প্রসামান্য বণ্টন মানি চলে। ইয়াৰ মাধ্য 12 আৰু প্রামাণিক বিচলন 2। যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা প্রামাণিক বিচলন 2। যাদৃচ্ছিকভাৱে লোৱা X অৰ মান এটা 11 আৰু 14 অৰ মাজত থকাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?



প্রামাণিক প্রসামান্য বক্ৰৰ তলৰ কালি

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.00000	.00399	.00798	.01197	.01595	.01994	.02392	.02790	.03188	.03586
0.1	.03983	.04383	.04776	.05172	.05567	.05962	.06356	.06749	.07142	.07535
0.2	.07926	.08317	.08706	.09095	.09483	.09871	.10257	.10642	.11026	.11409
0.3	.11791	.12172	.12552	.12930	.13307	.13683	.14058	.14431	.14803	.15173
0.4	.15542	.15910-	.16276	.16640	.17003	.17364	.17724	.18082	.18439	.18793
0.5	.19146	.19497	.19847	.20194	.20540	.20884	.21226	.21566	.21904	.22240
0.6	.22575	.22907	.23237	.23565	.23891	.24215	.24537	.24857	.25175	.25490
0.7	.25804	.26115	.26424	.26730	.27035	.27337	.27637	.27935	.28230	.28524
0.8	.28814	.29103	.29389	.29673	.29955	.30234	.30511	.30785	.31057	.31372
0.9	.31594	.31859	.32121	.32381	.32639	.32894	.33147	.33398	.33646	.33891
1.0	.34134	.34375	.34614	.34849	.35083	.35314	.35543	.35769	.35993	.36214
1.1	.36433	.36650	.36864	.37076	.37286	.37493	.37698	:37900	.38100	.38298
1.2	.38493	.38686	.38877	.39065	.39251'	.39435	.39617	.39796	.39973	.40147
1.3	.40320	.40490	.40658	.40824	.40988	.41198	.41309	.41466	.41621	.41774
1.4	.41924	.42073-	.42220	.42364	.42507	.42647	.42785	.42922	.43056	.43189
1.5	.43319	.43448	.43574	.43699	.43822	.43943	.44062	.44179	.44295	.44408
1.6	.44520	.44630	.44738	.44845	.44950	.45053	.45154	.45254	.45352	.45449
1.7	.45543	.45637	.45728	.45818	.45907	.45994	.46080	.46164	.46246	.46327
1.8	.46407	.46485	.46562	.46638	.46712	.46784	.46856	.46926	.46995	.47062
1.9	.47128	.47193	.47257	.47320	.47381	.47441	.47500	.47558	.47615	.47670
2.0	.47725	.47784	.47831	.47882	.47932	.47982	.48030	.48077	.48124	.48169
2.1	.48214	.48257	.48300	.48341	.48382	.48422	.48461	.48500	.48537	.48574
2.2	.48610	.48645	.48679	.48713	.48745	.48778	.48809	.48840	.48870	.48899

2.3	.48928	.48956	.48983	.49010	.49036	.49061	.49086	.49111	.49134	.49158
2.4	.49180	.49202	.49224	.49245	.49266	.49286	.49305	.49324	.49343	.49361
2.5	.49379	.49396	.49413	.49430	.49446	.49461'	.49477	.49492	.49506	.49520
2.6	.49534	.49547	.49560	.49573	.49585	.49598	.49609	.49621	.49632.	.49643
2.7	.49653	.49664	.49674	.49683	.49693	.49702	.49711	.49720	.49728	.49736
2.8	.49744	.49752	.49760	.49767	.49774	.49781	.49788	.49795	.49801	.49807
2.9	.49813	.49819	.49825	.49831	.49836	.49841	.49846	.49851	.49856	.49861
3.0	.49865	.49869	.49874	.49878	.49882	.49886	.49889	.49893	.49896	.49900
3.1	.49903	.49906	.49910	.49913	.49916	.49918	.49921	.49924	.49926	.49929
3.2	.49931	.49934	.49936	.49938	.49940	.49942	.49944	.49946	.49948	.49950
3.3	.49952	.49953	.49955	.49957	.49958	.49960	.49961	.49962	.49964	.49965
3.4	.49966	.49968	.49969	.49970	.49971	.49972	.49973	.49974	.49975	.49976
3.5	.49977	.49978	.49978	.49979	.49980	.49981	.49981	.49982	.49983	.49983
3.6	.49984	.49985	.49985	.49986	.49986	.49987	.49987	.49988	.49988	.49989
3.7	.49989	.49990	.49990	.49990	.49991	.49991	.49992	.49992	.49992	.49992
3.8	.49993	.49993	.49993	.49994	.49994	.49994	.49994	.49995	.49995	.49995
3.9	.49995	.49995	.49996	.49996	.49996	.49996	.49996	.49996	.49997	.49997
4.0	.49997	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4.5	.499997	-	-	-	-	-			-	-
5.0	.4999997	-	-	-	-	-	-	-	-	-

[উৎস ঃ **Basic statisties** : B. L. Agarwal (New Age International Publishers, 2009)]

*** ***** ***



REFERENCES

1. Statics : B. C. Das and B. N. Mukerjee U. N. Dhur and Pus.
2. A Text Book an statics by R. S. Verma.
3. An introduction to commercial Mathematics and statistics - Prof. Ajanta Mazumder, Dr. (Mrs) Runjan Phookun. S. Chand and Company Lt. R New Delhi.
4. Business Statistics - Dr. Nityananda Barman, Assam Book Depot.
5. Elementary Statistics by H.C. Saxena, S.Chand & company Ltd., 2002
6. Basic Statistics by B.L. Agarwal, New Age International Publishers, 2009
7. Biostatistics by Dr. P N Arora and Dr. P K Malhan, Himalaya publishing House, 2010
8. Fundamental of Statistics Volume one by A.M. Gun, M.K. Gupta, B. Dasgupta, world press 2005
9. Fundamental of Mathematical Statistics by S.C.Gupta, V.K.Kapoor by Sultan Chand & Sons, 2009

কাকতৰ নাম ঃ
পাঠ্যবিষয়ৰ কোড (সাংকেতিক সংখ্যা) ঃ

আভ্যন্তৰীণ গুণগত আশ্বাসন কেন্দ্ৰ (CIQA)

কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়

নগৰ কাৰ্যালয়, হাউছফেড কমপ্লেক্স, গুৱাহাটী-০৬

পাঠ্যবিষয় সন্দর্ভত শিক্ষার্থীৰ সঁহাৰি

প্ৰিয় শিক্ষার্থী,

ওপৰত উল্লেখ কৰা পাঠ্যবিষয়টোৰ সন্দর্ভত আপোনাৰ বহুমূলীয়া মতামত আৰু মন্তব্য বিচৰা হৈছে। আপোনাৰ সঁহাৰিয়ে আমাক ভৱিষ্যৎ স্ব-শিক্ষণ সামগ্ৰীবোৰৰ মান উন্নত কৰাত সহায় কৰিব। অনুগ্ৰহ কৰি তলৰ প্ৰবিৱৰণবোৰৰ বিপৰীতে আপোনাৰ মতামত উপযুক্তভাৱে প্ৰতিফলিত কৰা বিকল্পটোত চিন দিয়ক। মন্তব্যৰ সৈতে সম্পূৰ্ণ সঁহাৰি জনোৱাৰ পাছত পৃষ্ঠাটো ফালি তলৰ ঠিকনাত ডাকযোগে প্ৰেৰণ কৰে যেন।

সঞ্চালক,

আভ্যন্তৰীণ গুণগত আশ্বাসন কেন্দ্ৰ, কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়
হাউছফেড কমপ্লেক্স, দিছপুৰ, গুৱাহাটী-০৬
ই-মেইল ঠিকনা ঃ ciqa@kkhsou.in

১) পাঠ্যবিষয়ৰ অন্তৰ্ভুক্ত অধ্যায়বোৰ পঢ়িবলৈ আপুনি আনুমানিকভাৱে কিমান ঘণ্টা ব্যয় কৰিলে? ☐☐

২) খণ্ডটো অধ্যয়ন কৰাৰ অন্তত তলৰ প্ৰবিৱৰণবোৰ সন্দর্ভত আপোনাৰ মতামত ব্যাখ্যা কৰক (✓ চিন দিয়ক)

ক্ৰমাংক	প্ৰবিৱৰণ	দৃঢ়ভাৱে একমত	একমত	একমতো নহয় অসন্মতো নহয়	অসন্মত	দৃঢ়ভাৱে অসন্মত
i)	পাঠ্যবিষয়ৰ স্ব- শিক্ষণ সামগ্ৰীবোৰে প্ৰতিটো অধ্যায়ৰ আৱশ্যণিতে ধাৰ্য কৰি লোৱা শিক্ষণ উদ্দেশ্যবোৰ পূৰণ কৰিব পাৰিছে					
ii)	স্ব- শিক্ষণ সামগ্ৰীত সন্নিৱিষ্ট অধ্যায়বোৰে মোৰ শৈক্ষিক প্ৰয়োজনীয়তা আৰু প্ৰত্যাশা পূৰণ কৰিব পাৰিছে					
iii)	অধ্যায় লেখক/লেখিকাসকলৰ পাঠ্যবিষয়ত সন্নিৱিষ্ট পাঠসমূহৰ উত্তম জ্ঞান আছে					
iv)	অধ্যায়বোৰত সন্নিৱিষ্ট পাঠবোৰৰ ভাষা আৰু বিষয়বস্তু মই সহজে বুজি পোৱা ধৰণে উপস্থাপন কৰা হৈছে					
v)	অধ্যায়বোৰত কাৰ্যকলাপত ভাগ ল'ব পৰাকৈ/অনুশীলনীত অংশগ্ৰহণ কৰিব পৰাকৈ পৰ্যাপ্ত সুযোগ আছে					
vi)	ধাৰণাবোৰ স্পষ্ট কৰিবলৈ পৰ্যাপ্ত চিত্ৰ (ৰেখাচিত্ৰ, তালিকা ইত্যাদি) সংলগ্ন কৰা হৈছে					
vii)	পাঠবোৰত সন্নিৱিষ্ট বিষয়বস্তুসমূহ চিত্তাকৰ্ষক, প্ৰাসংগিক আৰু শেহতীয়া তথ্যভিত্তিক					
viii)	'অগ্ৰগতি নিৰীক্ষণ' শিতানৰ প্ৰশ্নবোৰ যথেষ্ট উপযোগী					
ix)	'আৰ্হি প্ৰশ্ন' আৰু 'অগ্ৰগতিৰ খতিয়ান' শিতান দুটাই মোক যথেষ্ট উপকৃত কৰিছে					

অতিৰিক্ত মন্তব্য (অনুগ্ৰহ কৰি মুকলিমূৰীয়াকৈ মতামত আগবঢ়াওক) ঃ

১) আপোনাৰ মতে স্ব-শিক্ষণ সামগ্ৰীবোৰৰ কোনকেইটা দিশ সবাতোকৈ ফলপ্ৰসূ হৈছে?

---

২) স্ব-শিক্ষণ সামগ্ৰীবোৰৰ সামগ্ৰিক গুণ উন্নত কৰিবলৈ কৃষ্ণকান্ত সন্দিকৈ ৰাজ্যিক মুক্ত বিশ্ববিদ্যালয়ে কেনেধৰণৰ পৰিৱৰ্তন/উন্নতি সাধন কৰিব পাৰে বুলি আপুনি ভাবে?

প্ৰ-পত্ৰ পূৰাবলৈ সময় উলিওৱাৰ বাবে আপোনাক ধন্যবাদ জনালোঁ।